

N° Ordre ...../Faculté/UMBB/2019

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université M'Hamed Bougara-Boumerdes  
Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie

Département Automatisation et Electrification des procédés industriels

Mémoire de fin d'études  
En vue de l'obtention du diplôme de

**Master**

**Option : Commande Automatique**  
Réalisé par :

**Noussaiba Bellahmer**

THEME

**Différentes techniques de commande non linéaires d'un pendule  
inversé sur un chariot mobile**

Soutenu publiquement le 09 /07/2019

Devant le jury :

	Nom et Prénom	Grade	Université/Affiliation
Président de jury:	<b>Mr BOUMEDINE M<sup>d</sup> Said</b>	MCB	UMBB
Examineurs :	<b>Mme KAHOUL</b>	MAA	UMBB
Examineurs :	<b>Mr DOGHMANE</b>	Doctorant	UMBB
Encadreur :	<b>Mr KIDOUCHE</b>	Professeur	UMBB

**2018 / 2019**

# **Remerciements**

*Je tiens à remercier tout premièrement 'ALLAH' le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il m'a donné durant toutes ces longues années*

*A mon promoteur et encadreur Mr **M. KIDOUCHE**. Vous avez bien voulu me confier ce travail riche d'intérêt et nous guider à chaque étape de sa réalisation, Vous m'avez toujours réservé le meilleur accueil malgré vos obligations professionnelles*

*Mes plus sincères remerciements à Mme. **S. RIACHE** pour son aide, ses conseils, ses encouragements et sa présence dans les moments difficiles de la recherche*

*A mes professeurs et membres de jury*

*Vous me faites l'honneur d'accepter avec une très grande amabilité de siéger parmi mon jury.*

*Veillez accepter ce travail maitre, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance*

*Enfin j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près et de loin à l'élaboration de ce travail*

# ***Dédicaces***

*Je dédie ce travail ....*

## ***A mon ante***

*Affables, honorables, aimables : tu représentes pour symbole le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse, et l'exemple de dévouement. Tu n'as pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.*

*je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.*

## ***A mon très cher père***

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que nous avons toujours eu pour vous.*

*Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour nous éduquer et pour notre bien-être.*

*Ce travail est le fruit des sacrifices que vous avez consentis pour notre éducation et notre formation.*

## ***A mes chers sœurs :Amina,Khansa et mon frère sidali***

*En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous.*

*je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

## ***A mes chères amies :Hanane , Wardiya et Yamina***

*En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs de tous les moments que j'as passé ensemble, nous vous dédions ce travail et nous vous souhaitons une vie pleine de santé et de bonheur.*

## Résumé

Le travail réalisé durant ce projet consiste à étudier un système sous-actionné : le pendule inversé, qui possède de deux degrés de liberté et un seul actionneur. Le modèle dynamique Lagrangien du système est non linéaire et sa dynamique interne est instable. La commande de ce système a fait l'objet de nombreuses études, car la dynamique du pendule inversé se rapproche de celle de systèmes plus complexes, par exemple les fusées, les avions de chasse etc. ce mécanisme est un outil faible coût de mise en œuvre et pratique pour illustrer de nouveaux principes de commande. Pour la stabilisation du système, il faut d'abord amener le pendule de sa position d'équilibre stable (pendule pointant vers le bas) à sa position d'équilibre instable (pendule pointant vers le haut) .

Durant ce projet, on a appliqué différentes approches de commande sur le système, mais on s'intéresse à la commande par mode glissant. C'est Pour cela il faut adapter cette commande en trouvant une astuce afin de stabiliser le système.

La technique trouvée pour cette commande est très facile à mettre en œuvre, elle présente un algorithme de commande simple, Avec un choix approprié des paramètres, les résultats obtenus sont très intéressants, ils montrent l'efficacité de l'approche proposée et qu'elle a des bonnes performances au niveau de la robustesse et la stabilité de convergence aussi bien pour la stabilisation que pour le rejet de perturbations externes au système. Les améliorations qu'on peut introduire à notre étude est l'hybridation backstepping adaptative - mode glissant.

## **Abstract**

this project consists in studying an under-actuated system: the inverted pendulum, which has two degrees of freedom and a single actuator. The Lagrangian dynamic model of the system is non-linear and its internal dynamics are unstable. The control of this system has been the subject of many studies, because the dynamics of the inverted pendulum is closer to that of more complex systems, for example rockets, fighter jets ... etc.

this mechanism is a low cost tool for implementation and practical to illustrate new control principles. For the stabilization of the system, it is first necessary to bring the pendulum from its position of stable equilibrium (pendulum pointing downwards) to its position of unstable equilibrium (pendulum pointing upwards) During this project, different control approaches were applied to the system, but we are interested in sliding mode control. That's why we should adapt this command by finding a trick to stabilize the system. The technique found for this command is very easy to implement, it presents a simple control algorithm, With an appropriate choice of parameters, the results obtained are very interesting, they show the effectiveness of the proposed approach and it has good performance in terms of robustness and convergence stability both for stabilization and for the rejection of external disturbances to the system.

The improvements that can be introduced to our study is adaptive backstepping hybridization - sliding mode.

# Sommaire

---

Liste des figures .....	I
Notations .....	IV
Abréviations .....	VI
Introduction générale .....	01

## ***CHAPITRE I : Contexte et état de l'art***

I.1. Introduction .....	03
I.2. Les systèmes mécaniques .....	03
I.2.1. Les systèmes sous-actionné .....	04
I.2.1.1. Exemples de systèmes sous-actionnés .....	04
I.3. Description et modélisation du pendule inversé .....	05
I.3.1. Description du pendule inversé .....	05
I.3.1.1. Historique .....	06
I.3.1.2. Principe de fonctionnement .....	07
I.3.1.3. Objectif de l'étude d'un pendule inversé .....	08
I.3.2. Modélisation du pendule inversé .....	09
I.3.2.1. Mécanique Newtonienne vs Lagrangienne .....	09
I.3.2.2. Coordonnées généralisées du système .....	09
I.3.2.3. Energie cinétique du système .....	11
I.3.2.4. L'énergie potentielle du système .....	12
I.3.2.5. Equations d'Euler-Lagrange .....	12
I.3.2.6. Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule .....	14
I.3.3. Simulation en boucle ouverte du pendule inversé .....	14
I.4. Conclusion .....	17

## ***CHAPITRE II : La commande robuste des systèmes non linéaires***

II.1. Introduction .....	18
II.2. La commande des systèmes non linéaire .....	19
II.2.1. Représentation des systèmes non-linéaires .....	19
II.2.2. Commandes non linéaires .....	19
II.2.3. Stabilisation d'un système .....	21
II.3. Notion de stabilité au sens de Lyapunov .....	22
II.3.1. Méthode directe de Lyapunov .....	23

# Sommaire

---

II.4. La commande en régime glissant .....	24
II.4.1. Système à structure variable .....	24
II.4.2. Principe de la commande à structure variable en mode glissant ....	25
II.4.2.1. Fonction de commutation .....	25
II.4.2.2. Hyperplan de commutation .....	26
II.4.2.3. Régime glissant .....	26
II.4.2.4. Surface de glissement .....	26
II.4.3. Différentes structures de contrôle par mode glissant .....	27
II.4.3.1. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande .....	27
II.4.3.2. Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état .....	28
II.4.3.3. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande, avec ajout de la commande équivalente .....	29
II.4.4. Théorie de la commande par mode de glissement .....	29
II.4.4.1. Définition du mode glissant .....	29
II.4.4.2. Explication du phénomène du glissement .....	29
II.4.4.3. Conception de l'algorithme de commande par mode glissant .....	30
II.4.4.3.1. Choix de la surface de glissement .....	30
II.4.4.3.2. Les conditions d'existence et de convergence du régime glissant .....	31
II.4.4.3.3. Détermination de la loi de commande .....	32
II.4.4.3.3.1. Commande équivalente .....	32
II.4.4.3.3.2. Commande discontinue de base .....	34
II.4.4.3.4. Le broutement .....	34
II.4.4.4. Suppression du phénomène de réticence .....	35
II.4.4.5. Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant .....	39
II.5. Théorie du backstepping .....	40
II.5.1. Approche non adaptative .....	40
II.5.1.1. Historique .....	40
II.5.1.2. Principe de la théorie de backstepping .....	40

# Sommaire

---

II.5.1.3. Commande de stabilisation par la méthode du backstepping .....	41
II.5.2. Approche adaptative .....	47
II.5.2.1. Principe de la commande backstepping adaptative .....	48
II.5.2.2. Algorithme de base .....	48
II.6. Conclusion .....	56
<b><i>CHAPITRE III : La conception de lois des commandes</i></b>	
III.1. Introduction .....	57
III.2. Synthèse de la commande d'un pendule inversé par mode glissant .....	57
III.2.1. Formulation mathématique .....	57
III.2.2. Synthèse de la commande par mode glissant .....	58
III.2.3. Stabilisation du pendule inversé par mode glissant .....	59
III.2.4. Synthèse de la commande par la technique de backstepping .....	61
III.2.4.1. Approche non adaptative .....	61
III.2.4.2. Approche adaptative .....	63
III.2.5. Commande hybride mode glissant-backstepping adaptative .....	65
III.3. Conclusion .....	66
<b><i>CHAPITRE VI : Les résultats de la simulation</i></b>	
VI.1. Introduction .....	67
VI.2. Simulation du pendule inversé par mode glissant .....	67
VI.3. Simulation du pendule inversé par la technique de backstepping .....	76
VI.3.1. Approche non-adaptative et adaptative .....	76
VI.4. Simulation du pendule inversé par la commande hybride .....	84
VI.5. Etude comparatives des commandes étudiées .....	91
VI.6. Conclusion .....	94
Conclusion générale .....	95
<b>Référence bibliographique.....</b>	<b>96</b>
<b>Annexe A</b>	

## Liste des figures

Figure	Titre	Page
Figure (I.1)	Différentes catégories de systèmes actionnés	04
Figure (I.2)	Pendule inversé en coordonnées généralisées $x$ et $\theta$	06
Figure (I.3)	Exemple sur l'équilibre à base du pendule inversé	07
Figure (I.4)	Les applications du pendule inversé	08
Figure (I.5)	Modèle d'un pendule inversé	10
Figure (I.6)	Position du chariot pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$	15
Figure (I.7)	Position du pendule pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$	15
Figure (I.8)	Position du chariot et du pendule : $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,\pi, 0]$	16
Figure (I.9)	Position du pendule pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,\pi, 0]$	16
Figure (II.1)	Bloc de commande d'un système non linéaire	20
Figure (II.2)	Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état	27
Figure (II.3)	Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande	27
Figure (II.4)	Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état	28
Figure (II.5)	Structure de régulation par ajout de la commande équivalente	28
Figure (II.6)	Démonstration du mode de glissement	29
Figure (II.7)	Convergence du système glissant	31
Figure (II.8)	Commande équivalente $u_{eq}$	33
Figure (II.9)	Phénomène de broutement	34
Figure (II.10)	Fonction signe	35
Figure (II.11)	Fonction signe de la commande avec un seul seuil	36
Figure (II.12)	Fonction signe de la commande adoucie	37
Figure (II.13)	Commande intégrale	38
Figure (II.14)	Définition de la fonction SAT	39
Figure (II.15)	Schéma de principe de la commande adaptative	47
Figure (IV.1)	(a) Position, (b) Signal de l'erreur (c), Signal de commande et (d) Plan de phase du chariot avec fonction signe.	69

<b>Figure (IV.2)</b>	<b>(b)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur <b>(c)</b> , Signal de commande et <b>(d)</b> Plan de phase du chariot avec fonction signe.	70
<b>Figure (IV.3)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> Signal de commande du chariot avec fonction signe.	71
<b>Figure (IV.4)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire, <b>(b)</b> Signal de commande du pendule avec fonction signe.	72
<b>Figure (IV.5)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> Signale de la commande, <b>(d)</b> Plan de la phase du chariot avec fonction signe.	73
<b>Figure (IV.6)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signale de l'erreur, <b>(c)</b> Signale de commande, <b>(c)</b> Plan de la phase du pendule avec fonction signe.	74
<b>Figure (IV.7)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signale de l'erreur, <b>(c)</b> Signale de commande, <b>(d)</b> Plan de phase du chariot avec fonction SAT.	75
<b>Figure (IV.8)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire, <b>(b)</b> Signale de commande, <b>(c)</b> Plan de phase du pendule avec fonction SAT.	76
<b>Figure (IV.9)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de commande <b>(c)</b> Signal de l'erreur du chariot par la commande de Backstepping	78
<b>Figure (IV.10)</b>	<b>(d)</b> f estimée, <b>(e)</b> g estimée du chariot par la commande de Backstepping.	78
<b>Figure (IV.11)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire, <b>(b)</b> Signal de la commande <b>(c)</b> Signal de l'erreur du Pendule la commande de Backstepping.	79
<b>Figure (IV.12)</b>	<b>(d)</b> f estimée <b>(e)</b> g estimée du pendule par la commande de Backstepping.	80
<b>Figure (IV.13)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> signal de commande du chariot par la commande de Backstepping	81
<b>Figure (IV.14)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> Signale de commande du pendule avec la commande de Backstepping.	82
<b>Figure (IV.15)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> Signal de la commande du chariot par la commande de Backstepping	83
<b>Figure (IV.16)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire <b>(b)</b> Signal de commande <b>(c)</b> Signale de l'erreur du pendule par la commande de Backstepping	84
<b>Figure (IV.17)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de commande, <b>(c)</b> Signal de l'erreur du chariot avec fonction SAT	86

<b>Figure (IV.18)</b>	<b>(a)</b> Position <b>(b)</b> Signal de commande <b>(c)</b> Signal de l'erreur du chariot avec fonction SAT.	87
<b>Figure (IV.19)</b>	<b>(a)</b> Positon, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(b)</b> Signal de commande du chariot avec la commande hybride Backstepping-mode glissant.	88
<b>Figure (IV.20)</b>	<b>(a)</b> Positon angulaire, <b>(b)</b> Signal de l'erreur <b>(c)</b> Signal de commande du pendule	89
<b>Figure (IV.21)</b>	<b>(a)</b> Position, <b>(b)</b> Signal de l'erreur, <b>(c)</b> Signal de commande du chariot.	90
<b>Figure (IV.22)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire, <b>(b)</b> Signal de commande <b>(c)</b> du pendule	91
<b>Figure (IV.23)</b>	<b>(a)</b> Position <b>(b)</b> Signal du l'erreur du chariot.	92
<b>Figure (IV.24)</b>	<b>(a)</b> Position <b>(b)</b> Signal du l'erreur du chariot avec perturbation.	92
<b>Figure (IV.25)</b>	<b>(a)</b> Position <b>(b)</b> Signal du l'erreur du chariot	93
<b>Figure (IV.26)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire <b>(b)</b> Signal de l'erreur du pendule	94
<b>Figure (IV.27)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire <b>(b)</b> Signal de l'erreur du pendule	94
<b>Figure (IV.28)</b>	<b>(a)</b> Position angulaire <b>(b)</b> Signal de l'erreur du pendule	95

## Tableau

<b>Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>Tableau (I.1)</b>	Paramètre de l'ensemble chariot et pendule	10

## *NOTATIONS*

$M$  : Masse du chariot

$b$  : Coefficient de frottement des roues du chariot

$m$  : Masse du pendule

$X(t)$  : Position du chariot

$J$  : Inertie du pendule en son centre de masse

$l$  : Demi-longueur de pendule

$\theta(t)$  : Angle de rotation du pendule

$F(t)$  : Force exercé sure le chariot

$g$  : Intensité de la pesanteur

$d$  : Coefficient de frottement de rotation du pendule

$E_c$  : L'énergie cinétique du système

$E_p$  : L'énergie potentielle du système

$L$  : Lagrangien du système

$E_{cc}$  : L'énergie cinétique du chariot

$E_{cp}$  : L'énergie cinétique du pendule

$v_c$  : Vitesse de centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$  : Vitesse angulaire du pendule

$r_c$  : Position du centre de gravité du pendule

$\vec{i}, \vec{j}$  : Vecteur unitaire du repère  $x, y$

$\varepsilon$  : Degré de liberté

$D_f$  : Désigne l'énergie dissipé par frottement

$X$  : Vecteur d'état

$S$  : Surface de glissement.

$U$  : L'entrée du système (la commande).

$u_{eq}$  : La commande équivalente.

$u_d$  : La commande discontinue.

$S(X)$  : Fonction de commutation.

$x_0$  : Condition initiale.

$n$  : Degré du système.

$\lambda$  : Constantes positif.

$g$  : Fonctions non linéaires.

$f$  : Fonctions non linéaires.

$x_d$  : La consigne désirée.

$e$  : L'erreur de poursuite.

$y$  : La sortie du système.

$V(x)$  : La Fonction de Lyapunov.

$K$  : Gain positif.

$l$  : Degré d'atténuation.

$g$  : Constantes adaptatif.

$h$  : Constantes adaptatif.

$\hat{f}$  : L'erreur d'estimation.

$F$  : Fonction limite.

$\hat{u}$  : Loi de contrôle.

$\eta$  : Constantes positif.

$\alpha$  : Loi de contrôle virtuelle.

$\theta$  : Valeur du paramètre adaptatif.

$\hat{\theta}$  : Valeur du paramètre adaptatif estimé.

$\tilde{\theta}$  : Valeur de l'erreur sur paramètre adaptatif.

$\tau$  : Loi d'adaptation.

$\Gamma$  : Matrice de gain d'adaptation.

### ***ABREVIATIONS***

VSS : Système à structure variable.

CMG : La commande par mode glissant.

SIMO : single input multiple output

MC : Le mode de convergence.

MG : Le mode de glissement.

MRP : Le mode du régime permanent.

SAT : La fonction de saturation.

SMC : sliding mode control.

ISE : integral square error.

SSC : sum square control.

GAS : globalement asymptotiquement stable

# Introduction générale

---

## Introduction générale :

Le pendule inversé a fait l'objet d'une grande discussion tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [51].

Le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes : c'est un système non linéaire, couplé, intrinsèquement instable et il possède plusieurs implications pratiques [52].

Dans la commande des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, les lois de commande classiques peuvent être insuffisantes car elles sont non robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques des systèmes sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités.

Dans cet objectif, plusieurs outils sont proposés dans la littérature, dont on cite la commande à structure variable (VSC Variable Structure Control) et backstepping (avec ces deux approches). Ce sont toutes des commandes permettant d'améliorer les performances de système non linéaire. La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable, c.à.d. des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes. L'importance des contrôleurs par mode glissant réside dans : la grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et l'implantation, et la robustesse vis-à-vis la variation des paramètres internes ou externes [18]. Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre les trajectoires du système à atteindre une surface donnée, surface de glissement, pour ensuite y rester.

La méthode de backstepping est une procédure récursive utilisant la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et dans l'étude de la stabilité. Dans la technique du backstepping, il s'agit de choisir une fonction de l'état comme étant l'entrée d'un sous-système et de procéder de la même manière récursivement jusqu'à obtenir la commande à appliquer au système global. Cette procédure de conception comme son nom en anglais "backstepping" l'indique, veut dire marche arrière ou étape arrière ; puisque la procédure

# Introduction générale

---

commence à la sortie du système et fait des pas en arrière à travers des intégrateurs du système en sélectionnant les valeurs désirées des composantes de l'état jusqu'à ce que l'entrée actuelle de la commande soit atteinte.

Le thème général des travaux présentés dans ce mémoire est la commande d'un pendule inversé sur un chariot mobile par mode glissant et par la technique de backstepping et notamment dans un but de stabilisation.

- ✚ Dans le premier chapitre ,on présente un modèle non linéaire d'un système classique : le pendule inversé, par la suite on élabore le modèle mathématique de ce dernier en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Ensuite, on présente ce système dans l'espace d'état. Enfin, on présente les résultats de simulation obtenus à partir du modèle établi.
- ✚ Dans le deuxième chapitre, on présente une étude de la commande par Mode Glissant et la commande backstepping en donnant tous les aspects théoriques avec leurs principes de fonctionnement nécessaire pour la conception et l'application au pendule inversé.
- ✚ Dans le troisième chapitre, on conçoit les lois de commande par mode glissant et backstepping dans le but de les appliquer sur le pendule inversé. Concernant l'amélioration des performances des commandes non linéaires, en utilisant la notion de la commande hybride. Il s'agit de combiner le principe des deux commandes différentes backstepping-mode glissant.
- ✚ Dans le quatrième chapitre, on présente des applications des différentes commandes étudiées sur un pendule inversé dans le but de le stabilise à son point d'équilibre instable.

## I.1 Introduction :

Quel que soit l'objectif fixé : concevoir, simuler ou commander un système mécanique, il est nécessaire, entre autres, de disposer d'un modèle du mécanisme. On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation du pendule inversé qu'on utilisera pour illustrer les commandes qu'on développera dans ce mémoire, ces commandes maintenant relativement connues sont essentiellement basées sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité.

Le pendule inversé est constitué d'un chariot mobile et d'un pendule suspendu sur le chariot. Son principe de fonctionnement est très simple en théorie : Après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre basse à la position verticale haute, il faut le maintenir dans cette position. Pour cela, quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite, et inversement. Ce système présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes types, il s'agit d'un système SIMO (Single Input Multiple Output), instable décrit par un modèle non linéaire.

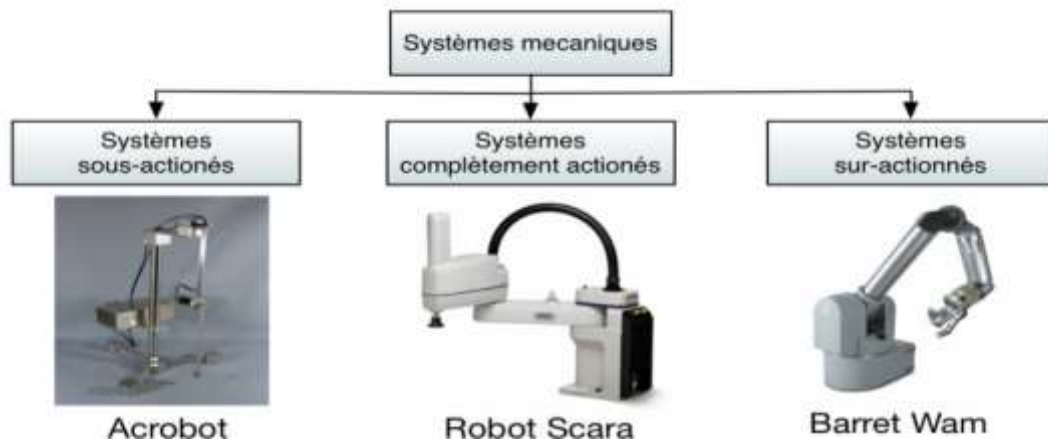
Dans ce chapitre, on va d'abord aborder la présentation du pendule inversé ainsi que le dispositif de contrôle et de commande. Puis, à partir du formalisme d'Euler-Lagrange on développe son modèle dynamique non linéaire qui pose un problème d'instabilité au point d'équilibre instable  $\theta = 0$ .

## I.2 Les systèmes mécaniques :

Les systèmes mécaniques sont utilisés par l'homme depuis des siècles pour l'aider à réaliser des missions difficiles et qui nécessitent des efforts qui dépassent ses capacités physiques. Avec l'évolution de la robotique de nos jours et devant les problèmes délicats de modélisation et de commande de systèmes mécaniques complexes, les outils utilisés deviennent de plus en plus pointus.

Quand il y a plus d'actionneurs que d'articulations dans un mécanisme, on dit que c'est un système redondant ou sur actionné.

Un système complètement actionné compte, lui, autant d'actionneurs qu'il a de degrés de liberté. Finalement, le type de système qu'on étudie par la suite est celui des systèmes sous-actionnés qui ont moins d'actionneurs que de degrés de liberté.



**Figure I.1** : Différentes catégories de systèmes actionnés [01].

### I.2.1 Les systèmes sous-actionnés :

Les systèmes sous-actionnés possèdent moins d'actionneurs que de degrés de liberté. Ceci a pour conséquence la présence de contraintes dynamiques généralement non linéaires et non intégrables. Le sous-actionnement peut se retrouver dans plusieurs situations par exemple : les avions, les hélicoptères, les robots sous-marins, ... etc.

#### I.2.1.1 Exemples de systèmes sous-actionnés :

On trouve plusieurs exemples de systèmes sous-actionnés dans la robotique.

1. **Robot « Mobrob »** est un très bon exemple pour montrer l'utilité des commandes des systèmes sous-actionnés. Ses deux roues étant parallèles et coaxiales, l'engin est par nature instable, Pour parvenir à son équilibre, seul un régulateur électronique peut artificiellement stabiliser cette plate-forme, en agissant directement sur les moteurs de propulsion, exerçant toujours un couple de redressement opposé au sens de basculement, les robots peuvent alors être commandés par des lois dédiées aux systèmes sous actionnés.



#### 2. Les quadrirotors :

Les quadrirotors sont des systèmes que l'on peut représenter par un corps solide équipé à ses extrémités de 4 actionneurs couplés à des hélices, ils sont sous-actionnés car

ils possèdent six ddl et quatre actionneurs ; Cependant avec seulement ses quatre actionneurs et l'implémentation d'une commande adaptée aux systèmes sous actionnés, les déplacements du quadricoptère restent totalement actionnés dans l'espace dans lequel il se trouve.



### 3. Le pendule inversé :

Le pendule inversé est construit à partir d'un balancier constitué par une masse à l'extrémité d'une tige que l'on installe sur un chariot mobile, cette tige est actionnée par un couple de contrôle, l'ensemble du chariot-pendule a deux degrés de liberté qui sont représentés par la position du chariot et la position angulaire du pendule. Alors le pendule inversé est un système sous-actionné car il possède moins d'actionneurs que de degrés de liberté.



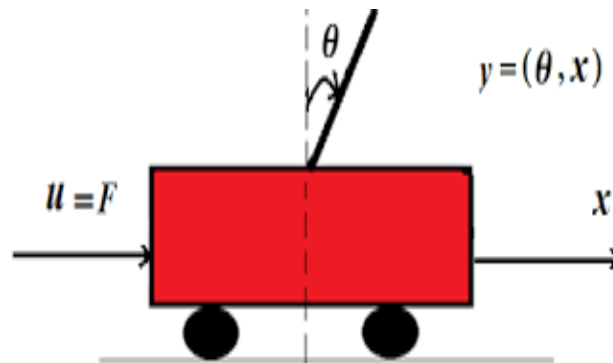
## I.3 Description et modélisation du pendule inversé :

### I.3.1 Description du pendule inversé :

Un pendule inversé est un système mécanique consistant en un dispositif mobile qui maintient une tige reliée d'une part à une masse et de l'autre à un axe pouvant pivoter dans les deux dimensions, en tenant compte du fait que le centre de gravité du système. Autrement dit, c'est un pendule qui sa masse supérieure à son point de pivotement. Il est souvent mis en œuvre avec le point de pivot monté sur un chariot qui peut se déplacer horizontalement et peut être appelé un panier et le pôle. Alors que d'un pendule normal est stable lorsqu'il est accroché à la baisse, un pendule inversé est intrinsèquement instable, et doit être activement équilibré afin de rester debout, soit en appliquant un couple au point de pivot ou en déplaçant le point de pivot à l'horizontale dans le cadre d'un système de rétroaction [02].

Le pendule inversé que nous considérons est composé de deux éléments (figure (I.2)) :

- ✚ Un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage.
- ✚ Un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation.



**Figure (I.2) :** Pendule inversé en coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ . [03]

Un pendule inversé linéaire simple est montré figure (I.2) . Dans ce type de pendule inversé, le centre de gravité est monté sur un chariot pouvant se déplacer horizontalement sur un axe linéaire.

### I.3.1.1 Historique :

Depuis les années 1950, le pendule inversé, en particulier la version panier, était utilisé pour l'étude de la théorie du contrôle à rétroaction linéaire [04] et aussi utilisé comme référence pour la conception, la mise en œuvre et le développement du contrôle pour stabiliser les systèmes instables en boucle ouverte. La première solution à ce problème a été décrite de Roberge en 1960 [05], puis de Schaefer et Cannon en 1966 [06]. Ce système avait également été utilisé dans de nombreux livres pour résoudre le problème du contrôle optimal linéaire [07] et le problème complexe du contrôle non linéaire [08] pour les systèmes instables.

Le système du pendule inversé a le même principe que l'équilibrage d'un pinceau, stylo ou autre objet dans la paume de la main. Par exemple, lorsqu'un stylo est en équilibre sur paume de la main, une personne qui balance le stylo déplace la main dans la direction dans laquelle le stylo tombe. Cela sert à ajuster constamment la position de la main pour garder l'objet en position verticale [09]. Un pendule inversé fait fondamentalement la même chose. La force doit être correctement appliquée pour garder le système intact.

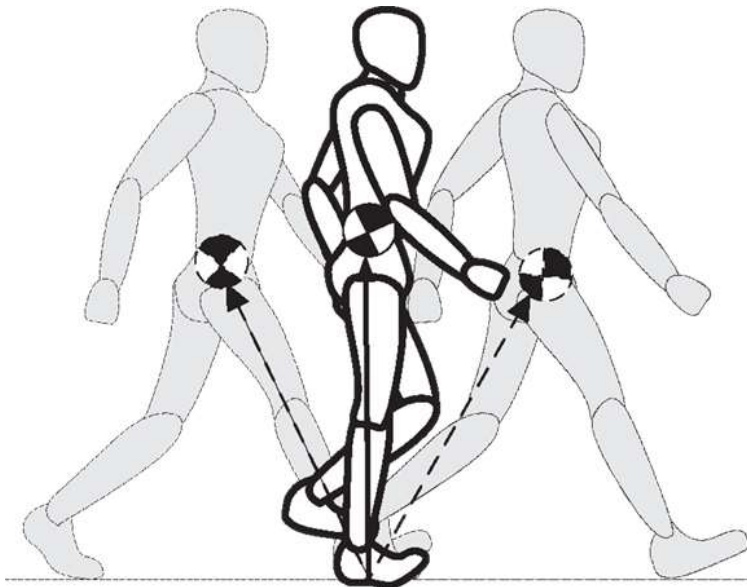
### I.3.1.2 Principe de fonctionnement :

Le principe est simple théoriquement : quand le pendule penche vers l'un des côtés (gauche ou droit), le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers ce côté.

Le problème se pose dans le réglage de l'intensité et la forme de réaction que doit subir le chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale. Pour cela, on est amené à prendre en compte plusieurs aspects ou particularités dans notre étude, soit :

- L'instabilité du système.
- La non linéarité.
- Modèle de connaissance incomplet.
- Un seul actionneur.
- Deux grandeurs à asservir.

L'ensemble du chariot-pendule a deux degrés de liberté qui sont représentés par deux coordonnées généralisées,  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot,  $\theta$  pour la rotation du pendule. La direction positive de  $x$  est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian.



**Figure (I.3) :** Exemple sur l'équilibre à base du pendule inversé. [10]

### I.3.1.3 Objectif de l'étude d'un pendule inversé :

L'étude du pendule inverse a assez bien d'importance. Il y a plusieurs raisons à cela :

- L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse.
- Dans le même contexte, la robotique utilise ce genre de concept, la robotique humanoïde utilise ce genre de concept dans le cadre de la dynamique ZMP (zéro moment point).
- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralenti en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé. La stabilité est aussi assurée par des gyroscopes mais nous n'entrerons pas dans ce genre de détails [11] .

On représente dans les figures (I.4) quelques exemples de robots qui sont déjà utilisés à base du pendule inversé :



**Figure (I.4) :** les applications du pendule inversé.

### **I.3.2 Modélisation du pendule inversé :**

#### **I.3.2.1 Mécanique Newtonienne vs Lagrangienne :**

Lors de la modélisation d'un système mécanique et donc d'un pendule inversé, il existe deux approches globales et communes qui sont utilisées. Une méthode de modélisation consiste à utiliser les forces dans le système, par exemple la mécanique newtonienne et l'autre sont des méthodes basées sur l'énergie, par ex. Lagrangien mécanique. Les deux approches peuvent être utilisées et aboutiront aux mêmes équations de mouvement.

Lors de l'utilisation de mécanismes classiques tels que les mécanismes newtoniens, les équations dynamiques d'un système mécanique sont dérivées des forces agissant sur les pièces mécaniques, qui sont individuellement représentés sous forme de diagrammes de corps libre. La relation entre la masse, la force, la position, la vitesse et l'accélération est définie à partir des trois lois de Newton et sert à établir des équations dynamiques pour les parties individuelles. Ceci est normalement fait dans la direction du système de coordonnées rectangulaire, Dans lequel le système est vu, car c'est le moyen le plus simple d'utiliser les lois de Newton.

Les diagrammes de corps libres contiendront les forces contraintes pour le système, comme dans ce cas la tension à travers le bâton du pendule. Par manipulation et substitution, les forces contraintes peut être retiré des équations, et les équations de mouvement sont obtenues. C'est souvent appelée méthode directe, car les forces agissant sur le système sont utilisées directement [12].

Cependant, lorsque ces forces contraintes ne présentent aucun intérêt ou s'agissant de problèmes non rectangulaires, systèmes de coordonnées, il est plus simple et moins fastidieux d'utiliser une méthode de modélisation basée sur l'énergie du système, comme la mécanique de Lagrange. Cette méthode s'appelle une méthode indirecte, car elles ne concernent les forces du système et, par conséquent, les forces contraintes ne doivent pas être traitées.

De ce fait, le pendule inversé dans ce mémoire est modélisé par l'utilisation de la mécanique lagrangienne, ce qui est plus loin, décrit et utilisé dans la partie suivante.

#### **I.3.2.2 Coordonnées généralisées du système :**

Dans cette partie, on a établi les équations du mouvement du pendule inversé, en se basant sur le schéma de la figure (I.5)

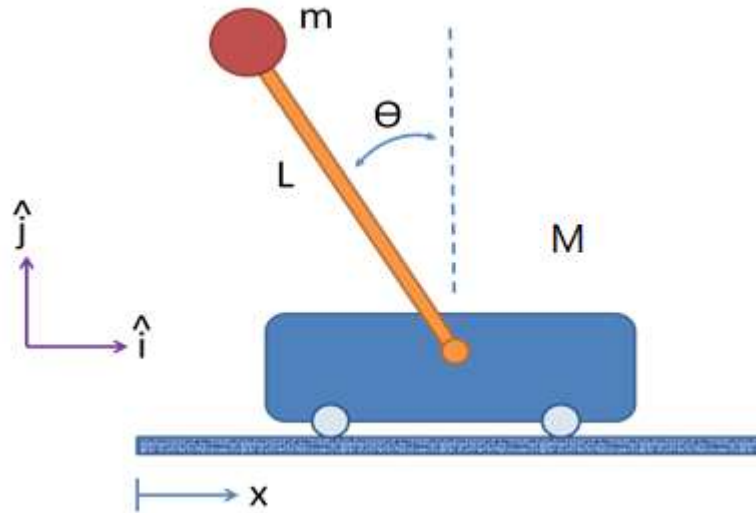


Figure (I.5) : Modèle d'un pendule inversé. [13]

Pour toute la démonstration, on définit les paramètres suivants [40] :

Paramètre	Valeur	Description
M	2.3 Kg	Masse du chariot
m	0.2 Kg	Masse du pendule
$l$	0.3 m	Demi-longueur du pendule
F(t)	/	Forces exercées sur le chariot
$x(t)$	/	Position du chariot
$\theta(t)$	/	L'angle du pendule
d	$0.005 \left(\frac{Nms}{rad}\right)$	Coefficient de Frottements du pendule
b	0.00005 Ns.m	Coefficient de Frottements du déplacement du chariot
g	9.81 m.s <sup>2</sup>	Intensité de la pesanteur
J	0.0099	Inertie du pendule en son centre de masse

Tableau (I.1) : Paramètres de l'ensemble chariot et pendule.

Dans ce travail on s'intéresse au formalisme d'Euler-Lagrange dans lequel le lagrangien ( $L$ ) est défini comme une différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ) du système [29]:

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.1})$$

### I.3.2.3 Energie cinétique du système :

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot est donnée par :

$$E_{cc} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{I.2})$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cp} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.21})$$

Avec :

$v_c$  : vitesse du centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$  : vitesse angulaire du pendule

$j$  : moment d'inertie du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée  $\vec{r}_c$  à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.2})$$

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont respectivement les vecteur unitaire du repère  $x, y$

la vitesse du centre de gravité est exprimée par :

$$V_c = \frac{dr_c}{dx} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} - (l\dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \quad (\text{I.3})$$

En substituant l'équation (I.23) dans l'équation (I.21), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cp} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (I.4)$$

Après simplification du terme  $l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = l^2\dot{\theta}^2$ , l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_{cp} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (I.5)$$

Finalement, l'énergie cinétique totale chariot-pendule est donc :

$$E_c = E_{cc} + E_{cp} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (I.6)$$

### I.3.2.4 L'énergie potentielle du système :

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle, l'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgl \cdot \cos\theta \quad (I.7)$$

### I.3.2.5 Equations d'Euler-Lagrange :

Quand on établit les expressions de l'énergie cinétique  $E_c$  de l'ensemble chariot-pendule (l'équation (I.26)) et l'énergie potentielle du système  $E_p$  (l'équations (I.27)), on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 - mgl \cdot \cos\theta \quad (I.8)$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\varepsilon}_j} = F_j \quad (I.9)$$

$\varepsilon(t)$  : désigne les degrés de liberté du pendule.

$D_f$  : désigne l'énergie dissipée par frottement.

$F$  : la force généralisée.

$L$  : représente le lagrangien (l'équation (I.19)).

En considérant que le système ait deux degrés de liberté,  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot et  $\theta$  pour la rotation du pendule, la modélisation du système selon la loi générale l'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.10})$$

**Pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = x(t)$  :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x} \quad (\text{I.11})$$

Où :  $F$  représente la force exercée sur le chariot

La dérivée partielle de lagrangien suivant  $\dot{x}$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml \cdot \dot{\theta} \cos\theta) - 0 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.12})$$

La première équation de Lagrange s'écrit alors :

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cdot \ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta = F - b\dot{x} \quad (\text{I.13})$$

**Pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = \theta(t)$  :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.14})$$

La dérivée de lagrangien suivant  $\dot{\theta}$  et  $t$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x} \cos\theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x} \cdot \sin\theta\dot{\theta} + mgl \cdot \sin\theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.15})$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cdot \cos\theta - ml\dot{x} \cdot \sin\theta\dot{\theta} + mlx \cdot \sin\theta\dot{\theta} - mgl \cdot \sin\theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

Le modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule est donné par le système d'équations non linéaire :

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cdot \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta = F \\ ml\ddot{x} \cdot \cos\theta + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl \cdot \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Où :

$$\begin{cases} h = M + m \\ N = ml^2 + J \end{cases}$$

Le système d'équations (I.17) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot  $\ddot{x}$  et l'accélération angulaire du pendule  $\ddot{\theta}$ . Ainsi, lorsque  $F = 0$  (pas de force extérieur), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie, il se mettrait alors à osciller et puisque le pendule est fixé sur le chariot, ce dernier commencerait également à se mouvoir.

### I.3.2.6 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule :

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule, on utilise le modèle (I.17), le vecteur d'état est :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \quad (\text{I.18})$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (I.9) où la grandeur de commande est la force  $F$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \sin x_3 + \frac{m l d \cos x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4 \\ \quad + \frac{m l N \sin x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 + \frac{FN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{N} \sin x_3 - \frac{d}{N} x_4 + \frac{m l b \cos x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 x_3 \sin x_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} \\ \quad - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 x_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} x_4 - \frac{m^2 l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 - \frac{m l F}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{array} \right. \quad (\text{I.19})$$

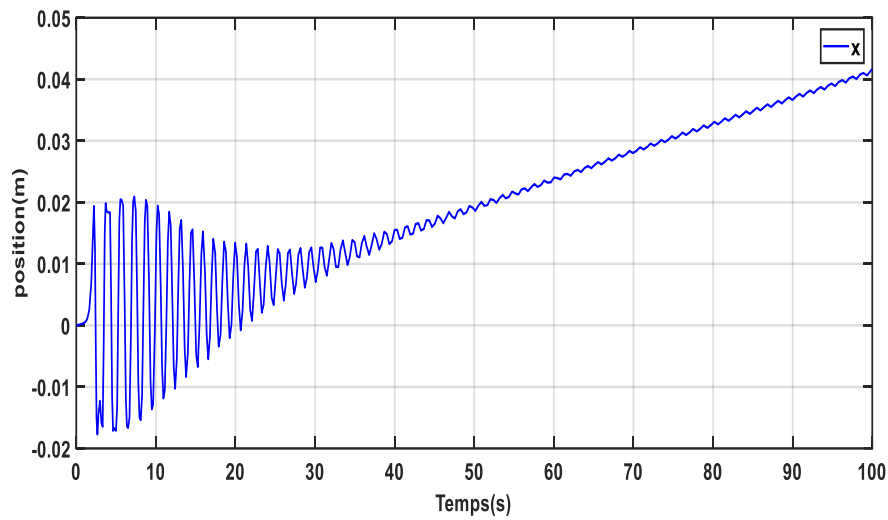
### I.3.3 Simulation en boucle ouverte du pendule inversé :

On présente dans les figures ci-dessous les résultats de simulation du modèle du pendule pour différents cas de la position du chariot et du pendule :

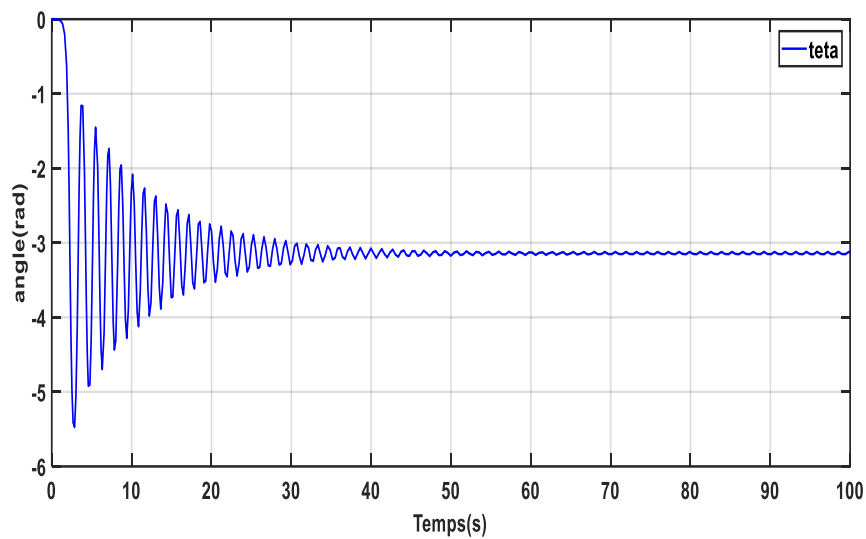
En appliquant à l'entrée une tension sous forme d'une impulsion d'amplitude 0.3 v, de durée 0.01 s, pour deux conditions initiales différentes, la première correspond à la position instable du pendule, la seconde à sa position stable.

**✚ Premier cas :**

Position du chariot et du pendule :  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$

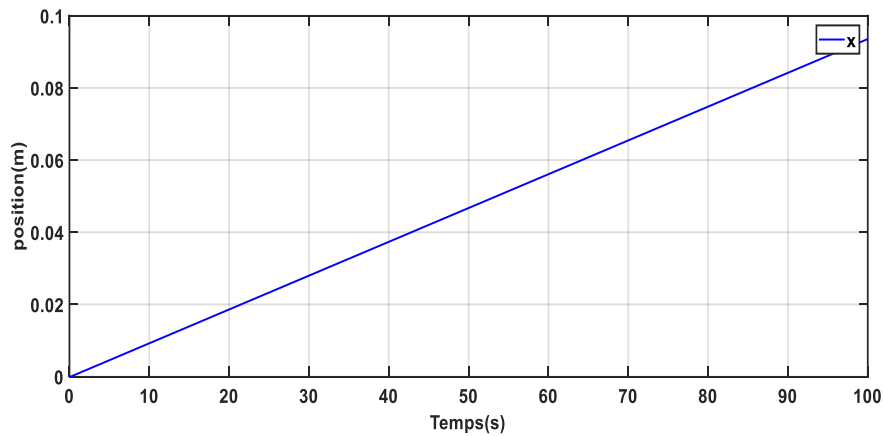


**Figure (I.6)** : Position du chariot pour  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$ .

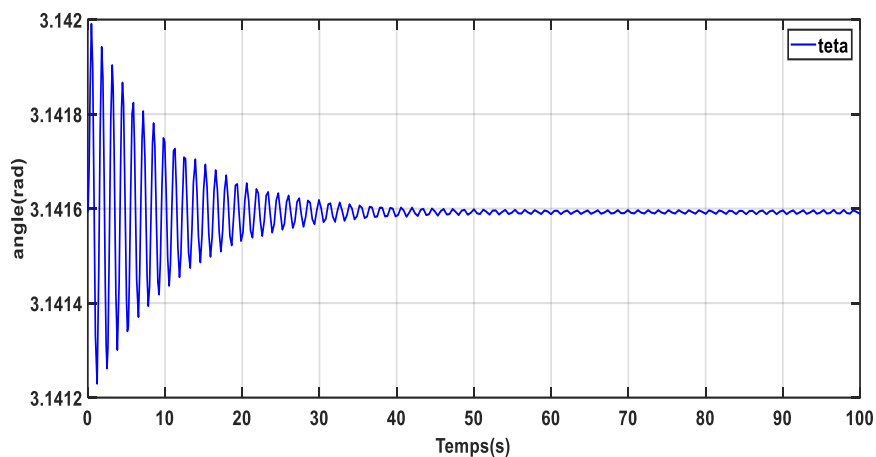


**Figure (I.7)** : Position du pendule pour  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$ .

✚ *Deuxième cas :*



**Figure (I.8) :** Position du chariot et du pendule :  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$



**Figure (I.9) :** Position du pendule pour  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$ .

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Ces résultats illustrent la complexité du modèle. La figure (I.7) montre que le pendule, part d'un angle initial ( $\theta = 0$  rad), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ).

La figures (I.9) montre que, lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ), lorsqu'il en est écarté grâce à la force appliquée, il y revient après le régime transitoire.

A partir des figures (I.6) et (I.8), Il faut noter également qu'une fois la barre en position  $\theta = \pi$ , le chariot continue à évoluer dans les deux cas, quel que soit la position initiale du pendule à cause de l'effet de balancement du pendule.

#### **I.4 Conclusion :**

Ce chapitre a été consacré au développement du modèle de l'ensemble pendule chariot, on a utilisé pour ce faire le formalisme d'Euler-Lagrange pour analyser son comportement en boucle ouverte.

Ensuite, on a simulé notre système avec une impulsion d'entrée qui nous en permis de constater la non linéarité et l'instabilité du système autour de point d'équilibre  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$ .

La complexité de contrôler des systèmes sous-actionnés tel que le pendule inversé, est en grande partie due au fait que l'entrée de commande  $u$  apparaît dans la partie actionnée du système ainsi que dans la partie non actionnée d'où l'intérêt d'utiliser des commande non linéaire .

## II.1 Introduction :

Dans la formulation de n'importe quel problème de commande, il y a typiquement des difficultés entre le système réel et le modèle mathématique développé pour la conception du contrôle. Cette distinction peut être due à la variation des paramètres de la dynamique du système ou à l'approximation du comportement complexe de système par un modèle. Ceci amené à un intérêt intense pour l'élaboration des méthodes de contrôle robustes qui cherchent à résoudre ce problème [15].

La théorie de Lyapunov est un outil important, aussi bien pour les systèmes linéaires que les systèmes non linéaires, malheureusement son utilisation dans le contrôle des systèmes non linéaires est souvent gênée par des difficultés de trouver une fonction de Lyapunov appropriée pour un système donné, si on peut trouver une telle fonction le système est stable, mais la tâche de la trouver est malheureusement délaissée pour l'imagination et l'expérience du concepteur [16].

Les algorithmes de commande classiques par exemple à action proportionnelle intégrale dérivée, peuvent s'avérer suffisants si les exigences sur la précision et les performances du système ne sont pas trop strictes. Néanmoins, dans le cas contraire et particulièrement lorsque la partie commandée est soumise à de fortes non linéarités et à des variations temporelles, il faut concevoir des algorithmes de commande assurant la robustesse du comportement du processus vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et leurs variations.

C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le mode Glissant et le Backstepping font partie de ces nouvelles méthodes de contrôle.

Afin d'obtenir le régime glissant, une loi de commande est requise pour avoir une nature discontinue, c'est-à-dire que la structure du système a besoin d'être modifiée dans le temps. Un tel système est appelé système à structure variable [17].

La caractéristique principale de ces systèmes est la commutation de leurs lois de commandes sur une surface choisie a priori, appelée surface de glissement, afin d'y maintenir sous certaines conditions, le point représentatif de l'évolution du système. Cette technique est basée sur le principe qu'il est plus facile de commander un système de 1<sup>er</sup> ordre que de commander un système du  $n^{\text{ième}}$  ordre, qu'il soit linéaire ou non. Le principe de ce type de système à structure variable consiste à amener, quelles que soient les

conditions initiales, le point représentatif de l'évolution du système sur une hyper surface de l'espace de phase (représentant un ensemble de relations, statiques, entre les variables d'état).

La méthodologie du backstepping peut se définir comme une façon d'organiser un système en plusieurs sous-systèmes en cascade. L'exploitation de la méthodologie de conception sur un plan général aboutit à la mise en place d'une loi de commande par rétroaction associée systématiquement à une fonction de Lyapunov.

Dans ce chapitre, La première partie présente le principe de la commande par mode Glissant. La deuxième partie est consacrée a introduit le principe de la commande backstepping avec les deux approches « non adaptative, adaptative », puis on présentera leurs mises en œuvre sur les systèmes non linéaires dans le chapitre précédent.

## II.2 La commande des systèmes non linéaire :

### II.2.1 Représentation des systèmes non-linéaires :

Un phénomène est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport à l'autre. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré.

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.

Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaires [18].

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme (II.1) :

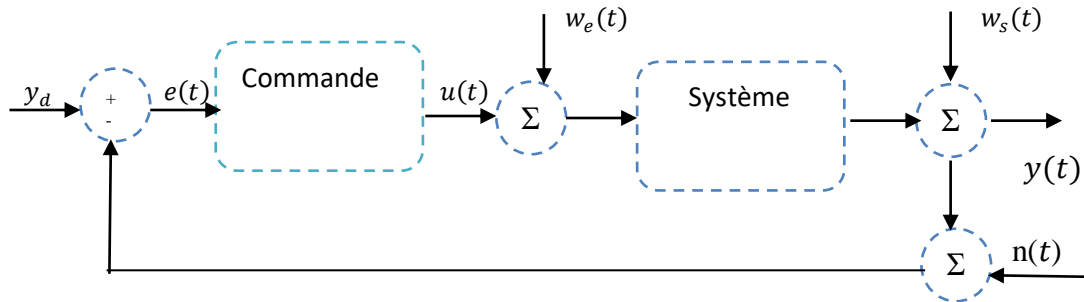
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où  $y$  est la sortie du système,  $x$  est le vecteur d'état et  $u$  est le vecteur de commande.

$f(x), g(x)$  et  $h(x)$  Sont des fonctions non linéaires du vecteur d'état décrivant le système [19].

### II.2.2 La commande non linéaires :

La commande est l'ensemble des opérations qui amènent automatiquement un procédé d'un état particulier à un autre état désiré  $y_d(t)$  [19]. Un système commandé est soumis à des perturbations et à des variations de paramètres, tel que les frottements, vent, ou des bruits de mesure (figure II.1).



**Figure. (II. 1) :** Bloc de commande d'un système non linéaire.

Les signaux utilisés dans la figure sont :

- $y_d(t)$  : consigne ou signal de référence (référence).
- $y(t)$  : signal de sortie ou réponse (plant output).
- $e(t)$  : erreur de suivi (Controller input/tracking error).
- $u(t)$  : signal de commande (Controller output).
- $w_e(t)$  : perturbation de la commande (plant input disturbance).
- $w_s(t)$  : perturbation de la sortie (plant output disturbance).
- $n(t)$  : bruit de mesure (measurement noise).

Si la consigne  $y_d(t)$  est constante dans le temps, nous parlerons de régulation sinon la commande est un asservissement ou poursuite de trajectoires.

La commande d'un système a pour objectif d'atteindre les performances suivantes :

#### 1.Stabilité :

Nous disons d'un système qu'il est stable si à toute entrée bornée (en amplitude), il répond par une sortie bornée [18].

#### 2.Robustesse :

Elle est sans doute le paramètre le plus important et le plus délicat. Nous disons qu'un

système est robuste si la régulation fonctionne toujours même si le modèle change un peu. Un régulateur doit être capable d'assurer sa tâche même avec ces changements afin de s'adapter à des usages non prévus/testés (dérive de production, vieillissement mécanique, environnements extrêmes) [20].

### 3. Rapidité :

Elle dépend du temps de montée et du temps d'établissement du régime stationnaire.

- Temps de réponse ( $T_r$ ) : Théoriquement, le temps de réponse est le temps nécessaire pour que le régime transitoire ait totalement disparu. Toutefois en pratique, nous convenons, en fonction de la précision exigée que c'est le temps au bout duquel la réponse du système pénètre dans le couloir de plus ou moins 5% de la valeur finale sans en sortir [20].
- Temps de montée ( $T_m$ ) : Temps pour lequel la réponse atteint pour la première fois la valeur finale. Il caractérise la vitesse de réaction du système aux premiers instants [20].

### 4. Précision :

Elle est caractérisée par :

- Erreur statique ( $e_s(t)$ ) : elle est définie par l'écart entre la consigne et la sortie lorsque le système est en régime stationnaire ( $t \rightarrow \infty$ ) [20].

$$e_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y(t)) \quad (\text{II.2})$$

- Dépassement ( $Omax$ ) : en pratique il est recommandé pour avoir un système « agile » un dépassement de 10% [20].

$$Omax = \frac{Y_{max} - Y_{\infty}}{Y_{max}} \quad (\text{II.3})$$

#### II.2.3 Stabilisation d'un système :

Le problème de stabilisation consiste à maintenir le système près d'un état d'équilibre  $\mathbf{y}^*$ . Il s'agit de construire des lois de commande dites stabilisantes telles que  $\mathbf{y}^*$  soit un équilibre asymptotiquement stable du système soumis à ces lois de commande.

Le problème de suivi de trajectoire consiste à maintenir le système le long d'une trajectoire désirée  $\mathbf{y}_d(t)$ ,  $t > 0$ , c.à.d. de trouver un contrôle tel que pour toute condition initiale dans une région D, l'erreur entre la sortie et la sortie désirée tend vers 0

quand  $t \rightarrow \infty$ , de plus l'état reste borné [21].

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \quad (\text{II.4})$$

Les techniques de commande permettant de construire des lois de contrôle pour la stabilisation des systèmes sont nombreuses et variées, nous présentons dans la partie suivante celles qui nous ont été les plus utiles.

### II.3 Notion de stabilité au sens de Lyapunov :

Puisqu'on s'intéresse à la stabilité des systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre, il est indispensable de définir cette notion. Pour cela, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage du point d'équilibre.

**Définition 1.1 :** *Considérons le système autonome stationnaire, décrit par l'équation différentielle non linéaire :*

$$\dot{x}(t) = f(x; t) \quad (\text{II.5})$$

Où  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue

L'état particulier  $x_e \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre pour le système (I.1) s'il satisfait la propriété suivante :

$$f(x_e) = 0 \quad (\text{II.6})$$

Dans ce cas la solution du système (I.1) est donnée par :

$$x(t, x_e) = x_e \quad \forall t, t \geq t_0 \quad (\text{II.7})$$

### Définition 1.2 : Voisinage de l'origine

Un voisinage de l'origine,  $\mathcal{G}$  est tout domaine fermé borné incluant l'origine.

### Définition 1.3 : Fonctions définies positives

- Une fonction scalaire  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est localement définie positive dans  $\mathcal{G}$ , si :

$$V(0) = 0$$

$$\forall x \neq 0 \in \mathcal{G} \quad V(x) > 0 \quad (\text{II.8})$$

- Une fonction scalaire  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est globalement définie positive si elle vérifie :

$$V(0) = 0$$

$$\forall x \neq 0 \in R^n \quad V(x) > 0 \quad (\text{II.9})$$

**Définition I.4 : Fonctions semi-définies positives**

- Une fonction scalaire  $V(x) : R^n \rightarrow R$  est localement définie positive dans  $\mathcal{G}$ , si :

$$V(0) = 0$$

$$\forall x \neq 0 \in \mathcal{G} \quad V(x) > 0 \quad (\text{II.10})$$

- Une fonction scalaire  $V : R^n \rightarrow R$  est globalement définie positive si elle vérifie :

$$V(0) = 0$$

$$\forall x \neq 0 \in R^n \quad V(x) > 0 \quad (\text{II.11})$$

**II.3.2 Méthode directe de Lyapunov**

Pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé. Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques qui stipule que : « un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable » .

Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse d'un point  $p_1$  ( $p_1 \in R^n$ ) est toujours dirigée vers l'intérieur, alors ce point finira par arriver à l'origine, dans le cas contraire, le point  $p_1$  s'écartera davantage.

Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction du Lyapunov  $V$  peut être choisie comme étant l'énergie du système [22].

**Définition I.5 : (Candidat de Lyapunov)**

Une fonction définie positive continue notée  $V(x)$  est un candidat de Lyapunov [27].

**Définition I.6 : Fonction de Lyapunov**

Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue  $V(x)$  telle que :

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0 \\ V(x) = 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Ayant en plus la propriété

$$\begin{cases} \dot{V}(x) \leq 0 & \forall x \neq 0 \\ \dot{V}(x) = 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

- **Dérivée de la fonction de Lyapunov :**

La dérivée s'écrit

$$\dot{V}(x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]^T \cdot \frac{dx}{dt} \quad (\text{II.14})$$

Ou

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right] \text{ est le gradient de } V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right]^T$$

- **Théorème de stabilité par la méthode directe**

*Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.*

*Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que*

*$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ , alors la stabilité est en plus asymptotique.*

*Si  $\dot{V}$  est localement définie négative dans  $\mathfrak{D}$ , alors la stabilité est dite localement asymptotique.*

## II.4 La commande en régime glissant

### II.4.1 Système à structure variable :

La commande à structure variable par régime glissant, apparue depuis le début des années 60, grâce aux résultats théoriques du mathématicien A.F. Philipov, est une commande non linéaire basée sur l'utilisation d'un terme discontinu. Après les travaux développés par l'équipe du professeur Emelyanov en union Soviétique et à cause des problèmes de broutements et de réalisation, la commande à structure variable a attendu la fin des années soixante-dix pour connaître sa réapparition et son épopée avec l'avancée de l'électronique et l'informatique. En effet, cette commande est basée sur une commutation à haute fréquence pour un meilleur régime glissant [23].

### II.4.2 Principe de la commande à structure variable en mode glissant :

Dans la commande des systèmes à structure variable par le mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface, cette dernière est appelée surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit est appelé mouvement de glissement [24].

La forme d'une commande à structure variable [25]:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ u_i^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

$u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) : les composantes du vecteur de commande.

Parmi les propriétés des modes glissants :

- La trajectoire d'état du système en mode de glissement appartient à une surface de dimension inférieure à celle de l'espace d'état, par conséquent l'ordre des équations différentielles régissant le fonctionnement du système en mode de glissement est réduit.
- La théorie des modes glissants s'adapte bien pour les systèmes dont la commande est discontinue.
- La dynamique du système en mode de glissement est déterminée uniquement par le choix des coefficients de la surface de glissement.

#### II.4.2.1 Fonction de commutation :

La structure de commande est caractérisée par le signe d'une fonction vectorielle  $S(x)$  appelée fonction de commutation. Dans le cas des modèles linéaires, la fonction de commutation est choisie comme une fonction linéaire de l'état :

$$S(x) = [S(x)_1, S(x)_2, \dots, S(x)_m] = Cx$$

Où

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_m].$$

Chaque fonction scalaire de commutation  $S(x)_j$  décrit une surface linéaire

$$S(x)_j = 0.$$

Avec :  $j = 1, \dots, m$

#### II.4.2.2 Hyperplan de commutation :

La surface de commutation associée au système de commande à structure variable défini précédemment  $S_j = \{x \in R^n : S(x)_j = 0, j = 1, \dots, m\}$  est appelée hyper surface de glissement.

#### II.4.2.3 Régime glissant :

Si pour tout vecteur d'état initial  $X(t_0) \in S$  la trajectoire d'état reste dans l'hyper surface.

$S_j, X(t) \in S, \forall t > t_0$  alors  $x(t)$  est un mode glissant pour le système.

#### II.4.2.4 Surface de glissement :

La surface de commutation  $S$  est appelée surface de glissement. Le but d'un système de commande à structure variable est d'amener asymptotiquement l'état du système à partir d'une condition initiale quelconque  $X(0) = x_0$  vers l'origine de l'espace d'état quand  $t \rightarrow \infty$ . La trajectoire dans le plan de phase se compose de trois parties distinctes :

##### a) - Mode de convergence (MC) :

C'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de commutation

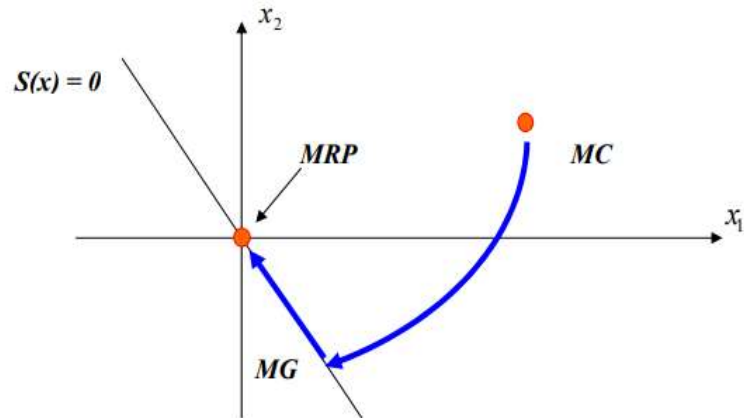
$S(x) = 0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence. [26]

##### b) - Mode de glissement (MG) :

C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par la détermination de la surface de glissement  $S(x) = 0$ . [26]

##### c)-Mode du régime permanent (MRP) :

Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse de système autour de son point d'équilibre (origine de plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande. [26]



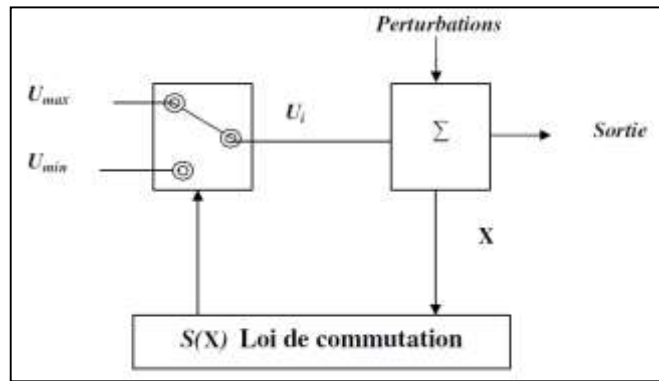
**Figure (II.2) :** Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état.[27]

#### II.4.3 Différentes structures de contrôle par mode glissant :

Dans la littérature on trouve trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes. La première correspond à la structure la plus simple où la commutation est au niveau de l'organe de commande lui-même. On l'appellera, structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre- réaction d'état, la dernière est une structure de régulation avec ajout de la commande équivalente [28].

##### II.4.3.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande :

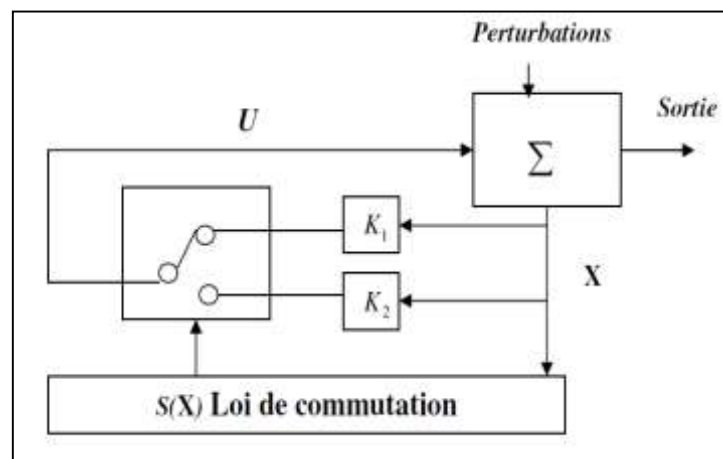
Le schéma d'une structure par commutation au niveau de l'organe de commande est donné sur la figure II.3. Cette structure de commande est la plus classique et la plus usitée. Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance associés dans une grande majorité d'application aux variateurs de vitesse. Elle a été utilisée pour la commande de moteurs pas à pas.



**Figure (II.3) :** Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande. [29]

#### II.4.3.2 Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état :

Nous pouvons consulter le schéma d'une telle structure sur la figure (II.4). D'après les études menées dans [30], c'est la structure la moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande. Elle a été mise en œuvre dans la commande de moteurs à courant continu et à aimants permanents, ainsi que dans la commande des machines à induction [31]. Elle s'appuie sur la commande par contre réaction d'état classique où le réglage de la dynamique du système est réalisé par les gains de réglage. La non linéarité provient de la commutation entre les gains, donc on a créé une commutation au niveau de la dynamique du système.

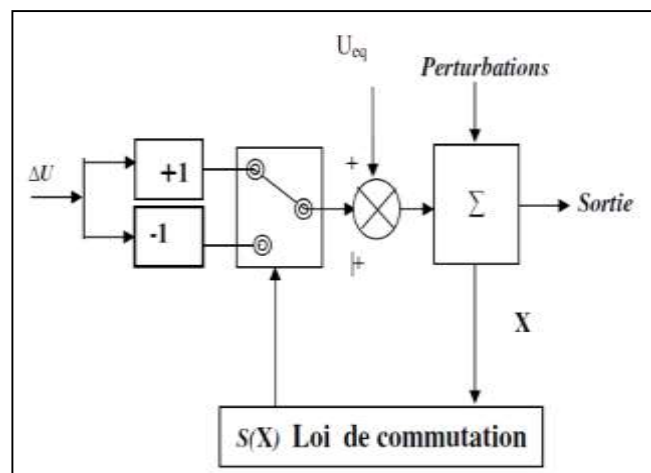


**Figure (II.4) :** Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état. [29]

### II.4.3.3 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande, avec ajout de la commande équivalente :

Une telle structure dont le principe est montré sur la figure II.5, présente un réel avantage. Elle permet de pré-positionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent.

L'organe de commande est beaucoup moins sollicité, mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait de l'expression de cette commande équivalente.



**Figure (II.5) :** Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.[29]

Avec :  $U_{eq}$  : vecteur de commande équivalente.

$\Delta U$  : vecteur de commande discontinue.

$X$  : vecteur de variables.

$S(X)$  : fonction de commutation.

## II.4.4 Théorie de la commande par mode de glissement :

### II.4.4.1 Définition du mode glissant :

La technologie des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement.

#### II.4.4.2 Explication du phénomène du glissement :

Le mode de glissement existe lorsque les commutations ont lieu continûment entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$ . Ce phénomène est démontré à l'aide de la figure II.6.

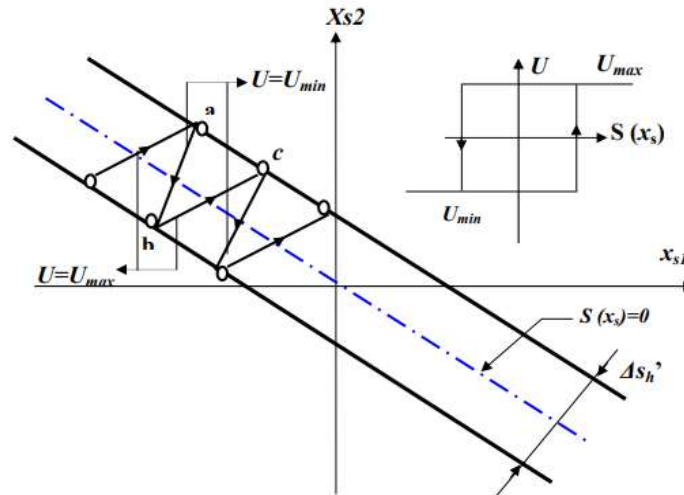


Figure II.6. Démonstration du mode de glissement.

Pour un système à régler du deuxième ordre avec les deux grandeurs d'état  $x_{s1}$  et  $x_{s2}$ , on admet d'abord une hystérèse sur la loi de commutation  $s(x_s) = 0$  (droite en trait mixte), par conséquent, les commutations ont lieu sur les droites décalées parallèlement de  $\pm \Delta s_h$ .

Une trajectoire avec  $U = U_{max}$  touche au point 'a' le seuil de basculement inférieur si avec  $U = U_{min}$ , la trajectoire est orientée vers l'intérieur de la zone de l'hystérèse, elle touche au point 'b' le seuil de basculement supérieur où a lieu une commutation sur  $U = U_{max}$ .

Si la trajectoire est de nouveau orientée vers l'intérieur, elle touchera le point 'c' le seuil de basculement inférieure et ainsi de suite. Il y a donc un mouvement continu à une certaine zone, où des commutations continues existent, la fréquence de commutation est finie [32].

Le réglage du mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variables. La théorie donc des systèmes à structures variables et les modes glissants associés (en anglais sliding mode), est une technique de commande non linéaire, elle est caractérisée par une discontinuité de la commande aux passages par une surface de commutation appelée surface de glissement [33].

### II.4.4.3 Conception de l'algorithme de commande par mode glissant :

La conception de l'algorithme de commande par mode glissant prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique dans son approche, qui s'effectue principalement en trois étapes complémentaires définies par [34] :

- Choix des surfaces de glissement
- Les conditions d'existence et de convergence du régime glissant
- Détermination de la loi de commande

#### II.4.4.3.1 Choix de la surface de glissement :

La conception du système de commande sera démontrée pour un système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (\text{II.16})$$

Où :  $f$  et  $g$  sont des fonctions non linéaires,  $g$  est supposée inversible.

$u$  : L'entrée du système.

$x$  : État du système.

Soit  $x_d$  la consigne désirée,  $e$  l'erreur de poursuite définie par :

$$e = x_d - x \quad (\text{II.17})$$

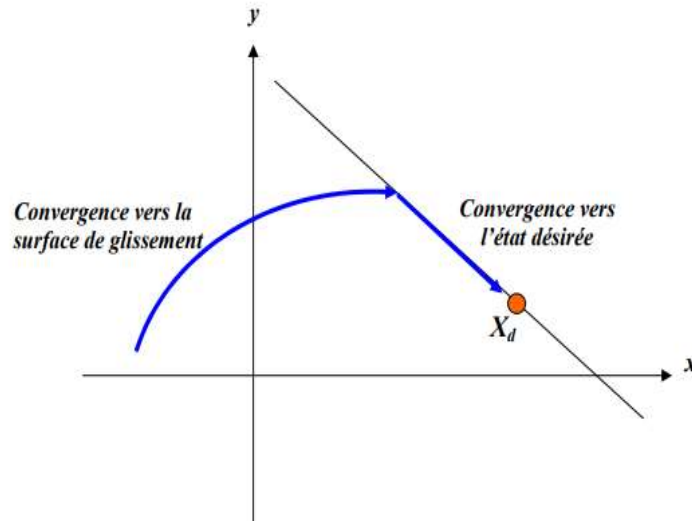
La formule générale de la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée est définie en fonction de l'ordre du système comme suit (proposé par J. Slotine) [24] :

$$s(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{n-1} e(x) \quad (\text{II.18})$$

Où  $n$  est le degré relatif du système par rapport à la sortie  $y(t)$ . Il représente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie  $y(t)$  par rapport au temps, pour y voir apparaître l'entrée.

- **II.4.4.3.2 Les conditions d'existence et de convergence du régime glissant.**

On représenter la convergence du système par le mode de glissement d'après la figure (II.7) . Suivante [35] :



**Figure. II.7.** Convergence du système glissant.

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et de rester indépendamment de la perturbation. On présente deux types de conditions qui sont :

- **Fonction discrète de commutation :**

Cette approche est la plus ancienne, elle est proposée et étudiée par Emilyanov et

Utkin. Elle est donnée sous la forme [37], [34]:

$$\dot{s} \cdot s < 0 \quad (\text{II.19})$$

- **Fonction de Lyapunov :**

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive,  $V(x) > 0$ , pour les variables d'état du système. Elle est utilisée pour estimer les performances de la commande pour l'étude de la robustesse, elle garantit la stabilité du système non linéaire et l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence, elle a la forme suivante [38], [34] :

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{II.20})$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}(x) = S(x) \cdot \dot{S}(x) \quad (\text{II.21})$$

La loi de la commande doit faire décroître cette fonction ( $\dot{V}(x) < 0$ ) ; l'idée est de choisir une fonction scalaire  $S(x)$ ; pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence, et concevoir une commande "U" tel que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

Pour que la fonction  $V(x)$ ; puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. D'où la condition de convergence exprimée par l'équation (II.19).

Pour une convergence en temps fini, la condition (II.19) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement est remplacée par une condition plus restrictive dite de  $\eta$ -attractivité et donnée par [43]:

$$\dot{s} \leq K|s| ; \quad K > 0 \quad (\text{II.22})$$

#### II.4.4.3.3 Détermination de la loi de commande :

##### II.4.4.3.3.1 Commande équivalente :

Un vecteur de commande équivalente  $u_{eq}$  se définit comme étant les équations du régime glissant idéal. Nous nous intéressons au calcul de la commande équivalente et par la suite au calcul de la commande attractive du système défini dans l'espace d'état par l'équation (II.16) [39].

Le vecteur  $u$  est composé de deux grandeurs  $u_{eq}$  et  $u_d$  soit :

$$u = u_{eq} + u_d \quad (\text{II.23})$$

L'utilisation des équations (II.16) et (II.23) permet d'obtenir la commande équivalente  $u_{eq}$  :

Nous avons :

$$\dot{S}(x) = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} [f(x, t) + g(x, t)u_{eq}(t)] + \frac{\partial S}{\partial x} [g(x, t)u_d] \quad (\text{II.24})$$

En mode de glissement et en régime permanent, la dérivée de la surface est nulle (parce que  $\dot{S}(x) = 0$ ).

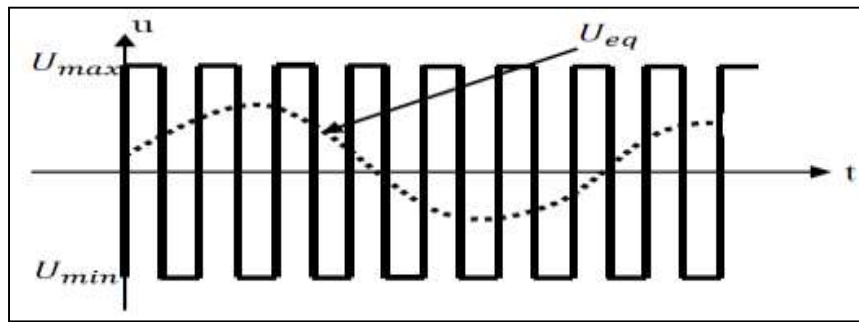
Ainsi nous obtenons [39] :

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \right] ; u_d = 0 \quad (\text{II.25})$$

En portant  $u_{eq}$  dans l'équation (II.16), on obtient l'équation du régime glissant idéal :

$$\dot{X}(t) = f(x, t) - g(x, t) \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \quad (\text{II.26})$$

Cette équation représente la dynamique du système équivalent dans la surface de glissement. La commande  $u_{eq}$  peut être interprétée comme étant la valeur moyenne que prend la commande  $u$  lors des commutations rapides entre  $u^+(u_{max})$  et  $u^-(u_{min})$ , voir (figure (II.8)).



**Figure (II.8) :** Commande équivalente  $u_{eq}$ . [22]

Tant que le régime glissant est assuré [condition (II.19) vérifiée], le système décrit par l'équation (II.16) est robuste et indépendant des variations des paramètres de la partie commandée. Il admet en outre des erreurs de modélisation, tant que ces variations et erreurs maintiennent les conditions du régime glissant qui s'effectue alors au voisinage de la surface de glissement  $S_j(x) = 0$  [39], [29].

#### II.4.4.3.2 Commande discontinue de base :

L'addition du terme  $u_d$  à la loi de commande permet d'assurer l'attractivité de la surface de glissement  $S$ . Celle-ci est attractive si seulement si  $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$  [40]. Cette condition permet de définir la région dans laquelle le mode de glissement existe.

Durant le mode de convergence, on remplace le terme  $u_{eq}$  par sa valeur donnée par (II.25) dans l'équation (II.24). Nous obtenons donc une nouvelle expression de la dérivée de la surface, soit :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \{g(x, t). u_d\} \quad (\text{II.27})$$

Le problème revient à trouver  $u_d$  tel que :

$$S(x). \dot{S}(x) = S(x) \frac{\partial S}{\partial x} \{g(x, t). u_d\} < 0 \quad (\text{II.28})$$

La solution la plus simple est de choisir  $u_d$  sous la forme de relais. Dans ce cas, la commande s'écrit comme suit [37] :

$$u_d = k. \text{sign}(S(x)) = k. |S(x)| \quad (\text{II.29})$$

En remplaçant l'expression (II.18) dans (II.17) on obtient :

$$S(x). \dot{S}(x) = S(x). \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t). k. |S(x)| < 0 \quad (\text{I.30})$$

Où le facteur  $\frac{\partial S}{\partial x} g(x, t)$  est toujours négatif pour la classe de systèmes que nous considérons. Le gain  $K$  doit être positif afin de vérifier les conditions d'attractivité et de stabilité.

Cependant l'utilisation de la commande de type relais peut provoquer des dynamiques indésirables caractérisées par le phénomène de broutement.

#### II.4.4.3 .4 Le broutement :

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, appelé réticence ou "chattering" en anglais. Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement (figure (II.9)). Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les limitations des actionneurs ou les retards de commutation au niveau de la commande. Ces commutations détériorent la précision de la commande et peuvent s'avérer néfastes pour l'organe de commande en provoquant une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques (perte d'énergie non négligeable) [41].

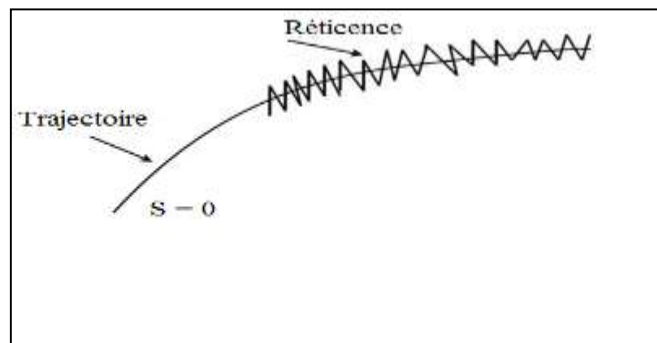


Figure (II.9) : Phénomène de broutement. [42]

#### II.4.4.4.1 Suppression du phénomène de réticence :

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées, comme la solution de couche limite, mode glissant flou, mode glissant d'ordre supérieur, etc....

##### ✚ Commande signe :

Plusieurs choix pour la commande discontinue ( $u_d$ ) peuvent être faits. Le plus simple consiste à exprimer la commande discontinue  $u_d = [u_1, u_2, \dots, u_d]$  avec la fonction *sign* par rapport à  $S = [S_1, S_2, \dots, S_d]$ .

$$\begin{cases} \text{sgn}(S(x)) = +1 & \text{si } S(x) > 0 \\ \text{sgn}(S(x)) = -1 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

$u_d$  s'exprime donc comme suit :

$$u_d = k \cdot \text{sgn}(S(x)) \quad (\text{II.32})$$

Où  $K$  est un gain positif.

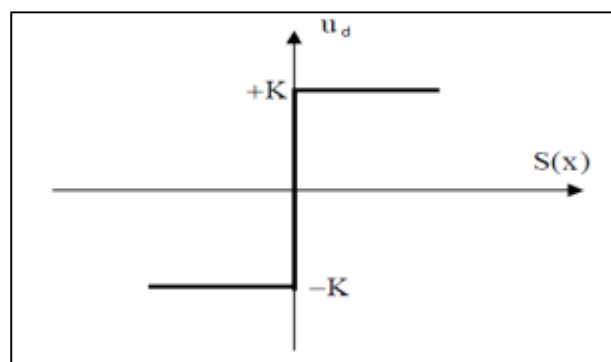


Figure (II.10) : Fonction signe.

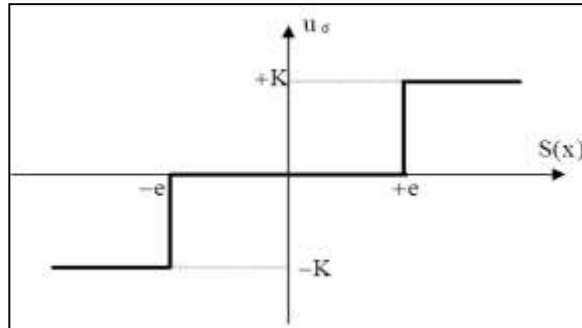
Le gain  $K$  est choisi positif pour satisfaire la condition (II.22). Le choix de ce gain est très influent car, s'il est très petit le temps de réponse sera très long, et s'il est choisi très grand, nous aurons des fortes oscillations au niveau de l'organe de la commande. Ces oscillations peuvent exciter les dynamiques négligées (phénomène de broutement) [43].

#### ✚ Commande avec un seul seuil :

Cette commande est caractérisée par un seuil  $e$  (figure II.11). Dans la bande qui entoure la surface de glissement  $S(x)$ , seule la composante continue  $u_{eq}$  de la tension de commande qui agit. La partie discontinue  $u_d$  étant égale à zéro, les oscillations sur les réponses fortement atténuées. Cependant lorsque  $e$  augmente, il apparaît un écart statique sur la réponse en régulation [44]. La commande discontinue a l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_d = 0 & \text{si } |S(x)| < e \\ u_d = k \cdot \text{sgn}(S(x)) & \text{si } |S(x)| > e \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Ce choix de la fonction discontinue est représenté sur la figure ci-dessous :



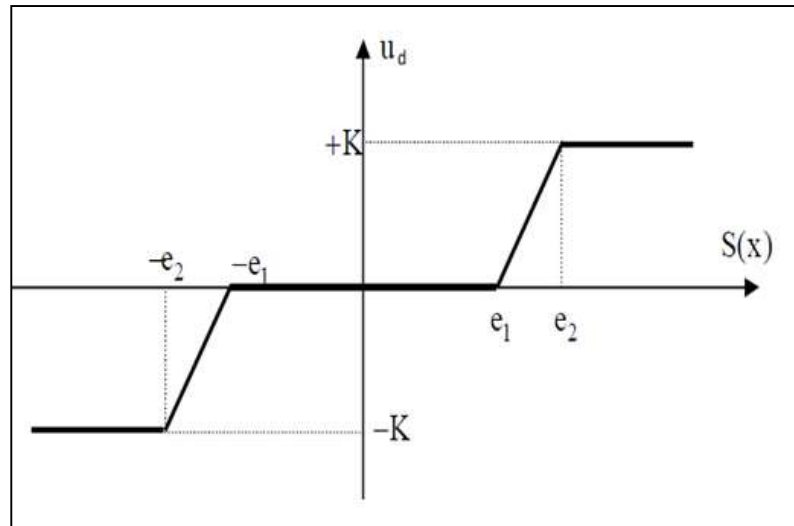
**Figure (II.11)** : Fonction signe de la commande avec un seul seuil.

Ce type de commande n'est pas très utilisé car, outre le problème d'erreur statique, en présence d'une perturbation,  $u_d$  intervient avec toute sa valeur et des oscillations peuvent persister en régime permanent. Un adoucissement de la commande  $u_d$  est donc nécessaire.

#### ✚ Commande adoucie :

Dans le but de diminuer progressivement la valeur de la commande  $u_d$  en fonction de la distance entre la trajectoire de la variation à régler et la surface de glissement, on doit encadrer la surface par une bande avec un ou deux seuils [44].

On peut distinguer trois zones qui dépendent de la distance du point à la surface de glissement. Si la distance est supérieure au seuil  $e_1$ , alors la fonction signe est activée. Si la distance est inférieure au seuil  $e_2$ , alors  $u_d$  est nulle (zone morte). Si le point est dans la bande  $(e_1, e_2)$ , alors  $u_d$  est une fonction linéaire de la distance (droite de pente  $\frac{k}{e_2 - e_1}$ ) (figure II.12).



**Figure (II.12) :** Fonction signe de la commande adoucie.

Dans cette méthode d'adoucissement utilisée pour limiter les oscillations, plus le seuil est grand, moins il y a des commutations. Néanmoins s'il est trop important, il y a problème de précision. En effet le système va évoluer dans la bande et risque donc de ne jamais atteindre le point désiré.

#### ✚ Commande intégrale :

Les oscillations de haute fréquence qui apparaissent sur les réponses en régime glissant peuvent être évitées en rendant continue la commande discontinue  $u_d$ . Pour cela, on remplace la fonction signe par la fonction intégrale.

$$u_d = k \frac{S(x)}{|S(x)| + l} \quad (\text{II.34})$$

Où  $l$  est un paramètre définissant le degré d'atténuation des oscillations. Lorsque  $l$  tend vers zéro, on tend vers la même commande discontinue défini par (II.31). La fonction  $u_d$  continue est illustrée sur la figure (II.13).

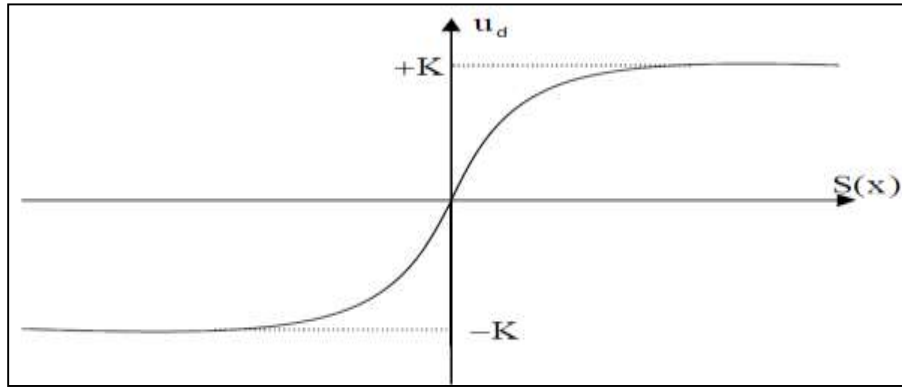


Figure (II.13) : commande intégrale.

Pour augmenter la précision de la réponse du système, on peut utiliser une commande continue incluant une composante intégrale qui devient active lorsque le point est proche de la surface.

En général, le compensateur intégral diminue l'erreur en régime permanent, mais il est souvent indésirable pour les régimes transitoires brusques, car il provoque des oscillations supplémentaires sur la réponse. La commande  $u_d$  dans ce cas devient :

$$u_d = k \frac{S(x)}{|S(x)|+l} + h \tag{II.35}$$

Tel que :  $l = l_0 + |g|$

Avec :

$$\begin{cases} g = g_0 \int S(x)dt & \text{si } |S(x)| < e \\ g = 0 & \text{si } |S(x)| > e \end{cases} \tag{II.36}$$

Et

$$\begin{cases} h = h_0 \int S(x)dt & \text{si } |S(x)| < e \\ h = 0 & \text{si } |S(x)| > e \end{cases} \tag{II.37}$$

Où  $l, g$  et  $h$  sont des constantes ou paramètres adaptatifs en fonction des références.

Ce type de commande est difficile à mettre en œuvre car il y a un grand nombre de paramètres à déterminer [44].

**✚ Commande SAT :**

Cette fonction représentée dans la figure (II.14), est défini par :

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\phi} & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| \leq 1 \\ \text{sgn} \left( \frac{s}{\phi} \right) & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| > 1 \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

$u_d$  s'exprime donc comme :  $u_d = k\text{sat}(s)$

$\phi$  Représente la bande de transition de la surface de glissement.

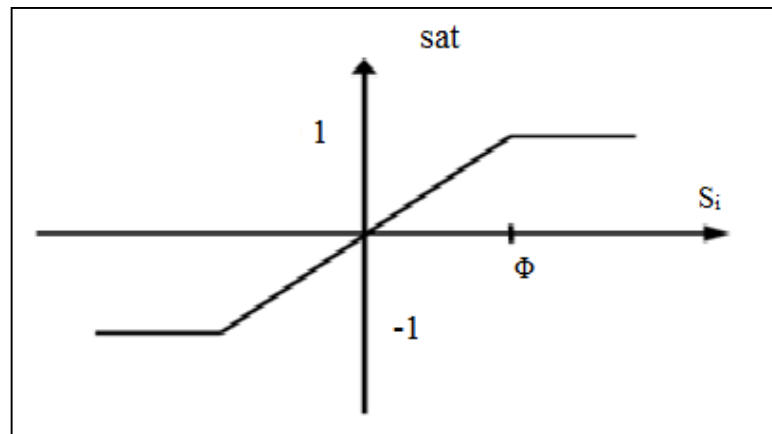


Figure (II.14) : Définition de la fonction SAT.[34]

#### II.4.4.5 Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant :

Il est reconnu que la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle présente le point fort d'une commande par mode glissant. [42].

De plus, la réduction de l'ordre du système constitue un autre point fort de ce type de commande, car elle permet de simplifier la complexité du système.

Cependant, ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients :

- Un phénomène de chattering ou broutement provoqué par la partie discontinue de cette commande et qui peut avoir un effet néfaste sur les actionneurs.
- Le système est soumis à chaque instant à une commande élevée afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré or que cette dernière (la commande élevée) n'est pas souhaitable.

## II.5 La commande de backstepping :

### II.5.1 Approche non adaptative

#### II.5.1.1 Historique :

La technique du backstepping a été développée au début des années 90. L'arrivée de la

commande par le Backstepping a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires, qui malgré les grands progrès réalisés, il manquait des approches générales. Cette technique est une méthode systématique et récursive de synthèse de lois de commande non linéaires qui utilise le principe de stabilité de Lyapunov et qui peut s'appliquer à un grand nombre de systèmes non linéaires.[45]

### II.5.1.2 Principe de la théorie de backstepping :

L'idée de base est de transformer les systèmes bouclés équivalents à des sous-systèmes d'ordre un en cascade stable au sens de Lyapunov, ce qui leur confère des qualités de robustesse et une stabilité globale asymptotique. En d'autres termes, c'est une méthode multi-étape. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. Cela peut être atteint à partir des fonctions de Lyapunov qui assurent pas à pas la stabilisation de chaque étape de synthèse. Le backstepping est :

- Applicable au système de type triangulaire inférieur ou appelée aussi boucle de retour strict c.à.d la dérivée de chaque composante du vecteur d'état doit être une fonction des composantes précédentes et dépendre additivement de la composante suivante.
- Commençant avec la première équation différentielle du système  $\dot{x}_1$  qui est plus loin de l'entrée de commande  $u$ , et n'achève la loi de commande de type d'expression analytique qu'en dernière étape.
- Elle construit une sortie passive et une fonction de stockage qui est utilisée comme une fonction Lyapunov [45].

### II.5.1.2 Commande de stabilisation par la méthode du backstepping :

Cette technique met à profit des relations causales successives pour construire de manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante. De plus, et contrairement au bouclage linéarisé, le backstepping offre la possibilité de conserver dans le bouclage les non linéarités stabilisantes. Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non linéaire doit être sous la forme paramétrique de boucle de retour stricte.

Considérons le système sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, t)x_2 + f_1(x_1, t) \\ \quad \quad \quad i = (1, \dots, n-1) \\ \dot{x}^n = g_n(x_n, t)u + f_n(x_n, t) \\ \quad \quad \quad y = x_1 \\ \quad \quad \quad x_{t0} = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Où  $x_i = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^i, i = (1, \dots, n-1), u \in R, y \in R$

Sont respectivement vecteurs des états d'entrées et de sortie

$g_i(\cdot) \neq f_i(\cdot), (i = 1, \dots, n-1)$  Sont des fonctions non linéaires continues et dérivables.

$g_n(\cdot) \neq f_n(\cdot)$  Sont des fonctions non linéaires continues.

Notre objectif est de concevoir un contrôleur dans la contre réaction pour le système (II.39) garantissant une stabilité globale et force le système vers le point d'équilibre

c. à .d :

$$y(t) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

La conception de la procédure du backstepping contient  $n$  étapes, durant la  $i^{\text{ième}}$  étape une loi de commande intermédiaire appelée aussi fonction stabilisante ou loi de contrôle virtuelle  $\alpha_i$  doit être déterminée en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée  $V_i$ .

Considérons en premier l'équation du système (II.39) quand  $i = 1$ , dans la première étape, le premier sous-système avec une sortie passive  $e_1$  et une entrée  $x_2$ , est rendue passive par une loi de contrôle virtuelle  $\alpha_1(x_1)$ , le second sous système avec une sortie passive

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (\text{II.40})$$

et une entrée  $x_3$  est rendue passive par une loi de commande virtuelle  $\alpha_1(x_1, x_2)$ , cette procédure est applicable jusqu'au  $n^{\text{ième}}$  sous système avec une sortie  $e_n$  et une entrée  $u$ .

$$e_n = x_n - \alpha_{n-1} \quad (\text{II.41})$$

La sortie  $e_n$  est rendue passive et GAS par une loi de commande finale  $u$ .

A chaque étape une fonction de Lyapunov est construite qui est considérée aussi comme une fonction de stockage de type quadratique.

✚ *Première étape :*

Définissons la première variable de la procédure soit  $e_1$  comme sortie virtuelle du premier sous système  $e_1 = x_1$ . La dérivée dans le temps est :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 = g_1 e_2 + g_1 \alpha_1 + f_1 \quad (\text{II.42})$$

Et une deuxième variable du backstepping  $e_2 = x_2 - \alpha_1$ , avec  $\alpha_1$  une loi de commande virtuelle qui doit être déterminée plus tard. Pour trouver cette loi de commande nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (\text{II.43})$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = g_1 e_1 e_2 + e_1 \overbrace{(g_1 \alpha_1 + f_1)}^{-k_1 e_1} \quad (\text{II.44})$$

La non linéarité est remplacée par un contrôle linéaire et  $\alpha_1$  est choisie de telle sorte que  $\dot{V}_1$  soit négative définie :

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} (-k_1 e_1 - f_1) \quad (\text{II.45})$$

Où  $k_1 > 0$  est une constante de conception positive. Notant que  $\alpha_1$  a été choisi de manière à éliminer la non linéarité  $f_1$  et d'avoir  $\dot{V}_1 < 0$ .

En substituant  $\alpha_1$  dans  $V_1$  et dans on  $e_1$  trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 + g_1 e_1 e_2 \\ \dot{e}_1 = g_1 e_2 - k_1 e_1 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_1 e_1 e_2$  dans  $\dot{V}_1$  sera éliminé dans la prochaine étape.

✚ *Deuxième étape :*

Dans cette étape nous utilisons une nouvelle variable  $e_3 = x_3 - \alpha_2$  comme une sortie pour le second sous-système avec  $x_3$  comme entrée et réécrivant la seconde équation du système (II.39) :

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = g_2 e_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{II.47})$$

Puisque  $\alpha_1(x_1)$  est la fonction stabilisante du sous-système 2 alors :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) \quad (\text{II.48})$$

En substituant  $\dot{\alpha}_1$  dans  $\dot{e}_2$ .

$$\dot{e}_2 = g_2 e_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) \quad (\text{II.49})$$

Maintenant nous procédons à trouver une fonction de Lyapunov  $V_2$  pour le second sous-système, Parceque  $e_2$  est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage :

$$V_2(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{II.50})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2 \dot{e}_2 = -k_1 e_1^2 + g_2 e_2 e_3 + e_2 \overbrace{(g_1 e_1 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1))}^{=-k_2 e_2} \quad (\text{II.51})$$

La propriété clé de cette expression est que tous les termes potentiellement indéfinis paraissent multipliés par  $e_2$  .D'où, notre contrôle virtuelle  $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$  peut être choisi de faire  $\dot{V}_2$  négative définie. Une conception possible est :

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2} (-k_2 e_2 - g_1 e_1 - f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)) \quad (\text{II.52})$$

Où  $k_2$  est une constante positive de conception. En substituant  $\alpha_2$  dans  $V_2$  et dans  $e_2$  on trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + g_2 e_2 e_3 \\ \dot{e}_2 = g_2 e_3 - g_1 e_1 - g_1 e_1 \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_2 e_2 e_3$  dans  $\dot{V}_2$  sera éliminé dans la prochaine étape.

### ✚ Troisième étape :

Commençons par la troisième variable de la procédure soit  $e_3 = x_3 - \alpha_2$  comme une sortie pour le troisième sous-système avec  $x_4$  comme entrée, définissant une nouvelle

variable  $e_4 = x_4 - \alpha_3$ ,  $\alpha_3$  est la fonction stabilisante du troisième sous système et réécrivant la troisième équation du système (II.39) : La dérivée dans le temps est :

$$\dot{e}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_1 = g_3 e_4 + g_3 \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) \quad (\text{II.54})$$

Parce que  $e_3$  est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage (Lyapunov) :

$$V_3(e_1, e_2, e_3) = V_1 + V_2 + \frac{1}{2} e_3^2 \quad (\text{II.55})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + e_3 \dot{e}_3 &= -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + g_3 e_3 e_4 \\ &+ e_3 \overbrace{\left( g_2 e_2 + g_3 \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) \right)}^{=-k_3 e_3} \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

Le contrôle virtuelle  $x_4 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$  peut être choisi en rendant  $\dot{V}_3$  négative défini. Une conception possible est :

$$\alpha_3 = \frac{1}{g_3} \left( -k_3 e_3 - g_2 e_2 - f_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) \right) \quad (\text{II.57})$$

$\alpha_3$  Est choisie de telle sorte que  $\dot{V}_3$  soit définie négative,  $k_3$  est une constante positive de conception. En substituant  $\alpha_3$  dans  $V_3$  et dans  $e_3$  on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = g_3 e_4 - k_3 e_3 - g_2 e_2 \\ \dot{V}_3 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 + g_3 e_3 e_4 \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_3 e_3 e_4$  dans  $\dot{V}_3$  sera éliminé dans la prochaine étape.

### ✚ La $i^{\text{ème}}$ Etape :

Pour (  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), Après quelques manipulations algébriques la dérivée de la variable de la procédure comme sortie virtuelle  $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1}$ , peut être exprimée comme :

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = -k_i e_i + g_i e_{i+1} + f_{ith} \quad (\text{II.59})$$

Avec  $e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ , où  $\alpha_i$  est la loi de commande virtuelle à l'étape  $i$  qui doit être déterminée.

La loi de commande virtuelle est maintenant conçue pour rendre définie négative la dérivée d'une fonction de Lyapunov suivante :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}e_i^2 \quad (\text{II.60})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + e_i \dot{e}_i = -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2) + e_i \overbrace{(g_{i-1} z_{i-1} + f_{ith} + g_i e_{i+1} + g_i \alpha_i)}^{-k_i e_i} \quad (\text{II.61})$$

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i} (-k_i e_i - g_{i-1} e_{i-1} - f_{ith}) \quad (\text{II.62})$$

Avec 
$$f_{ith} = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (f_j + g_j x_{j+1}) \quad (\text{II.63})$$

En substituant  $\alpha_i$  dans  $e_i$  et  $\dot{V}_i$  on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_i = -g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i + g_i z_{i+1} \\ \dot{V}_i = -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2) + g_i e_i e_{i+1} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Le terme  $g_i e_i e_{i+1}$  sera éliminé dans la dernière prochaine étape.

### ✚ La n<sup>ieme</sup> étape :

C'est le dernier pas de conception, du moment que le contrôle final  $u$  apparaît dans la dérivée de  $e_n$

$$\dot{e}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = g_n u + f_{nth} \quad (\text{II.65})$$

Avec

$$f_{nth} = f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (f_j + g_j x_{j+1}) \quad (\text{II.66})$$

la loi de control  $u$  est conçu pour rendre négative définie la dérivée de la fonction de Lyapunov globale.

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}e_n^2 \quad (\text{II.67})$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + e_n \dot{e}_n \quad (\text{II.68})$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = -\sum_{j=1}^{n-1}(k_j e_j^2) + e_j \overbrace{(g_{n-1}z_{n-1} + f_{nth} + g_n u)}{=-k_n e_n} \quad (\text{II.69})$$

Le choix du control actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n} (-k_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} - f_{nth}) \quad (\text{II.70})$$

Nous avons maintenant conçu une loi de commande dans la contre réaction pour la stabilisation du système (II.39) d'ordre n.

U existe et est une fonction de stabilisation régulière dans la boucle de retour, d'après le théorème d'Artstein le système dynamique (II.39) a une loi de contrôle basée sur la fonction de Lyapunov.

En substituant  $u$  dans  $e_n$  et  $\dot{V}_n$  on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_n = -k_{n-1} e_{n-1} - g_{n-1} e_{n-1} \\ \dot{V}_n = -\sum_{j=1}^n (k_j e_j^2) \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

$$\dot{V}(e) < 0 \quad \forall e \neq 0$$

Alors Le point d'équilibre  $x = x_{eq}$  de (II.39) est asymptotiquement stable car la fonction  $V(e)$  est continument différentiable ayant les propriétés citées dans le théorème de Lassale, D'où le système global dans le système des coordonnées  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1 - g_1 e_2 \\ \dot{e}_i = -k_i e_i - g_{i-1} e_{i-1} + g_i e_{i+1}; (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \dot{e}_n = -k_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

est globalement asymptotiquement stable(GAS).

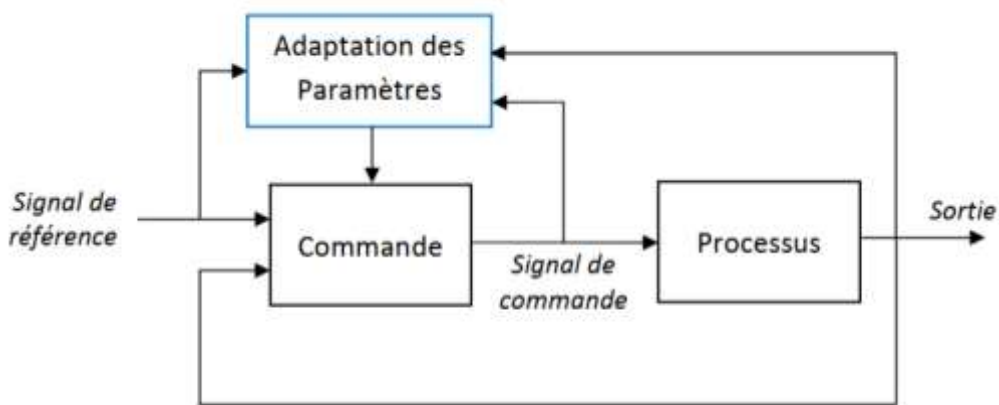
Il est clair que la méthode du backstepping :

- Peut être appliquée à tout système d'ordre n, en fournissant les équations de l'état du système dans la forme correcte.
- C'est une approche à conception flexible comparée à d'autres méthodes.
- C'est une méthode systématique qui consiste en n étapes de déterminé la fonction de Lyapunov à chaque pas de retour en arrière.

**II.5.2 Approche adaptative :**

Le contrôle adaptatif des systèmes non linéaires est considéré comme une région de la recherche passionnante impressionnant de sa rapide prospérité grâce aux résultats de stabilité globale et de poursuite pour une grande classe des systèmes non linéaires de forme de boucle de retour stricte. Basé sur la théorie de Lyapunov, c.-à-d., la procédure de conception accomplit les objectifs désirés en construisant une fonctions de Lyapunov convenable et rendre sa dérivé définie négative [46]- [47].

La figure II.15 donne le schéma de principe d’une commande adaptative.



**Figure (II.15) :** Schéma de principe de la commande adaptative.

**II.5.2.1 Principe de la commande backstepping adaptative**

Le backstepping adaptatif est une méthode qui résulte de la fusion de la synthèse adaptative par Lyapunov et la technique récursive du backstepping non adaptatif. Toutefois, la combinaison directe de ces deux méthodes conduit, en général, à des contrôleurs trop élevés

**II.5.2.2 Algorithme de base :**

Considérons un système non linéaire transformable dans la forme de boucle de retour paramétrique stricte :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, t)x_2 + f_1(x_1, t) + \theta^T F_1(x_1, t) \\ \quad \quad \quad i = (1, \dots, n - 1) \\ \dot{x}^n = g_n(x_n, t)u + f_n(x_n, t) + \theta^T F_n(x_n, t) \\ \quad \quad \quad y = x_1 \\ \quad \quad \quad x_{t0} = x_0 \end{cases} \quad (II.73)$$

Ou  $x_i = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^i, i = (1, \dots, n - 1), u \in R, y \in R$  Sont respectivement vecteurs

des états d'entrées et de sortie,  $\theta \in R^p$  est le vecteur des paramètres constantes inconnues à estimer.

$g_i(\cdot) \neq 0, f_i, F_i, (i = 1, \dots, n - 1)$  Sont des fonctions non linéaires continues et dérivables.

$g_n(\cdot) \neq 0, f_n, F_n, (i = 1, \dots, n - 1)$  Sont des fonctions non linéaires continues.

Et un modèle de référence connu, dérivable et borné comme suit.

$$\begin{cases} \dot{x}_{di} = f_{di}(x_{di}, t) \\ (i = 1, \dots, m); n \leq m \\ y_d = x_{d1} \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

Où  $x_d = [x_{d1}, x_{d2}, \dots, x_{di}]^T \in R^m, y_d \in R$  sont respectivement le vecteur des états et de sortie du signal référence.

$f_{di} = (\cdot), (i = 1, 2, \dots, m)$ . Sont des fonctions non linéaires connues et dérivables.

Notre objectif est de concevoir un contrôleur adaptatif dans la contre réaction pour le système (II.70) qui garantit la stabilité globale, et force la sortie  $y = x_1(t)$  du système à suivre asymptotiquement la sortie  $y_d = x_d(t)$ . du modèle référence, c. à d. :

$$\|y - y_d\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{II.75})$$

La procédure de conception est récursive, durant la  $i^{\text{ième}}$  étape, le  $i^{\text{ième}}$  sous système est stabilisé sous une fonction de Lyapunov appropriée  $V_i$  par la mise au point d'une fonction stabilisante  $\alpha_i$  et une fonction de réglage  $\tau_i$ . La loi de mise à jour pour le paramètre estimé  $\hat{\theta}$  et le contrôle actuel  $u$  n'est déterminée qu'en dernière étape.

La conception par la méthode du backstepping est exécutée en n étapes. Rappelons que l'objectif de la commande dans ce cas, est de stabiliser le système non linéaire (II.73).

### Première étape

Commençons par le sous-système  $x_1$ .

Introduisant la première variable du backstepping comme l'erreur de poursuite :

$$e_1 = x_1 - x_{d1} \quad (\text{II.76})$$

et l'erreur des paramètres inconnus  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  avec :

$\theta$  : est la valeur du paramètre adaptatif courant.

$\hat{\theta}$  : est la valeur du paramètre adaptatif estimé.

$\tilde{\theta}$  : est la valeur de l'erreur sur paramètre adaptatif.

Et comme deuxième variable,  $e_2 = x_2 - x_{d2} - \alpha_1$

Ou  $e_1, e_2$  sont des variables virtuelles de la procédure et  $\alpha_1$  est utilisé comme une loi de contrôle pour stabiliser la première équation du système qui sera défini plus tard.

Réécrivant le premier sous-système comme :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{d1} \\ \dot{e}_1 &= g_1(x_2 - x_{d2}) + f_1 + \hat{\theta}^T F_1 - \tilde{\theta}^T F_1 - f_{d1} + g_1 x_{d2} \end{aligned}$$

Pour une uniformité et une simplification de notation pour toutes les étapes on pose :

$$F_{1tp} = F_1$$

$$f_{1tp} = f_1 - f_{d1} + g_1 x_{d2}$$

$$\dot{e}_1 = g_1 e_2 + g_1 \alpha_1 + f_{1tp} + \hat{\theta}^T F_{1tp} - \tilde{\theta}^T F_{1tp} \quad (\text{II.77})$$

Pour trouver cette loi de contrôle nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.78})$$

Ou  $\Gamma$  définie une matrice positive. La dérivée de la fonction de Lyapunov est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e_1 (g_1 e_2 + g_1 \alpha_1 + f_{1tp} + \hat{\theta}^T F_{1tp} - \tilde{\theta}^T F_{1tp}) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e_1 (g_1 e_2 + g_1 \alpha_1 + f_{1tp} + \hat{\theta}^T F_{1tp}) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\tilde{\theta}} - e_1 F_{1stp}) \quad (\text{II.79}) \end{aligned}$$

Si  $x_2$  était notre loi de contrôle actuelle, alors  $e_2 \cong 0$  sera nulle c. à d

$x_2 = \alpha_1$  Donc, nous en éliminerons  $\tilde{\theta}$  de  $\dot{V}_1$  avec une loi de mise à jour loi  $\dot{\tilde{\theta}} = \tau_1$

ou  $\tau_1 = e_1 F_{stp1}$

Est la fonction de réglage. Pour rendre  $\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2$  définie négative on choisit  $\alpha_1$  comme :

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} (-k_1 e_1 - f_{stp1} - \hat{\theta}^T F_{1stp}) \quad (\text{II.80})$$

Ou  $k_1 > 0$  est une constante de conception positive.

$\Gamma = \Gamma^T$  est la matrice de gain d'adaptation

Du moment que  $x_2$  n'est pas notre loi de contrôle actuelle, alors  $e_2 \neq 0$ ,  $\dot{\hat{\theta}} = \tau_1$

n'est pas utilisée comme une loi de mise à jour. Cependant, nous pouvons retenir  $\tau_1$ , comme notre première fonction de réglage  $\alpha_1$  et comme notre première fonction stabilisante. Donc on remet approximativement la décision sur  $\hat{\theta}$  et on tolère la présence  $\tilde{\theta}$  de dans  $\dot{V}_1$

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 + g_1 e_1 e_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \quad (\text{II.81})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_2 e_1 e_2$  sera éliminé dans la prochaine étape. L'équation en boucle fermée est :

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1 e_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \quad (\text{II.82})$$

### ✚ Deuxième étape :

Réécrivant la deuxième équation du système comme :

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{d2} - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{II.83})$$

Sachant que :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{d1}} \dot{x}_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T} \dot{\hat{\theta}}^T \quad (\text{II.84})$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1 + \hat{\theta}^T F_1 - \tilde{\theta}^T F_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{d1}} \dot{x}_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T} \Gamma e_1 F_{1stp} \quad (\text{II.85})$$

Et introduisant la troisième variable de la procédure

$$e_3 = x_3 - x_{d3} - \alpha_2 \quad (\text{II.86})$$

Avec  $\alpha_2$  est utilisé comme une loi de contrôle pour stabiliser la seconde équation du système :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = & g_2(e_3 + \alpha_2) + f_2 + \hat{\theta}^T F_2 - \tilde{\theta}^T F_2 + f_{d2} + g_2 x_{d3} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1 + \hat{\theta}^T F_1 - \\ & \tilde{\theta}^T F_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{d1}} f_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T} \dot{\hat{\theta}}^T. \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

Pour une uniformité et une simplification de notation pour toutes les étapes on pose :

$$F_{2tp} = F_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} F_1$$

$$f_{2tp} = f_2 - f_{d2} + g_2 x_{d3} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}^T} \Gamma e_1 F_{1stp}$$

Donc

$$\dot{e}_2 = g_2 e_3 + g_2 \alpha_2 + f_{2tp} + \hat{\theta}^T F_{2tp} - \tilde{\theta}^T F_{2tp}$$

Pour trouver cette loi de commande nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.88})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_1 e_1^2 + e_1 g_1 e_2 + f_{1tp} + \hat{\theta}^T + + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left( \dot{\tilde{\theta}} - e_1 F_{1stp} \right) + e_2 (g_2 e_3 + g_2 \alpha_2 + \\ & f_{2tp} + \hat{\theta}^T F_{2tp} - \tilde{\theta}^T F_{2tp}). \end{aligned} \quad (\text{II.89})$$

Si  $x_3$  était notre loi de commande actuelle, alors  $e_3 \cong 0$  sera nulle c. à. d  $x_3 = \alpha_2$ . Donc, nous en éliminerons  $\tilde{\theta}$  avec une loi de mise à jour loi  $\dot{\hat{\theta}} = \tau_2$ , où

$$\tau_2 = \tau_1 + e_2 F_{2stp}$$

Est la fonction de réglage

Pour rendre  $\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2$ , négative définie on choisit  $\alpha_2$  comme :

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2} (-k_2 e_2 - g_1 e_1 - f_{2stp} - \hat{\theta}^T F_{2stp}) \quad (\text{II.90})$$

Ou  $k_1$  est une constante de conception positive

$\Gamma = \Gamma^T$  est la matrice de gain d'adaptation

Du moment que  $x_3$  n'est pas notre loi de contrôle actuelle, alors  $e_3 \neq 0$ ,  $\hat{\theta} = \tau_2$

n'est pas utilisée comme une loi de mise à jour. Cependant, nous pouvons retenir  $\tau_2$ , comme notre deuxième fonction de réglage et  $\alpha_2$  comme notre deuxième fonction stabilisante. Donc on remet approximativement la décision sur  $\hat{\theta}$  et on tolère la présence  $\tilde{\theta}$  de dans  $\dot{V}_2$

$$\dot{V}_2 = -k_2 e_2^2 - k_1 e_1^2 + g_2 e_2 e_3 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_2) \quad (\text{II.91})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_2 e_2 e_3$  sera éliminé dans la prochaine étape. L'équation en boucle fermée est :

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1 e_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) \quad (\text{II.92})$$

### ✚ La $i^{\text{ème}}$ Etape, ( $i = 3, \dots, n - 1$ )

Après quelques manipulations algébriques la  $i^{\text{ème}}$  variable de la procédure

$$e_i = x_i - x_{di} - \alpha_{i-1}$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{e}_i = g_i e_{i+1} + f_{istp} + \theta^T F_{istp}$$

Avec :

$$F_{itp} = F_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} F_j$$

$$f_{itp} = f_i - f_{di} + g_i x_{d(i+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + f_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} f_{dj} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \Gamma e_j F_{jstep}$$

La fonction stabilisante  $\alpha_i$  et la de mise à jour  $\hat{\theta}$  sont conçu maintenant pour rendre la fonction de Lyapunov  $\dot{V}_i$  suivante :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.93})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + e_i \dot{e}_i + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

$$\dot{V}_i = e_i (g_{i-1} x_{i-1} + g_i e_{i+1} + g_i \alpha_i + f_{istp} + \hat{\theta}^T F_{istp}) - \sum_{j=1}^{i-1} k_j e_j + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ith} \quad (\text{II.94})$$

Pour le paramètre inconnu  $\theta$ , nous employons un nouveau paramètre à estimer  $\hat{\theta}$  dans l'expresion de  $\alpha_i$  comme :

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i} (-c_i e_i + g_{i-1} e_{i-1} - f_{istp} - \hat{\theta}^T F_{istp}) \quad (\text{II.95})$$

En substituant  $\alpha_i$  dans  $\dot{V}_i$  et  $\dot{e}_i$  on trouve :

$$\dot{V}_i = -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2) + g_i e_i e_{i+1} + f_{istp} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\tilde{\theta}}_{ith} - \Gamma e_i F_{istp}) \quad (\text{II.96})$$

le terme de l'erreur sur le paramètre à estimer  $\tilde{\theta}^T$  peut être éliminé par la loi de mise à jour :  $\dot{\tilde{\theta}}_{ith} = \Gamma e_i F_{istp}$ , Pour une stabilité globale, le dernier terme  $g_i e_i e_{i+1}$  sera éliminé dans la prochaine étape.

### ✚ La $n^{ième}$ Etape :

C'est la dernière étape de conception, du moment que le contrôle actuelle  $u$  apparaît dans la dernière équation  $\dot{e}_n$

$$\dot{e}_n = e_n = x_n - x_{dn} - \alpha_{n-1} = g_n u + f_{nstp} + \theta^T F_{nstp} \quad (\text{II.97})$$

Avec :

$$F_{ntp} = F_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} F_j$$

$$f_{ntp} = f_n - f_{dn} - \sum_j^{n-1} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} g_j x_{(j+1)} + f_j \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{aj}} f_{aj} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}^T} \Gamma e_j F_{jstp}$$

La loi de contrôle  $u$  est conçu pour rendre le dérivé de la fonction Lyapunov globale définie négative :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} e_n^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.98})$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + e_n \dot{e}_n + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}.$$

$$\dot{V}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} (k_j e_j^2) + e_n (g_{n-1} e_{n-1} + g_n u + f_{ntp} + \hat{\theta}^T F_{ntp}) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{nth}. \quad (\text{II.99})$$

Le choix du contrôle actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n} (-c_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} - f_{nstp} - \hat{\theta}^T F_{nstp}) \quad (\text{II.100})$$

En substituant  $u$  dans  $e_n$  et  $\dot{V}_n$  on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_n = -k_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} + \hat{\theta}^T F_{nstp} \\ \dot{V}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} (k_j e_j^2) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_{nth} + \Gamma e_n F_{nstp}) \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

Le terme de l'erreur  $\tilde{\theta}$  dans  $\dot{V}_n$  sera éliminé par loi de mise à jour finale :

$\dot{\hat{\theta}}_{nth} = \Gamma e_n F_{nstp}$  Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = -\sum_{j=1}^n (k_j e_j^2) \quad (\text{II.102})$$

D'où le système global dans les coordonnées

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 - g_1 e_2 + \hat{\theta}^T F_1 \quad (\text{II.103})$$

$$\dot{e}_i = -k_i e_i - g_{i-1} e_{i-1} + \hat{\theta}^T F_{istp} \quad (\text{II.104})$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$\dot{e}_n = -c_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} + \hat{\theta}^T F_{nstp} \quad (\text{II.105})$$

$$e_i = x_i - x_{di} - \alpha_{i-1}; i = 1, \dots, n; \alpha_0 = 0 \quad (\text{II.106})$$

La loi de mise à jour :  $\dot{\hat{\theta}}_{ith} = \Gamma e_i F_{istp}; i = 1, \dots, n$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$   $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ , alors  $\dot{V}_n < 0$  est négative définie, le système d'équation des erreurs en  $e_i (i = 1, \dots, n)$  correspondant au système final en boucle fermé, le système des lois de mise à jour  $\hat{\theta}_i, (i = 1, \dots, n)$  admet un point d'équilibre

$$e_{eq} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T = 0.$$

Globalement uniformément asymptotiquement stable. Puisque le modèle de référence  $x_{d1}$  est borné et sachant que  $e_1 = x_1 - x_{d1}$  ce ci garantit que l'état  $x(t)$  la loi de contrôle actuelle  $u$  le vecteur des paramètres estimés  $\hat{\theta}_i$  sont globalement bornés et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(t)| = 0.$$

## II.6 Conclusion :

Ce chapitre a été consacré dans un premier temps à une présentation générale des concepts de base de la commande par mode glissant (condition d'existence, calcul de commande, phénomène de Chattering...).

En deuxième temps, nous avons fait une description de la technique backstepping ensuite les deux approches non adaptatives et adaptatives ont été présentées.

L'application de backstepping aux systèmes du deuxième ordre puis, généralisée au système d'ordre  $n$ . Etape par étape, une commande est conçue et une analyse de stabilité est établie. A l'étape finale, une loi de commande globale assurant la stabilité en boucle fermée du système est construite via une fonction de Lyapunov, Pour valider cette technique, nous l'avons appliqué sur un système non linéaire : pendule inversé. C'est l'objective du prochain chapitre.

### III.1 Introduction :

Dans cette partie on s'intéresse à la synthèse des commandes sur le pendule inversé. Ce pendule est représenté sous sa forme simplifiée (figure. I.2) ayant la force  $F$  à appliquer au chariot, la position angulaire  $\theta$  du pendule et la position du chariot comme sorties du système.

Dans la première partie, on a appliqué la conception des algorithmes de commande par mode glissant sur un système de 2<sup>ème</sup> ordre ensuite sur le pendule inversé.

Puis on présentera l'application de la commande backstepping avec les deux approches « non adaptative, adaptative », leurs mises en œuvre sur pendule inversé.

Enfin, On a élaboré une nouvelle commande associant les deux techniques mentionner au-dessus : la commande hybride backstepping mode glissant commencée par une synthèse à base des équations mathématiques qui expliquent le raccordement entre les deux commandes avec une application au pendule inversé. Les deux méthodes exploitent la notion de fonction de Lyapunov, c'est le point commun qui pourrait nous aider à construire cette commande.

### III.2 Synthèse de la commande d'un pendule inversé par mode glissant [48] :

#### III.2.1 Formulation mathématique :

La modélisation du processus est une étape primordiale dans la mise en œuvre d'un contrôleur. En général, un système non linéaire ayant  $u$  pour entrée de commande et  $y$  comme sortie, peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, u) \\ y = H(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où  $F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, u)$  et  $H(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  sont deux fonctions non linéaires continues, représentant les états du système. Cette description ne permet pas la mise en œuvre de contrôleurs pour assurer la poursuite des trajectoires. Pour pallier à ce problème, la linéarisation entrée-sortie a été largement utilisée, afin de trouver une relation explicite entre l'entrée du système et sa sortie, en utilisant des techniques de la géométrie différentielle [32]. Ainsi un système non linéaire d'ordre  $n$  affine dans la commande peut être décrit par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Où  $f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  et  $g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  sont des fonctions non linéaires continues. Cette nouvelle description permet d'utiliser facilement les différentes approches basées sur la rétroaction pour résoudre les problèmes de poursuites de trajectoires et de régulations.

### III.2.2 Synthèse de la commande par mode glissant :

Conformément à l'équation précédente, la forme canonique d'un système non linéaire de second ordre peut être écrite comme suit [49] voir page 14 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Ainsi le problème de poursuite de trajectoire consiste à déterminer la loi de commande  $u(x)$  qui permet d'assurer la convergence du vecteur d'état

$x(t) = [x_1, x_2]$  vers le vecteur d'état désiré  $x_d(t) = [x_{1d}, x_{2d}]$  avec une erreur de suivi sur la première composante du vecteur d'état  $x(t)$  :

$$e = x_{1d}(t) - x_1(t) \quad (\text{III.4})$$

En général, la surface de glissement d'ordre 1 est définie par :

$$S(x) = \dot{e} + \lambda e = \lambda(x_{1d} - x_1) + x_{2d} - x_2 \quad (\text{III.5})$$

Où  $\lambda$  est une constante de glissement strictement positive.

En dérivant l'équation (III.5) nous obtenons :

$$\dot{s} = \lambda \dot{e} + \ddot{e} = \lambda \dot{e} + \dot{x}_{2d} - \dot{x}_2 = \lambda \dot{e} + \dot{x}_{2d} - f(x) - g(x)u \quad (\text{III.6})$$

Dans le but de synthétiser la loi de commande, définissons la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V = \frac{1}{2} s^2(x) \quad (\text{III.7})$$

En satisfaisant la condition suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d(s^2(x))}{dt} \leq -K|s| < 0 ; K \geq 0 \quad (\text{III.8})$$

Cette condition peut être réécrite comme suit :

$$s\dot{s} \leq -K|s| < 0 \text{ ou } \text{sgn}(s)\dot{s} \leq -K \quad (\text{III.9})$$

Par conséquent, le problème de contrôle est d'obtenir la loi de commande  $U$  appropriée, qui garantit la condition de glissement

$$s\dot{s} = s(\lambda\dot{e} + \ddot{x}_{1d} - f(x, t) - g(x, t)u) \leq -K|s| \quad (\text{III.10})$$

Alors :

$$\text{sgn}(s)(\lambda\dot{e} + \ddot{x}_{1d} - f(x, t) - g(x, t)u) \leq -K \quad (\text{III.11})$$

Si les fonctions  $f(x, t)$  et  $g(x)$  sont connus, alors la loi de commande appropriée peut être obtenue comme suit :

$$u = g^{-1}(\lambda\dot{e} - f(x, t) + \ddot{x}_{1d} + K\text{sgn}(s)) \quad (\text{III.12})$$

Cependant, la présence de la fonction signe, dans la commande par mode glissant, provoque un phénomène de broutement généré par des variations brusques et rapides du signal de commande, ce qui peut exciter les hautes fréquences du processus et l'endommager. Pour pallier à ce problème, on a retenue la solution de Slotine et Lie [32] qui consiste à introduire une bande de transition autour de la surface de glissement permettant de transformer la fonction signe en saturation décrite par l'équation (III.13), et ainsi éliminer le broutement.

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\emptyset}\right) = \begin{cases} \frac{s}{\emptyset} & \text{si } \left|\frac{s}{\emptyset}\right| \leq 1 \\ \text{sgn}\left(\frac{s}{\emptyset}\right) & \text{si } \left|\frac{s}{\emptyset}\right| \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Où  $\emptyset$  représente la bande de transition de la surface de glissement.

### III.2.2 Stabilisation du pendule inversé par mode glissant :

La dynamique complète d'un pendule inversé, peut être représentée par deux sous-systèmes non linéaires d'ordre deux [49]. Le premier décrit la dynamique du chariot comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_x(x) + g_x(x)u_x \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Avec :

$$\begin{cases} g_x = \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \\ f_x = \frac{m l N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{m^2 l^2 g \cos \theta \sin \theta}{N l - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Où  $u_x$  et  $y_1$  sont respectivement l'entrée de commande du système (la force  $F$ ) et la sortie déplacement  $x$  du chariot.

Le second sous-système représente la dynamique du pendule qui est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_\theta(x) + g_\theta(x)u_\theta \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

avec :

$$\begin{cases} g_\theta = -\frac{m l}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \cos \theta \\ f_\theta = \frac{m g l}{N} \sin \theta + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 \theta \sin \theta}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta)} - \frac{\dot{\theta}^2 m^2 l^2 \cos \theta \sin \theta}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Où  $u_\theta$  et  $y_2$  sont respectivement l'entrée de commande du système (la force  $F$ ) et la position angulaire  $\theta$  du pendule.

Ces deux sous systèmes sont utilisés pour asservir la position du chariot et du pendule vers les états désirés. Les surfaces de glissement sont définies comme suit :

$$\begin{cases} s_x = \lambda_x (x_{d1} - x_1) + (x_{d2} - x_2) \\ s_\theta = \lambda_\theta (x_{d3} - x_3) + (x_{d4} - x_4) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Conformément à la loi de commande par mode glissant synthétisée au paragraphe précédent (équation III.12), dans le cas où la dynamique complète du pendule inversé est parfaitement connue, le contrôle de la position du chariot et la stabilisation du pendule, peuvent être assurés par les lois de commandes (III.19), et (III.20) respectivement :

$$u_x = g_x^{-1} \left( \lambda_x e - f_x(x, t) + \ddot{x}_{1d} + K_x \text{sat} \left( \frac{s_x(x)}{\phi_x} \right) \right) \quad (\text{III.19})$$

$$u_\theta = g_\theta^{-1} \left( \lambda_\theta e - f_\theta(x, t) + \ddot{x}_{3d} + K_\theta \text{sat} \left( \frac{s_\theta(x)}{\phi_\theta} \right) \right) \quad (\text{III.20})$$

### III.2.3 Synthèse de la commande par la technique de backstepping:

#### III.2.3.1 approche non adaptative :

On utilise la forme canonique d'un système non linéaire de second ordre (III.3)

Ainsi le problème de poursuite de trajectoire consiste à déterminer la loi de commande  $u(x)$  qui permet d'assurer la convergence du vecteur d'état  $x(t) = [x_1, x_2]$  vers le vecteur d'état désiré  $x_d(t) = [x_{1d}, x_{2d}]$  avec une erreur de suivi sur la première composante du vecteur d'état  $x(t)$  :

#### Etape 1 :

Pour le premier sous-système (III.3.a), on choisit l'état  $x_2$  comme étant l'entrée virtuelle de l'état  $x_1$ , on définit l'erreur de poursuite  $e_1$  tel que :

$$e_1 = x_1 - x_d \quad (\text{III.21})$$

Et la fonction stabilisante suivante choisit de manière à éliminer la non linéarité du sous-système :

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= -k_1 e_1 \\ &= -k_1(x_1 - x_d) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Où

$$k_1 \text{ gain} > 0.$$

Cette solution est conçue pour stabiliser le premier sous-système et puisque ce n'est pas le cas. On définit la deuxième erreur par :

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 - \dot{x}_d \quad (\text{III.23})$$

$e_2$  est la variable qui exprime la réalité que  $x_2$  n'est pas la commande exacte. On choisit la première fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (\text{III.24})$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 \quad (\text{III.25})$$

Par arrangement des équations (III.21), (III.22), (III.23), on obtient l'équation :

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 \quad (\text{III.26})$$

Et l'équation (II.25) devient :

$$\dot{V}_1 = k_1 e_1^2 + e_1 e_2 \quad (\text{III.27})$$

Le terme  $e_1 e_2$  sera éliminé dans l'étape suivante ou on abordera le deuxième sous-système.

### ✚ *Etape 2*

La dérivée de  $e_2$  et exprimée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{x}_d \\ &= \dot{x}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_d} \dot{x}_d - \ddot{x}_d \\ &= f + gu - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_d} x_d - \ddot{x}_d \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Prenons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{III.29})$$

La dérivée de  $V_2$  est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -k_1 e_1^2 + e_2 [ f + g u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_d} x_d - \ddot{x}_d ] \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

La commande  $u$  est choisie tel que  $\dot{V}_2 < 0$  (condition de stabilité de Lyapunov), on obtient

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g} [-k_2 e_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_d} \dot{x}_d + \ddot{x}_d - f] \quad (\text{III.31}) \\ &= \frac{1}{g} [-k_2 e_2 - f - k_1 \dot{x}_1 + k_1 \dot{x}_d + \ddot{x}_d] \\ u &= \frac{1}{g} [-k_2 e_2 - f - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_d] \end{aligned}$$

Avec gain  $k_2 > 0$

$$V_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \quad (\text{III.32})$$

Ceci traduit la stabilité, en boucle fermée du système.

Dans le cas où la dynamique complète du pendule inversé est parfaitement connue, le contrôle de la position du chariot et la stabilisation du pendule, peuvent être assurés par les lois de commandes (III.33), et (III.34) respectivement :

$$u_x = g_x^{-1}(-K_1 e_1 - f_x(x, t) + \ddot{x}_d - K_2 e_2) \quad (\text{III.33})$$

$$u_\theta = g_\theta^{-1}(-K_1 e_1 - f_\theta(x, t) + \ddot{x}_d - K_2 e_2) \quad (\text{III.34})$$

### III.2.3.1 Approche adaptative :

L'application de l'approche adaptative backstepping à la commande de système second ordre est effectuée en deux étapes :

Soit le système (III.3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Avec  $f$  et  $g$  sont des paramètres inconnus. Pour concevoir une commande adaptative dans cette partie, on a :

$$\tilde{f} = f - \hat{f} \quad (\text{III.35})$$

$$\tilde{g} = g - \hat{g}$$

#### Etape 1 :

Cette première étape consiste à identifier l'erreur et sa dynamique :

$$e_1 = x_1 - x_{d1} \quad (\text{III.36})$$

$$\dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{d1} \quad (\text{III.37})$$

Considérons la fonction de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \hat{f}^T \Gamma_1^{-1} \hat{f} + \frac{1}{2} \hat{g}^T \Gamma_2^{-1} \hat{g} \quad (\text{III.38})$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 + \hat{f}^T \Gamma_1^{-1} (\Gamma_1 F_{1stp} e_1 - \dot{\hat{f}}) + \hat{g}^T \Gamma_2^{-1} (\Gamma_2 F_{2stp} e_1 - \dot{\hat{g}}) \quad (\text{III.39})$$

On choisit  $\alpha_1 = -k_1 e_1$

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 \text{ Avec } k_1 > 0 ; w_2 = 0 \text{ et } w_1 = 0$$

✚ **Etape 2 :**

On considère la deuxième erreur de système et :

$$e_2 = x_2 + k_1 e_1 - \dot{x}_d \quad (\text{III.40})$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_d \quad (\text{III.41})$$

La fonction de Lyapunov  $V_2$  et sa dérivée  $\dot{V}_2$  sont :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{III.42})$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (\text{III.43})$$

$$\dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 + e_2 (e_1 + \hat{f} + \hat{g} u + d + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_d) + \hat{f}^T \Gamma_1^{-1} (\Gamma_1 F_{1stp} e_1 - \dot{\hat{f}}) + \hat{g}^T \Gamma_2^{-1} (\Gamma_2 F_{2stp} e_1 - \dot{\hat{g}}) \quad (\text{III.44})$$

La loi de commande pour  $\dot{V}_2 < 0$  prend la forme suivante :

$$u = \hat{g}^{-1} (-k_1 e_1 - \hat{f} - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_d - k_2 e_2) \quad \text{avec } k_1, k_2 > 0 \quad (\text{III.45})$$

Avec les lois d'adaptation sont :

$$\dot{\hat{f}} = \Gamma_1 e_2.$$

$$\dot{\hat{g}} = \Gamma_2 (-e_1 - \hat{f} - k_1 \dot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_d + k_2 e_2).$$

### III.2.4 Commande hybride backstepping - mode glissant :

La loi de commande est générée selon deux séquences. Dans la première séquence, on utilise la technique du backstepping pour calculer les contrôles virtuels et les fonctions de stabilisation correspondantes. Dans la seconde séquence, on met en évidence la technique du mode glissant pour calculer les contrôles réels dans l'étape finale du backstepping, afin d'assurer la convergence vers zéro des erreurs entre les contrôles virtuels et leurs valeurs désirées. L'introduction de la commande glissante permet d'atténuer les effets perturbateurs. L'hybridation entre la commande mode glissant et backstepping est effectuée par un changement de variable dans la dernière étape. On remplace l'erreur par la surface de glissement.

$$S = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + e_n \quad (\text{III.46})$$

Avec  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n - 1$ .

Pour assurer la convergence de système, on a choisi la fonction de Lyapunov  $V_n$  [94] :

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 + \frac{1}{2} e_2^2 + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} \hat{\theta} \quad (\text{III.47})$$

La loi de commande adaptive Mode Glissant et backstepping est :

$$u = \frac{1}{g_n} \left( -c_n e_n - g_{n-1} e_{n-1} - f_{nstp} - \hat{\theta}^T F_{nstp} - (K + \zeta_n) \text{sgn}(e_2) \right) \quad (\text{III.48})$$

On va présenter dans cette partie les applications de la commande étudiée sur le système non linéaire « pendule inversé sur chariot mobile ».

A partir de (III.47), la loi de commande hybride de pendule inversé est :

a- Pour le chariot :

$$u_x = \hat{g}_x^{-1} \left( -k_2 e_2 - k_1 e_1 - \hat{f}_x - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_d - k_3 \text{sign}(e_2) \right)$$

$$\text{Avec } k_1, k_2, k_3 > 0 \quad (\text{III.49})$$

Avec les lois d'adaptation sont :

$$\dot{\hat{f}}_x = \Gamma_1 e_2$$

$$\dot{\hat{g}}_x = \Gamma_2 (-e_1 - \hat{f}_x - k_1 \dot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_d + k_2 e_2 - k_3 \text{sign}(e_2)) e_2$$

b- Pour le pendule :

$$u_{\theta} = \hat{g}^{-1}(-k_1 e_1 - \hat{f}_{\theta} - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_d - k_2 e_2 - k_3 \text{sign}(S)) \quad (\text{III.50})$$

Avec  $k_1, k_2, k_3 > 0$

Avec les lois d'adaptation sont :

$$\dot{\hat{f}}_{\theta} = \Gamma_1 e_2$$

$$\dot{\hat{g}}_{\theta} = \Gamma_2 (-e_1 - \hat{f}_{\theta} - k_1 \dot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_d + k_2 e_2 - k_3 \text{sign}(e_2)) e_2$$

### III. 3 Conclusion :

Dans ce chapitre, On a appliqué les deux méthodes de contrôle : mode glissant et backstepping sur un pendule inversé. On a élaboré, dans le premier temps, la synthèse d'une loi de commande à structure variable tel que le Mode Glissant sur le pendule inversé. La commande mode Glissant est une commande robuste largement utilisée dans l'industrie pour commander les systèmes non linéaires.

Une autre commande non linéaire a été proposé à savoir un régulateur de type backstepping. Ce régulateur est basé sur une récente méthodologie faisant appel à la fonction de Lyapunov. La synthèse a conduit à un contrôleur non linéaire globalement asymptotiquement stable. Cette technique a été appliquée avec succès pour concevoir des algorithmes de commandes, qui assurent le déplacement du système non linéaire vers une position d'équilibre désirée.

On a une autre approche d'hybridation entre le backstepping et le mode glissant a été présentée pour augmenter davantage les performances de contrôleur.

Les différentes simulations ont permis de vérifier la validité des deux méthodes développées illustrées dans le chapitre suivant.

## IV.1 Introduction :

On a déjà vu dans le chapitre précédent la synthèse des contrôleurs non linéaire en mode glissant et par la technique de backstepping, Alors pour améliorer la stabilité du système ,on combine les avantages de ces techniques en terme de commande hybride mode glissant-backstepping, après une analyse théorique on passe vers la simulation en utilisant le logiciel le plus approprié et utilisable qui est le Matlab ,ce dernier on peut le considérer comme un outil de calcul ainsi que outils de résolution de plusieurs obstacles et problèmes scientifique et industriel.

L'extension graphique de Matlab c'est le Simulink qui nous permet de travailler avec les diagrammes et la possibilité d'exploiter des fonctions prêtes ou personnalisées on bloc.

Afin de valider ces techniques de commande en simulation, on a réalisé des tests qui sont présenté au-dessous ; les résultats de cette simulation donnent la possibilité de mettre en évidence les capacités de trois algorithmes proposés en termes de régulation, poursuite et rejet de perturbation, Enfin une étude comparative sera effectuée. (Voir annexe A).

## IV.2 Simulation du pendule inversé par mode glissant :

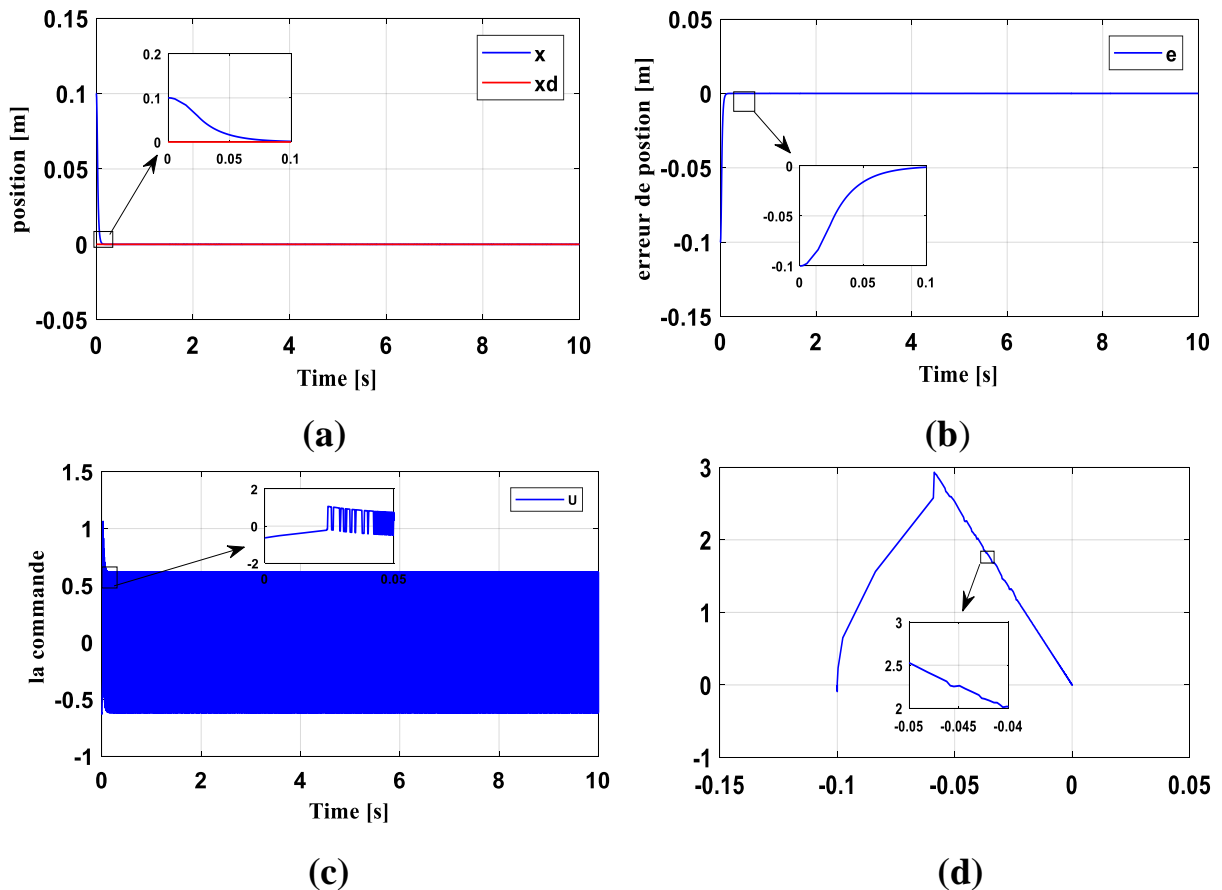
Pour évaluer les performances de la commande par mode glissant pour le pendule inversé, nous avons procédé à une série de simulation.

Les simulations présentées dans cette section sont réalisées sur la position du chariot et position angulaire du pendule. Pour réaliser cette simulation, on prend des différentes trajectoires désirées.

### Première simulation :

La première étape de la simulation consiste à appliquer la commande au pendule inversé avec une fonction (signe).

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot avec les paramètres de la commande utilisés sont :  $\lambda = 3$ ,  $k = 10$ .
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.1) :**(a) Position (b) Signal de l'erreur (c) Signal de commande (d) Plan de phase du chariot avec fonction signe.

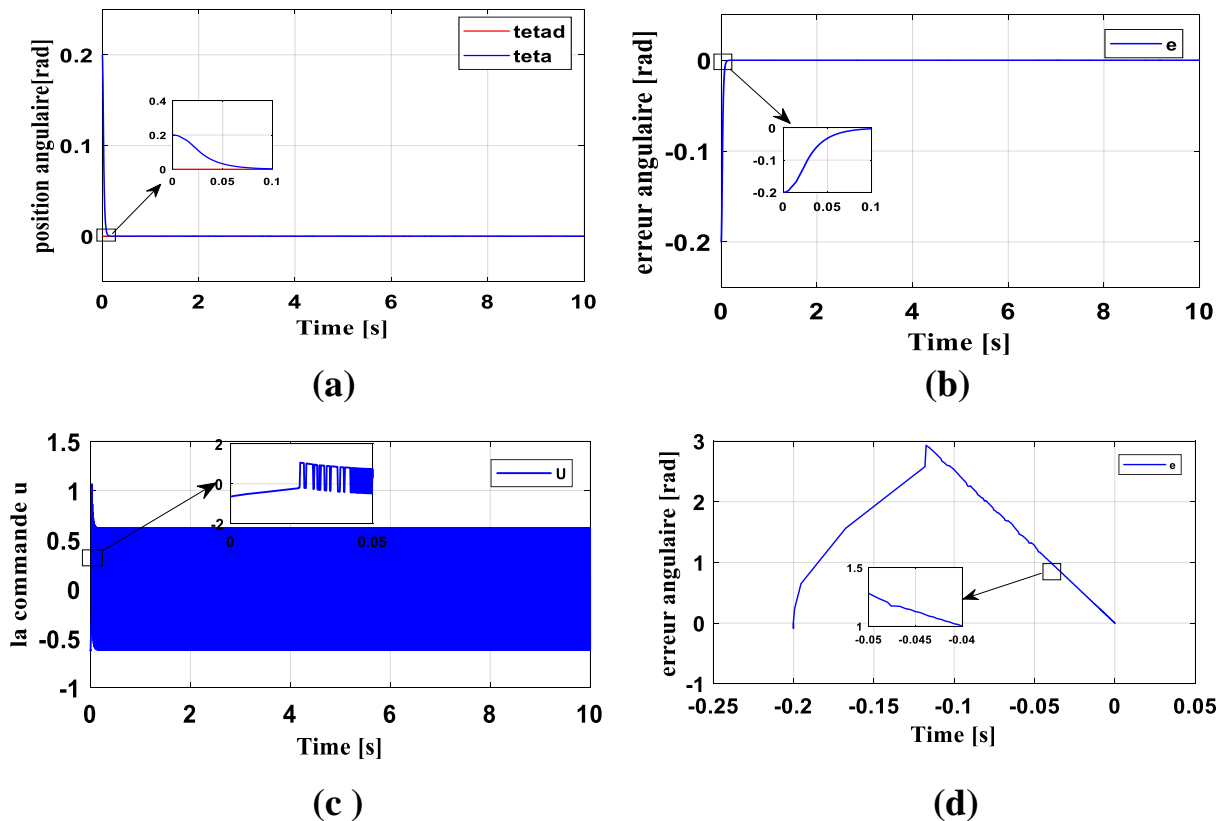
- **Interprétation des résultats de simulation :**

A partir de la figure (IV.1-a) et le tableau (1) (voir l'annexe A) on peut constater que notre commande de glissement arrive à stabiliser notre chariot. En effet elle a pu le ramener de sa position initiale (0,1m) à sa position désirée avec un temps de réponse égale à 0.0488 sec.

On des commutations de haute fréquence sur la commande, figure (IV.1-c) dont la cause est la présence du terme discontinu et c'est ce qu'on appelle le phénomène de broutement qui est représenté sur la figure (II.9).

Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule Le paramètre :  $\lambda = 3$ ,  $k = 29$  :

- ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
- ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.1 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.2) :** (a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de commande

(d) Plan de phase du pendule avec fonction signe.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

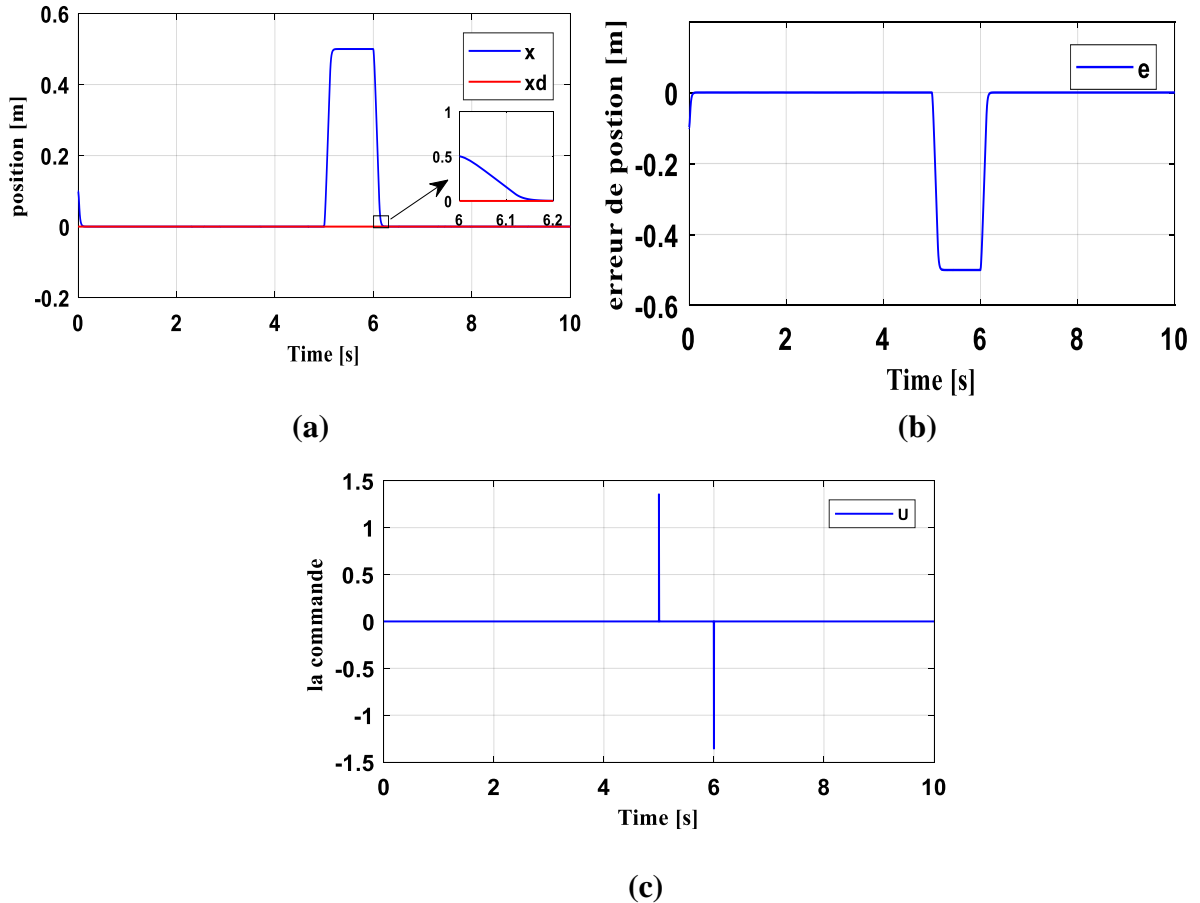
A partir de la figure (IV.1-a) et le tableau (2) (voir l'annexe A), on peut constater que notre commande de glissement arrive à stabiliser le pendule. En effet elle a pu le ramener de sa position initiale (0,2 rad) à sa position d'équilibre instable et de l'y maintenir avec un temps de réponse égale à 0.0300 sec. On remarque des anomalies autour du point d'équilibre comme nous le montre la figure (IV.1-c). On constate aussi des commutations hautes fréquence sur la commande, figure (IV.1-b).

- **Deuxième simulation :**

On va tester la robustesse de la commande sous perturbation. On va appliquer sur le chariot une impulsion de 0.5 N pendant une durée de 1s (5s - 6s), et sur le pendule une autre impulsion de 0.8 N pendant 1s (7s - 8s).

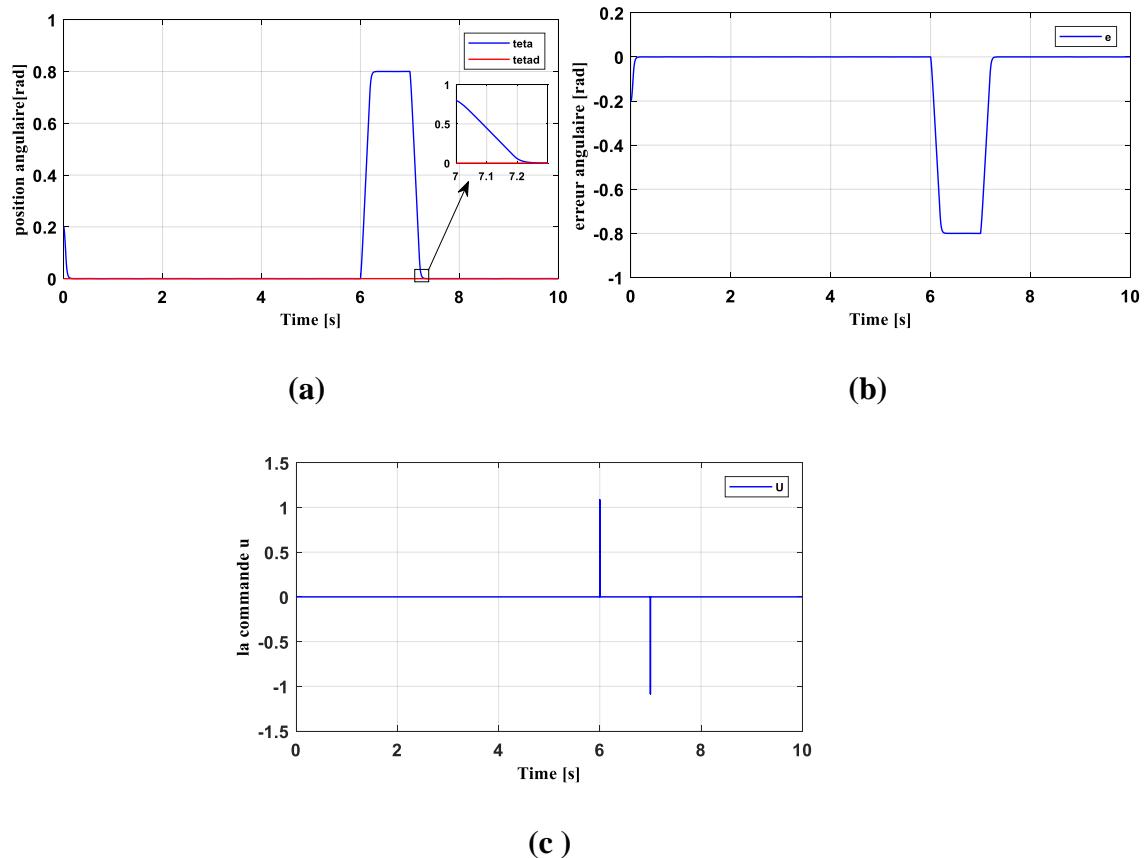
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :

- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.3) :** (a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de commande du chariot avec fonction signe.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :
  - ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.4) :** (a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur (c) Signal de commande du pendule avec fonction signe.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les figures (IV.3), (IV.4) montrent que la réponse est rapide et précise. L'erreur provoquée par la perturbation est compensée instantanément, On peut conclure que :

- Le rejet de perturbation est très rapide.
- Le temps de réponse est très faible.
- L'erreur statique est pratiquement nulle.

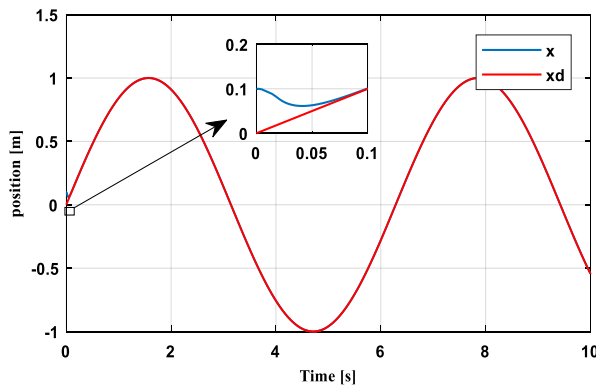
Le système répond positivement à ce test, il est insensible aux perturbations externes, cette commande présente une bonne robustesse.

- **Troisième simulation :**

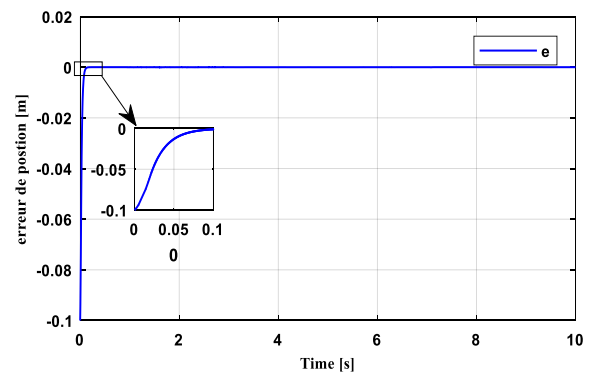
On va tester la robustesse de cette commande en changeant la trajectoire désirée avec une référence sinusoïdale

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :

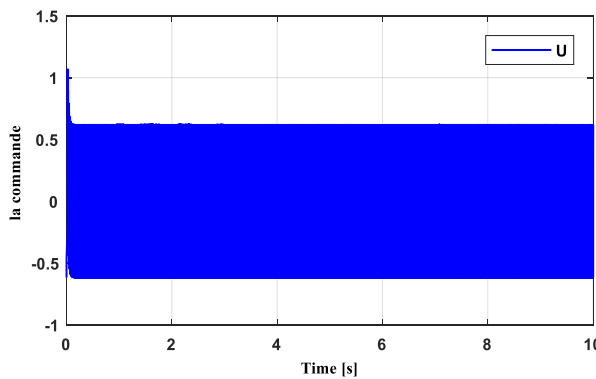
- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin t$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



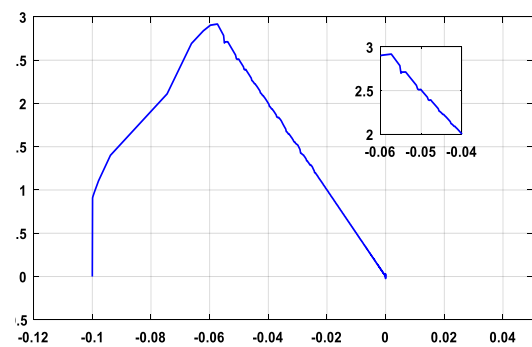
(a)



(b)



(c)



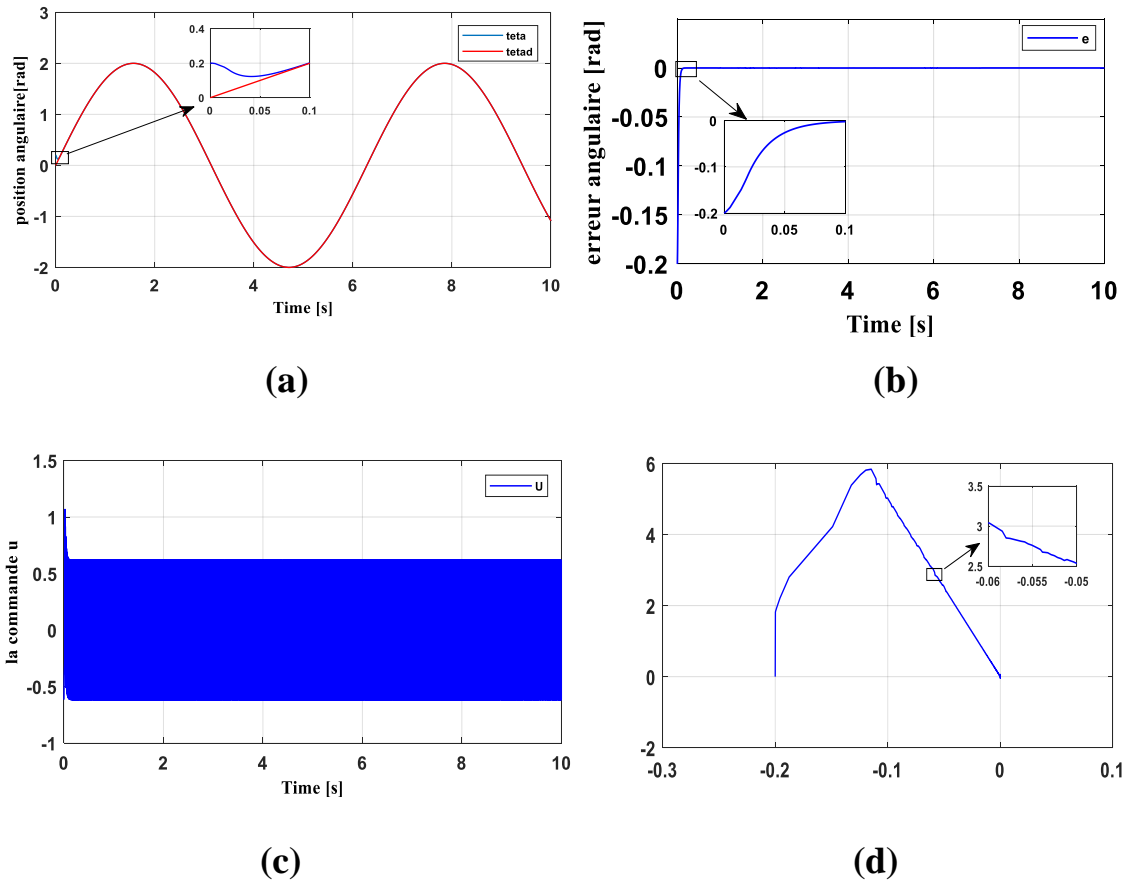
(d)

**Figure (IV.5) :** (a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de la commande, (d) Plan de la phase du chariot avec fonction signe.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les figures. (IV.5) présentent les résultats de simulation de la commande par mode glissant, On remarque que la sortie suit la référence rapidement, le problème de suivi de trajectoires a été appréhendé. Le suivi est très satisfaisant.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :
  - ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin t$ .
  - ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.6) :** (a) Position, (b) Signale de l'erreur, (c) Signale de commande, (d) Plan de la phase du pendule avec fonction signe.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

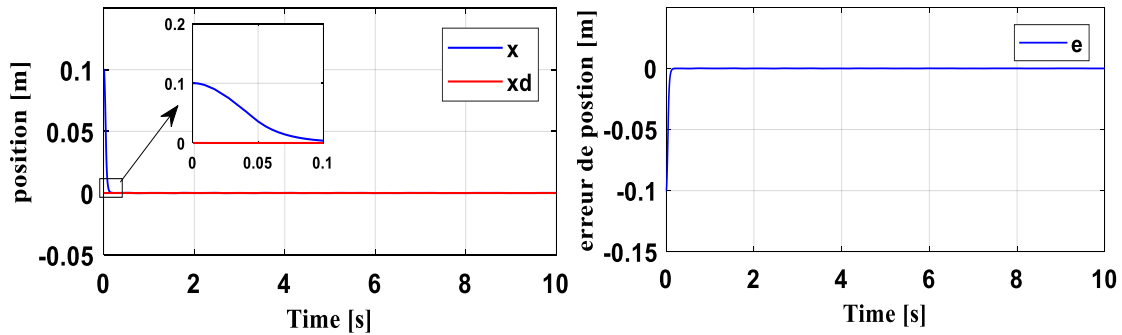
Les figures. (IV.6) présentent les résultats de simulation de la commande par mode glissant, On remarque que la sortie suit la référence rapidement, le problème de suivi de trajectoires a été appréhendé. Le suivi est très satisfaisant. Les erreurs de suivi sont négligeables comme le montrent les figures.

L'avantage que procure la commande par mode glissant est sa robustesse vis-à-vis des perturbations en régulation et en poursuite de trajectoire. Cependant ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients. Le phénomène de Chattering provoqué par la partie discontinue. La commande élevée au quelle le système est soumis à chaque instant. La solution proposée consiste à remplacer la fonction de commutation dans la commande par une fonction de saturation.

Dans l'expérience suivante, nous avons utilisé les mêmes contrôleurs que la première simulation, mais avec la fonction de saturation. Où nous constatons que le phénomène de broutement est presque éliminé.

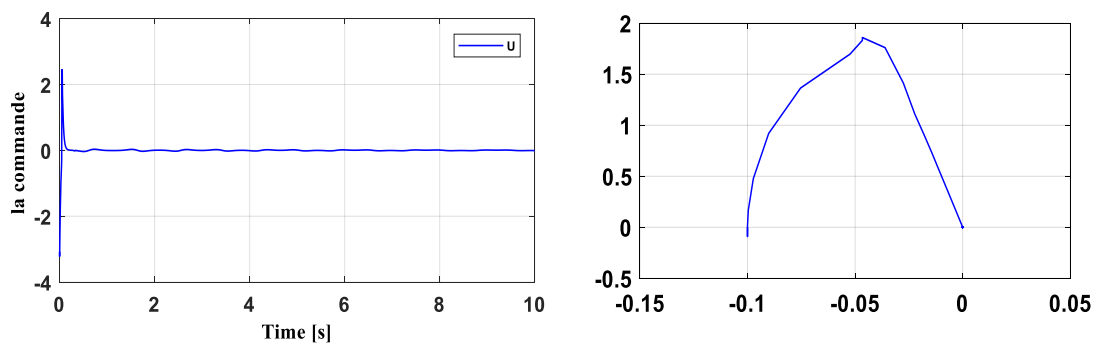
#### ✚ Quatrième simulation :

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot avec :
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



(a)

(b)



(c)

(d)

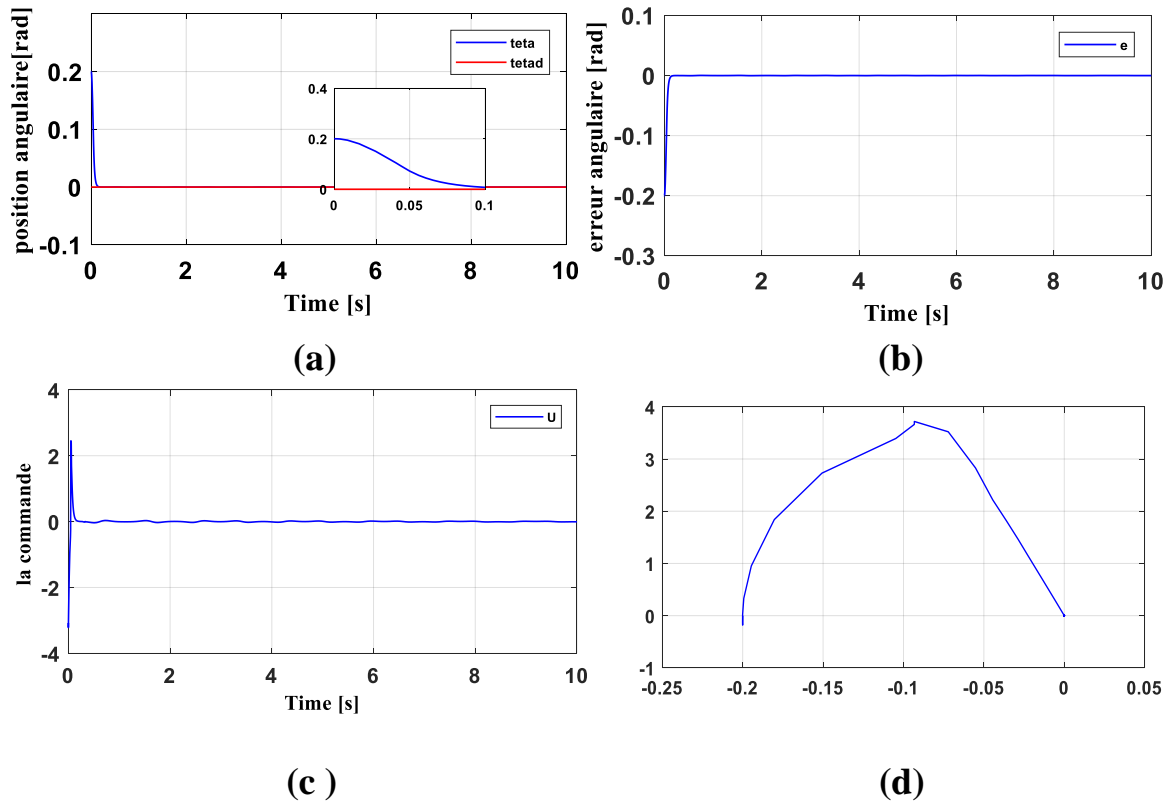
**Figure (IV.7) :** (a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signale de commande, (d) Plan de phase du chariot avec fonction SAT.

#### • Interprétation des résultats de simulation :

D'après Les figures (IV.7), on peut remarquer que : le chariot converge rapidement vers la trajectoire désirée (figure.IV.7-a), l'erreur obtenue est très acceptable, elle tend vers le zéro (figure.IV.7-b) et le signal de commande agissant sur le chariot est représenté dans la (figure. IV.7-c), on remarque clairement l'absence des oscillations à hautes fréquences.

On peut conclure, que l'utilisation de la fonction de saturation sert à la stabilisation du chariot, avec une élimination de phénomène de broutement (figure.II.9). Mais l'utilisation de la fonction de saturation perd les propriétés de robustesse.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :
- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.8) :**(a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur (c) Signal de commande, (d) Plan de phase du pendule avec fonction SAT.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les figures (IV.8) montre respectivement le profil de la position du chariot et la commande correspondante. D'après Les figures (IV.8), ou on peut remarquer que :

- Le chariot converge rapidement vers la trajectoire désirée avec un temps de réponse égale à 0.062 sec (figure.IV.8-a).
- L'erreur obtenue est très acceptable, elle tend vers le zéro (figure.IV.8-b).
- Le signal de commande agissant sur le chariot est représenté dans la (figure. IV.8-c) ; on remarque clairement l'absence des oscillations à hautes fréquences.

On peut conclure d'une part la stabilisation du pendule, ainsi qu'une élimination de phénomène de broutement (figure.II.9) et que l'algorithme appliqué au pendule inversé

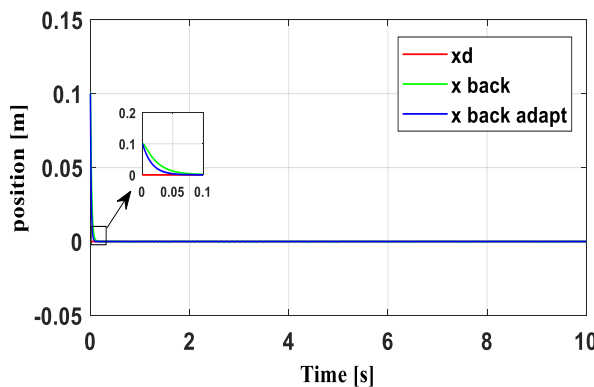
garante asymptotiquement la stabilité globale du système mais l'utilisation de la fonction de saturation perd les propriétés de robustesse.

### IV.3 Simulation du pendule inversé par la technique de backstepping:

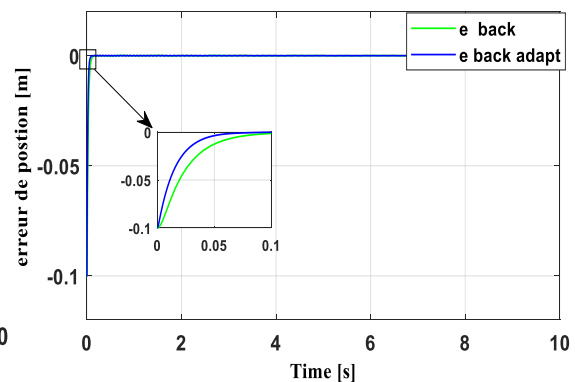
Afin de tester les performances de la commande par la technique de backstepping (avec ces deux approches : adaptative et non adaptative), on a réalisé quelques simulations en absence de perturbation et en présence de perturbation avec le changement de trajectoire de poursuite, après on obtient une comparaison entre ces deux commandes.

#### 🚦 Première simulation

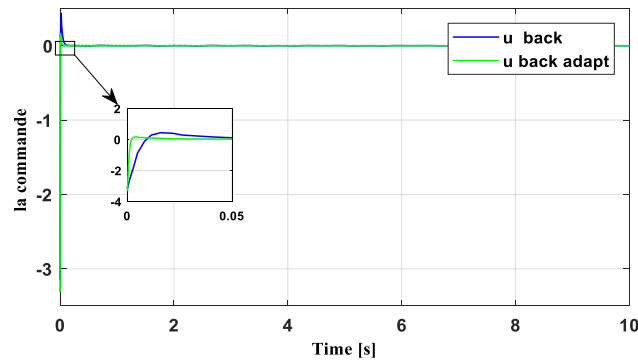
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :
- Les paramètres utilisés :
  - Pour l'approche non adaptative :  $k_1 = 10, k_2 = 10$ .
  - Pour l'approche adaptative :  $k_1 = 10, k_2 = 10, a_1 = 2, a_2 = 5$ .
- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



(a)



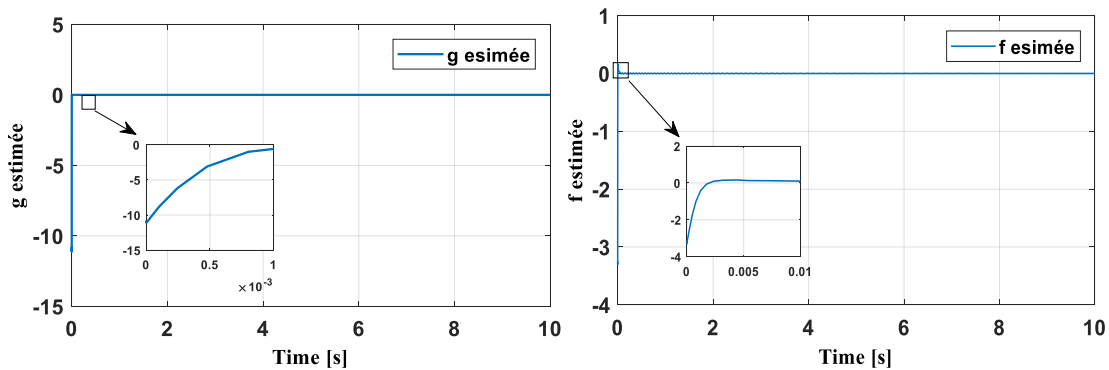
(b)



(c)

**Figure (IV.9) :**(a) Position, (b) Signal de commande (c) Signal de l'erreur du chariot par la commande de backstepping.

- Les figures IV.10 représentent l'estimation des fonctions inconnue ( $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$ ) obtenue à partir la commande backstepping adaptative :



(e)

(d)

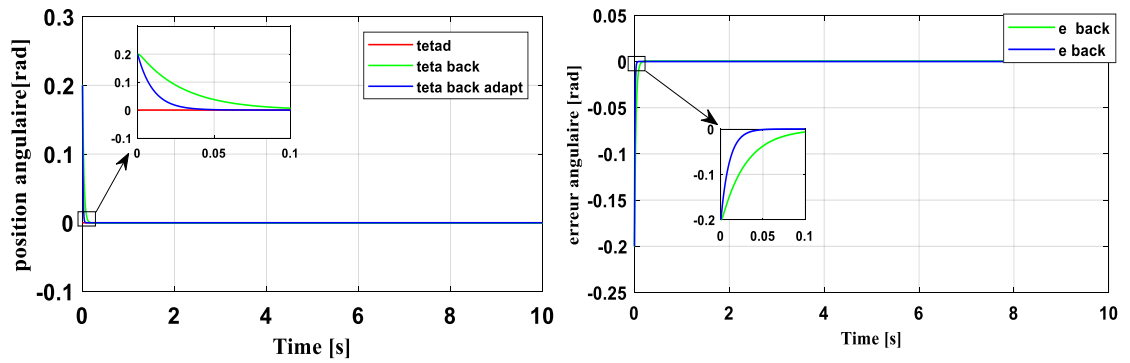
**Figure (IV.10) :**(d) f estimée, (e) g estimée du chariot par la commande de backstepping.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les résultats de simulation présentés dans la figures IV.09 et le tableau (3) (Voir l'annexe A), Nous remarquons que :

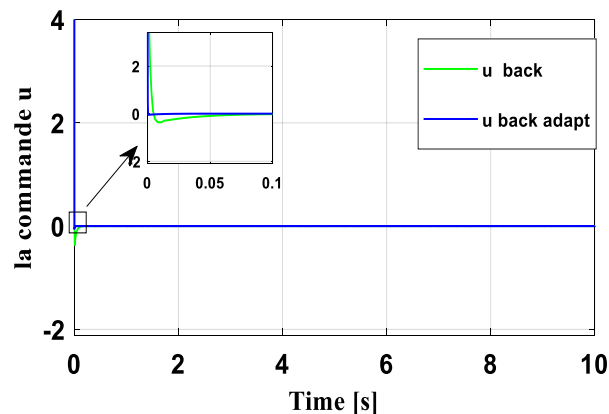
- Les deux sorties suivent bien la référence avec un dépassement nulle, on constate aussi que la convergence vers l'état désirer est rapide dans l'approche adaptative que dans l'approche non adaptative (figures IV.09-a).
- Les erreurs tendent vers le zéro comme il montre dans les figures IV.09-b.
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :

- Les paramètres utilisés :
  - Pour l'approche non adaptative :  $k_1 = 10, k_2 = 10$ .
  - Pour l'approche adaptative :  $k_1 = 10, k_2 = 10, a_1 = 5, a_2 = 2$ .
- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



(a)

(b)

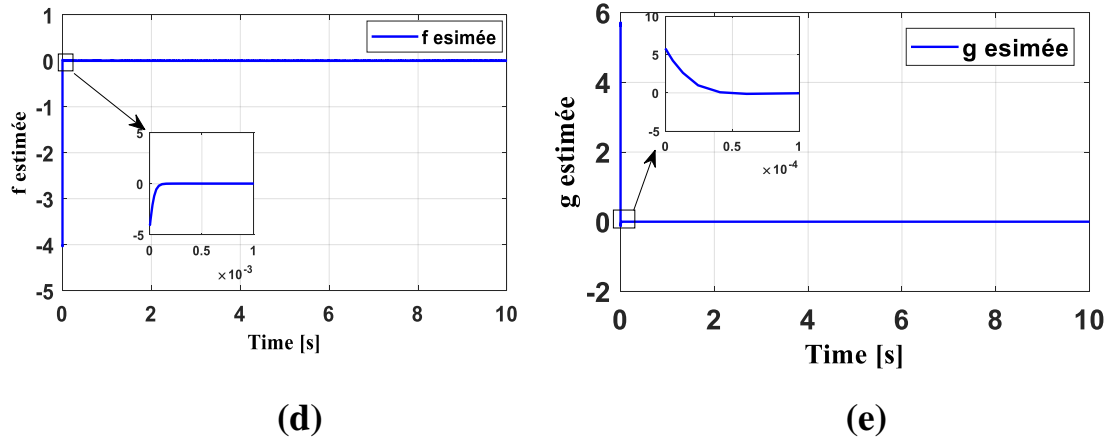


(c)

Figure (IV.11) : (a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur

(c) Signal de la commande du pendule la commande de backstepping.

- Les figures IV.10 représentent l'estimation des fonctions inconnue ( $\hat{f}, \hat{g}$ ) obtenue a partir la commande adaptative :



**Figure (IV.12) :** (d)  $f$  estimée (e)  $g$  estimée du pendule par la commande de backstepping.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

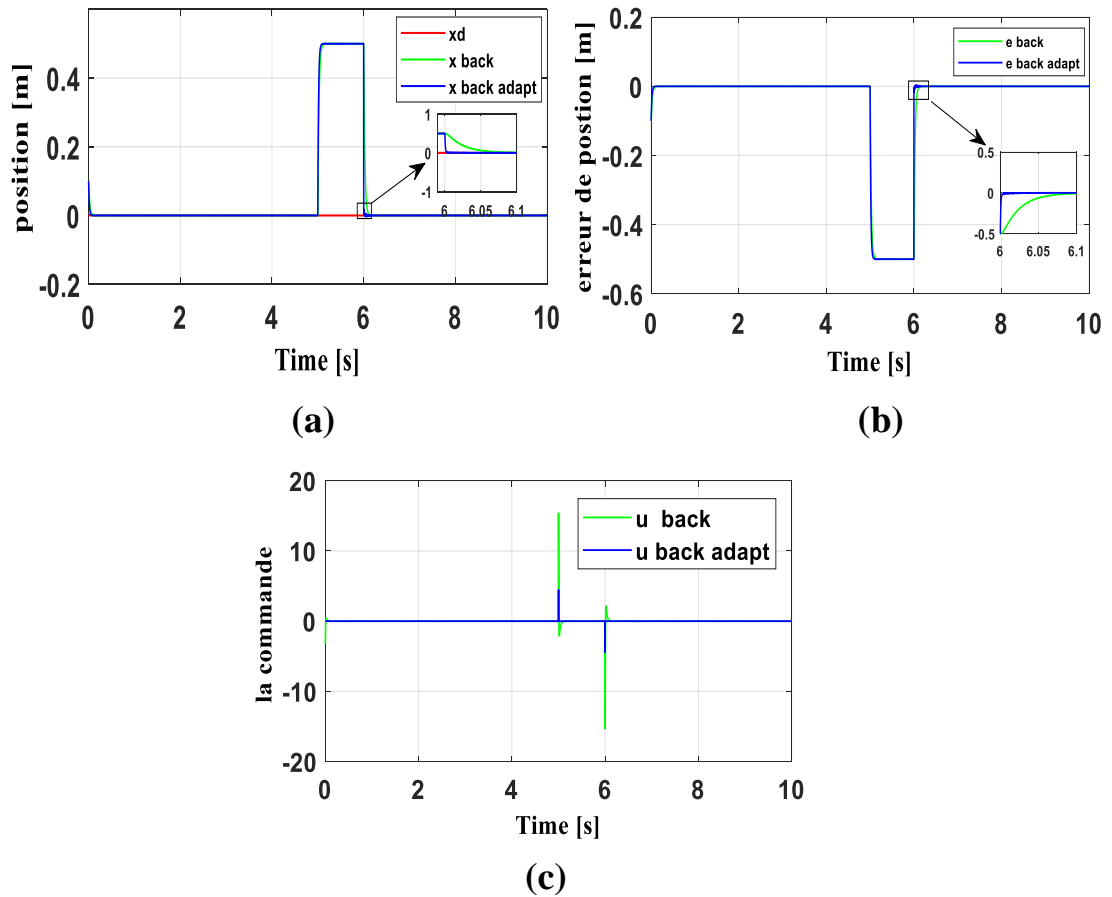
Les résultats de simulation présentés dans la figures IV.11 et le tableau (4) (Voir l'annexe A), on remarque que :

- Les deux sorties suivent bien la référence avec un dépassement nulle, on constate aussi que la convergence vers l'état désirer est rapide dans l'approche adaptative que dans l'approche non adaptative (figures IV.11-a).
- Les erreurs tendent vers le zéro comment il montre dans les figures IV.11-b.

- **Deuxième simulation :**

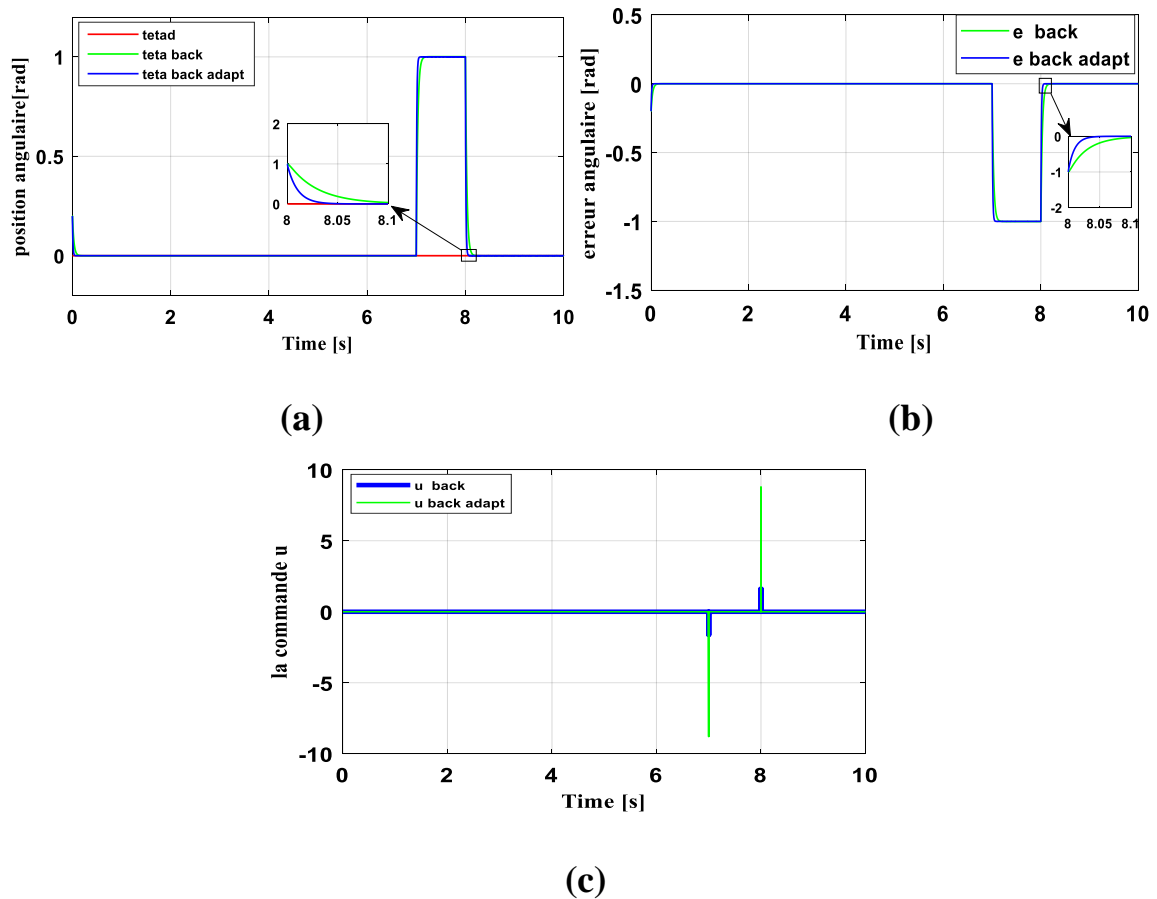
On va tester la robustesse de la commande en perturbant le système. Alors, on va appliquer sur le chariot une impulsion de 0.5 N pendant une durée de 1s (5s – 6s), et sur le pendule une autre impulsion de 1 N pendant 1s (6s – 7s),.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.13) :** (a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de commande du chariot par la commande de backstepping.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :
  - ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.1 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.14) :** (a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur, (c) Signale de commande du pendule avec la commande de backstepping.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les figures (IV.13), (IV.14) montrent que la réponse est rapide et précise. L'erreur provoquée par la perturbation est compensée instantanément. On peut conclure que :

- Le rejet de perturbation est rapide.
- Le temps de réponse faible.
- L'erreur statique pratiquement nulle.

Alors, l'effet des perturbations n'a pas empêché le système de réglage de réaliser sa tâche de contrôle, ce qui nous donne une idée générale sur le comportement robuste de la loi de commande par la technique de backstepping .

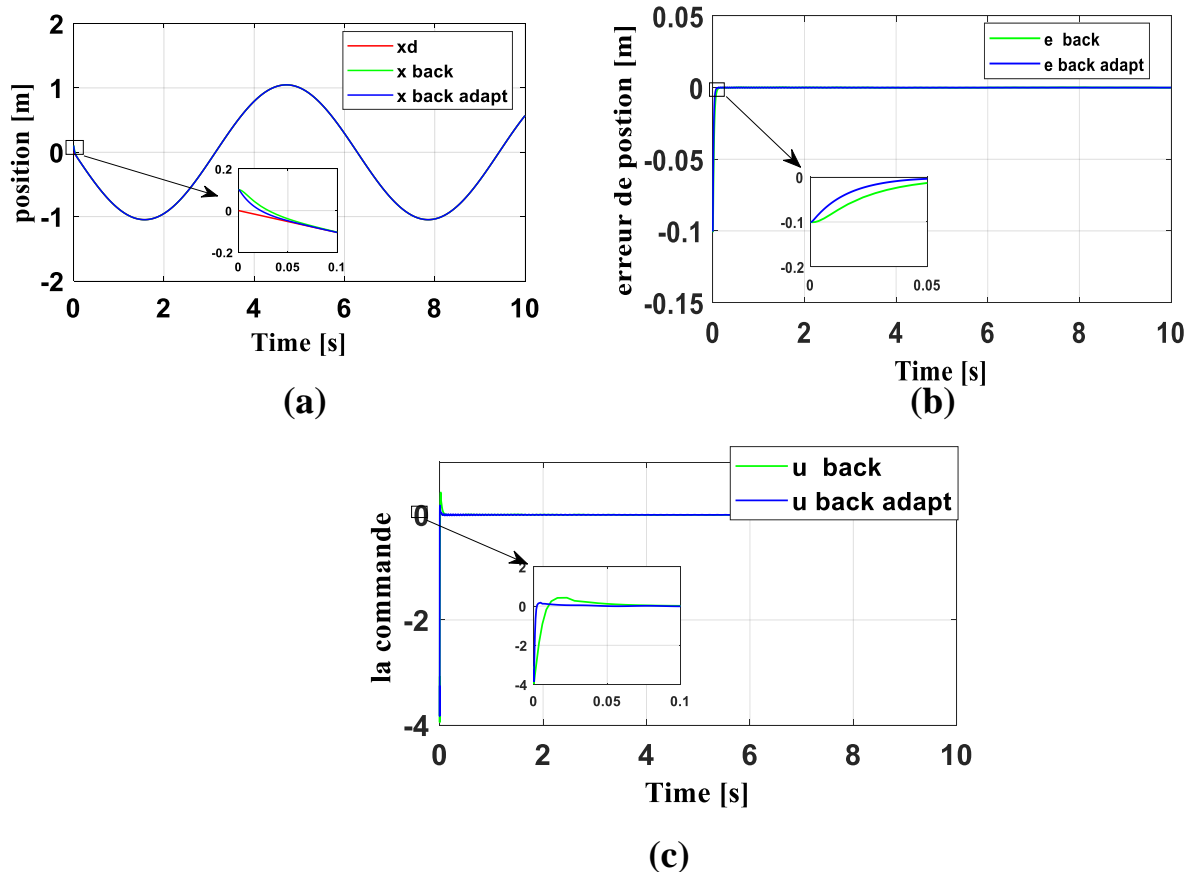
- ✚ **Troisième simulation :**

Pour évaluer les performances de cette commande, on a effectué des simulations dans le cas où le consigne est sinusoïdale.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :

✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin t$ .

✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.15) :**(a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de la commande du chariot par la commande de backstepping .

- **Interprétation des résultats de simulation :**

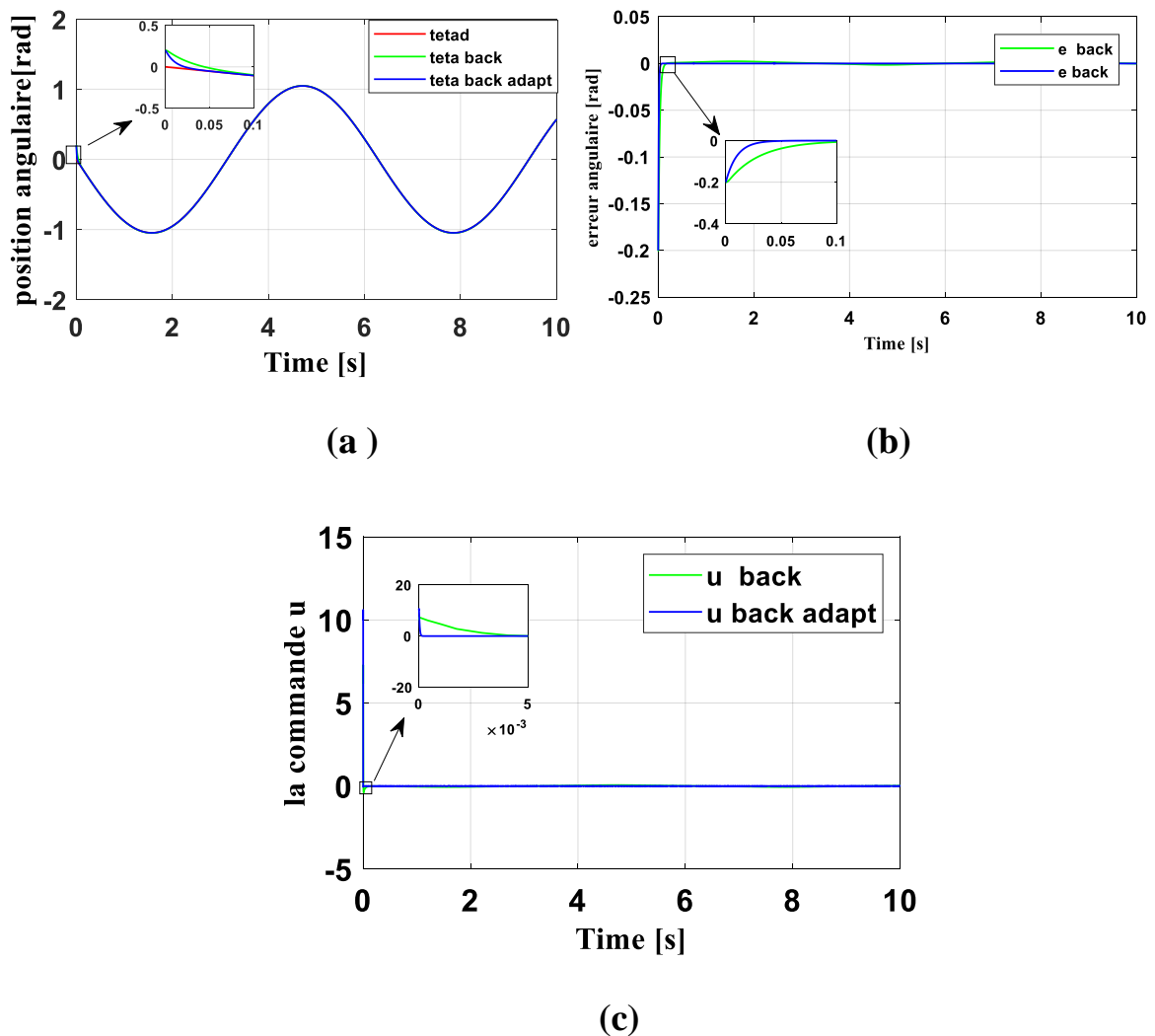
Les résultats de simulation sont présentés dans les figures IV.15. Nous remarquons que :

- La sortie suit bien la référence d'une façon très satisfaisante (figure IV.15-a).
- Les erreurs de suivi sont négligeables comme le montrent les figures (IV.15-b).

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :

✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin t$ .

✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.16) :** (a) Position angulaire (b) Signal de commande (c) Signale de l'erreur du pendule par la commande de backstepping.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures IV.16. Nous remarquons que :

- La sortie suit bien la référence d'une façon très satisfaisante (figure IV.16-a).
- Les erreurs tendent vers zéro comme le montre la figure (IV.16-b).
- La loi de la commande est stable (figure IV.16-c).

On note que les deux commandes donnent des résultats améliorés et de robustesse surtout la commande adaptative tableau (5) (Voir l'annexe A).

La loi de la commande de backstepping adaptative peut stabiliser asymptotiquement le système de pendule inversé en présence ou en absence de perturbation : l'erreur est nulle et le suivi de la trajectoire est assuré. On peut voir aussi le changement de trajectoire ne cause pas de problème vis-à-vis de la performance de cette commande, Alors que la robustesse de cette dernière est garantie la stabilité de notre système.

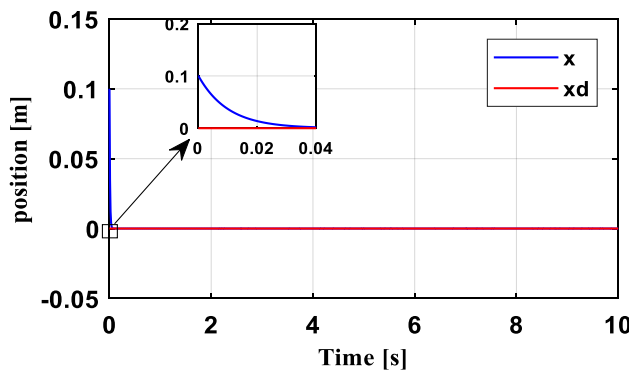
#### IV.4 Simulation du pendule inversé par la commande hybride backstepping -mode glissant :

Afin de tester les performances de la commande hybride backstepping-mode glissant, on a réalisé quelques simulations en absence de perturbation, avec le changement de trajectoire de poursuite et en présence de perturbation :

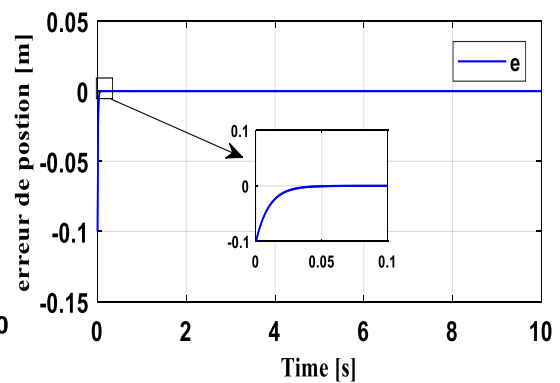
En Introduisant dans cette commande backstepping adaptative car elle est plus robuste. Pour éviter le problème de Chattering du Mode Glissant, nous avons remplacé le signe avec la fonction de saturation.

##### 🚦 Première simulation :

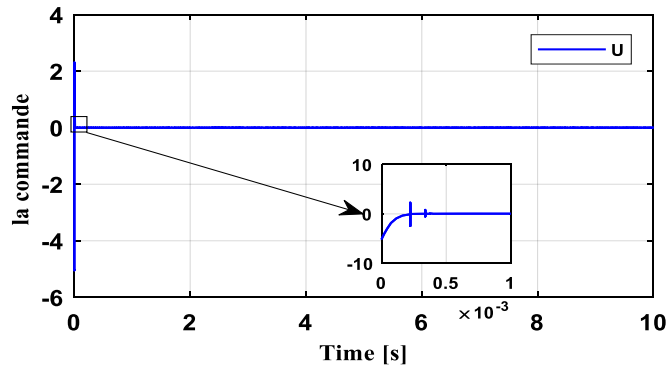
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :  $k_1 = 10, k_2 = 10, a_1 = 5, a_2 = 5, k_3 = 15$ .
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



(a)



(b)



(c)

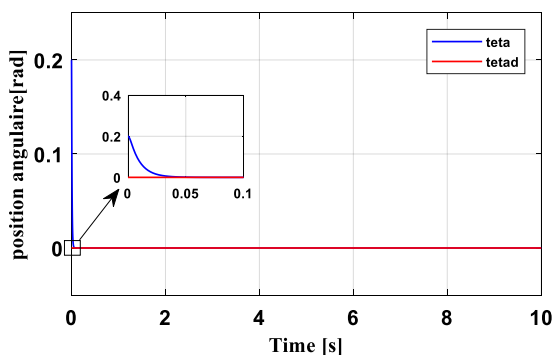
**Figure (IV.17) (a) Position, (b) Signal de commande, (c) Signal de l'erreur du chariot avec fonction SAT.**

- **Interprétation des résultats de simulation :**

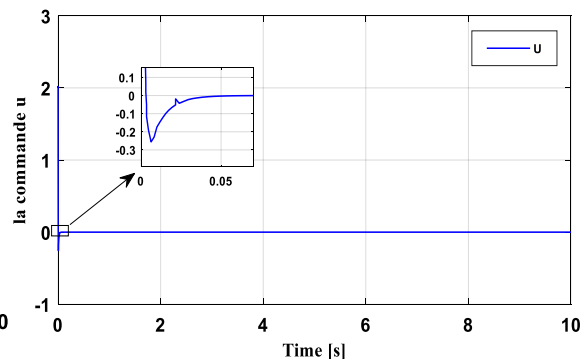
L'allure de la trajectoire désirée ainsi que la position réelle du chariot sont montrées dans la figure. IV.17-(a) et l'erreur de poursuite est dans la figure. IV.17(c), L'erreur obtenue est très acceptable et le chariot converge rapidement vers la trajectoire désirée avec un temps de réponse inférieur à 0.0220 s le tableau (6) (voir l'annexe A), le signal de commande agissant sur le chariot est représenté dans la figure. IV.17. (b).

On peut remarquer clairement l'absence des oscillations à hautes fréquences (Chattering).

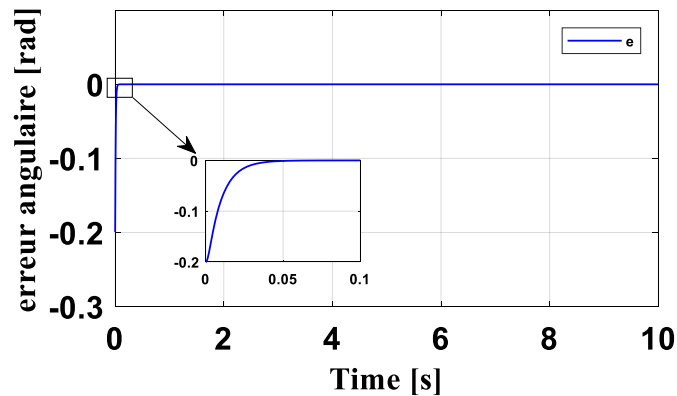
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule  $k_1 = 10, k_2 = 10, a_1 = 25, a_2 = 25, k_3 = 5$ :
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



(a)



(b)



(c)

**Figure (IV.18) (a) Position (b) Signal de commande (c) Signal de l'erreur du chariot avec fonction SAT.**

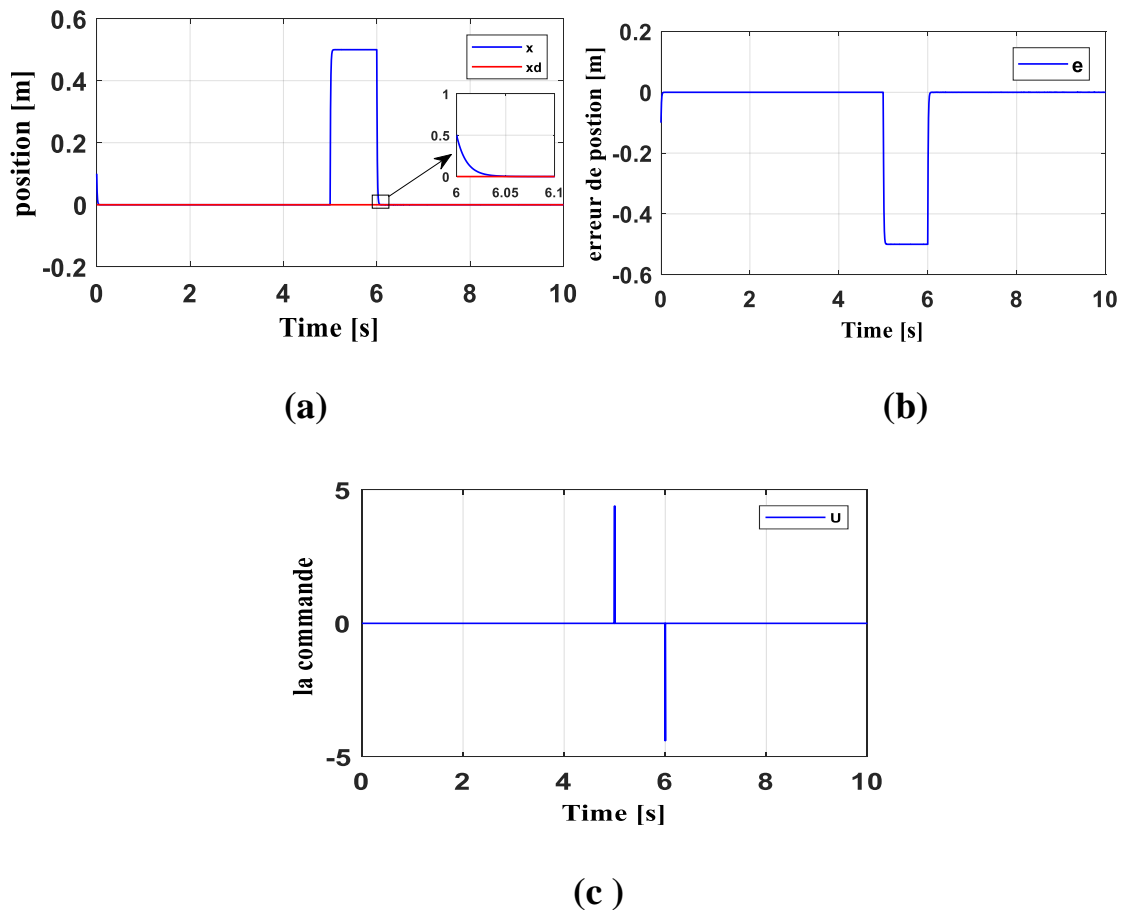
- **Interprétation des résultats de simulation :**

L'allure de la trajectoire désirée ainsi que la position réelle du pendule sont montrées dans la figure. IV.18-(a) et l'erreur de poursuite est dans la figure. IV.18-(c) L'erreur obtenue est très acceptable et le pendule converge rapidement vers la trajectoire désirée avec un temps de réponse inférieur à 0.021s le tableau (7) (voir l'annexe A), Le signal de commande agissant sur le pendule est représenté dans la figure. IV.18. (b). On peut remarquer clairement l'absence des oscillations à hautes fréquences (Chattering) contrairement aux résultats de la première simulation. Cette commande est réalisable.

- **🚦 Deuxième simulation :**

On va tester la robustesse de la commande en perturbant le système, on va appliquer sur le chariot une impulsion de 0.5 N pendant une durée de 1sec (5s – 6s), et sur le pendule une autre impulsion de 0.2 N pendant 1sec (5s – 6s).

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.19) :**(a) Positon, (b) Signal de l'erreur, (b) Signal de commande du chariot avec la commande hybride backstepping-mode glissant.

•**Interprétation des résultats de simulation :**

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures IV.19. Nous remarquons que :

- La sortie suit bien la référence d'une façon très satisfaisante (figure IV.19-a).
- Les erreurs de suivi sont négligeables comme le montrent les figures (IV.19-b).
- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :
  - ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
  - ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ .

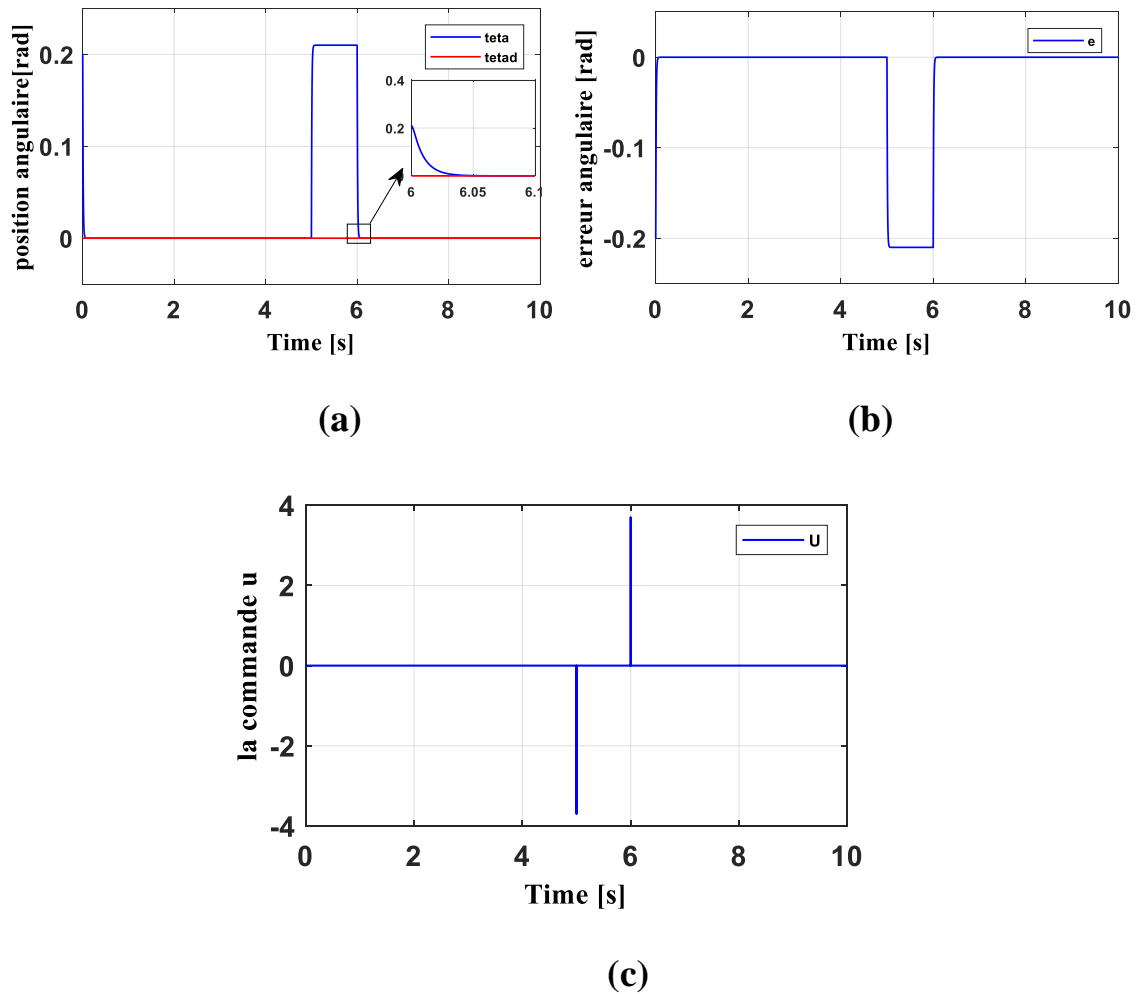


Figure (IV.20) : (a) Position angulaire, (b) Signal de l'erreur (c) Signal de commande du pendule.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures IV.20. Nous remarquons que :

- La sortie suit bien la référence d'une façon très satisfaisante (figure IV.20-a).
- Les erreurs de suivi sont négligeables comme le montrent les figures (IV.20-b).

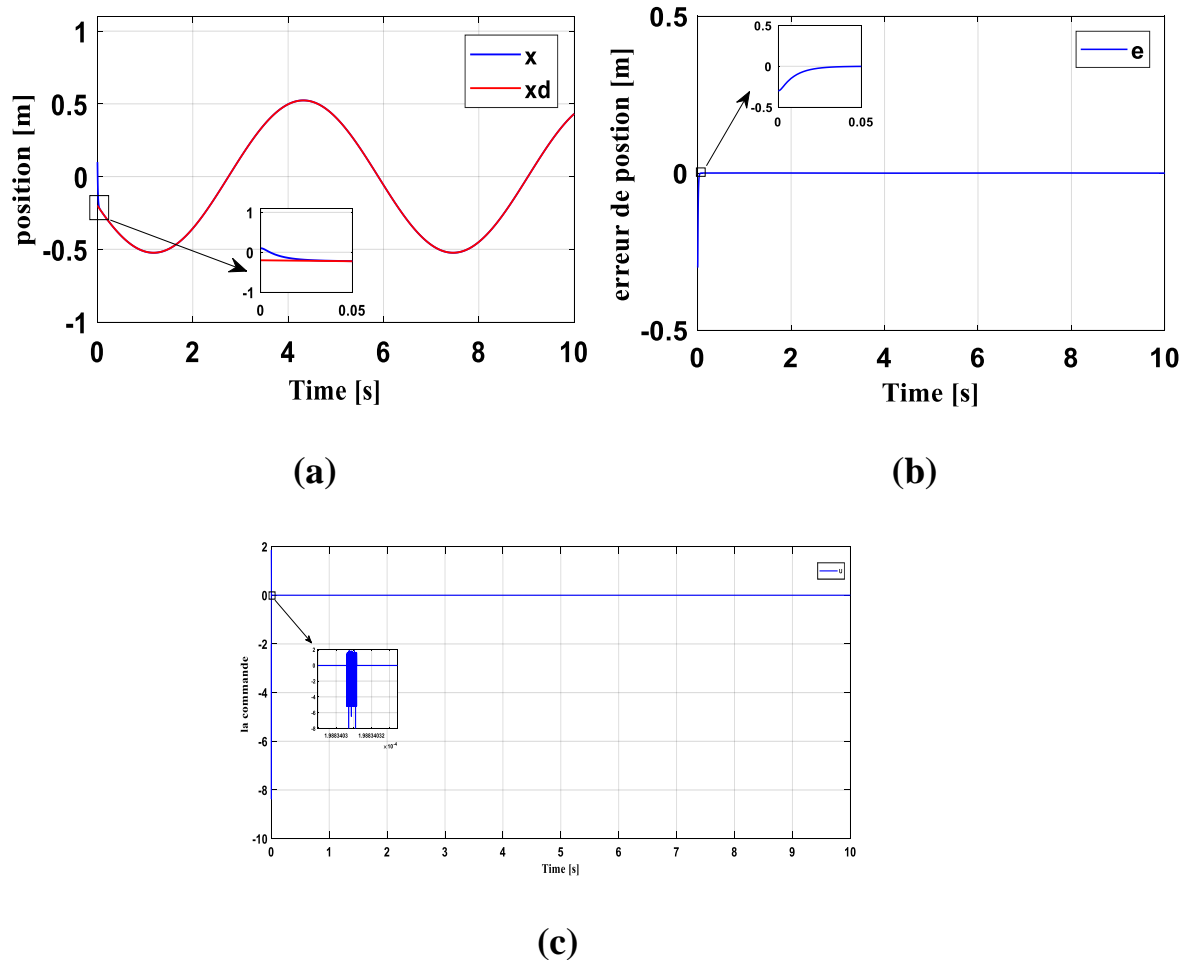
✚ **Troisième simulation :**

Finalement, on va tester la robuste par le changement de la trajectoire :

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au chariot :

✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin(t + \frac{5\pi}{2})$ .

✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .



**Figure (IV.21), (a) Position, (b) Signal de l'erreur, (c) Signal de commande du chariot.**

**•Interprétation des résultats de simulation :**

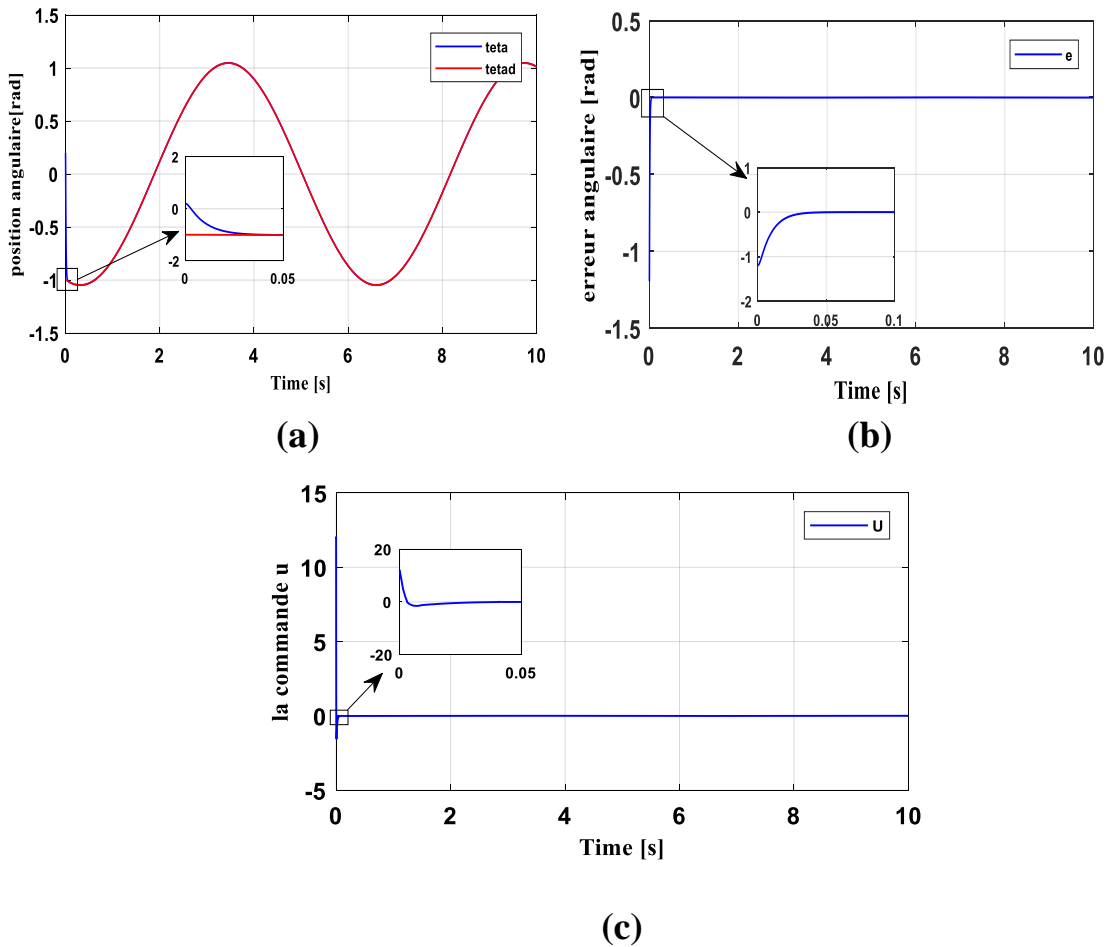
Malgré nous avons injecté une autre trajectoire désirée. La figure. IV .21 montre la bonne réponse avec la convergence de sortie.

La loi de commande proposée est stable, l'erreur est nulle et le suivi de la trajectoire est assuré. On peut voir aussi le changement de trajectoire ne cause pas de problème vis-à-vis de la performance de la loi de commande, cette dernière, stabilise asymptotiquement le système.

•Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :

✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin(t)$ .

✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



**Figure (IV.22) :** (a) Position angulaire, (b) Signal de commande (c) signal de l'erreur du pendule.

#### •Interprétation des résultats de simulation :

Malgré nous avons tester la commande avec un autre type de trajectoire désirée : sinusoïdale. La figure. IV .22 montre la bonne réponse avec la convergence de sortie. La loi de commande proposée est stable et réalisable, l'erreur est nulle et le suivi de la trajectoire est assuré. Nous pouvons voir aussi le changement de trajectoire ne cause pas de problème vis- à- vis de la performance de la loi de commande, cette dernière, stabilise asymptotiquement le système. D'après les tests de simulation de backstepping avec ces deux approches (adaptative et non adaptative) on peut conclure après une comparaison.

#### IV.5 Etude comparatives des commandes étudiées :

Dans cette partie, nous avons fixé les mêmes conditions pour chaque commande. Les résultats de simulation sont obtenus pour les trois cas, d'abord en absence d'une perturbation ensuite référence désirer sinusoïdale enfin en présence d'une perturbation.

#### ✚ Première simulation : régulation.

- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .

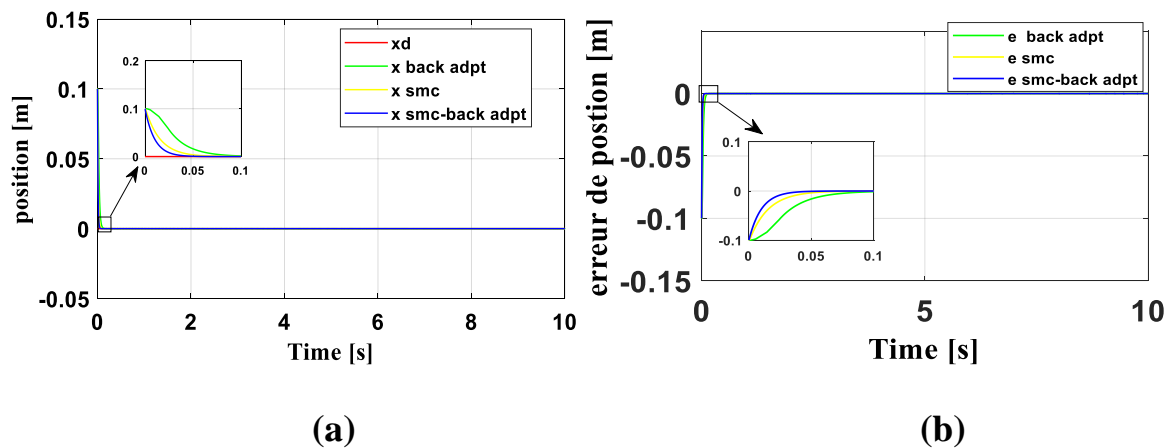


Figure (IV.23) : (a) Position (b) Signal du l'erreur du chariot.

#### ✚ Deuxième simulation :

- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = 0 \text{ m}$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ .
- ✓ Impulsion injectée : 0.8 N pendant une seconde (6s-5s).

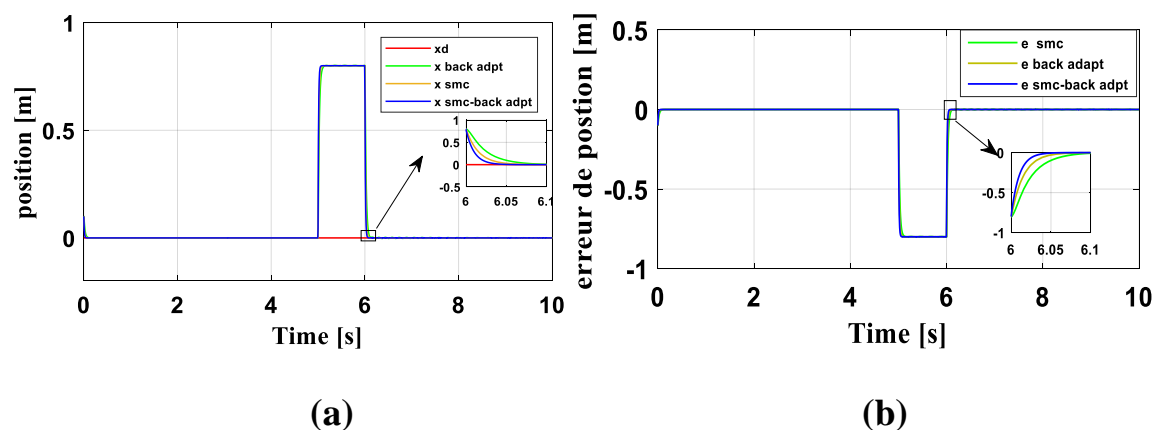


Figure (IV.24) : (a) Position (b) Signal du l'erreur du chariot avec perturbation

#### ✚ Troisième simulation

- ✓ On désire une sortie :  $x_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin(t + \frac{5\pi}{2})$ .
- ✓ Condition initiale :  $x(0) = 0.1m$ .

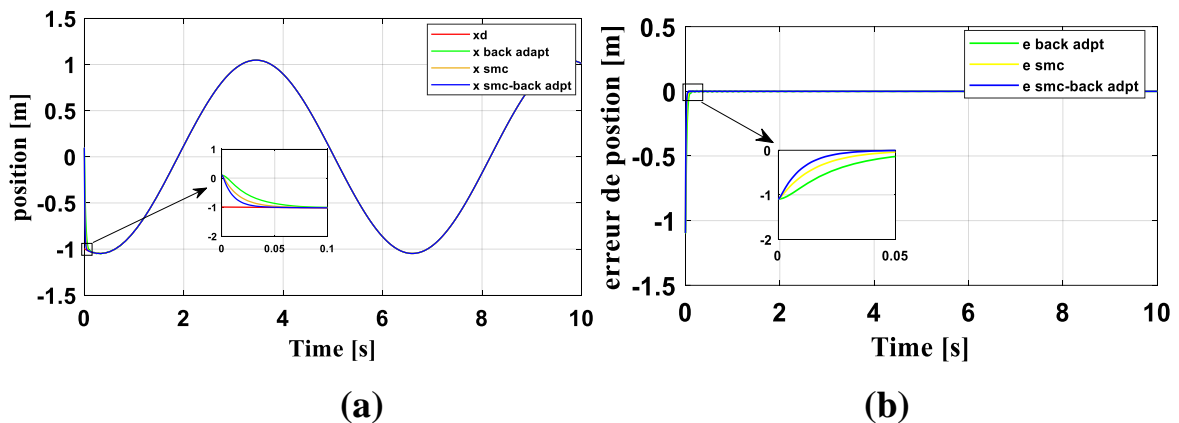


Figure (IV.25) : (a) Position (b) Signal du l'erreur du chariot.

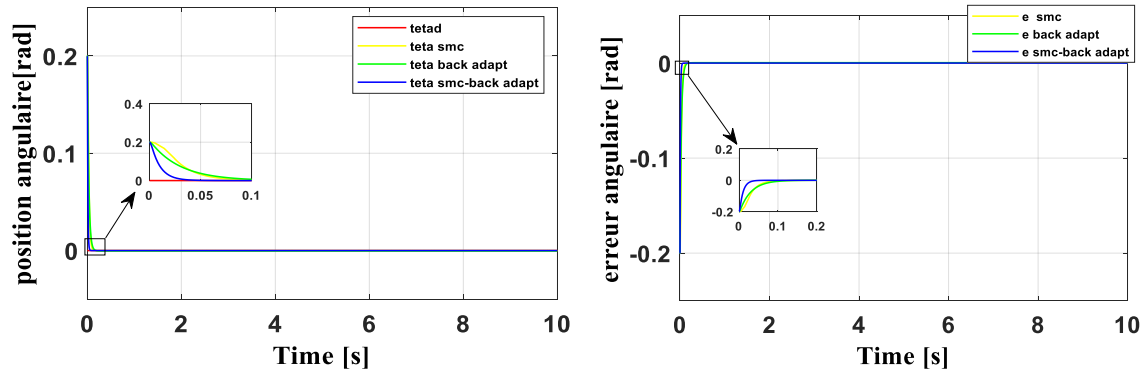
- **Interprétation des résultats de simulation :**

D'après les figures (IV.23,24,25) et le tableau (IV.7) (voir annexe A), On remarque que le système converge bien vers la position d'équilibre instable quel que soit la commande utilisée, la différence réside dans le temps de convergence, la rapidité, la précision et le rejet de perturbation. Parmi ces trois commandes on peut conclure que la commande hybride backstepping-mode glissant est plus rapide avec une erreur presque nulle et un rejet de perturbation est très efficace.

- Les figures suivantes représentent les différents résultats de simulation associés au pendule :

- **Première simulation :**

- ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = 0 \text{ rad}$ .
- ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2 \text{ rad}$ .



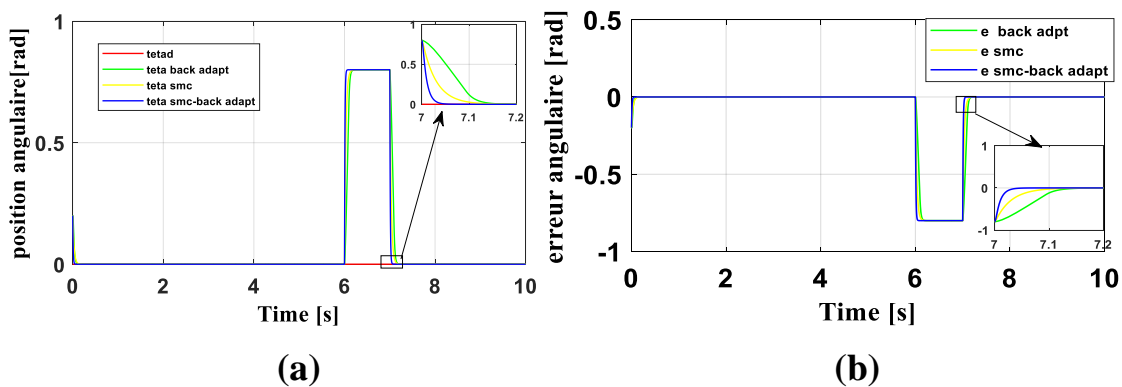
(a)

(b)

Figure (IV.26) : (a) Position angulaire (b) Signal de l'erreur du pendule.

✚ Deuxième simulation :

- ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = 0$  m.
- ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2$  rad.
- ✓ Impulsion injectée : 1 N pendant une seconde (6s-5s).



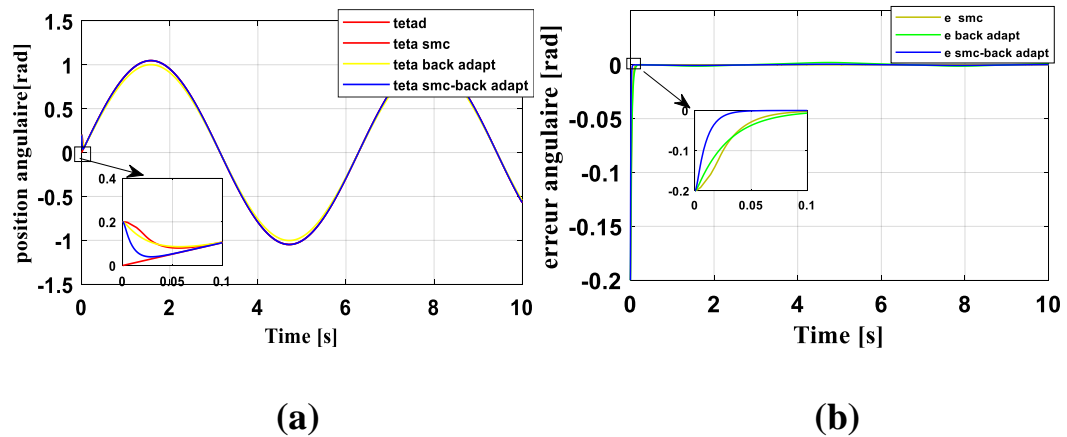
(a)

(b)

Figure (IV.27) : (a) Position angulaire (b) Signal de l'erreur du pendule.

✚ Troisième simulation :

- ✓ On désire une sortie :  $\theta_d(t) = -\frac{\pi}{3} \sin(t)$ .
- ✓ Condition initiale :  $\theta(0) = 0.2$  rad.



**Figure (IV.28) : (a) Position angulaire (b) Signal de l'erreur du pendule**

D'après les figures (IV.26,27,28) et le tableau (8) (voir l'annexe A), on note que les trois commandes donnent des résultats améliorés et de robustesse surtout la commande backstepping-mode glissant. Elle est plus rapide avec une erreur presque nulle et rejet de perturbation est très efficace. On peut conclure que cette commande donne plusieurs avantages non seulement pour la stabilité du système non linéaire mais aussi avec des performances remarquables (bonne poursuite, erreurs nulles).

#### IV.6 Conclusion :

L'objectif de ce chapitre était l'évaluation de la robustesse et les performances de la commande non linéaire : par Mode Glissant et backstepping des systèmes non linéaires : pendule inversé.

En premier temps, on a commencé à tester les deux contrôleurs basés sur la commande par mode Glissant backstepping sur un pendule inversé, D'après les résultats obtenus, on peut conclure que ces commandes donnent plusieurs avantages non seulement pour la stabilité du système non linéaire mais aussi des performances remarquables « bonne poursuite, erreurs nulles. ».

En deuxième temps, on a fait l'application de la commande hybride backstepping-Mode Glissant sur le pendule inversé et d'après les résultats on trouve que cette commande assure à la fois la stabilité, la robustesse et l'amélioration des performances de notre système.

## Conclusion générale

---

### Conclusion générale :

La complexité de commande des systèmes non linéaires conduit l'automaticien à utiliser des modèles de commande non linéaires pour fournir des bonnes performances. Le travail dans le cadre de ce mémoire nous a permis d'élaborer une étude des différentes commandes non linéaire (mode glissant et le backstepping) et l'application de ces derniers pour stabiliser le pendule inversé.

On a élaboré le modèle dynamique de pendule inversé sur un chariot mobile, le modèle obtenu a une complexité importante. En effet, c'est un système instable, non linéaire, SIMO, sous actionné. Ces caractéristiques le qualifie à être un très bon exemple pour valider les commandes synthétisées.

La commande mode glissant est composée de deux parties, la commande équivalente utilise le modèle dynamique du système pour le ramener vers une surface de glissement, et la commande commutative pour garder le système sur la surface, L'importance des contrôleurs par mode glissant réside dans : la grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et l'implantation, et la robustesse vis-à-vis la variation des paramètres internes ou externes mais ces contrôleurs nécessite de connaître les limites d'incertitudes du système et peut également entraîner des broutements.

La commande de backstepping adaptative est la plus répondu pour l'étude des systèmes ayant des incertitudes paramétriques et non paramétriques. Contrairement à la commande en mode glissant, cette méthode élimine le besoin de connaître les paramètres de système, la mise à jour du modèle durant l'opération et son fonctionnement est basé essentiellement sur les mesures des performances. L'utilisation de la commande adaptative et la commande de mode glissant peuvent atteindre la robustesse pour diverses conditions du système.

La combinaison des avantages de ces commandes en termes d'hybridation a augmenté d'avantage les performances souhaitées. Les résultats de simulation obtenue ont prouvé l'efficacité de cette commande.

## Référence bibliographique

---

- [01]: C. El Biad, S.Lafnoune « Commande robuste par mode glissant d'un système mécanique sous-actionné » ,Février, 2014.
- [02]: A. Hadjer. « Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires », Mémoire De Magistère En Electrotechnique, Université Ferhat Abbas -Setif-1, Algérie,2014.
- [03]: Jose L. Lima, Jose C. Gon, calves INVERTED PENDULUM VIRTUAL CONTROL LABORATORY.
- [04]: Kailath, T. (1980). Linear Systems, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- [05]: Roberge, J. K. (1960). The Mechanical Seal, Bachelor's thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [06]: Schaefer, J. F. Cannon, R. H. (1966). On the control of unstable mechanical systems, In: Proceedings of the third Automatic and Remote Control, London, v. 3, p.12-24.
- [07]: Kwakernaak, H., Sivan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems, New York: Wiley.
- [08]: Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems, New Jersey: Prentice Hall.
- [09]: Akira Inoue, Mingcong Deng, Tomohiko Tanabe, “Practical Swing-up Control System Design of Cart-type Double Inverted Pendulum, “Proceedings of the Chinese Control Conference 2006, pp. 2141 – 2146, 2006.
- [10]: <https://www.google.dz/search=robot+mip+one>.
- [11]: Miroslav Krsti C. and Petar V. KokotoviC Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller, Ieee Transactions on Automatic Control, VOL. 41, NO.2, February 1996, pp274-280
- [12]: Kurt Hornik. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. Neural networks, 4(2):251–257, 1991.
- [13]: <http://gekkoquant.com/2015/12/12/inverted-pendulum-simulation-in-r/>

## Référence bibliographique

---

- [14]: Kacimi M.A. «Utilisation des algorithmes génétiques multi-objectif pour la conception d'un contrôleur flou appliqué a un système non linéaire et complexe », mémoire de magister, Universités A.MIRA de Bejaïa, 2014.
- [15]: L. Fadhila, “ Etude comparative de la commande par mode glissant et la commande vectorielle d'un machine asynchrone”, ICEEE'2004, 2nd International Conference on Electrical, Algeria, April 2004.
- [16]: R. A. Freeman and P.V. Kokotovic. A New Lyapunov Function for the Backstepping Design of 'Softer' Robust Nonlinear Control Laws. Technical report no. CCEC-92-0520, 1992
- [17]: S. Hajri, “Commande dynamique par mode glissant application à la robustification des processus complexe”, Thèse de doctorat en automatique et informatique industrielle UNIV de Lille, ENIM, 1997.
- [18]: Slotine, J.-J. E., & Li, W. «Applied Nonlinear Control», London: Prentice-Hall, Inc.1991.
- [19]: F.Lewis, C. T. Abdallah, et D. M. Dawson, “Control of Robot Manipulators”, Macmillan Publishing Company, Inc, USA, 1993.
- [20]: M. A. Johnson, M. H. Moradi, “PID Controllers: New Identification and Design Methods”, Springer, 2005.
- [21]: A. Isidori, “Nonlinear control systems”, Springer, 1995.
- [22]: Arzelier D. " Notes de cours : Représentation et analyse des systèmes linéaires". Version 5.2. France.
- [23]: D. ARZELIER et D. PEAUCELLE " Systèmes et asservissements non linéaires ", Notes de cours Version 4.
- [24]: H. BÜHLER. « Réglage par Mode de Glissement », Presses Polytechniques Romandes, EPFL, Ecublens, Lausanne, Suisse, 1986.
- [25]: O-MAHMOUDI, N-MADANI, N-F BENKHORIS, F-BOUDJEMA "Cascade sliding mode control of a field oriented induction machine drive ", the European physical journal, April 1999.

## Référence bibliographique

---

- [26]: H. R. MEMARBASHI, « Design and parametric control of co-axes driven two-wheeled balancing robot ». Mémoire de master en mécatronique, Université de Massey, 2010.
- [27]: H. Tamrbed, T. Azarobr Réglage par mode glissant d'une machine asynchrone, Thèse d'ingénieur, Annaba, 2000.
- [28]: B. ABDELOUHAB et H. Adel. « Commande par mode de glissement d'une suspension active d'un véhicule », PFE, Ecole Nationale Polytechnique, Juin,2006.
- [29]: Ferhat Lahouazi. « Mise on œuvre d'une stratégie de commande nuer floue Application a un pendule inversé », Mémoire de magister, université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou,2011.
- [30]: F. BETIN. « Commande d'actionneurs électriques soumis à une charge mécanique à fortes variations paramétriques », Habilitation à diriger des recherches, Centre de Robotique d'Electrotechnique et d'Automatique (CREA) UPRES Equipe d'accueil 3299, Université de Picardie Jules Verne, 02880 Cuffies, France, 2003.
- [31]: H. BÜHLER. « Réglage par Mode de Glissement», Presses Polytechniques Romandes, EPFL, Ecublens, Lausanne, Suisse, 1986.
- [32]: J. J. SLOTINE "Sliding controller design for non linéaire system ".I.J.C, Vol 4, N:°2, pp,421- 434, 1984.
- [33]: V. UTKIN 'Variable structure systems with sliding mode ', IEEE Trans. Auto. Control, Vol AC-22 N° 1, PP212-222, April 1977.
- [34]: Deghboudj Imen. « Commande des systèmes non linéaires par mode glissant d'ordre supérieur », Thèse de Magister de l'Université de Constantine 1, 2013.
- [35]: H. Tamrbed, T. Azarobr Réglage par mode glissant d'une machine asynchrone, Thèse d'ingénieur, Annaba, 2000.
- [37]: A. L. Nemmour. « Contribution à la commande vectorielle de la machine asynchrone à double alimentation », Mémoire de Magister, l'Université de Batna, 2002.
- [38]: ZAHARIEVA.T « commende a structure variable appliquée a un moteur synchrone »,thèse pour l'obtention du diplôme de recherche de l' INSA de Toulouse, France,2000.

## Référence bibliographique

---

[39]: NICOLAS.B. « Contribution à la commande de loi de commutation à l'aide de la théorie des mode glissant », Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, France 1996.

[40]: M. Abid.« Adaptation de la commande optimisée au contrôle vectoriel de la machine Asynchrone alimentée par onduleur à MLI », Thèse de doctorat d'état en Electrotechnique, Université Djillali Liabes De Sidi Bel-Abbès, Algérie, 2009.

[41]: Thierry FLOQUET. « Contributions a la commande par modes glissants d'ordre supérieur », thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 20 Décembre 2000.

[42]: Y. Bekakra. « Etude et commande du moteur asynchrone à double alimentation (MADA) par différentes techniques avancées », Mémoire de Magister, Centre Universitaire d'El-Oued, 2010.

[43]: B. Benazza. « Commande par mode glissant d'une machine asynchrone sans capteur de vitesse », Mémoire De Magistère En Electrotechnique, Université Djillali Liabes De Sidi BelAbbès, Algérie, 2008.

[44]: F. Benchabane. « Commande en position et en vitesse par mode de glissement d'unmoteur synchrone triphasé a aimants permanents avec minimisation du chattring», Mémoire De Magistère En Electrotechnique, Université Mohammed Khider De Biskra, Algérie, 2005.

[45]: Miroslav Krsti C. and Petar V. KokotoviC Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller, Ieee Transactions on Automatic Control, VOL. 41, NO.2, February 1996, pp274-280.

[46]: Riccardo Marino Adaptive control of nonlinear systems: basic results and applications, Automatic Review Control, Volume 21, pp. 55-66, 1997.

[47]: Kanellakopoulos I., P.V. Kokotovic and A.S. Morse, Adaptive feedback linearization of nonlinear systems. In: Foundations of Adaptive Control P.V. Kokotovic, Edition. pp.311-346,1991, Springer Verlag. Berlin.

[48]: R. Mellah, F. Lahouazi, S. Djenoune, S. Guermah, R. Toumi « Composite Sliding Mode Control of Inverted Pendulum» International Conference on Electrical Engineering, Electronics and Automatic ICEEA 10 Bejaia, Algeria.

## Référence bibliographique

---

[49]: N. Derbel et al. (eds.), Applications of Sliding Mode Control, Studies in Systems, Decision and Control 79, Published in IEEE 12th International Multi-Conference on...2015.

[50]: H. Ouakka, “ Contribution la l'identification et la Commande Floue d'une Classe de Systèmes Non Linéaires ”, Thèse de doctorat national, 2009.

[51]: Matignon D. "Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire". PhD Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay. 1998.

[51]: Mullhaupt Ph. "Introduction à l'Analyse et à la commande des systèmes non linéaires". Lausanne, Juin 2007.

## Annexe A :

### Section A-1 : Les indices de performance utiliser :

✚ **ISE** (Integral of Square Error) =  $\int_0^{\infty} e^2$ .

✚ **SSC** (Sum of Square Control) =  $\sum_{k=0}^n u^2$ .

#### a- La commande par mode glissant :

**Tableau (1)** Les indices de performance de chariot par mode glissant.

Indice Performance  Paramètre	Le temps de chute (sec)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
$\lambda = 3, k = 20$	0.0328	0.0488	1.7626	0.0023

**Tableau (2)** Les indices de performance de pendule par mode glissant.

Performance  Paramètre	Le temps de chute (sec)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
$\lambda = 3, k = 29$	0.0493	0.0300	0.0011	6.2493

**b- La commande par backstepping :**

**Tableau (3)** Les indices de performance de chariot par la commande de backstepping .

Indice de Performance Paramètres	Le temps de chute (sec)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
L'approche non adaptative : $k_1 = 10, k_2=10$	0.0496	0.0916	1.4660	2.6273
L'approche adaptative : $k_1 = 10, k_2=10$ $a_1 = 2, a_2 = 5$	0.0332	0.0592	8.082	4.3080

**Tableau (4)** Les indices de performance de chariot par la commande de backstepping .

Indice de Performance Paramètres	Le temps de chute (sec)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
L'approche non adaptative $k_1 = 10, k_2=10$	0.0320	0.0392	2.0095	0.0020
L'approche adaptative $k_1 = 10, k_2=10, a_1 = 2, a_2=5$	0.0392	0.0320	0.6070	1.5166

**c- La commande hybride Backstepping-Mode glissant :**

**Tableau (5)** Les indices de performance de chariot par la commande hybride de mode glissant Backstepping

Indice de Performance	Le temps de chute (s)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
Paramètres				
$k_1 = 10, k_2 = 10$ $k_3 = 15$ $a_1 = 05, a_2 = 05$	0.0220s	0.0391	0.0050	0.0019

**Tableau (6)** Les indices de performance de pendule par la commande hybride de mode glissant Backstepping.

Indice de performance	Le temps de chute (sec)	Le temps de réponse à 2%(sec)	ISE ( $10^{-4}$ )	SSC
Paramètre				
$k_1 = 10, k_2 = 10$ $k_3 = 5$ $a_1 = 25, a_2 = 25$	0.0201s	0.0371	2.3177	0.0021

## Section B-2 : tableau de comparaison

a- Comparaison entre les trois commandes : mode glissant, backstepping et la commande hybride backstepping adaptative mode glissant.

Tableau (7) : comparatif des lois de commande de chariot.

	Régulation	Poursuite	Rapidité	ISE	SSC
<b>Commande par mode glissant</b>	++	++	+	++	++
<b>Commande par la technique de backstepping adaptative</b>	++	++	++	+	+
<b>Commande hybride backstepping adaptative-mode glissant</b>	++	++	+++	++	++

Tableau (8) : comparatif des lois de commande de pendule.

	Régulation	Poursuite	Rapidité	ISE	SSC
<b>Commande par mode glissant (SMC)</b>	++	++	+	++	++
<b>Commande par la technique de Backstepping adaptative</b>	++	++	++	+	+
<b>Commande hybride backstepping adaptative mode glissant</b>	++	++	+++	++	++