

N° Ordre...../FSI/UMBB/2014

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA – BOUMERDES



Faculté des sciences de l'ingénieur

Thèse de DOCTORAT

Présentée par :

ABERKANE Sofiane

En vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT en :

Filière : Energétique

Option : Thermique et Combustion

**Etude de l'influence du champ magnétique sur le
transfert de chaleur et de masse dans les écoulements
rotatifs**

Le jury composé de:

BALISTROU Mourad	Maître de Conférences A (UMBB)	<i>Président</i>
MANSOURI Kacem	Professeur (UMBB)	<i>Examineur</i>
HACHEMI Madjid	Maître de Conférences A (UMBB)	<i>Examineur</i>
SPITERI Pierre	Professeur (U. de Toulouse)	<i>Examineur</i>
GHEZAL Abderrahmane	Professeur (USTHB)	<i>Directeur de Thèse</i>

Année universitaire: 2014/2015

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à mes très chères parents qui m'ont toujours entouré de leur confiance, amour et encouragement tout le long de ma vie et dont le soutien m'a toujours aidé à réussir dans la vie.

Je le dédie à mes frères et mes sœurs et à tous qui me sont chers pour leur amour et leur patience.

À mes meilleurs amis pour leurs soutiens dans les moments difficiles.

Je dédie cette thèse

À tous les instituteurs, professeurs et enseignants qui ont contribué un jour à mon éducation et à ma formation et qui m'ont permis, par leurs efforts, d'atteindre ce niveau.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été mené au sein de Laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée (LMFTA) de la faculté de physique de l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB), sous la direction de Monsieur A. GHEZAL, professeur à l'USTHB, à qui je tiens à adresser ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli dans son équipe. Je le remercie pour son assistance, sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils qui m'ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de cette étude.

Je tiens à remercier Monsieur M. BALLISTRU maître de conférences à la faculté des sciences de l'ingénieur (UMBB), de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury, qu'il trouve ici l'expression de mes sincères reconnaissances.

Je prie Monsieur le professeur K. MANSOURI, professeur à la faculté des sciences de l'ingénieur (UMBB), d'accepter mes sentiments les plus respectueux pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Que Monsieur M. HACHEMI maître de conférences à la faculté des sciences de l'ingénieur (UMBB), qui a accepté volontier de faire partie du jury, soit remercié et qu'il trouve ici l'expression de mes sincères reconnaissances.

Je suis extrêmement reconnaissant à Monsieur P. SPITERI, professeur à l'université de TOULOUSE, et je le remercie d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail.

Je voudrais remercier chaleureusement Monsieur B. BRACHEMI, chef de département énergétique à la faculté des sciences de l'ingénieur (UMBB), pour son soutien durant toutes ces années.

Je remercie tous mes amis, les membres du laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée et tous ceux qui ont apporté leur contribution à la réalisation de ce travail.

Résumé

Cette étude s'intéresse à l'effet d'un champ magnétique axial imposé sur un écoulement incompressible d'un fluide électriquement conducteur entre deux cylindres coaxiaux horizontaux en rotation. Le champ magnétique imposé est supposé uniforme et constant, la génération de la chaleur due à la dissipation visqueuse est prise en considération dans la présente étude. Les parois du cylindre intérieur et extérieur sont maintenues à des températures et concentration constantes mais différentes. Le mouvement du fluide est dû à la rotation de cylindre intérieur avec une vitesse constante. Une solution exacte des équations régissant l'écoulement a été obtenue sous forme de fonctions de Bessel. Un schéma implicite de différences finies a été utilisé pour la résolution numérique. Les distributions de vitesse et de températures ont été obtenues aussi bien avec que sans l'influence du champ magnétique. Les résultats obtenus montrent que l'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement. La vitesse et la concentration entre les deux cylindres décroissent d'avantage au fur et à mesure que le nombre de Hartmann augmente, en revanche, ce dernier n'affecte pas la température. En augmentant le nombre de Hartmann, on constate une nette décroissance du nombre de Nusselt sur la surface des cylindres. L'Application du champ magnétique a pour effet de diminuer le nombre de Sherwood sur le cylindre extérieur fixe. Par contre l'augmentation du nombre de Hartmann améliore le transfert de matière sur le cylindre intérieur rotatif.

Mots clés: Cylindres rotatifs, dissipation visqueuse, transfert de chaleur et de masse, champ magnétique, fonction de Bessel, différences finies.

Abstract

This study is interested in the effect of an axial magnetic field imposed on incompressible flow of electrically conductive fluid between two horizontal coaxial cylinders. The imposed magnetic field is assumed uniform and constant. The effect of heat generation due to viscous dissipation is also taken into account. The inner and outer cylinders are maintained at uniform but different temperatures and concentrations. The movement of the fluid is due to rotation of the cylinder with a constant velocity. An exact solution of the governing equations for momentum and energy are obtained in the form of Bessel functions. A finite difference implicit scheme was used in the numerical solution to solve the governing equations of convection flow and mass transfer. The velocity, concentration and temperature distributions were obtained with and without the magnetic field. The results show that for different values of the Hartmann number, the velocity and concentration between the two cylinders decreases as the Hartmann number increases. On the other hand, it does not affect the temperature. Also, it is found that by increasing the Hartmann number, the Nusselt and Sherwood numbers decreases.

Keywords: Rotating cylinders, viscous dissipation, heat transfer, mass transfer, magnetic field, Bessel function, finite difference.

ملخص

تهتم هاته الدراسة بتأثير حقل مغناطيسي رأسي مفروض علي سيلان غير قابل للانضغاط لمائع ناقل للكهرباء بين أسطوانتين رأسييتين مشتركتين محورياً. إن الحقل المغناطيسي المفروض يعتبر متجانساً وثابتاً، كما يأخذ بالحسبان ضياع الطاقة نتيجة اللزوجة.

إن جدار الأسطوانتين الداخلية و الخارجية لهما درجة حرارة وتركيز ثابتين ولكن مختلفين.

يسبب دوران الأسطوانة بسرعة ثابتة حركة السائل.

تم الحصول على حل دقيق باستعمال دوال Bessel . أما الحل العددي فلقد تم باستخدام الفروق المحدودة. إن توزيع السرعة و الحرارة تمت دراستهما بتأثير الحقل المغناطيسي و بدونه.

بيّنت النتائج أن القيم المتوسطة لشدة الحقل المغناطيسي تنقص قيم السرعة و التركيز و لكنها لا تؤثر في الحرارة.

عندما تبلغ شدة الحقل المغناطيسي قيمة كبرى فإن ذلك يتسبب في تناقص واضح لأعداد Sherwood و Nusselt.

الكلمات المفتاحية :

إسطوانات دورانية ، تبديد لزج، انتقال الحرارة والكتلة، الحقل المغناطيسي، دوال Bessel ، و الفروق المحدودة

Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------	---

Chapitre I : Etude bibliographique

I.1. Introduction	3
I.2. Contenu du mémoire	3
I.3. Revue bibliographique	4

Chapitre II : Formulation du problème

II.1. Introduction	19
II.2. Description du problème physique	19
II.3. Equations générales	20
II.3.1 Equations régissant le milieu fluide	21
II.3.2 Equations du champ électromagnétique	21
II.4. Hypothèses simplificatrices	23
II.5. Equations gouvernantes simplifiées	24
II.5.1 Equations de conservation	24
II.5.2 Conditions initiales et aux limites	26
II.6. Analyse adimensionnelle	27
II.6.1 Equations gouvernantes adimensionnelles	27
II.6.2 Conditions initiales et aux limites adimensionnelles	28
II.7 Taux de transfert thermique et solutale	29
II.7 .1 Le nombre de Nusselt	29
II.7 .2 Le nombre de Sherwood	30

Chapitre III: Etude analytique

III -1. Introduction	31
III -2. Hypothèses	31
III -3. Équations simplifiées	31
III -4. Équations adimensionnelles	33
III -5. Détermination du profil de la vitesse	34
III -5.1 Cas sans champ magnétique	35
III -5.2 Validation	36
III -5.3 Tracé de vitesse	37
III-6. Détermination du profil de la température	40
III-6.1. Développement limité du premier ordre de fonctions de Bessel modifiées	41
III-6.2. Développement limité du deuxième ordre de fonctions de Bessel modifiées	41
III-6.3 Développement limité du troisième ordre de fonctions de Bessel modifiées	42
III-6.4. Calcul théorique du nombre de Nusselt	45
III-6.5. Tracé de la température	45
III-6.5. Tracé du nombre de Nusselt	46

Chapitre IV : Résolution numérique

IV-1. Introduction	48
IV-2 Maillage utilisé	49
IV-3. Schéma aux différences finies	50
IV -3.1 Description de la méthode	50
IV -3.2 Discrétisation des dérivées partielles	51
a- Approximation de la dérivée première suivant le temps	51
b- Approximation des dérivées spatiales	51
IV -3.3 Différentiation des équations	53
IV -4. Equations discrétisées	55
IV -5. Traitement des opérateurs aux frontières	57
IV -6. Hypothèse sur la vitesse de rotation du cylindre intérieur	61

IV -7. Procédé itératif	62
IV -8. Stabilité et convergence	63

CHAPITRE V : Résultats et discussion

V.1. Introduction	67
V.2. Etude de densité de maillage	67
V3. Validation des modèles numériques	69
V.4. Influence du champ magnétique sur le champ dynamique	71
V.4.1 Le champ de la vitesse radiale	74
V.4.2 Le champ de la vitesse azimutale	74
V.4.3 Le champ de la vitesse axiale	75
V.4.4 Le champ de pression	76
V.4.5 Les lignes de courants	77
V.5 Comparaison entre les résultats analytiques et numériques	78
V.5.1 Effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le profil de température	78
V.5.2 Effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre de Nusselt	79
V.5.3 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de vitesse azimutale	80
V.5.4 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de température	80
V.6 Ecoulement de Couette circulaire avec un gradient radial de température	81
V.6.1 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de température	81
V.6.2 L'effet de nombre de Hartmann sur la distribution du nombre de Nusselt local	82
V.6.3 L'effet du nombre d'Eckert sur la distribution du nombre de Nusselt local	83
V.6.4 L'effet du nombre d'Eckert sur le nombre de Nusselt moyen	84
V.7. Etude de l'influence du champ magnétique en régime transitoire	84
V.7. 1 Evolution de la vitesse azimutale au cours du temps	85
V.7.2 Evolution de la température au cours du temps	85
V.8 Ecoulement de Couette circulaire avec un gradient radial de concentration	87
V.8.1 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de concentration	87
V.8.2 Effet du nombre de Hartmann sur le nombre de Sherwood local	88

Conclusion générale

89

Références

Annexes

Nomenclature

Lettres latines

b	Rapport de vitesse
B	Champ magnétique (tesla)
\vec{E}	Champ électrique
Ec	nombre d'Eckert
C	Concentration
Cp	Chaleur spécifique à pression constante (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹).
d	Epaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres
D	Coefficient de diffusion (cm ² .s)
$F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$	Les composantes de la force de Lorentz dans les directions radiale, axiale et azimutale
\vec{j}	Densité volumétrique de courant (A. m ⁻³)
Ha	Nombre de Hartmann
k	Conductivité thermique, (w.m ⁻¹ .k ⁻¹)
L	Longueur du cylindre intérieur et extérieur (m)
Nu	Nombre de Nusselt
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
P	Pression
Pr	Nombre de Prandtl
r	Coordonnée radiale
R ₁	Rayon du cylindre intérieur
R ₂	Rayon du cylindre extérieur
Sc	Nombre de Schmidt
Sh	Nombre de Sherwood
\overline{Sh}	Nombre de Sherwood moyen
T	Température
t	temps
Ta	Nombre de Taylor défini par
Ta _c	Nombre de Taylor critique
V _o	Vitesse linéaire du cylindre intérieur

\bar{U}	Vecteur vitesse $\bar{U}(u, v, w)$
u	Composante radiale de la vitesse
v	Composante tangentielle de la vitesse
w	Composante axiale de la vitesse
z	Coordonnée axiale

Symboles Grecs:

ϵ_0	perméabilité électrique.
α	Diffusivité thermique, ($m^2.s^{-1}$)
η	Rapport des rayons $\eta = R_1/R_2$
μ	Viscosité dynamique du fluide ($kg. m^{-1}.s^{-1}$).
μ_m	perméabilité magnétique ($H. m^{-1}$)
ν	Viscosité cinématique du fluide ($m^2.s^{-1}$)
θ	Direction azimutale (rad).
ρ	masse volumique ($kg. m^{-3}$)
σ	Conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)
Ω_1	Vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur (rad. s^{-1})
Ω_2	Vitesse angulaire de rotation du cylindre extérieur (rad. s^{-1})
Γ	Rapport de forme (Rapport d'aspect) $\Gamma = L/d$
Θ	Température adimensionnel
Φ	Dissipation visqueuse

Indices

c	Valeur critique
i	Indice dans la direction longitudinale
j	Indice dans la direction radiale
1	Indice du cylindre intérieur
2	Indice du cylindre extérieur
(*)	Variable dimensionnelle utilisée pour (r, z, t, u, w, P, Θ et C)

Liste des figures

Figure II.1: Géométrie du système physique étudié	20
Figure III.1: le profil de vitesse dans l'espace annulaire pour différentes valeurs de b (a) résultat de A. Dizaji Feiz et al. [13] and K. Vajravelu et al [46], (b) résultat de la présente étude analytique.	36
Figure III.2: le profil de vitesse dans l'espace annulaire pour $b = -1$, (a) Résultat de Dizaji Feiz et al [2008] , (b) résultat de la présente étude analytique.	37
Figure III.3 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, $\eta=0.5$, $b=0$	38
Figure III.4 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, avec $\eta=0.5$, $b=5$	39
Figure III.5 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, $\eta=0.5$, $b=-5$	40
Figure III.6 : L'influence de l'ordre de développement limité des fonctions de Bessel sur la température, $\eta = 0.5$, $Ha= 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$	45
Figure III.7 : L'influence de l'ordre de développement limité des fonctions de Bessel sur le nombre du Nusselt moyen sur (a) le cylindre intérieur et (b) le cylindre extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$	46
Figure III.8 : L'influence de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre du Nusselt moyen sur (a) cylindre intérieur et (b) cylindre extérieur en fonction du nombre d'Eckert, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha=0.5$	46
Figure IV.1 : Représentation géométrique du domaine d'étude et de la cellule de M.A.C	49
Figure IV.2 : les frontières du domaine étudié	57
Figure IV.3: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_1 , $z=0$	58
Figure IV.4: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_2 , $z=L$	59
Figure IV.5 : Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_3 , $r=R_2$	59
Figure IV.6: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_1 , $r=R_1$	60
Figure IV.7: Evolution de la vitesse de rotation au cours du temps	61
Figure IV.8: Organigramme du processus itératif	66
Figure. V.1: Influence du maillage sur le profil radial de la vitesse azimuthal, $\eta =0.5$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Ha=0$, $z=1$.	66

Figure V.2 : Champ de vorticité à $Re=115$ /Régime TVF, (a) résultats expérimentaux	70
d'après Dong Liu et al [58], b) résultats de notre simulation numérique	
Figure V.3: Composante radiale du profil de la vitesse à $Re=125$ /Régime TVF, (a) résultats	70
expérimentaux d'après Abcha et al [59], b) résultats de notre simulation numérique	
Figure V.4 : Composante axiale du profil de la vitesse à $Re=125$ /Régime TVF résultats	70
expérimentaux d'après Abcha et al [109], b) résultats de notre simulation	
Figure V. 5: Profile de la vitesse radiale à différents nombres de Hartamnn,	71
$Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$	
Figure V. 6: Profile de la vitesse azimutale �� différents nombres de Hartamnn,	72
$Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$	
Figure V. 7: Profile de la vitesse axiale à différents nombres de Hartamnn,	72
$Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$	
Figure V.8: Profile de la pression à différents nombres de Hartamnn, $Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$	73
Figure V. 9 : Contours de la vitesse radiale à différents nombres de Hartmann �� $Ta = 100$.	74
Figure V. 10: Contours de la vitesse azimutale �� différents nombres de Hartmann �� $Ta = 100$.	75
Figure V. 11: Contours de la vitesse axiale à différents nombres de Hartmann �� $Ta = 100$.	75
Figure V. 12 : Le champ de pression à différents nombres de Hartmann �� $Ta = 100$.	76
Figure V. 13 : Influence du champ magnétique sur les lignes de courant pour, $Ta=100$	77
Figure V.14 : L'effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur la distribution	78
de la température, pour $Ha= 0.5, \eta = 0.5, Pr = 0.02, Ec=0.5$.	
Figure V.15 : L'effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre de	79
Nusselt moyen, surfaces de cylindres intérieur (a) et extérieur (b) en fonction	
de nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5, Pr = 0.02, Ec=0.5$.	
Figure V.16 : Comparaison des résultats anlytique et numérique de profil de vitesse,	80
$\eta = 0.5, Ta=20, t^*=120$.	
Figure V.17 : Comparaison des résultats anlytique et numérique du profile de temperature,	80
$\eta = 0.5, Ta=20, Pr = 0.02, Ec=0.0001, t^*=120$.	
Figure V.18 : Profile de temperature en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$,	81
$Ta=20, Pr = 0.02, Ec=0.5, t^*=120$.	

- Figure V.19 :** L'effet de nombre de Hartmann sur la distribution du nombre de Nusslet local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$, $t^*=120$ 82
- Figure V.20 :** L'effet du nombre d'Eckert sur la distribution du nombre de Nusslet local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha=0$, $t^*=120$. 83
- Figure V.21:** L'effet du nombre d'Eckert sur le nombre de Nusslet moyen, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $t^*=120$. 84
- Figure V.22 :** La distribution de la vitesse à différents temps pour (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$. 85
- Figure V.23 :** La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 0.0$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=0,02$ 85
- Figure V.24 :** La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 2$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=1$. 86
- Figure V.25 :** La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 0.0$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=7$ 86
- Figure V.26 :** La distribution de la concentration en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Ta=20$, $Pr = 0.02$, $Ec=0$, $t^*=120$, $z/d=7$. 87
- Figure V.27:** L'effet du nombre de Hartmann sur le nombre de Sherwood local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Sc=10$, $Ec=0$, $t^*=120$ 88

Liste des tableaux

Tableau V.1 : Effet du maillage sur la précision des résultats pour $Ha=2$, $Ec = 0$, $Ta=20$

68

Introduction générale

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude de l'écoulement en rotation des fluides électriquement conducteurs tels que les métaux liquide et le plasma en présence du champ magnétique, appelée magnétohydrodynamique (MHD) a beaucoup été analysé ces dernières années en raison de son importance dans la mécanique des fluides moderne et ses diverses applications. En astrophysique et géophysique, est appliqué à l'étude des structures stellaires, des noyaux terrestres et plasma solaire. Dans l'industrie, il trouve son application dans les pompes mhd, les réacteurs nucléaires, l'extraction de l'énergie géothermique, la métallurgie et la croissance cristalline dans le domaine des semi-conducteurs, le contrôle du comportement et de la stabilité des écoulements convectifs.

Le présent travail concerne l'étude de l'écoulement confiné d'un fluide incompressible conducteur d'électricité à Reynolds magnétique entre deux cylindres coaxiaux horizontaux en rotation. Il s'agit d'une étude relative à un domaine de recherche où la Mécanique des Fluides et l'Energétique sont étroitement imbriqués qui est celui des « Transferts couplés ». L'objectif de cette étude est d'aboutir à une détermination de l'influence du champ magnétique sur les champs dynamique, thermique et concentration.

Les équations fondamentales régissant le comportement des deux milieux, fluide et solide, sont ensuite formulées ainsi que les conditions initiales et aux limites.

Les caractéristiques hydrodynamiques et du transfert de chaleur ont été déterminés analytiquement dans un espace annulaire cylindrique dans le cas d'un développement simultané des champs de vitesse et de la température dans un écoulement laminaire Cet écoulement résulte de la rotation du cylindre intérieur en présence d'un champ magnétique uniforme et externe. Une solution exacte des équations régissant l'écoulement a été obtenu sous forme de fonctions de Bessel.

Le traitement numérique dans le cas d'un écoulement axisymétrique bidimensionnel des équations de Navier Stokes, de l'énergie et de diffusion-convection a permis la détermination de l'étude de l'influence des paramètres géométriques et hydrodynamique sur le mécanisme d'échange thermique et solutale entre les parois et le fluide. La méthode numérique utilisé est une méthode implicite aux différences finies de types Crank – Nicolson.

Une étude développée du cas d'un écoulement rotatif a été conduite à terme associant une étude analytique et une étude numérique. Les résultats des deux études offrent une bonne concordance.

La recherche du lien entre la structure de cet écoulement mhd et le transfert de matière ou de chaleur (fluide- paroi) demeure toujours d'actualité, sans doute en raison de la complexité du problème hydrodynamique de cet écoulement, connu sous le nom de Taylor Couette.

Chapitre .I
Etude bibliographique

I.1. Introduction

L'étude de l'écoulement des fluides conducteurs de l'électricité tels que les métaux liquide et le plasma en présence du champ magnétique, appelée magnétohydrodynamique (MHD) a été beaucoup investigué ces dernières années en raison de son importance dans la mécanique des liquides moderne et de ses diverses applications. En astrophysique et géophysique, il est appliqué à l'étude des structures stellaires, des noyaux terrestres et plasma solaire. Dans l'industrie, il trouve son application dans les pompes mhd, les réacteurs nucléaires, l'extraction de l'énergie géothermique, la métallurgie et la croissance cristalline dans le domaine des semi-conducteurs, le contrôle du comportement et de la stabilité des écoulements convectifs.

I.2. Contenu du mémoire

Le présent travail comporte cinq chapitres. Le premier est consacré à une revue bibliographique sur les écoulements mhd et les principaux résultats sur les effets du champ magnétique sur les transferts de chaleur et de masse d'un fluide conducteur d'électricité dans les écoulements rotatifs.

Le deuxième chapitre présente la description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques.

L'objet du troisième chapitre est de développer une solution analytique, valide pour un écoulement MHD stationnaire en présence d'un gradient de température dans une cavité cylindrique, basée sur l'approximation des fonctions de Bessel modifiées.

Dans le chapitre suivant, nous décrivons le code numérique ainsi que l'algorithme de calcul utilisé dans cette étude, basé sur la méthode des différences finies.

Le cinquième chapitre est consacré à la comparaison des résultats obtenus analytiquement avec ceux obtenus numériquement ainsi qu'à leur discussion

Enfin, nous concluons ce travail par un récapitulatif sur les principaux résultats et une conclusion, ainsi que ses perspectives ultérieures

I.3. Revue bibliographique

Les études sur les écoulements magnétohydrodynamique ont été lancées par les travaux pionniers de Hartmann et Lazarre en 1937, qui ont effectué l'étude théorique et expérimentale d'un écoulement laminaire de mercure dans les conduits placés dans le champ magnétique. Le sujet a été développé plus tard par Alfvenen en 1950, qui a établi les bases de la magnétohydrodynamique (MHD).

- *L'influence du champ magnétique sur le champ dynamique dans les écoulements rotatifs*

S. Chandrasekhar (1961) [1] dans sa théorie de la stabilité en 1961 a consacré une attention particulière à la prévision de la stabilité linéaire de l'écoulement hydrodynamique et hydromagnétique de Taylor–Couette, non seulement pour le cas simple où le cylindre intérieur tourne et l'extérieur est maintenu fixe, mais également pour les cylindres contra – rotatifs et co–rotatifs de hauteurs infinies. Il a considéré le problème dans le cas où le rapport d'aspect $\Gamma \rightarrow \infty$ et le jeu radial $d/R_1 \ll 1$.

H. Kikura et al (1999) [2] ont appliqué la technique de mesure de la vitesse à ultrasons (UVP) à divers cas d'écoulements de fluides ferromagnétiques (a) Système tournant de Couette, (b) écoulement de Sloshing (c) écoulement oscillatoire dans une conduite. Dans le cas de l'écoulement de Couette, un champ magnétique non-uniforme a été appliqué horizontalement, ils ont montré que la vitesse diminue avec l'augmentation de la force de champ magnétique.

Bessaih, Ph. Martyet, M. Kadja. (1999) [3] ont étudié numériquement un écoulement mhd laminaire d'un métal liquide contenu dans une enceinte cylindrique, ayant un rapport d'aspect égal à 1, dont la paroi supérieure est en rotation. L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe vertical. Un bon accord entre les résultats asymptotiques et numériques est obtenu par ces auteurs. Ces derniers ont montré qu'on peut contrôler l'écoulement primaire par un bon choix de la conductivité électrique des parois de l'enceinte en question.

Hayat et al. (2004) [4] ont étudié l'influence d'un champ magnétique sur un fluide non Newtonien, ils ont employé la méthode dite Homotopy Analysis Method (HAM) pour obtenir une solution analytique d'un modèle Oldroyd à 6 constantes pour (a) un écoulement de Couette stationnaire (b) un écoulement de Poiseuille stationnaire (c) un écoulement de

Couette généralisé. Leur solution a montré une dépendance forte des paramètres de fluide non-Newtoniens.

Dans une autre publication **Hayat et al. (2004)** [5] ont considéré également deux plaques parallèles infiniment longues non conductrices entre lesquels le même fluide coule sous l'influence d'un champ magnétique transversal uniforme.

La condition à la frontière de la plaque supérieure utilisée est différente de l'étude [4], la plaque supérieure considérée dans [5] oscille tandis que la plaque inférieure est au repos. Leur solution analytique a encore suggéré que l'écoulement en présence du champ magnétique est fortement influencé par la force du champ magnétique appliquée, les paramètres physiques du fluide, et le mouvement de la plaque supérieure.

L'année suivante, **Asghar et al (2005)** [6] ont étudié l'effet de transfert de chaleur et l'effet Hall sur un écoulement MHD d'un fluide non Newtonien de modèle Oldroyd-B entre deux disques excentriques infinis et rotatifs. Ils ont obtenu des solutions exactes pour la vitesse, la force et le couple exercé par le fluide. Sur la base de leur solution théorique, ils ont prouvé que l'épaisseur de la couche limite de Hartmann diminue avec le nombre de Hartmann par contre elle augmente avec le paramètre de l'effet Hall; ils ont remarqué aussi que lorsque le nombre de Reynolds magnétique est très faible, la configuration de l'écoulement qui tient compte de l'effet Hall est remarquablement similaire à celle de l'écoulement non conducteur.

M.Kaneda et al (2005) [7] ont étudié numériquement l'écoulement hydromagnétique de Taylor-Couette pour déterminer le couple-moteur appliqué sur le cylindre intérieur en fonction de la vitesse de rotation et du champ magnétique vertical caractérisé par le nombre de Hartmann (Ha). Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à sa valeur critique (Re critique ~ 70), le champ magnétique augmente le couple – moteur pour la valeur de Re donnée. En revanche, pour des valeurs de Re plus grandes que la valeur critique, ils ont constaté que le champ magnétique modéré fait diminuer le couple – moteur. Ainsi quand le nombre de Reynolds est plus grand que sa valeur critique, l'effet du champ magnétique modéré est renversé. Au de la de $Re > Re_c$ et pour des valeurs de Ha , le mode de cellules diminue de 4 à 2 cellules. Ce changement dans le plan d'écoulement méridien réduit le couple – moteur de près de 25% pour $Re=300$. Pour $Re > Re_c$ et des valeurs plus élevées de Ha , le mode de cellules égal à 2 car la force de Lorentz tend à fait disparaître l'écoulement azimutal.

Kikura et al (2005) [8] ont étudié expérimentalement l'écoulement d'un fluide ferromagnétique dans un système de Taylor-Couette avec un faible rapport d'aspect à l'aide de la

méthode ultrasonic velocity profile (UVP). Ils ont utilisé un aimant situé à l'extérieur des cylindres pour appliquer au champ d'écoulement un champ magnétique non-uniforme permanent. Ils ont mesuré la distribution de la vitesse axiale en utilisant la technique de mesure UVP et ils ont analysé l'influence du champ magnétique appliqué sur le contrôle de la bifurcation de l'écoulement. Les résultats ont démontré que la méthode UVP était capable de fournir les informations sur la structure d'écoulement de Taylor-Couette avec rapport d'aspect faible, dans un fluide ferromagnétique

Hayat and Kara (2006) [9] ont plus tard étudié l'écoulement de Couette instationnaire d'un fluide incompressible non Newtonien entre deux cylindres coaxiaux, soumis à un champ magnétique d'intensité variable en utilisant un modèle third-grade. Des méthodes théoriques ont été utilisées pour analyser le problème non linéaire et une solution pour le champ de vitesse a été obtenue analytiquement.

Hazem Ali Attia (2006, 2008) avait essayé d'étudier numériquement des problèmes similaires à ceux de Hayat pour un fluide newtonien et non-newtonien, en utilisant la méthode des différences finies [10, 11, 12]. Parmi ces travaux, il a pris en considération l'effet Joule, la dissipation visqueuse et l'effet Hall. Il a constaté que l'effet Hall introduit une composante de vitesse supplémentaire dans la direction z , qui est influencée par la viscosité du fluide, mais pas par la conductivité thermique du liquide.

A. Feiz-Dizaji et al (2008) [13] ont étudié l'écoulement d'un fluide non Newtonien de third-grade modèle dans l'espace annulaire de cylindres rotatifs concentriques en présence d'un champ magnétique. A cet effet, l'équation constitutive d'un tel écoulement de fluide a été simplifiée, et l'existence de la solution de l'équation qui régit l'écoulement a été prouvée en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Ils ont résolu le problème numériquement en employant la méthode des différences finies. On constate dans leur étude qu'il n'y a pas de différence importante entre les profils de vitesse des fluides newtoniens et non newtoniens pour $\varepsilon=0.1$ où ε est un nombre adimensionnelle lié à la constante du matériau due à la viscosité et la viscoélasticité

G. S. Seth & Raj Nandkeolyar et al (2009) [14] ont étudié un écoulement de Couette stationnaire d'un fluide visqueux incompressible électriquement conducteur dans un système de rotation, en présence d'un champ magnétique incliné d'un angle θ avec la direction positive de l'axe de rotation. La solution exacte des équations qui régissent le problème est obtenue. La Formulation mathématique du problème contient trois paramètres principaux à savoir θ , le

paramètre de rotation K^2 et le nombre de Hartmann M^2 . Le Comportement asymptotique de la solution est analysé pour les faibles ainsi que les grandes valeurs de K^2 et M^2 . Ils ont prouvé que l'angle d'inclinaison accélère l'écoulement primaire et secondaire alors que le champ magnétique les retarde. La Rotation retarde l'écoulement primaire tout au long de la chaîne alors qu'elle accélère l'écoulement secondaire à proximité de la plaque mobile. La rotation induit un début d'écoulement inverse au sens d'écoulement primaire à proximité de la plaque fixe. L'angle d'inclinaison et le champ magnétique réduisent les flux primaires et secondaires induits par le champ magnétique tandis que la rotation réduit le flux primaire induit par le champ magnétique et il augmente le flux secondaire induit par le champ magnétique.

S. Das et al (2009) [15] ont étudié l'effet de rotation et le champ magnétique sur un écoulement de Couette MHD instationnaire d'un fluide visqueux incompressible électriquement conducteur entre des plaques parallèles horizontales infinies dans un système en rotation. Une solution exacte des équations a été obtenue en utilisant une transformée de Laplace. Les Solutions pour les distributions de vitesse ainsi que des contraintes de cisaillement ont été obtenues pour des intervalles de temps petits, ainsi que celles associées pour des longues périodes. Il est constaté que pour des longues périodes la vitesse primaire diminue avec l'augmentation du paramètre de rotation K^2 tandis qu'elle augmente avec l'augmentation du paramètre magnétique M^2 . Il est également remarqué qu'avec l'augmentation de K^2 , la vitesse secondaire v_1 diminue à proximité de la plaque fixe alors qu'elle augmente près de la plaque mobile. D'autre part, la vitesse secondaire diminue avec l'augmentation du paramètre magnétique.

R. Ellahi, et al (2010) [16] ont déterminé des solutions analytiques pour un problème non linéaire régissant un écoulement magnétohydrodynamique stationnaire à un modèle de fluide third-grade dans l'espace annulaire de deux cylindres concentriques, où ils tournent avec une vitesse angulaire constantes mais différentes. Ils ont analysé l'influence de paramètres d'écoulement sur la vitesse azimutale et ils ont montré que l'augmentation du champ magnétique conduit à la diminution de la vitesse et de la couche limite.

Yaqing Liu et al (2011) [17] ont étudié analytiquement un écoulement de Couette MHD instationnaire d'un fluide incompressible non Newtonien de modèle Oldroyd-B due à une accélération d'une plaque infinie. Les solutions exactes pour le champ de vitesse et la contrainte de cisaillement sont obtenues en utilisant la technique de transformation de Laplace.

Seth and Singh (2013) [18] ont étudié l'effet d'un champ magnétique uniforme et l'effet Hall sur un écoulement de Couette MHD instationnaire de classe II d'un fluide visqueux incompressible et électriquement conducteur dans un système rotatif. La solution exacte des équations régissant est obtenue par la technique de transformée de Laplace. Le Comportement asymptotique de la solution est analysée pour les petites et les grandes valeurs de paramètre de rotation K^2 et le paramètre magnétique M^2 lorsque le temps $t \gg 1$. L'effet Hall tend à retarder l'écoulement primaire tandis qu'il a un effet inverse sur l'écoulement secondaire. A l'inverse le champ magnétique tend à accélérer l'écoulement primaire alors qu'il a tendance à retarder l'écoulement secondaire. La rotation a tendance à accélérer à la fois l'écoulement primaire et secondaire.

Jenn-ShyangKuo, Jik Chang Leong (2013) [19] ont étudié un écoulement d'un fluide électriquement conducteur rempli entre deux parois cylindriques concentriques relativement proches les uns des autres. Dans ce travail une solution théorique de l'écoulement stationnaire de Taylor-Couette entre ces deux cylindres rotatifs isolés électriquement sous l'influence d'un champ magnétique radial a été réalisé. En résolvant simultanément les équations de Maxwell et de Navier-Stokes simplifiées, les profils de composante de vitesse tangentielle et du champ magnétique induit ont été obtenus grâce aux fonctions de Bessel modifiées du premier et second ordre, dont l'argument contient le nombre de Hartmann et la coordonnée radiale. Une étude numérique a été également effectuée pour valider la solution théorique actuelle. Ils ont trouvé que les résultats analytiques et numériques sont identiques quand $Ha=1$, tandis qu'elles s'écartent légèrement les uns des autres quand Ha augmente. Les résultats actuels montrent que la présence du champ magnétique externe provoque l'accélération de l'écoulement à proximité du cylindre lent alors qu'au voisinage du cylindre rapide l'écoulement ralenti. Ceci montre bien que le champ magnétique externe sert à unifier la distribution de la vitesse à l'exception des régions proches des cylindres, à savoir, la couche de Hartmann. L'intensité du champ magnétique induit est directement proportionnelle à la différence de vitesse entre le cylindre intérieure et extérieure.

- *L'influence du champ magnétique sur le transfert de chaleur dans les écoulements rotatifs*

Tatsuo Sawada et al (1993) [20] ont étudié expérimentalement la convection naturelle d'un ferrofluide entre deux cylindres concentriques horizontaux et isothermes. Ils ont observé que la convection naturelle pourrait être contrôlée par l'application d'un champ magnétique. La température du cylindre extérieur est maintenue à 15 ° C, alors que le cylindre intérieur a été rapidement chauffé de 15 ° C jusqu'à 25 ° C. Un liquide cristallin thermosensible a été utilisé pour la visualisation de la température à la place de la visualisation de l'écoulement; les températures sur la section centrale transversale ont également été mesurées par des thermocouples. Un champ magnétique a été appliqué pour les cylindres à l'aide d'un aimant permanent. Plusieurs types d'expériences ont été menés pour étudier l'influence de la direction et de l'intensité du champ magnétique sur la convection naturelle. En absence du champ magnétique, la convection naturelle ordinaire a été observée. Lorsque le gradient du champ magnétique a été appliqué dans la même direction que la gravité, la gravité apparente a augmenté; Cependant, seule une petite variation du champ de température a été observée. Lorsque le gradient du champ magnétique a été appliqué dans le sens inverse de la gravité, ils ont observé une influence significative sur la distribution de la température sur la paroi. Il a été vérifié que la convection naturelle pourrait être contrôlée par l'intensité et la direction du champ magnétique.

H. Ben Hadid, et D. Henry (1996) [21] On étudié l'effet d'un champ magnétique constant sur un écoulement tridimensionnel d'un liquide métal dans une cavité cylindrique correspondant à la croissance de Bridgman horizontal. Les équations de Navier-Stokes et d'Ohm ont été résolues numériquement en trois dimensions. Les résultats montrent que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique appliqué conduit à plusieurs changements fondamentaux dans l'écoulement et la convection. L'intensité de l'écoulement est réduite dans tous les cas, généralement avec une variation asymptotique au-delà d'une certaine valeur de Ha , qui dépend de la direction du champ magnétique constant appliqué. Avec un rapport d'aspect moyen de la cavité qui correspond à cette étude, la diminution de l'intensité de l'écoulement est plus forte pour l'orientation du champ magnétique vertical, et plus faible pour les deux autres orientations longitudinale et transversale. Les changements structurels observés correspondent à l'apparition de profils de vitesse spécifiques, de couches de Hartmann et de couches parallèles. L'effet principal est la tendance de l'écoulement vers

bidimensionnelle avec un profil de vitesse linéaire horizontal selon y . Ces changements sont en fait étroitement liés à la répartition du courant électrique induit dans la cavité, qui est spécifique à chaque orientation du champ magnétique.

Singh, S.K., Jha, B.K. and Singh, A.K. (1997) [22] ont présenté des solutions exactes pour une convection naturelle complètement développée dans un espace annulaire vertical de longueur infini soumis à un champ magnétique radial. Les expressions du champ de vitesse, du champ de température, de taux de transfert de masse et du coefficient de frottement sont données pour différentes conditions aux limites thermiques. Ils ont observé que la vitesse et la température du fluide sont plus grandes dans le cas de condition isotherme par rapport au cas de condition de flux de chaleur constant imposé lorsque la taille de l'espace annulaire est inférieure ou égale au rayon du cylindre interne tandis que le phénomène inverse se produit lorsque l'écart entre les cylindres est supérieur au rayon de cylindre intérieur. En outre, l'effet du champ magnétique consiste à pour effet de diminuer le champ de vitesse dans les deux cas.

El-Amin, M.F. (2003) [23] ont étudié les effets de résistance du premier et du second ordre dû à la matrice solide du milieu poreux sur la convection forcée dans un cylindre horizontale en présence d'un champ magnétique et la dissipation visqueuse. Différentes conditions de température sur la paroi sont considérées. La méthode locale de non-similarité du deuxième ordre est utilisée pour convertir les équations non linéaires en un système d'équations différentielles ordinaires, qui a été résolu en utilisant la méthode de Runge Kutta du quatrième ordre. Les résultats ont montré que la vitesse diminue avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique à cause de l'effet retardateur de la force magnétique, par conséquent, l'épaisseur de la couche limite dynamique devient plus grande, et la séparation de la couche limite se produit plus tôt. La température augmente avec l'augmentation de nombre de Hartmann.

H.S. Takhar, A.J. Chamkha, G. Nath (2003) [24] ont développé une étude de convection mixte instationnaire dans un cône vertical tournant avec une vitesse angulaire dépendante du temps en présence d'un champ magnétique. Le système d'équations aux dérivées partielles non-linéaire couplées régissant l'écoulement a été résolu numériquement en utilisant un schéma implicite aux différences finies. Le coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt local dans les directions tangentielle et azimutale augmentent quand la vitesse angulaire de cône augmente avec le temps; mais ils ont observé une tendance inverse quand la vitesse angulaire diminue. Le champ magnétique réduit le coefficient de frottement et le

nombre de Nusselt dans la direction tangentielle, mais il augmente le coefficient de frottement local dans la direction azimutale. Les coefficients de frottement local et le nombre de Nusselt augmente avec la force de flottabilité.

Sankar, M., Venkatachalappa, M. and Shivakumara, I.S. (2006) [25] ont étudié numériquement l'influence d'un champ magnétique axial et radial sur la convection naturelle d'un fluide conducteur de l'électricité avec un faible nombre de Prandtl ($Pr=0,054$) dans un espace annulaire cylindrique vertical. Les cylindres intérieurs et extérieurs sont maintenus à des températures uniformes et les parois horizontales supérieure et inférieure sont thermiquement isolées. Un schéma aux différences finies constitué de la méthode implicite aux directions alternées (ADI) et la méthode de lignes successives sur relaxation (SLOR) sont utilisées pour résoudre les équations régissant le problème qui sont formulées sous la forme vorticité- fonction de courant. Les Résultats numériques de taux de transfert de chaleur, la température et la vitesse ont été présentées pour des valeurs de Hartmann radial $0 \leq Ha_r$ et axial $Ha_x \leq 100$, un nombre de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, un rapport de rayon $1 \leq R \leq 10$ et un rapport d'aspect $0 \leq \Gamma \leq 100$. Les résultats numériques montrent que dans des cavités de faibles profondeurs le transfert de chaleur et l'écoulement sont supprimées de façon plus efficace par un champ magnétique axial, tandis que, dans les cavités de grande taille un champ magnétique radial est plus efficace. Il est également constaté que les oscillations de l'écoulement peuvent être supprimées de manière efficace en imposant un champ magnétique externe. Le nombre de Nusselt moyen augmente avec le rapport des rayons, mais diminue avec le nombre de Hartmann.

Bessaih et al. (2009) [26] ont étudié la stabilité magnétohydrodynamique d'un écoulement tournant dans un cylindre contenant du métal liquide ($Pr=0.015$), ayant un rapport d'aspect égal à 2 et soumis à un gradient vertical de température et un champ magnétique axial. La méthode des volumes finis a été utilisée afin de résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et du potentiel électrique. Ils ont montré qu'en absence de champ magnétique, le nombre de Reynolds critique est une fonction décroissante du nombre de Richardson (pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques $Re_{cr} = 2575, 924, 802$ et 606), correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1.0$ et 2.0). Ils ont établi un diagramme de stabilité d'après les résultats numériques de cette investigation. Ce diagramme met en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha , pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, cette étude confirme la possibilité de la stabilisation d'un

écoulement de métal liquide en convection mixte par application d'un champ magnétique axial.

W. Wrobel, E. Fornalik-Wajs, J.S. Szmyd (2010) [27] ont réalisé une étude expérimentale et numérique de la convection thermo-magnétique d'un ferrofluide dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux verticaux. Cette étude est complétée par une analyse expérimentale de la convection naturelle en fonction de l'angle de l'inclinaison afin de faire apparaître la stabilité de la configuration actuelle. Ils ont observé qu'en fonction de la direction et de la force du champ magnétique, on peut améliorer ou supprimer les mouvements de convection. Les distributions du nombre de Nusselt présente des minima dans deux positions de l'enceinte, qui dépend de la relation réciproque entre les forces de gravité et les forces du au champ magnétique.

M.A. Azim, A.A. Mamun, M.M. Rahman (2010) [28] Ont étudié un problème stationnaire de mhd et de transfert de chaleur dans une plaque plane verticale en tenant compte des effets de dissipation visqueuse, de chauffage par effet Joule, de paramètre de génération de la chaleur et de paramètre de conduction. Les équations résultantes obtenues en introduisant la fonction de courant à la variable adimensionnelles sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies implicite. Les résultats montrent que La vitesse du fluide diminue avec l'augmentation du champ magnétique, le nombre de Prandtl et le paramètre de conduction tandis qu'elle augmente avec l'augmentation de la fonction de dissipation visqueuse, le paramètre de chauffage par effet Joule et le paramètre de génération de la chaleur. Alors que la température du fluide augmente avec l'augmentation du champ magnétique, la fonction de dissipation visqueuse, paramètre de chauffage par effet Joule et le paramètre de génération de la chaleur alors qu'elle augmente avec la diminution de nombre de Prandtl et de paramètre de conduction. En outre, le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du champ magnétique, la fonction de dissipation visqueuse, paramètre de chauffage par effet Joule, le paramètre de conduction et le paramètre de génération de chaleur et il augmente au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente.

O.D. Makinde, O.O Onyejekwe (2011) [29] ont adopté une méthode de tir couplé avec un algorithme d'intégration de Runge-Kutta de sixième ordre pour résoudre numériquement les équations différentielles non linéaires couplées du mouvement et l'énergie qui régissent l'écoulement stationnaire de Couette et le transfert de chaleur d'un fluide électriquement conducteur ayant une viscosité et une conductivité électrique variable entre deux plaques

parallèles en présence d'un champ magnétique transversal. L'écoulement est entraîné par l'action combinée de gradient de pression axiale et le mouvement uniforme de la plaque supérieure. Les résultats révèlent que l'effet combiné de champ magnétique, la viscosité et la variation de la conductivité électrique, ont impact significatif sur les propriétés hydromagnétiques et électriques du fluide.

S.C. Kakarantzas, I.E. Sarris, N.S. Vlachos (2011) [30] Ont étudié l'effet combiné d'un champ magnétique externe horizontal et une source de chaleur volumétrique interne sur la convection naturelle d'un écoulement d'un liquide métal dans un espace annulaire vertical fermé dans laquelle les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques tandis que les parois cylindriques sont maintenues à des températures différentes. L'écoulement est entraîné par deux mécanismes; la différence de température entre les deux parois cylindriques et le chauffage volumétrique. Les régimes laminaire et turbulent de l'écoulement sont évalués par des simulations numériques directes en trois dimensions. Les résultats montrent qu'en l'absence du champ magnétique, l'écoulement turbulent est développé dans la plupart des cas, alors qu'au fur et à mesure que le champ magnétique augmente l'écoulement devient laminaire. La température la plus élevée se trouve dans la partie supérieure centrale de la cavité annulaire lorsque le liquide est chauffé de façon volumétrique, ce qui entraîne la création de deux courants de convection où le fluide chaud monte dans la partie centrale et descend à proximité de deux parois froides. Les couches Hartmann et Roberts développées à proximité des parois normales et parallèles au champ magnétique, respectivement, s'avèrent être responsable de la perte de l'axisymétrie de l'écoulement.

Omid Mahian, Shohel Mahmud, Ioan Pop (2012) [31] ont présenté une analyse sur la première et la deuxième loi de la thermodynamique pour montrer les effets de l'écoulement mhd sur les distributions de vitesse, de la température et de la production de l'entropie entre deux cylindres rotatifs concentriques. L'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux, et newtonien à l'intérieur de l'espace annulaire est considéré comme étant stationnaire et laminaire. Les parois des cylindres sont maintenues à différentes températures constantes. Les équations en coordonnées cylindriques sont simplifiées et elles sont analytiquement résolues pour obtenir le taux de la production d'entropie locale et moyen. La distribution des vitesses dans l'espace annulaire est donnée en fonctions des fonctions de Bessel modifiées I_1 et K_1 . Par conséquent, pour obtenir le champ de température, le développement des fonctions de Bessel modifiée I_1 et K_1 , avec trois termes sont utilisés dans l'équation de l'énergie. Ils ont trouvé que la vitesse et la température chutent dans l'espace annulaire avec l'augmentation de

nombre de Hartmann Ha et le nombre de Brinkman Br , respectivement. Ils ont constaté qu'avec l'augmentation du nombre de Hartmann, la génération d'entropie moyenne augmente. En outre, ils ont observé que pour un nombre de Hartmann Ha variant entre 0 à 1,25, la production d'entropie moyenne est minimale tandis que Br se situe dans la gamme de 6-8. Le rapport de rayon optimum, pour n'importe quelle valeur du nombre de Hartmann, est égale à $R = 0,55$ au cours de laquelle la production d'entropie est minimisée.

RH Mozayyeni et AB Rahimi (2012) [32] ont étudié numériquement le problème de convection mixte stationnaire et instationnaire d'un fluide dans une région complètement développée entre deux cylindres horizontales infinies concentriques, en présence d'un champ magnétique constant et radial, en tenant compte des effets de dissipation de chaleur dans le fluide visqueux. L'écoulement est induit par la rotation du cylindre externe froid avec une vitesse angulaire constante. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre des équations régissant à deux dimensions, qui sont la continuité, la quantité de mouvement et l'énergie, par l'algorithme SIMPLE. Les investigations ont été menées pour des larges valeurs adimensionnelles de Hartmann $0 < Ha < 200$, Rayleigh $1000 < Ra < 30$, Eckert, $0 < Eck < 0.5$ et Prandtl $0.5 < Pr < 20$. Les résultats numériques montrent que l'écoulement et le transfert de chaleur sont supprimés plus efficacement en imposant un champ magnétique externe. En outre, il est constaté que ce champ magnétique externe provoque une chute de la vitesse et la température du fluide. En outre, ils ont montré que les termes de dissipation visqueux ont des effets significatifs dans des situations présentant des valeurs élevées de nombres d'Eckert et de Prandtl et des faibles valeurs de nombre de Reynolds.

Récemment, une certaine attention a été accordée à l'étude d'influence du champ magnétique sur les nano fluides

M. Sheikholeslami et al (2012) [33] ont étudié l'effet d'un champ magnétique radial sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire concentrique entre un carré externe froid et un cylindre interne chauffé en utilisant la méthode Lattice Boltzmann (LBM). La conductivité thermique et la viscosité effectives du nano fluide sont calculées à l'aide des modèles de Maxwell-Garnetts (MG) et de Brinkman, respectivement. De plus un modèle de diffusion multifonctions (MDF) est utilisé pour simuler l'effet du champ magnétique uniforme. Les résultats révèlent que les oscillations de l'écoulement peuvent être supprimées de manière efficace par l'application d'un champ magnétique radial externe. En outre, on constate que le nombre de Nusselt moyen est une fonction croissante de la fraction volumique des nano particules et du nombre de Rayleigh, alors qu'il est une fonction

décroissante du nombre de Hartmann. Par la suite **Ashorynejad et al (2013) [34]** a repris ce travail pour étudier l'effet d'un champ magnétique radial sur la convection naturelle dans l'espace annulaire d'une enceinte cylindrique horizontal rempli de nano fluide en utilisant la même méthode. Dans une autre publication **Sheikholeslami (2013) [35]** a résolu ce problème de l'écoulement d'un nano fluide dans un espace semi-annulaire d'une enceinte cylindrique avec un flux de chaleur constant imposé a une paroi en utilisant la méthode du volume de contrôle basé sur les éléments finis. Les résultats indiquent que le nombre de Hartmann et l'angle d'inclinaison de l'enceinte peuvent être des paramètres de contrôle à différents nombre de Rayleigh. En présence du champ magnétique le champ de vitesse est retardé, donc la convection et le nombre de Nusselt diminuent. Récemment **Sheikholeslami et al (2014) [36]** ont appliqué la méthode Lattice Boltzmann pour simuler l'effet du champ magnétique sur la convection libre d'un nanofluide dans un semi-annulaire excentrique. Ils ont montré que le nombre de Nusselt a une relation proportionnelle avec la fraction volumique de nano particules et le nombre de Rayleigh; mais il a une relation inverse avec le nombre de Hartmann et la position du cylindre intérieur pour un nombre élevé de Rayleigh. Ainsi, il peut être conclu que l'amélioration du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Hartmann et décroît avec l'augmentation de nombre de Raleigh.

S.Aberkane et al [37] ont étudié l'influence d'un champ magnétique axial d'un fluide conducteur d'électricité entre deux cylindres coaxiaux horizontaux en rotation, la génération de la chaleur due à la dissipation visqueuse est prise en considération dans leur étude. Une solution exacte des équations régissant l'écoulement a été obtenu sous forme de fonctions de Bessel. Un schéma implicite de différences finies a été utilisé pour la résolution numérique. Les résultats montrent que pour des valeurs modérées du nombre de Hartmann, la vitesse entre les deux cylindres s'aplatit d'avantage au fur et à mesure que le nombre de Hartmann augmente; en revanche, il n'affecte presque pas la température. En augmentant le nombre de Hartmann, on constate une nette décroissance du nombre de Nusselt.

- *L'influence du champ magnétique sur le transfert de chaleur et de masse dans les écoulements rotatifs*

Y.Gelfgat,(1999) [38] a examiné la possibilité d'utiliser différents types de champs magnétiques tournants (RMF) et les combinaisons de ces derniers à contrôler les hydrodynamiques et le transfert de chaleur et de masse dans le processus de croissance monocristalline des semi-conducteurs. Certains facteurs qui contribuent à l'efficacité de l'influence RMF en technologies différentes sont analysés. Leurs applications spécifiques est illustré par quelques exemples.

Presque en même temps **A. Kharicha et al (2004) [39]** ont étudié numériquement l'effet du champ magnétique axial ainsi que l'effet de la conductivité électrique et l'épaisseur des parois sur un écoulement laminaire dans une cavité cylindrique rempli d'un métal liquide Pb-17Li, le cylindre est entraînée par un disque supérieur tournant, ils ont utilisé un code CFD basé sur la méthode des volumes finis pour des valeurs de Reynolds $Re \geq 100$ et un nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$. Malgré l'hypothèse d'un très petit nombre de Reynolds magnétique Rm , le champ magnétique incité par cette quantité a été tenu en compte dans la formulation de leur problème. Ils ont analysé aussi l'influence du champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur les parois métalliques en résolvants l'équation diffusion convection qui contrôle le transfert de masse.

Plus tard une étude expérimentale a été faite par **A. Kharicha et al (2005) [40]** en utilisant la méthode Doppler ultrasound pour étudier le processus de la corrosion et la dépendance entre de taux de transfert de masse et les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement. Ils ont trouvé que la conductivité des parois joue un rôle très important sur le champ d'écoulement et le transfert de masse et ils ont montré que pour une valeur de Ha fixe, le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrices que des parois isolantes.

M. Abricka, Yu.Gelfgat, J. Kruminš (2006) [41] ont contribué à l'étude des caractéristiques de transfert de chaleur et de masse dans la masse dans un récipient cylindrique sous l'influence de superpositions des pulsations et des champs électromagnétiques rotatif stables. Les résultats obtenus témoignent d'une possibilité d'élargir considérablement la gamme de contrôle des caractéristiques de transfert de chaleur /de masse sous l'influence de telle combinaison.

M. Venkatachalappa, Younghae Do, M. Sankar (2011) [42] ont effectué des calculs numériques pour étudier l'effet du champ magnétique axial et radial sur la convection naturelle de double diffusion dans une cavité cylindrique annulaire verticale. Les conditions aux limites sur les parois latérales sont imposées de manière à ce que les forces de volume d'origine solutale et thermique soient de différentes intensités, de même sens ou de sens opposé. Les parois supérieure et inférieure sont isolées et imperméables. Les équations qui régissent ce système de fluide sont résolues par la méthode implicite aux directions alternées et la méthode de lignes successives de sur relaxation. Les taux de transfert de chaleur et de masse à travers la cavité sont calculés en évaluant le nombre moyen de Nusselt et Sherwood. A partir des résultats numériques, ils ont trouvé que le champ magnétique supprime la convection à double diffusion uniquement pour de faibles rapports de flottabilité. Mais, pour de grands rapports de flottabilité, le champ magnétique est efficace dans la suppression de l'écoulement de convection thermique. De plus, le champ magnétique est efficace quand il est appliqué perpendiculairement à l'écoulement principal.

Dans une récente publication **S.Aberkane et al [43]** ont étudié l'influence d'un champ magnétique axial sur le transfert de chaleur et de masse entre deux cylindres coaxiaux horizontaux en rotation. Un schéma implicite de différences finies a été utilisé pour la résolution numérique. Les résultats montrent que pour des valeurs modérées du nombre de Hartmann, la concentration entre les deux cylindres diminue d'avantage au fur et à mesure que le nombre de Hartmann augmente. En augmentant le nombre de Hartmann, on constate une nette décroissance du nombre de Sherwood.

En conclusion les travaux antérieurs ont porté sur l'étude du comportement de l'écoulement en rotation sous l'effet d'un champ magnétique, ceci pour plusieurs configurations géométriques; disques tournants, cylindres tournants, espace annulaire dont l'un ou l'autre cylindre tournant ou les deux à la fois. La présente étude a tenu en compte l'effet de la dissipation visqueuse dans des écoulements mhd rotatifs.

Comprendre l'influence du champ magnétique sur la convection de double diffusion est important dans de nombreux domaines. Cependant, à notre avis il ya peu d'études qui ont été menées sur la convection à double diffusion dans une cavité annulaire tournante en présence d'un champ magnétique. Bien que l'écoulement tridimensionnel dans la cavité annulaire soit essentiel pour les systèmes réels, il est d'abord nécessaire de comprendre la structure de l'écoulement axisymétrique de base ainsi que le transfert de chaleur et de masse dans l'espace

annulaire correspondant. Les solutions exactes de l'écoulement de Couette mhd ont été réalisées il ya environ soixantaine d'années. Les solutions pour un écoulement entre deux cylindres concentriques rotatifs en présence d'un gradient de température sous un champ magnétique externe ont été limitées aux grand nombre de Hartmann.

Chapitre . II

Formulation du problème

II.1. Introduction

Dans ce chapitre nous situons, dans une première étape, la présente étude par rapport aux travaux antérieurs et nous indiquons l'objectif principal de ce travail.

Dans une deuxième étape nous présentons les équations modélisant le problème traité dans notre étude. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs, ce qui est le cas des métaux liquides par exemple lorsqu'ils sont en double diffusion.

Dans une dernière étape nous exposons la formulation adimensionnelle du problème relative aux équations du mouvement ainsi qu'à l'équation de l'énergie et de concentration régissant l'écoulement de la convection mixte de la chaleur et de la concentration dans le milieu fluide.

II.2. Description du Problème physique

Le présent travail se préoccupe essentiellement de la connaissance globale de l'influence d'un champ magnétique sur le transfert de chaleur et de masse d'un écoulement d'un fluide incompressible visqueux et électriquement conducteur à faibles nombre de Reynolds magnétique et à propriétés physiques constantes, dans un espace annulaire formé de deux cylindres coaxiaux horizontaux, dont l'un ou les deux sont en mouvement de rotation. La production de la chaleur dans le milieu fluide due à la dissipation visqueuse a été prise en compte.

Notre étude vise à étudier analytiquement et numériquement les effets d'un champ magnétique axial externe appliqué à l'écoulement de convection de double diffusion de chaleur et de masse d'un fluide conducteur de l'électricité entre deux cylindres concentriques horizontales, en tenant compte l'effet de la dissipation visqueuse dans le fluide. Les résultats obtenus à partir de notre étude numérique sont limitées à un écoulement axisymétrique à deux dimensions, qui sont comparés avec ceux calculés en utilisant une méthode analytique à une dimension.

Le dispositif physique étudié est représenté sur la figure (II-1). Ce dispositif comporte un cylindre intérieur de rayon R_1 tournant avec à une vitesse angulaire Ω_1 , un cylindre extérieur de rayon R_2 tournant avec une vitesse angulaire, Ω_2 , nulle ou non et de longueur L .

Le système est fermé dans ses parties, supérieure et inférieure, par deux disques terminaux parallèles fixés au cylindre extérieur où le rapport des rayons est $\eta = R_1/R_2 = 0,5$, le rapport d'aspect $\Gamma = L/d = 14$, et la taille de l'espace annulaire est $d = R_2 - R_1$.

Les surfaces des parois du cylindre intérieur et extérieur sont maintenues à des températures et des concentrations constantes T_1, C_1 et T_2, C_2 respectivement. Les disques terminaux inférieur et supérieur sont isolés et imperméable. Les deux cylindres sont électriquement isolés.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté dans la direction axial.

A l'instant initial, un fluide incompressible électriquement conducteur de viscosité cinématique ν , de coefficient de transfert thermique α , et de coefficient de diffusion D , est au repos et à la température T_0 avec la concentration C_0 dans l'espace annulaire.

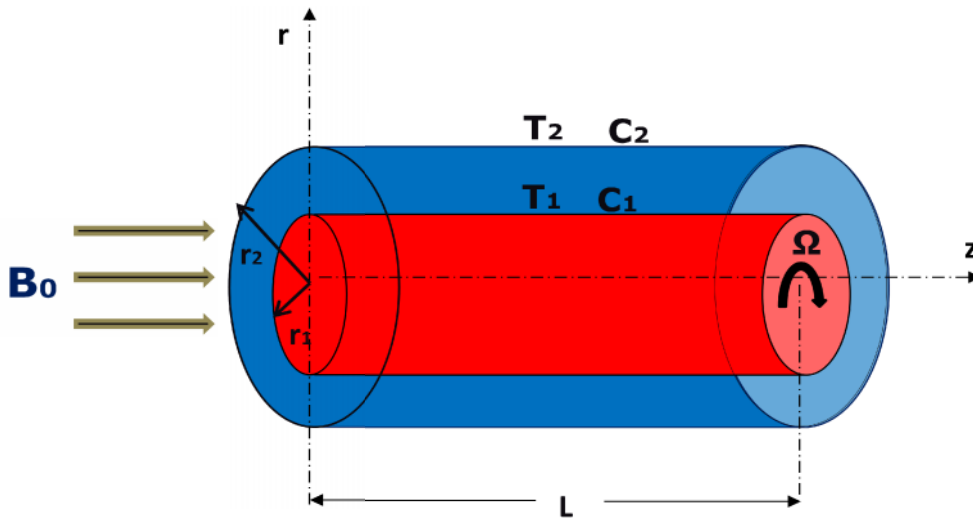


Figure II.1 : Géométrie du système physique étudié

II.3. Equations générale

La magnétohydrodynamique (MHD) est l'étude des interactions entre les fluides conducteurs et les champs magnétiques dans lesquels ils sont soumis.

Les équations de la mhd régissant le problème magnétohydrodynamique sont fortement complexes, elles se décomposent essentiellement en deux familles couplées entre elles : les équations régissant le mouvement du fluide conducteur d'électricité et les équations régissant le champ électromagnétique.

II.3.1 Equations régissant le milieu fluide

➤ *Conservation de la masse (équation de continuité)*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

➤ *Conservation la quantité de mouvement*

Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{f}_{\text{vol}} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.2})$$

Où :

\vec{U} : le champ de vitesse,

τ : tenseur de contrainte

F_{vol} : représente les forces volumiques

$\vec{j} \wedge \vec{B}$ est le produit vectoriel de la densité de courant \vec{j} et le champ magnétique \vec{B} . Il représente la force de Lorentz exercée par le champ magnétique sur les particules. Ce terme va être à l'origine du couplage avec les équations de Maxwell présentées par la suite.

➤ *Equation d'énergie*

$$\rho C_p \left(\frac{dT}{dt} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \left(\frac{dP}{dt} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} P \right) + \text{div}(k \vec{\nabla} T) + \Phi + Q_r - \frac{j^2}{\sigma}$$

(II.3)

Où :

k : tenseur de conductivité thermique,

Φ : l'échauffement par dissipation par viscosité,

Q_r : la perte d'énergie radiative.

$\frac{j^2}{\sigma}$: Perte de chaleur due à l'effet joule (Ohmic heating)

➤ *Equation de convection-diffusion*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} C) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} C) + R \quad (\text{II.4})$$

Où :

R : une source ou un puits

II.3.2 Equations du champ électromagnétique

Les équations régissant l'électromagnétisme sont les équations de Maxwell et la loi d'Ohm

➤ Equations de Maxwell

$$\text{Loi de Gauss} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}$$

$$\text{No magnétique monopoles} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Loi de Faraday} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\text{La loi d'Ampère-Maxwell} \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_m \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Où:

E : le champ électrique,

B : le champ magnétique,

j : la densité de courant,

ρ_e : densité de charge totale,

μ_m : perméabilité magnétique,

ϵ_0 : perméabilité électrique.

➤ Loi d'Ohm

En général, la loi d'Ohm qui définit la densité du courant est donnée par:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.5})$$

Où σ est la conductivité électrique du fluide

Dans le cas des équations de la MHD, les équations de Maxwell peuvent être simplifiées. En effet dans certains cas [44] la densité de charges électriques ρ_e ne joue pas un rôle significatif sauf dans la loi de Gauss. Il en est de même pour le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui peut être négligé par rapport à la densité de courant j. En ne tenant pas compte de la loi de Gauss, on obtient les équations d'électromagnétisme utilisées en MHD :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_m \vec{j} \quad (\text{II.8})$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.9})$$

L'équation $\text{div}(\vec{j}) = 0$ résulte de la loi d'Ampère (II.8). En éliminant le champ électrique et la densité de courant dans ces équations, on obtient l'équation d'induction magnétique régissant le champ magnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\sigma \mu_m} \Delta^2 \vec{B} \quad (\text{II.10})$$

Où $\frac{1}{\sigma \mu_m}$ est appelée diffusivité magnétique

En outre, en remplaçant \vec{j} par son expression, l'équation de Navier-Stokes peut être exprimée comme suit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \nu \nabla^2 \vec{U} + \vec{f}_{\text{vol}} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (\text{II.11})$$

II.4. Hypothèses simplificatrices

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on fait appel aux simplifications suivantes :

- L'écoulement engendré est supposé laminaire, bidimensionnel et à axisymétrie.
- Le fluide considéré est supposé newtonien et incompressible
- On considère l'effet de la dissipation visqueuse dans le fluide.
- les échanges de chaleur par rayonnement sont négligeables.
- Il n'y a ni source de masse ni réaction chimique.

- Les effets de Soret et de Dufour de diffusion de chaleur et de masse sont négligeables.
- Le fluide est non-magnétisé puisque la perméabilité magnétique $\mu_m=1$
- Le nombre de Reynolds magnétique, qui caractérise la convection par rapport à la diffusion du champ magnétique est supposé négligeable [45].
- L'effet Hall et l'effet joule sont négligeables
- champ électrique E est négligeable du fait, qu'aucun champ électrique externe n'est appliqué. [46]
- Les propriétés thermodynamiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence.

• II.5. Equations gouvernantes simplifiées

Dans le cadre de ces hypothèses et en coordonnées cylindriques à symétrie axiale, les équations projetées suivant les directions radiale, azimutale et axiale s'écrivent alors :

II.5.1 Les équations de conservation

- *Conservation de la masse:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.12})$$

- *Conservation de la quantité de mouvement :*

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho g + \mu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + f_{Lr} \quad (\text{II.13})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{vu}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = +\mu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + f_{L\theta} \quad (\text{II.14})$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + f_{Lz} \quad (\text{II.15})$$

- *Equation de conservation d'énergie*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \Phi \quad (\text{II.16})$$

- *Equation de diffusion- convection de la concentration*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.17})$$

Dans ces équations :

u, v, w : Représentent respectivement les composantes radiale, tangentielle, axiale du vecteur vitesse.

A chaque instant et en tout point du domaine étudié, nous convenons de noter la pression et la température du fluide :

$P(r, z, t) = P_a + P_0(r, z, t)$ où P_a est la pression atmosphérique, et P_0 la perturbation de pression

$T(r, z, t)$: est la température du fluide

$C(r, z, t)$: est la concentration du fluide

D : est le coefficient de diffusion.

α : est le coefficient diffusivité thermique du liquide.

$f_{Lr}, f_{L\theta}$ et f_{Lz} sont les composantes de la force de Lorentz, radial azimuthale et axiale donnée par la formule suivante :

$$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.18})$$

En tenant compte des l'hypothèse mentionné au dessus, la loi d'Ohm prend la forme:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.19})$$

Donc on a :

$$\vec{f} = \sigma (\vec{V} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (\text{II.20})$$

Les expressions des composantes de la force de Lorentz $f_{Lr}, f_{L\theta}, f_{Lz}$ sont explicitement comme suit les composantes de la force EM peuvent être exprimées comme suit :

$$F_{Lr} = -\sigma u B^2$$

$$F_{L\theta} = -\sigma v B^2$$

$$F_{Lz} = 0$$

A ces équations s'ajoutent les conditions aux limites et initiales appropriées.

II.5.2 Les Conditions initiales et aux limites dynamique

❖ Conditions initiales

A l'instant $t=0$, le fluide est au repos, dans des conditions normales de pression et à une température initiale T_0 du fluide et l'une des parois et à une concentration initiale C_0 du fluide et l'une des parois :

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = P(r, z, 0) = 0 \\ T(r, z, 0) &= T_0 \\ C(r, z, 0) &= C_0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

❖ Conditions aux limites dynamique

$$\begin{aligned} r = R_1 \quad z \geq 0 : \quad & u(R_1, z) = 0 \\ & v(R_1, z) = \Omega_1 R_1 \\ & w(R_1, z) = 0 \\ r = R_2 \quad z \geq 0 : \quad & u(R_2, z) = 0 \\ & v(R_2, z) = 0 \\ & w(R_2, z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} R_1 < r < R_2 \quad z = 0 : \quad & u(r, z) = v(r, z) = w(r, z) = 0 \\ R_1 < r < R_2 \quad z = L : \quad & u(r, z) = v(r, z) = w(r, z) = 0 \end{aligned}$$

❖ Conditions aux limites thermique

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad r=R_1, \quad z \geq 0 \\ T &= T_2 \quad r=R_2, \quad z \geq 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad R_1 < r < R_2, \quad z = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad R_1 < r < R_2, \quad z = L \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

❖ Conditions aux limites massique

$$\begin{aligned} C &= C_1 \quad r=R_1, \quad z \geq 0 \\ C &= C_2 \quad r=R_2, \quad z \geq 0 \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= 0 \quad R_1 < r < R_2, \quad z = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= 0 \quad R_1 < r < R_2, \quad z = L \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

II.6. Analyse adimensionnelle

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'ils seront normalisés par rapport à certaines dimensions caractéristiques.

On utilise des variables réduites basées sur des grandeurs de référence suivantes:

La longueur R_2 : rayon de cylindre extérieur

La vitesse $\Omega_1 R_1$: vitesse d'entrée de fluide dans l'espace annulaire

$C_2 - C_1$: concentration caractéristique.

$\Theta_2 - \Theta_1$: température caractéristique.

Les variables u, v, w, C, T et P : sont remplacées par les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{\Omega_1 R_1}; & v^* &= \frac{v}{\Omega_1 R_1}; & w^* &= \frac{w}{\Omega_1 R_1}; & C^* &= \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}; & \Theta^* &= \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}; \\ r^* &= \frac{r}{R_2}; & z^* &= \frac{z}{R_2}; & t^* &= \frac{t \Omega_1 R_1}{R_2}; & P^* &= \frac{P}{\rho (\Omega_1 R_1)^2} \end{aligned}$$

II.6.1 Equations gouvernantes adimensionnelles

En introduisant les variables adimensionnelles dans les équations et en supprimant l'indice (*) les équations de conservations se réduisent alors à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{Ha^2 u}{(1-\eta)Ta} \quad (II.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{vu}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{Ha^2 v}{(1-\eta)Ta} \quad (II.26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (II.27)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Pr Ta} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + \frac{(1-\eta) Ec \Phi^*}{Ta} \quad (II.38)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Sc Ta} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (II.29)$$

Les nombres adimensionnels qui gouvernent notre problème sont alors :

- $Ta = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$: Nombre de Taylor,
- $Sc = \frac{\nu}{D}$: Nombre de Schmidt,
- $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$: Nombre de Prandtl,
- $\eta = \frac{R_1}{R_2}$: le rapport des rayons,
- $Ha = Bd \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$: nombre de Hartmann
- $\Phi^* = 2 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{\alpha}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{\alpha}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{\alpha}} - \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} \right)^2$: la fonction de la dissipation visqueuse
- $d = R_2 - R_1$: épaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres

II.6.2 Conditions initiales et aux limites adimensionnelles

Le système d'équations précédent est associé aux conditions initiales et aux limites suivantes :

❖ Conditions initiales :

A l'instant $t^* = 0$

$$u^*(r, z, 0) = v^*(r, z, 0) = w^*(r, z, 0) = P^*(r, z, 0) = \Theta(r, z, 0) = C^*(r, z, 0) = 0 \quad (\text{II.30})$$

❖ Conditions aux limites dynamiques

$$\begin{aligned} r = \eta \quad z \geq 0 : \quad & u(R_1, z) = 0 \\ & v(R_1, z) = 1 \\ & w(R_1, z) = 0 \\ r = 1 \quad z \geq 0 : \quad & u(R_2, z) = 0 \\ & v(R_2, z) = 0 \\ & w(R_2, z) = 0 \\ \eta < r < 1 \quad z = 0 : \quad & u(r, z) = v(r, z) = w(r, z) = 0 \\ z = L : \quad & u(r, z) = v(r, z) = w(r, z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

❖ *Conditions aux limites thermiques*

$$r = \eta \quad z \geq 0 \quad \Theta = 1$$

$$r = 1 \quad z \geq 0 \quad \Theta = 0$$

$$\eta < r < 1 \quad z = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$z = L \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

❖ *Conditions aux limites massiques*

$$r = \eta \quad z \geq 0 \quad C = 1$$

$$r = 1 \quad z \geq 0 \quad C = 0$$

$$\eta < r < 1 \quad z = 0 \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$z = L \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

II.7 Taux de transfert thermique et solutale

Le calcul des taux de transfert de chaleur et de masse est exprimé à travers les nombres de Nusselt et de Sherwood locale adimensionnelle.

II.7.1 Le nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt est défini localement comme suit :

-Paroi intérieure

$$\text{Nu}_1(z) = -\frac{\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1}}{T_2 - T_1} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \Big|_{r^*=\eta} \quad (\text{II.34})$$

-Paroi extérieure

$$\text{Nu}_2(z) = -\frac{\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2}}{T_2 - T_1} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} \quad (\text{II.35})$$

Avec $\gamma = 1 - \eta$

Le nombre de Nusselt moyen calculé pour les parois intérieur et extérieur est donné par :

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{1}{L} \gamma \int_0^z \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) dz \quad (\text{II.36})$$

II.7.2 Le nombre de Sherwood

On procède, de la même manière que le nombre de Nusselt, on détermine le coefficient de transfert de matière local comme suit :

$$\text{Sh}_1(z) = -\gamma \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=\eta} \quad (\text{II.37})$$

$$\text{Sh}_2(z) = -\gamma \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (\text{II.38})$$

Le nombre de Sherwood moyen est donné comme suit:

$$\overline{\text{Sh}} = \frac{1}{L} \gamma \int_0^z \left(-\frac{\partial C}{\partial r} \right) dz \quad (\text{II.39})$$

Chapitre . III
Etude Analytique

III .1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements et de transferts thermiques et solutaux de fluides conducteurs d'électricité au sein de milieux fluide, en présence d'un champ magnétique. Ces dernières consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible. Cependant, dans le cas limite d'une cavité horizontale de grande longueur, $L \gg 1$, des solutions analytiques approximatives sont possibles. Ainsi, dans le présent chapitre, on présente le développement d'une telle solution, basée sur le développement aux limites des fonctions de Bessel modifiés. La solution résultante donne un aperçu général sur l'écoulement et le champ de température ainsi qu'une description quantitative de transfert de chaleur. Cette approche analytique basée sur l'approximation de fonctions de Bessel a été déjà utilisée dans par Omid M. et al [31] pour l'étude analytique de la première et deuxième loi de la thermodynamique entre deux cylindres rotatifs en présence d'un champ magnétique.

III .2 Hypothèses

Dans la l'approche analytique de cette étude dans l'espace annulaire, on fait les hypothèses simplificatrices suivantes:

- L'écoulement est supposé laminaire, stationnaire complètement développé.
- L'écoulement s'effectue seulement dans la direction azimutale, par conséquent les composantes radiale et axiale de la vitesse sont nulles aussi bien que les dérivés de la vitesse par rapport à θ et z .
- Dans cette étude analytique on ne tient pas en compte du transfert de masse.
- On néglige les forces de gravité sur l'écoulement.

III .3 Équations simplifiées

Sous ces hypothèses, les équations de conservation de mouvement et d'énergie (II.12-16) régissant l'écoulement rotatif se réduisent comme suit :

➤ Equation de continuité :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.1})$$

➤ Equations du mouvement

Suivant la direction r

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (\text{III.2})$$

Suivant la direction θ

$$v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\sigma v B_0^2}{\rho} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Suivant la direction z

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Equation d'énergie

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 \quad (\text{III.5})$$

En utilisant le théorème de Cauchy sur l'équation (III.4), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{r} \right) = 0$$

Donc la vitesse est en fonction uniquement de la composante radiale $v=v(r)$.

A partir de l'équation (III.3), on trouve:

$$v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\sigma v B_0^2}{\rho} = 0 \quad (\text{III.6})$$

Tel que

B_0 : est l'intensité du champ magnétique.

σ : est la conductivité électrique

Les conditions aux limites pour chaque cylindre sont comme suit :

$$r = R_1 : v(r) = \Omega_1 R_1, T = T_1 \quad (\text{III.7})$$

$$r = R_2 : v(r) = \Omega_2 R_2, T = T_2 \quad (\text{III.8})$$

III.4 Équations adimensionnelles

En introduisant les paramètres et les variables adimensionnelles suivants:

$$r^* = \frac{r}{R_2} \text{ rayon adimensionnel,}$$

$$v^* = \frac{v}{\Omega_1 R_1} \text{ vitesse adimensionnelle}$$

$$\eta = \frac{R_1}{R_2} \text{ rapport d'aspect,}$$

$$b = \frac{\Omega_2 R_2}{\Omega_1 R_1} \text{ rapport de vitesse,}$$

$$Ha = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \text{ nombre de Hartmann}$$

$$\Theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ température adimensionnelle}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \text{ nombre de Prandtl}$$

$$Ec = \frac{(\Omega_1 R_1)^2}{C_p \Delta T} \text{ nombre d'Eckert}$$

Les équations régissant le problème et leurs conditions aux limites, deviennent:

L'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \left(\frac{Ha^2}{(1-\eta)^2} + \frac{1}{r^{*2}} \right) v^* = 0 \quad (\text{III.9})$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants.

Avec les conditions aux limites dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} r^* = \eta : v^*(r^*) &= 1 \\ r^* = 1 : v^*(r^*) &= b \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

L'équation de l'énergie:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \right) = -Ec Pr \left(\frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^*} \right)^2 \quad (\text{III.11})$$

Avec les conditions aux limites thermiques suivantes :

$$\begin{aligned} r^* = \eta : \Theta &= 1 \\ r^* = 1 : \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

III .5 Détermination du profil de la vitesse

La vitesse dans l'espace annulaire est trouvée en résolvant l'équation (III.9), la solution est donnée comme suit :

$$v(r^*) = C_1 I_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r^* \right) + C_2 K_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r^* \right) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Qui devient :

$$v(r^*) = C_1 I_1 (Mr^*) + C_2 K_1 (Mr^*) = 0$$

$$\text{Où : } M = \frac{Ha}{1-\eta}$$

I_1 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 1, et K_1 est la fonction de Bessel modifiée de second espèce d'ordre 1.

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions d'adhérences à la paroi, exprimée dans la relation (III.10):

En appliquant ces conditions aux parois des deux cylindres, on obtient:

$$\begin{cases} C_1 I_1 (M\eta) + C_2 K_1 (M\eta) = 1 \\ C_1 I_1 (M) + C_2 K_1 (M) = b \end{cases}$$

C'est un système d'équations algébriques, composé de deux équations avec deux inconnues C_1 et C_2 . Après le calcul du déterminant on trouve que:

$$C_1 = \frac{K_1 (M) - bK_1 (M\eta)}{I_1 (M\eta)K_1 (M) - K_1 (M\eta)I_1 (M)}$$

$$C_2 = \frac{bI_1 (M\eta) - I_1 (M)}{I_1 (M\eta)K_1 (M) - K_1 (M\eta)I_1 (M)}$$

Le profil de vitesse dans l'espace annulaire est donc alors:

$$v^*(r^*) = \left[\frac{K_1(M) - bK_1(\eta M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] I_1(Mr^*) + \left[\frac{bI_1(\eta M) - I_1(M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] K_1(Mr^*) \quad (\text{III.14})$$

III .5.1 Cas sans champ magnétique

Nous obtenons la solution exacte en absence du champ magnétique quand Ha tends vers zéro, en utilisant le développement limité au voisinage de 0 des fonctions de Bessel modifiées I_ν et K_ν d'indice ν fixe données par Abramowitz et Steg [47], qui s'écrivent de la façon suivante :

$$I_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2}z \right)^\nu / \Gamma(\nu+1) \quad (\nu \neq -1, -2, \dots) \quad (\text{III.15})$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \quad \text{Réel } \nu > 0 \quad (\text{III.16})$$

Où Γ est la fonction gamma définie comme suit :

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Et $\Gamma(n+1) = n!$

Dans notre cas on a $\nu = 1$, donc on aura :

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2Mr} \quad (\text{III.17})$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} \quad (\text{III.18})$$

En introduisant les approximations des fonctions de Bessel I_1 et K_1 dans le profil de la vitesse donnée par l'équation (3.14), on trouve la solution sans champ magnétique sous la formule suivante:

$$v^*(r^*) = \left(\frac{\eta - b}{\eta^2 - 1} \right) r^* - \left(\frac{b\eta^2 - \eta}{\eta^2 - 1} \right) \frac{1}{r^*} \quad (\text{III.19})$$

III .5.2 Validation

De manière à vérifier l'exactitude des résultats analytique obtenus dans le présent travail, une validation du l'approche analytique a été faite en comparant les résultats de cette étude en présence et en absence du champ magnétique avec ceux de K. Vajravelu et al [48] et d'A.Feiz-Dizaji et al. [13] pour un écoulement d'un third-grade fluide non Newtonien dans l'espace annulaire de deux cylindres concentrique.

Les résultats de cas sans champs magnétique ont été comparés dans la figure 1 à ceux de K. Vajravelu et al et de A.Feiz-Dizaji et al, pour le profil de vitesse dans l'espace annulaire, concernant un fluide non Newtonien $\varepsilon=0.1$ et avec différents rapport de vitesse b , où ε est un nombre adimensionnelle lié à la constante du matériau due à la viscosité et la viscoélasticité

A.Feiz-Dizaji et al ont remarqué dans leur étude qu'il n'y a pas de différence importante entre les profils de vitesse des fluides newtoniens et non newtoniens pour $\varepsilon=0.1$.

Un bon accord a été observée pour le cas de figure III.1.

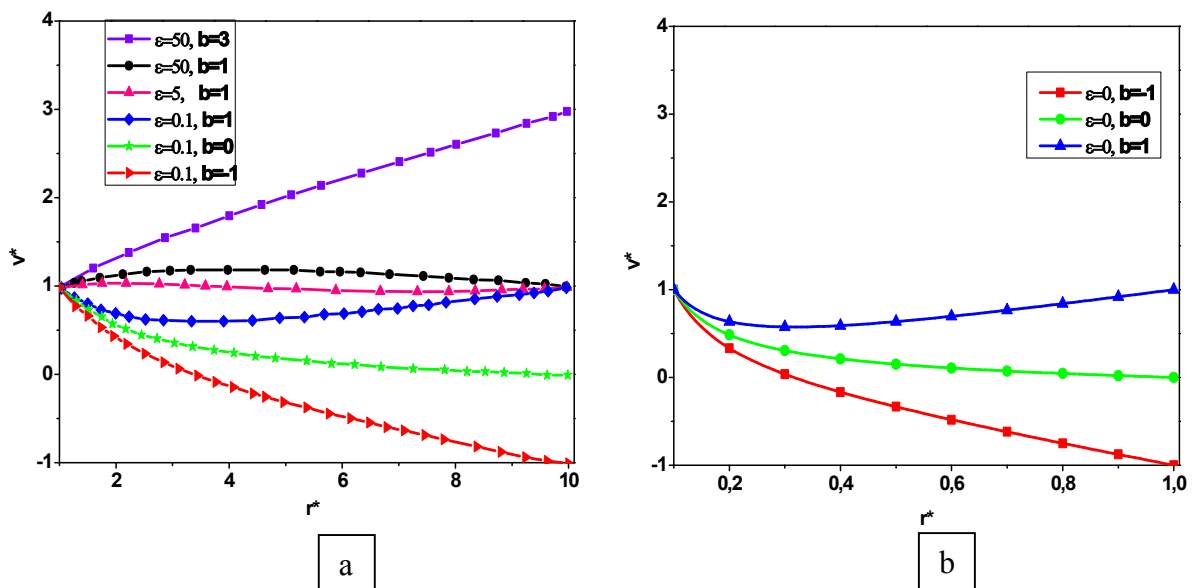


Figure III.1: le profil de vitesse dans l'espace annulaire pour différentes valeurs de b , (a) résultat de A. Dizaji Feiz et al. [13] and K. Vajravelu et al [48], (b) résultat de la présente étude analytique.

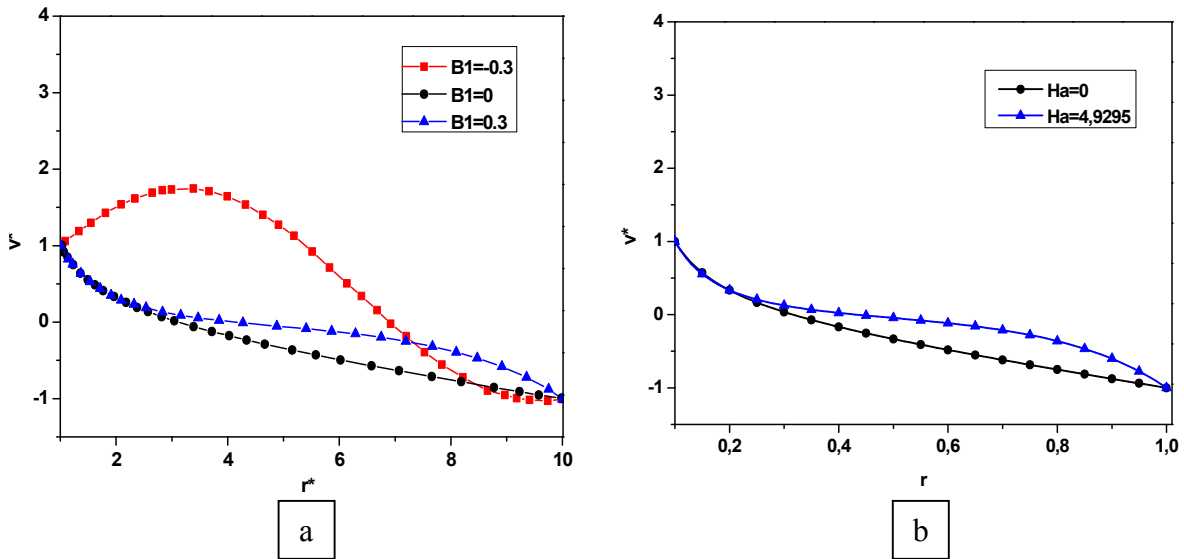


Figure III.2: le profil de vitesse dans l'espace annulaire pour $b = -1$, (a) Résultat de Dizaji Feiz et al [2008] , (b) résultat de la présente étude analytique.

Le cas avec champ magnétique a été comparé dans la figure III.2 avec les résultats obtenues par A.Feiz-Dizajiet al [13] pour le profil de vitesse dans l'espace annulaire avec un rapport de vitesse de rotation $b = -1$, cette comparaison a conduit à un bon accord sauf pour les valeurs négatives du nombre de Ha, qui ne devraient pas exister et qui correspondent aux valeurs négatifs de B_1 dans l'étude de A.Feiz-Dizaji et al [13] , étant donnée que Ha est un nombre adimensionnel strictement positif.

III -5.3 Tracé de vitesse

Trois configurations de rapport de vitesse de rotation sont considérées:

- (i) Le cylindre intérieur tourne avec une vitesse constante Ω_1 , tandis que le cylindre extérieur est fixe ($b = 0$).
- (ii) Les deux cylindres tournent avec des vitesses constantes (Ω_1, Ω_2) dans le même sens ($b > 0$).
- (iii) Les deux cylindres tournent avec des vitesses constantes (Ω_1, Ω_2) dans le sens contraire ($b < 0$).

Cas 1

Dans ce cas $b=0$

Les conditions aux limites sont:

$$\begin{aligned} r^* = \eta : v^*(r^*) &= 1 \\ r^* = 1 : v^*(r^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

On introduit ces conditions aux limites dans les équations (III.14) et (III.19) :

Cas avec champ magnétique ($Ha \neq 0$)

$$v^*(r^*) = \left[\frac{K_1(M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] I_1(Mr^*) - \left[\frac{I_1(M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] K_1(Mr^*) \quad (\text{III.21})$$

Cas sans champ magnétique ($Ha=0$)

$$v^*(r^*) = \left(\frac{\eta}{\eta^2 - 1} \right) r^* + \left(\frac{\eta}{\eta^2 - 1} \right) \frac{1}{r^*}$$

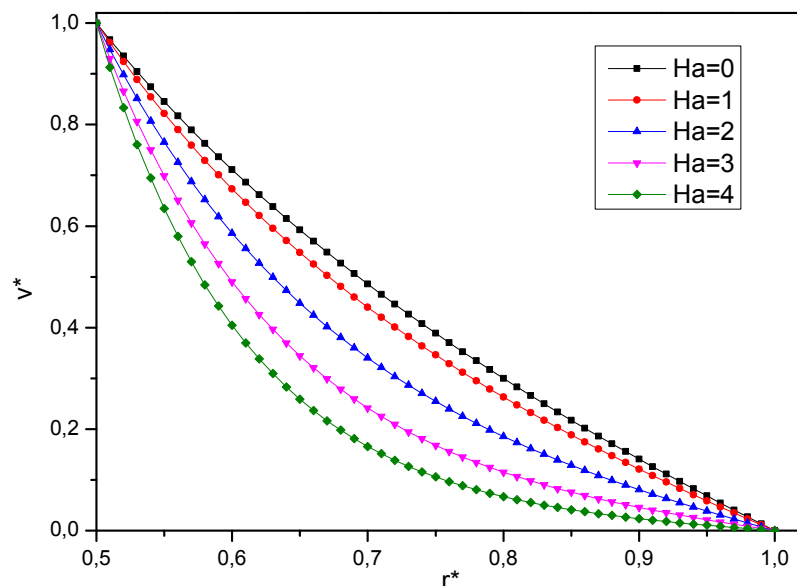


Figure III.3 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, $\eta=0.5$, $b=0$

Cas 2

Dans ce cas $b>0$, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} r^* = \eta : v^*(r^*) &= 1 \\ r^* = 1 : v^*(r^*) &= 5 \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

On introduit les conditions aux limites (III.22) dans Les équations (III.14) et (III.19), qui deviennent:

$$v^*(r^*) = \left[\frac{K_1(M) - 5K_1(\eta M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] I_1(Mr^*) + \left[\frac{5I_1(\eta M) - I_1(M)}{I_1(\eta M)K_1(M) - K_1(\eta M)I_1(M)} \right] K_1(Mr^*) \quad (III.23)$$

$$v^*(r^*) = \left(\frac{\eta - 5}{\eta^2 - 1} \right) r^* - \left(\frac{5\eta^2 - \eta}{\eta^2 - 1} \right) \frac{1}{r^*} \quad (III.24)$$

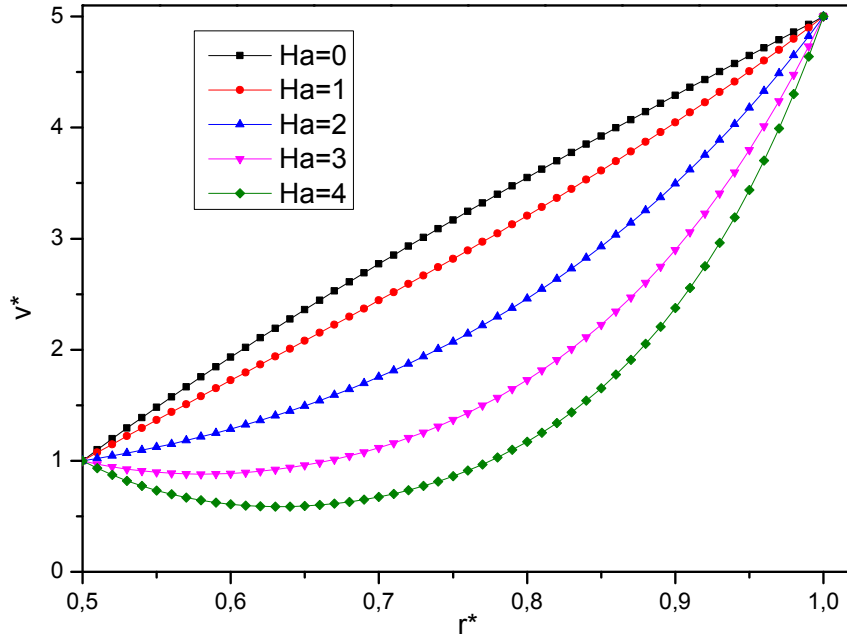


Figure III.4 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, $\eta=0.5$, $b=5$

Cas 3

Dans ce cas $b < 0$, les conditions aux limites sont :

$$r^* = \eta : v^*(r^*) = 1 \quad (III.25)$$

$$r^* = 1 : v^*(r^*) = -5$$

On introduit les conditions aux limites (III.25) dans les équations (III.14) et (III.19) qui deviennent alors :

$$v^*(r^*) = \left[\frac{K_1(M) + 5K_1(M\eta)}{I_1(M\eta)K_1(M) - K_1(M\eta)I_1(M)} \right] I_1(Mr^*) - \left[\frac{5I_1(M\eta) + I_1(M)}{I_1(M\eta)K_1(M) - K_1(M\eta)I_1(M)} \right] K_1(Mr^*) \quad (III.26)$$

$$v^*(r^*) = \left(\frac{\eta + 5}{\eta^2 - 1} \right) r^* + \left(\frac{5\eta^2 + \eta}{\eta^2 - 1} \right) \frac{1}{r^*} \quad (\text{III.27})$$

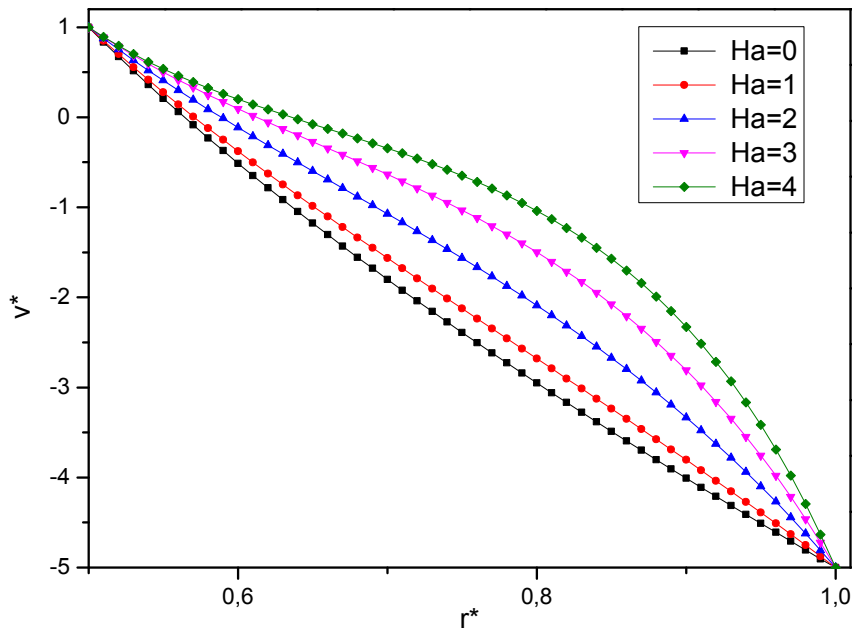


Figure III.5 : le profil de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann, $\eta=0.5$, $b=-5$

Les figures III.3, III.4 et III.5 montrent l'effet de champ magnétique sur les profils radiaux de la vitesse azimutale, pour différentes valeurs de nombre de Hartmann qui caractérise l'intensité du champ magnétique et avec un rapport de rayon $\eta=0,5$. On a constaté que le comportement de l'écoulement MHD dans l'espace annulaire est fortement influencé par la force centrifuge.

Dans la figure (III.3) où les deux cylindres tournent dans le même sens avec un rapport de vitesse $b=5$, la force centrifuge est symétrique, on remarque que le profil de la vitesse sans champ magnétique est quasi-linéaire, et en augmentant le nombre de Hartmann Ha on constate une nette diminution de la vitesse entre les deux cylindres, parce que la force centrifuge est contre productive et la force électromagnétique de Lorentz joue le rôle d'un amortisseur dans l'écoulement.

Il est évident qu'à partir de la figure (III.4) où le rapport de la vitesse ($b=0$), comme le cas précédent la vitesse entre les deux cylindres diminue en augmentant le nombre de Hartmann Ha , mais dans le troisième cas où les deux cylindres tournent au sens opposé ($b=-5$), on remarque qu'avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique Ha à pour effet d'augmenter la vitesse dans l'espace annulaire, le cas contre rotation et co-rotation génère le même effet pour la force centrifuge, alors que les composantes tangentielles de la force de Coriolis sont de signe opposée, ce couple de force génère une quantité du mouvement co-

productive avec la force électromagnétique qui va influencer directement sur la vitesse azimutale.

III.6 Détermination du profil de la température

Pour obtenir le champ de température de l'équation (III.11), on effectue des calculs en utilisant le développement limité au premier, deuxième, et de troisième ordre respectivement, au voisinage de zéro des fonctions de Bessel modifiées $I_1(Mr)$ et $K_1(Mr)$, utilisé par Omid M. et al (2012), pour des valeurs petits de nombre de Hartmann Ha.

III.6.1 Développement limité au premier ordre des fonctions de Bessel modifiées

Le développement limité au premier ordre des fonctions de Bessel $I_1(Mr)$ et $K_1(Mr)$ s'écrit comme suit:

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2Mr} \quad (III.28)$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} \quad (III.29)$$

En substituant ces approximations de fonctions de Bessel modifiées $I_1(Mr)$ et $K_1(Mr)$ dans l'équation de la vitesse (III.13), et en introduisant ensuite la nouvelle distribution de la vitesse dans l'équation de l'énergie (III.11) on trouve le champ de température.

En effet le gradient de température est donné par l'équation suivante:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 2EcPr \frac{C_2^2}{M^2 r^3} + \frac{C_3}{r} \quad (III.30)$$

Où C_3 est la constante d'intégration

Le profil de température est donné par:

$$\Theta = C_3 \ln(r) + C_4 - \frac{EcPr C_2^2}{(Mr)^2} \quad (III.31)$$

Où C_3 and C_4 sont des constantes d'intégration déterminées en utilisant les conditions aux limites de la température, elles sont données comme suit :

$$C_3 = \frac{\left(1 - C_4 + \frac{EcPr C_2^2}{M^2 \eta^2}\right)}{\ln(r)}$$

$$C_4 = \frac{Ec Pr C_2^2}{M^2}$$

III.6.2 Développement limité au deuxième ordre des fonctions de Bessel modifiées

Le développement limité au deuxième ordre des fonctions de Bessel $I_1(Mr)$ et $K_1(Mr)$ s'écrit comme suit:

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2}Mr + \frac{(Mr)^3}{16} \quad (III.32)$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} + \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{4}(-2\gamma + 1) \right] (Mr) \quad (III.33)$$

Où :

γ est la constante d'Euler définie par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right] = 0,5772156649...$$

Le gradient de température s'exprime donc comme suit:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{C_3}{r} - Ec Pr \left[\frac{C_1^2 M^6 r^5}{384} - \frac{C_1 C_2 M^2 r}{4} + \frac{C_1 C_2 M^4 r^3}{32} + \frac{2C_2^2}{M^2 r^3} - \frac{2C_2^2 \ln(r)}{r} + \frac{C_2^2 M^2 r}{8} \right] \quad (III.34)$$

En suivant les mêmes procédures que dans le cas précédent (premier ordre) on trouve la distribution de la température comme suit :

$$\theta = C_3 \ln(r) + C_4 - Ec Pr \left[\frac{C_1^2 M^6 r^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2 r^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4 r^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2 r^2} \right. \\ \left. - C_2^2 (\ln(r))^2 + \frac{C_2^2 M^2 r^2}{16} \right] \quad (III.35)$$

Où C_3 et C_4 sont les constantes d'intégration, qui sont déterminées à partir des conditions aux limites sur la température :

$$C_3 = (1 - C_4 + Ec Pr) \frac{1}{\ln(\eta)} \left[\frac{C_1^2 M^6 \eta^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2 \eta^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4 \eta^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2 \eta^2} - C_2^2 (\ln(\eta))^2 + \frac{C_2^2 M^6 \eta^6}{16} \right]$$

$$C_4 = Ec Pr \left[\frac{C_1^2 M^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2} + \frac{C_2^2 M^2}{16} \right]$$

III.6.3 Développement limité au troisième ordre des fonctions de Bessel modifiées

Le développement limité au troisième ordre des fonctions de Bessel $I_1(\text{Mr})$ et $K_1(\text{Mr})$ s'écrit comme suit :

$$I_1(\text{Mr}) \cong \frac{1}{2}\text{Mr} + \frac{(\text{Mr})^3}{16} + \frac{(\text{Mr})^5}{384} \quad (\text{III.36})$$

$$K_1(\text{Mr}) \cong \frac{1}{\text{Mr}} + \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) - \frac{1}{4}(-2\gamma + 1) \right] (\text{Mr}) + \left[\frac{1}{16} \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{5}{2} - 2\gamma\right) \right] (\text{Mr})^3 \quad (\text{III.37})$$

Le gradient de température est alors donné par la relation suivante :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{C_3}{r} - \frac{\text{Ec Pr}}{r} \left[\begin{array}{l} 2C_2^2 \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) + \frac{2C_2^2}{\text{Mr}^2} + C_5 (\text{Mr})^6 \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) + C_6 (\text{Mr})^6 \\ - \frac{1}{384} C_2^2 (\text{Mr})^6 \left(\ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) \right)^2 + C_7 (\text{Mr})^2 + C_8 (\text{Mr})^4 \\ - \frac{1}{32} C_2^2 (\text{Mr})^4 \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) + C_9 (\text{Mr})^8 - \frac{1}{3072} C_1 C_2 (\text{Mr})^8 \ln\left(\frac{\text{Mr}}{2}\right) \\ - \frac{1}{92160} C_1^2 (\text{Mr})^{10} \end{array} \right] \quad (\text{III.38})$$

Où :

Les constantes C_5 jusqu'à C_9 sont données en fonction de C_1 et C_2 comme suit :

$$C_5 = \frac{11}{2304} C_1^2 - \frac{1}{192} C_1 C_2 - \frac{1}{192} C_2^2 \gamma$$

$$C_6 = \frac{11}{2304} C_2^2 \gamma + \frac{7}{2304} C_1 C_2 - \frac{1}{384} C_2^2 \gamma - \frac{1}{384} C_1^2 - \frac{125}{55296} C_2^2 - \frac{1}{192} C_1 C_2 \gamma$$

$$C_7 = \frac{1}{4} C_2^2 \gamma - \frac{7}{16} C_2^2 + \frac{1}{4} C_1 C_2$$

$$C_8 = \frac{1}{32} C_2^2 - \frac{1}{32} C_2^2 \gamma - \frac{1}{48} C_1 C_2$$

$$C_9 = \frac{7}{24576} C_1 C_2 - \frac{1}{3072} C_1 C_2 \gamma - \frac{1}{3072} C_1^2$$

En suivant les mêmes procédures que dans les cas précédent (premier et deuxième ordre) on trouve la distribution de la température comme suit :

$$\Theta = C_4 + C_3 \ln(r) + EcPr \left[\begin{aligned} & C_{10} (Mr)^6 + C_{11} (Mr)^8 + C_{12} (Mr)^4 + \frac{1}{2} C_7 (Mr)^2 - \frac{1}{921600} C_1^2 (Mr)^{10} \\ & + C_2^2 \left(\ln \left(\frac{Mr}{2} \right) \right)^2 2C_2^2 \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) + \frac{C_2^2}{(Mr)^2} + \frac{1}{6} C_5 (Mr)^6 \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) \\ & + C_6 (Mr)^6 - \frac{1}{2304} C_2^2 (Mr)^6 \left(\ln \left(\frac{Mr}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{6912} C_2^2 (Mr)^6 \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) \\ & - \frac{1}{128} C_2^2 (Mr)^4 \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) - \frac{1}{24576} C_1 C_2 (Mr)^8 \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) \end{aligned} \right] \quad (III.39)$$

Où C_3 et C_4 sont les constantes d'intégration, qui sont déterminées à partir des conditions aux limites sur la température :

$$C_3 = (1 - C_4 - EcPr) \frac{1}{\ln(\eta)} \left[\begin{aligned} & C_{10} (M\eta)^6 + C_{11} (M\eta)^8 + C_{12} (M\eta)^4 + \frac{1}{2} C_7 (M\eta)^2 - \frac{1}{921600} C_1^2 (M\eta)^{10} \\ & + C_2^2 \left(\ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) \right)^2 2C_2^2 \ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) + \frac{C_2^2}{(M\eta)^2} + \frac{1}{6} C_5 (M\eta)^6 \ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) \\ & + C_6 (M\eta)^6 - \frac{1}{2304} C_2^2 (M\eta)^6 \left(\ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{6912} C_2^2 (M\eta)^6 \ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) \\ & - \frac{1}{128} C_2^2 (M\eta)^4 \ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) - \frac{1}{24576} C_1 C_2 (M\eta)^8 \ln \left(\frac{M\eta}{2} \right) \end{aligned} \right]$$

$$C_4 = -EcPr \left[\begin{aligned} & C_{10} (Mr)^6 + C_{11} (Mr)^8 + C_{12} (Mr)^4 + \frac{1}{2} C_7 (Mr)^2 \\ & - \frac{1}{921600} C_1^2 (Mr)^{10} + \frac{C_2^2}{(Mr)^2} + C_6 (Mr)^6 \end{aligned} \right]$$

Les constantes C_{10} , C_{11} et C_{12} sont données comme suit :

$$C_{10} = \frac{1}{36} C_5 + \frac{1}{6} C_6 - \frac{1}{41472} C_2^2$$

$$C_{11} = \frac{1}{8} C_9 + \frac{1}{196608} C_1 C_2$$

$$C_{12} = \frac{1}{4} C_8 + \frac{1}{512} C_2^2$$

III 6.4 Calcul théorique du nombre du Nusselt

La définition du nombre du Nusselt le long des parois interne et externe des cylindres est présentée comme suit :

$$Nu_1(z) = -\frac{\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_1}}{T_2 - T_1} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial r^*}\Big|_{r^*=\eta}$$

$$Nu_2(z) = -\frac{\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_2}}{T_2 - T_1} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial r^*}\Big|_{r^*=1}$$

III-6.5. Tracé de température

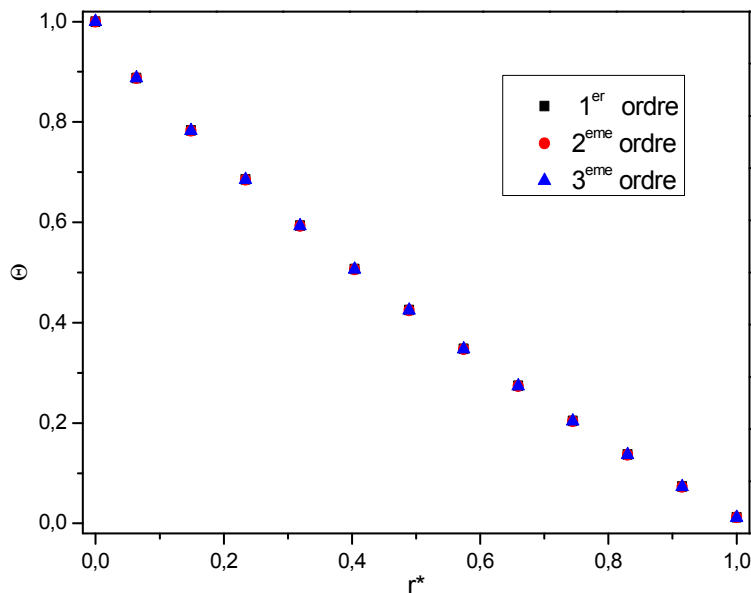


Figure III.6 : L'influence de l'ordre de développement limité des fonctions de Bessel sur la température, pour $\eta = 0.5$, $Ha = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.5$

D'après la figure III.6, on constate que l'ordre de développement limité jusqu'au troisième ordre des fonctions de Bessel modifiée I_1 et K_1 a une influence négligeable sur la distribution de la température dans l'espace annulaire pour une faible valeur de Prandtl.

III-6.6. Tracé de Nusselt

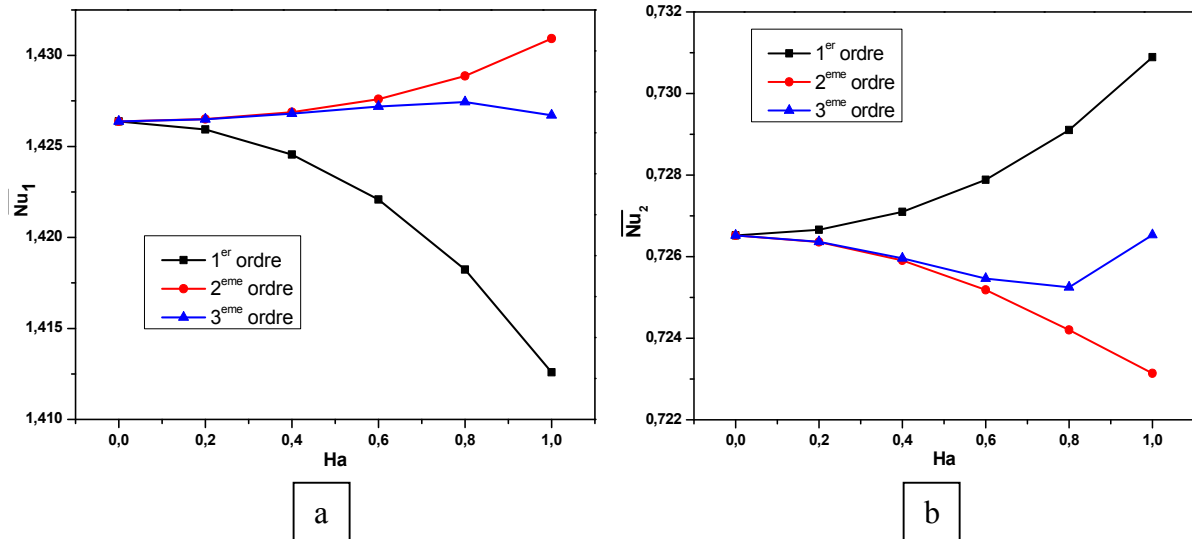


Figure III.7 : L'influence de l'ordre de développement limité des fonctions de Bessel sur le nombre du Nusselt moyen sur (a) cylindre intérieur et (b) cylindre extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$

On observe sur la figure III.7 qu'il existe une différence remarquable sur les valeurs du nombre du Nusselt moyen intérieur et extérieur à partir du nombre de Hartmann supérieure à 0.2, ceci pour les trois ordres de développement limité des fonctions de Bessel modifiées I_1 et K_1 . Cette différence devient de plus en plus perceptible au fur et à mesure que le nombre de Hartmann augmente.

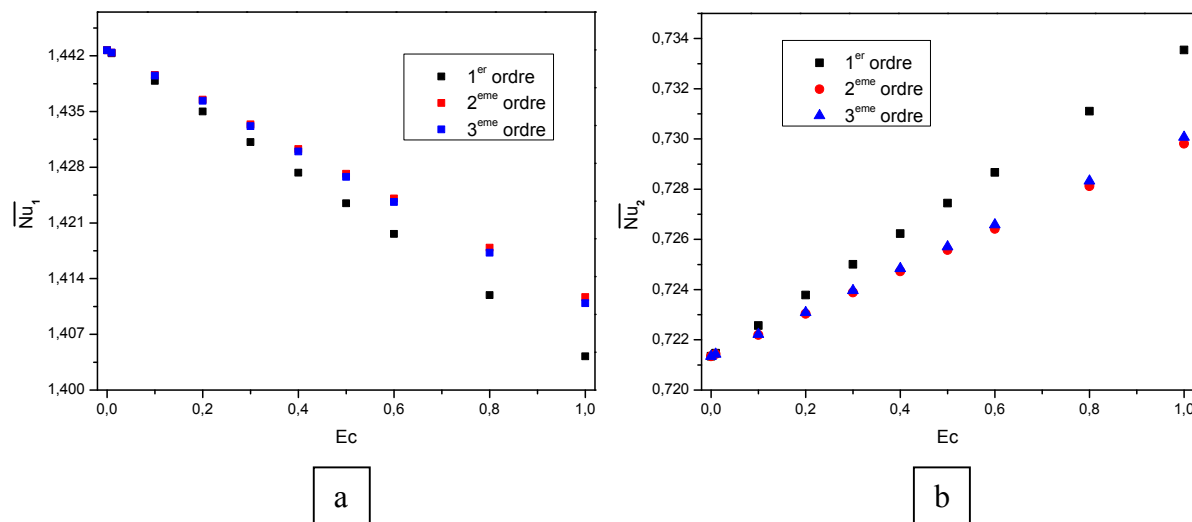


Figure III.8 : L'influence de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre du Nusselt moyen sur (a) cylindre intérieur et (b) cylindre extérieur en fonction du nombre d'Eckert, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha=0.5$

La figure III.8 montre que les profils de Nusselt moyen intérieur et extérieur en fonction de nombre d'Eckert ont la même allure pour les trois cas cités.

On constate que le développement limité de 2^{ème} et de 3^{ème} ordre, a une influence négligeable sur le nombre de Nusselt intérieur et extérieur en fonction de nombre d'Eckert.

En tenant compte des ces remarques et ainsi pour des raisons de simplification des calculs on a opté dans ce travail pour le développement limité du 3^{ème} ordre.

Le nombre de Nusselt en fonction de nombre de Hartamn et d'Eckert pour les trois cas de développement limité des fonctions de Bessel est donné par ces formules :

- **Développement de 1^{er} ordre**

$$Nu_x = Ec Pr \frac{C_2^2}{M^2 r^3} + \frac{C_3}{r}$$

- **Développement de 2^{ème} ordre**

$$Nu_x = \frac{C_3}{2r} - Ec Pr \left[\frac{C_1^2 M^6 r^5}{192} - \frac{C_1 C_2 M^2 r}{2} + \frac{C_1 C_2 M^4 r^3}{16} + \frac{C_2^2}{M^2 r^3} - \frac{C_2^2 \ln(r)}{r} + \frac{C_2^2 M^2 r}{4} \right]$$

- **Développement de 3^{ème} ordre**

$$Nu_x = \frac{C_3}{2r} - \frac{Ec Pr}{2r} \left[\begin{aligned} & C_2^2 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{C_2^2}{M^2 r^2} + \frac{1}{2} C_5 (Mr)^6 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{1}{2} C_6 (Mr)^6 \\ & - \frac{1}{192} C_2^2 (Mr)^6 \left(\ln\left(\frac{Mr}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2} C_7 (Mr)^2 + \frac{1}{2} C_8 (Mr)^4 \\ & - \frac{1}{16} C_2^2 (Mr)^4 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{1}{2} C_9 (Mr)^8 - \frac{1}{1536} C_1 C_2 (Mr)^8 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \\ & - \frac{1}{46080} C_1^2 (Mr)^{10} \end{aligned} \right]$$

Chapitre . IV
Résolution Numérique

IV.1 Introduction

Les écoulements instationnaires des fluides incompressibles dans une géométrie quelconque sont gouvernés par les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes. Ces équations sont non linéaires et une solution analytique reste difficile à obtenir. Cela impose le recours aux méthodes de résolutions numériques.

Le choix d'une méthode appropriée pour la résolution d'un problème numériquement, fait intervenir de multiples paramètres. Les critères de sélections sont d'une part, le temps nécessaire pour le calcul de la solution, qui doit être le plus court possible, et d'autre part l'exactitude de la solution qui doit être la plus grande possible.

La première étape d'une simulation numérique, consiste à la définition du modèle géométrique représentant le domaine sur lequel la solution numérique devra être calculée. On procède ensuite à la discrétisation du domaine de calcul en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation intervenant dans les équations par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie. Par la suite, on choisit un schéma de discrétisation approprié pour chaque terme du système, une fois les équations discrétisées, on cherche la méthode convenable pour la résolution du système d'équations algébriques résultant.

La résolution numérique des problèmes relatifs aux écoulements bidimensionnels intervenant dans la présente étude, peut se faire soit en utilisant la formulation fonction de courant-vorticité, soit les variables vitesse –pression. Nous avons opté pour la dernière formulation en raison de sa rapidité de prédiction, son coût non élevé, ainsi que sa capacité à simuler des conditions réelles.

Pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes, énergie et de masse relatives à notre étude, nous avons adopté la méthode des différences finies. Dans cette méthode les dérivées partielles sont remplacées par des opérateurs élémentaires de différences. Cette discrétisation permet de résoudre le problème sur un nombre fini de points du milieu fluide qui forme le domaine d'étude. Les méthodes aux différences finies sont parmi les plus couramment utilisées pour la résolution des équations partiellement paraboliques.

IV.2 Maillage utilisé

La spécification du maillage utilisé dépend de la complexité de la géométrie. Il est donc très intéressant de chercher le maillage convenable qui assure la convergence de la méthode du calcul, car il peut y avoir une certaine limite de la taille de la maille conduisant à la divergence du schéma. Cela nécessite une étude sur le choix de la densité de maillage convenable.

Le maillage utilisé dans notre étude est un maillage structuré, du fait de la symétrie et la géométrie cylindrique du problème physique, le domaine de calcul est réduit à un demi plan ABCD divisé en mailles carrées de dimensions $\Delta r = \Delta z = h$, figure (IV.1). Chaque point (noeud) du domaine est repéré par deux indices (i, j) indiquent respectivement sa position sur l'axe horizontal (oz) et l'axe vertical (or).

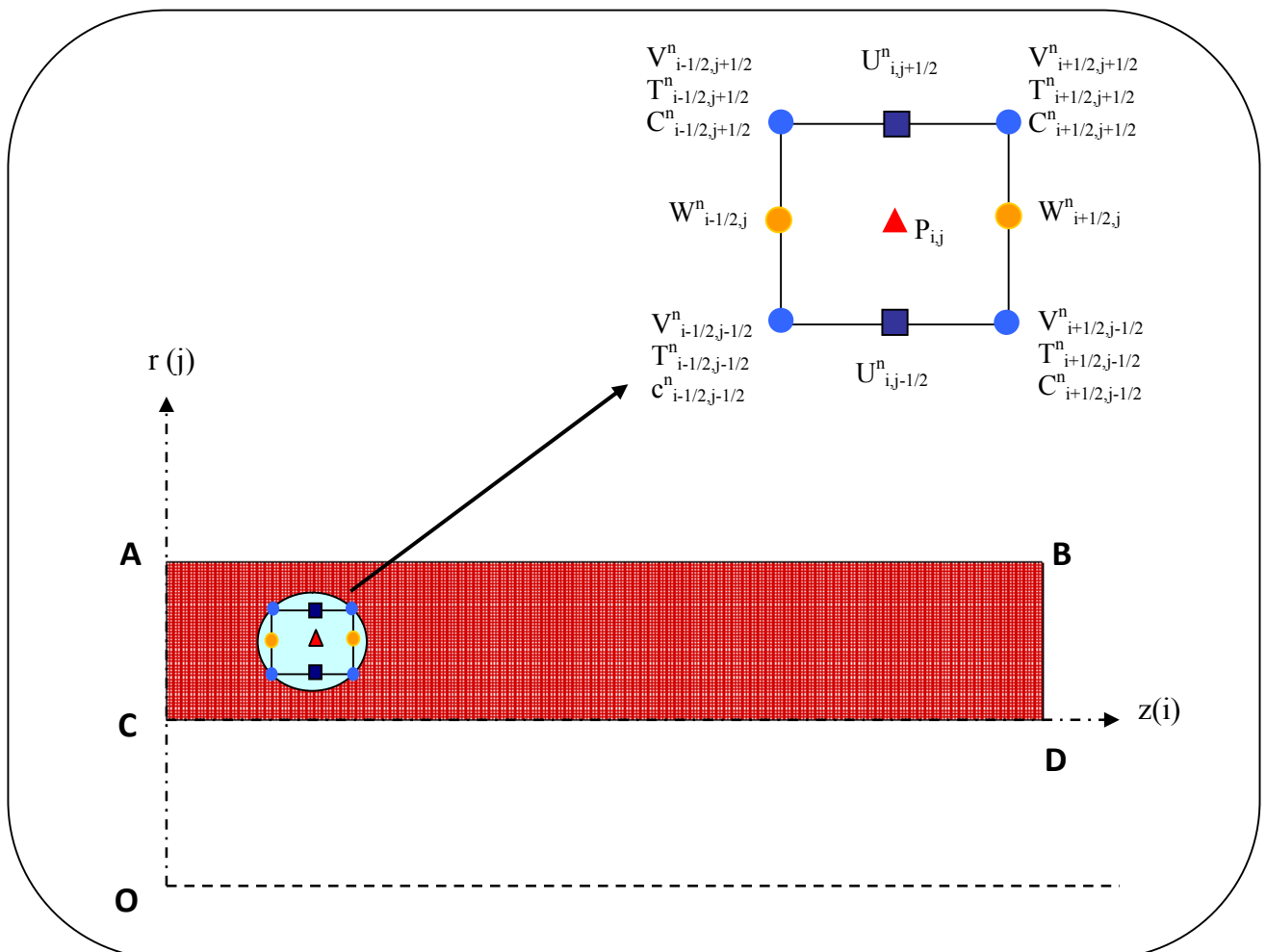


Figure IV.1 : Représentation géométrique du domaine d'étude et de la cellule de M.A.C

Les composantes radiale et axiale de la vitesse (u , w) sont respectivement définies aux points milieux des arêtes verticales et horizontales de chaque maille et la composante azimutale de la vitesse (v) ainsi que la température (Θ) et la concentration (C) occupent les sommets. La pression P est définie au centre de chaque maille. C'est ce qu'on appelle un maillage décalé défini par la cellule de M.A.C (Marker And Cell).

Si h est le pas spatial, k le pas du temps et n l'indice du temps ($t=nk$), les différentes variables sont définies comme suit :

$u_{i,j+1/2}^n$ La valeur de u au point: $z_i = ih$ et $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t=nk$

$v_{i+1/2,j+1/2}^n$ La valeur de v au point: $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$ et $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t=nk$

$w_{i+1/2,j}^n$ La valeur de w au point: $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$ et $r_j = jh$ à l'instant $t=nk$

$P_{i,j}^n$ La valeur de P au point: $z_i = ih$ et $r_j = jh$ à l'instant $t=nk$

$\theta_{i+1/2,j+1/2}^n$ La valeur de θ au point: $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$ et $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t=nk$

$C_{i+1/2,j+1/2}^n$ La valeur de C au point: $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$ et $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t=nk$

IV.3. Schéma de discrétisation

IV.3. 1 Description de la méthode

Les équations du mouvement, de continuité, de l'énergie et de concentration sont résolues au moyen d'un schéma semi implicite de type Crank-Nicholson à l'aide d'un processus itératif basé sur la perturbation de l'équation de continuité par l'introduction d'une compressibilité artificielle. Cette méthode a été proposée par Temam [49] pour la recherche des solutions stationnaires en faisant tendre le temps vers l'infini dans les équations instationnaires. Des méthodes semblables ont été utilisées par Fortin et al. [50], Peyret [51], Peyret et al [52], Ghezal et al. [53], [54].

Cette méthode présente l'avantage d'exprimer de façon explicite la dépendance de la pression avec le temps.

En conséquence :

- Les conditions aux limites sur la pression ne sont pas nécessaires.

- La satisfaction de l'équation de continuité à chaque itération n'est pas nécessaire.
- L'introduction d'une dérivée temporelle de la pression rend possible la résolution des équations stationnaire de Navier-Stokes par une méthode instationnaire.

IV. 3 .2 Discrétisation des dérivées partielles

Les équations de Navier-Stokes relatives à cette étude sont de type parabolique suivant le temps; leur résolution se fait par une discrétisation du premier ordre dans le temps.

a. Approximation de la dérivée première suivant le temps

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est remplacée par un opérateur aux différences de premier ordre avec une précision $O(k)$ à partir d'un développement de Taylor du premier ordre de la fonction $f(r, z, t)$ dans le temps:

$$\delta_t (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^{n+1} - f_{m,l}^n}{k}$$

b. Approximation de la dérivée première par rapport aux variables spatiales

Un nombre infini de schémas peut être utilisé pour la discrétisation de la dérivée. A partir de développement de Taylor en r et en z , les dérivées premières et secondes sont approchées par des opérateurs selon l'ordre de précision souhaité.

- **Par rapport à la variable r**

- précision d'ordre un $O(h)$:

$$\delta_r^+ (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l}^n}{h} \quad \text{Opérateur progressif}$$

$$\delta_r^- (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m,l-1}^n}{h} \quad \text{Opérateur régressif}$$

- précision d'ordre deux $O(h^2)$:

$$\delta_r^0 (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l-1}^n}{2h} \quad \text{Opérateur centré}$$

$$\delta_r^+(f_{m,l}^n) = \frac{-3f_{m,l}^n + 4f_{m,l+1}^n - f_{m,l+2}^n}{2h} \quad \text{Opérateur progressif}$$

$$\delta_r^-(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m,l-1}^n + f_{m,l-2}^n}{2h} \quad \text{Opérateur régressif}$$

L'approximation de la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ est obtenue à partir du développement de Taylor d'ordre quatre; elle s'écrit comme suit :

$$\delta_r^2 = \delta_r^+ \delta_r^- (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m,l-1}^n}{h^2}$$

• **Par rapport à la variable z**

$$\delta_z^+(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m,l}^n}{h} \quad \text{Opérateur progressif}$$

$$\delta_z^-(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m-1,l}^n}{h} \quad \text{Opérateur régressif}$$

$$\delta_z^0(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m-1,l}^n}{2h} \quad \text{Opérateur centré}$$

$$\delta_z^+(f_{m,l}^n) = \frac{-3f_{m,l}^n + 4f_{m+1,l}^n - f_{m+2,l}^n}{2h} \quad \text{Opérateur progressif de 2^{eme} ordre}$$

$$\delta_z^-(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m-1,l}^n + f_{m-2,l}^n}{2h} \quad \text{Opérateur régressif de 2^{eme} ordre}$$

La dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ est approchée par :

$$\delta_z^2 = \delta_z^+ \delta_z^- (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m-1,l}^n}{h^2}$$

l et m sont des nombres entiers ou fractionnaires et définis ainsi :

$$l=j, j\pm 1/2, j\pm 3/2, \dots$$

$$m=i, i\pm 1/2, i\pm 3/2, \dots$$

IV. 3 .3 Différentiation des équations

Les équations de Navier –Stokes relatives à cette étude sont de type parabolique suivant le temps ; de ce fait le système d'équations est approximé en utilisant les opérateurs de différence par le système équivalent suivant :

➤ **Equation de continuité :**

L'équation de continuité peut entraîner des instabilités dans la résolution des équations de mouvement. Pour des conditions initiales incompatibles ou à cause d'une solution itérative incomplète avec un schéma implicite, l'opérateur $D_{i,j}$ est non nul.

Le terme de pression est dans ce cas là instable. Le processus itératif peut en effet causer une amplification de l'erreur de troncature si on considère $D_{i,j} = 0$. Pour éviter ces instabilités on impose une compressibilité artificielle avec un opérateur $D_{i,j}^{n+1}$.

$$\delta_r^- u \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} + \frac{u}{r} \Big|_{i,j}^{n+1} + \delta_z^- w \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad (\text{IV.1.a})$$

➤ **Equations de mouvement :**

- *Suivant la direction radiale :*

$$\begin{aligned} \delta_t u \Big|_{i,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \tilde{w} \delta_z^0 u \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \tilde{w} \delta_z^0 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} = \\ -(\delta_r^+ P)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{1-\eta}{\text{Ta}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} \\ - \frac{\text{Ha}^2}{(1-\eta)\text{Ta}} \left[(\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n) \right]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (\text{IV.1.b})$$

- *Suivant la direction tangentielle :*

$$\begin{aligned} \delta_t v_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{uv}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{uv}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \\ \frac{1-\eta}{\text{Ta}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \quad (\text{IV.1.c}) \\ - \frac{\text{Ha}^2}{(1-\eta)\text{Ta}} \left[(\alpha v^{n+1} + (1-\alpha)v^n) \right]_{i+1/2,j+1/2} \end{aligned}$$

- *Suivant la direction axiale :*

$$\begin{aligned} \delta_t w_{i+1/2,j}^n + \left[\alpha \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} = -\delta_z^+ P_{i,j}^{n+\alpha} \\ \frac{1-\eta}{\text{Ta}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} \quad (\text{IV.1.d}) \end{aligned}$$

➤ **Discrétisation de l'équation d'énergie :**

$$\begin{aligned} \delta_t \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(\bar{u} \delta_r^0 \Theta + \bar{w} \delta_z^0 \Theta \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\bar{u} \delta_r^0 \Theta + \bar{w} \delta_z^0 \Theta \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \\ \frac{1-\eta}{\text{Pr Ta}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{r} + \delta_z^2 \Theta \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{r} + \delta_z^2 \Theta \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{(1-\eta)\text{Ec}\Phi}{\text{Ta}} \quad (\text{IV.1.e}) \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\alpha \left((\delta_r^0 \bar{u})^2 + \left(\frac{\bar{u}}{r} \right)^2 + (\delta_z^0 \bar{w})^2 \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left((\delta_r^0 \bar{u})^2 + \left(\frac{\bar{u}}{r} \right)^2 + (\delta_z^0 \bar{w})^2 \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \\ + \left[\alpha (\delta_z^0 \bar{u} + \delta_r^0 \bar{w})^{2(n+1)} + (1-\alpha) (\delta_z^0 \bar{u} + \delta_r^0 \bar{w})^{2n} \right]_{i+1/2,j+1/2} \\ + \left[\alpha \left(\delta_r^0 v - \frac{v}{r} \right)^{2(n+1)} + (1-\alpha) \left(\delta_r^0 v - \frac{v}{r} \right)^{2n} \right]_{i+1/2,j+1/2} \\ + \left[\alpha (\delta_z^0 v)^{2(n+1)} + (1-\alpha) (\delta_z^0 v)^{2n} \right]_{i+1/2,j+1/2} \end{aligned}$$

➤ *Discrétisation de l'équation de diffusion convection:*

$$\delta_t C_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha (\bar{u} \delta_r^0 C + \bar{w} \delta_z^0 C)^{n+1} + (1-\alpha) (\bar{u} \delta_r^0 C + \bar{w} \delta_z^0 C)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1-\eta}{ScTa} \left[\alpha \left(\delta_r^2 C + \frac{\delta_r^0 C}{r} + \delta_z^2 C \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 C + \frac{\delta_r^0 C}{r} + \delta_z^2 C \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \quad (IV.1.f)$$

$\bar{u}_{i+1/2,j+1/2}$, $\tilde{u}_{i+1/2,j}$, $\bar{v}_{i,j+1/2}$, $\tilde{v}_{i,j+1/2}$ et $\bar{w}_{i+1/2,j+1/2}$ sont des valeurs moyennes définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} (v_{i+1/2,j+1/2} + v_{i-1/2,j+1/2}) \\ \bar{u}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i+1,j+1/2} + u_{i,j+1/2}) \\ \bar{w}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (w_{i+1/2,j+1} + w_{i+1/2,j}) \\ \tilde{w}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{4} (w_{i+1/2,j+1} + w_{i-1/2,j+1} + w_{i+1/2,j} + w_{i-1/2,j}) \\ \tilde{u}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{4} (u_{i+1,j+1/2} + u_{i+1,j-1/2} + u_{i,j+1/2} + u_{i,j-1/2}) \end{aligned}$$

IV.4 Equations discrétisées

Comme cela a été déjà mentionné la méthode retenue pour implémenter ce problème est une méthode aux différences finies semi implicite du type Crank-Nicolson. Cette technique correspondant à $\alpha = 1/2$, consiste à satisfaire les équations aux différences au milieu de l'intervalle séparant le plan en temps (n+1) où la solution est cherchée, du plan (n) où elle est connue.

Les équations se réécrivent dans ce cas là comme suit :

Equation de continuité:

$$\delta_r^- u_{i,j+1/2}^{n+1} + \frac{u}{r} \Big|_{i,j}^{n+1} + \delta_z^- w_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad (IV.2.a)$$

➤ **Equations de mouvement :**

- *Suivant la direction radiale r*

$$\delta_t u_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^{n+1} + \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} = -(\delta_r^+ P)_{i,j}^{n+\alpha}$$

$$+ \frac{1-\eta}{2\text{Ta}} \left[\left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} - \frac{\text{Ha}^2}{2(1-\eta)\text{Ta}} [(u^{n+1} + u^n)]_{i,j+1/2}$$
(IV.2.b)

- *Suivant la direction tangentielle θ :*

$$\delta_t v_{i+1/2,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u}v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u}v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} =$$

$$\frac{1-\eta}{2\text{Ta}} \left[\left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2}$$

$$- \frac{\text{Ha}^2}{2(1-\eta)\text{Ta}} [(v^{n+1} + v^n)]_{i+1/2,j+1/2}$$
(IV.2.c)

- *Suivant la direction axiale z :*

$$\delta_t w_{i+1/2,j}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{u} \delta_r^0 w + \bar{w} \delta_z^0 w \right)^{n+1} + \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + \bar{w} \delta_z^0 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} = -\delta_z^+ P_{i,j}^{n+\alpha}$$

$$\frac{1-\eta}{2\text{Ta}} \left[\left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^n \right]_{i+1/2,j}$$
(IV.2.d)

➤ **Equation d'énergie:**

$$\delta_t \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_r^0 \Theta + \bar{w} \delta_z^0 \Theta \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_r^0 \Theta + \bar{w} \delta_z^0 \Theta \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} =$$

$$\frac{1-\eta}{2\text{PrTa}} \left[\left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{r} + \delta_z^2 \Theta \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{r} + \delta_z^2 \Theta \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{(1-\eta)\text{Ec}\Phi}{\text{Ta}}$$
(IV.2.e)

Où :

$$\begin{aligned} \Phi = & \left[\left((\delta_r^0 \bar{u})^2 + \left(\frac{\bar{u}}{r} \right)^2 + (\delta_z^0 \bar{w})^2 \right)^{n+1} + \left((\delta_r^0 \bar{u})^2 + \left(\frac{\bar{u}}{r} \right)^2 + (\delta_z^0 \bar{w})^2 \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} \\ & + \frac{1}{2} \left[(\delta_z^0 \bar{u} + \delta_r^0 \bar{w})^{2(n+1)} + (\delta_z^0 \bar{u} + \delta_r^0 \bar{w})^{2n} \right]_{i+1/2, j+1/2} \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\delta_r^0 v - \frac{v}{r} \right)^{2(n+1)} + \left(\delta_r^0 v - \frac{v}{r} \right)^{2n} \right]_{i+1/2, j+1/2} + \frac{1}{2} \left[(\delta_z^0 v)^{2(n+1)} + (\delta_z^0 v)^{2n} \right]_{i+1/2, j+1/2} \end{aligned}$$

➤ *Equation de diffusion convection:*

$$\begin{aligned} \delta_t C_{i+1/2, j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[(\bar{u} \delta_r^0 C + \bar{w} \delta_z^0 C)^{n+1} + (\bar{u} \delta_r^0 C + \bar{w} \delta_z^0 C)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} = \\ \frac{1-\eta}{2ScTa} \left[\left(\delta_r^2 C + \frac{\delta_r^0 C}{r} + \delta_z^2 C \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 C + \frac{\delta_r^0 C}{r} + \delta_z^2 C \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} \end{aligned} \quad (IV.2.f)$$

IV.5 Traitement des opérateurs aux frontières

Lorsque les équations sont discrétisées dans les mailles bordant les frontières du domaine, certaines modifications doivent être apportées au schéma de discrétisation. En effet les frontières ne coïncident pas avec le maillage géométrique décrit sur la figure (IV.2). Pour remédier à ce problème, Il est utile de tenir compte de l'existence d'une maille fictive disposée, à l'extérieur, de l'autre coté de la paroi solide afin de vérifier les conditions à la frontière.

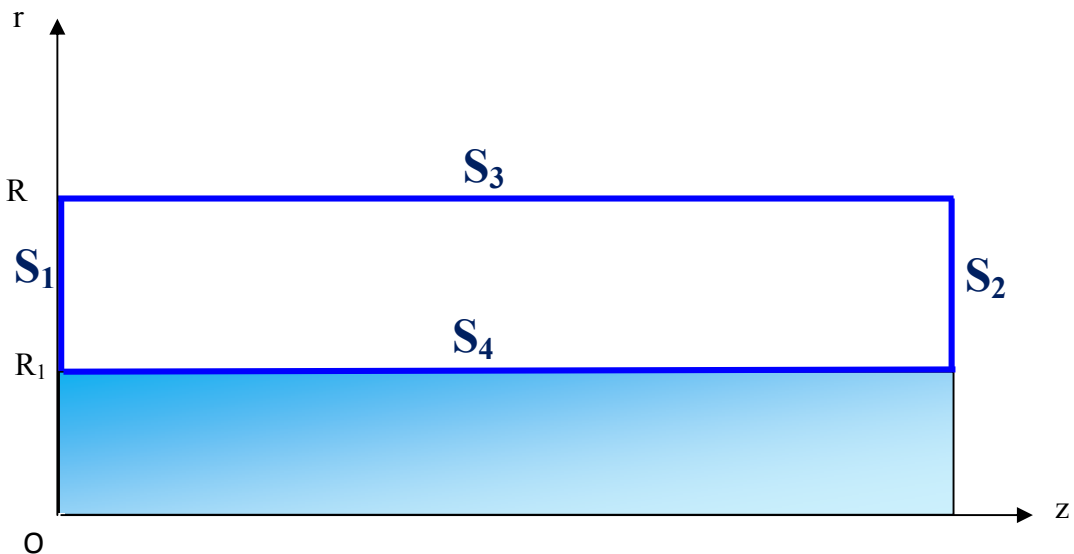


Figure IV.2 : les frontières du domaine étudié

Les conditions aux limites sont traitées en utilisant les définitions données par Harlow et Welch [55] 1965, qui considèrent que les parois solides sont confondues avec les bordures des cellules qui sont proches et appartenant au maillage. Une paroi horizontale passe alors à travers les nœuds de la maille portant les vitesses normales qui s'annulent quelque soit le temps.

a- Sur la paroi S_1

Au voisinage de cette paroi fig. IV.3 on distingue trois conditions aux limites à savoir; la condition d'adhérence, la condition d'adiabaticité et la condition d'imperméabilité des parois.

La vitesse normale à la paroi s'annule, $w=0$. L'opérateur L_w appliqué au point $(R-h,z,t)$ et ses dérivées par rapport à r ne débordent pas sur la frontière S_1 .

La condition de réflexion pour la vitesse tangentielle tel que $u'=-u$ (le « ' » symbolise une cellule fictive située à l'extérieur de la paroi solide).

De plus, on suppose pour ce cas d'indétermination qu'il existe une variation linéaire sur l'intervalle $R-h/2 \leq r \leq R+h/2$ de manière à aboutir à l'expression suivante :

$$u(r, z, t) = \frac{2(R-r)}{h} u(R-h/2, z, t)$$

Dans l'approximation des dérivées de u par rapport à r , la valeur de u' qui est ainsi définie permet de résoudre L_u au point $(R-h/2, z, t)$.

Dans l'approximation des conditions d'adiabaticité et d'imperméabilité on utilise l'opérateur (δ'') dans la direction radiale, pour maintenir la précision au deuxième ordre. Les opérateurs L_θ et L_C ne présente aucun débordement sur cette frontière.

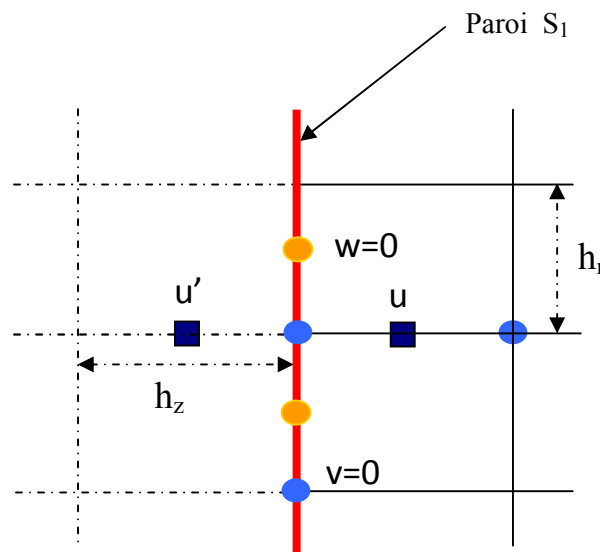


Figure IV.3: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_1 , $z=0$

b- Sur la paroi S_2

De la même façon on calcule les conditions aux limites sur la frontières S_2 . Les conditions aux limites d'adhérence d'adiabaticité et d'imperméabilité dans la section d'entrée se présentent telles que, (voir figure IV.4), les vitesses tangentielles ayant un problème d'indétermination au contact de cette paroi sont réfléchies et les vitesses normales s'annulent sur cette frontière. Ce qui conduit à la relation $U=-U'$ et $W=0$ sur la paroi S_2 .

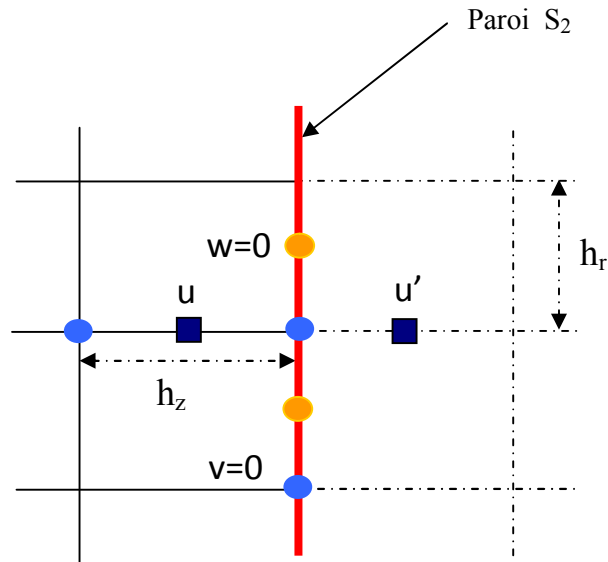


Figure IV.4: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_2 , $z=L$

c- Sur la paroi S_3 :

Les mêmes techniques servent à calculer les conditions aux limites sur les frontières solides disposées horizontalement.

Le long de cette frontière, nous avons la condition d'adhérence $u = v = w = 0$

Au voisinage de (S_3), le maillage est présenté dans la figure IV.5

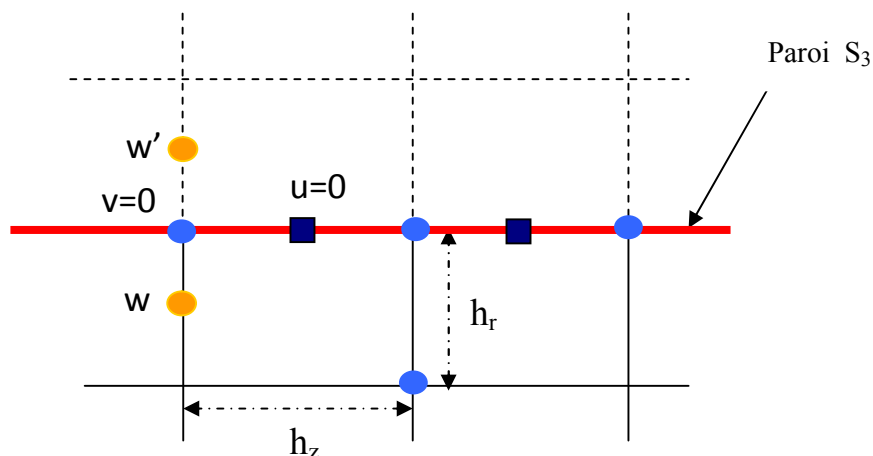


Figure IV.5 : Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_3 , $r=R_2$

Les composantes radiale et tangentielle u et v de la vitesse ainsi que les composantes de température et de concentration se trouvent sur la paroi, tandis que w se trouve à une distance de $h/2$ de cette même paroi. Pour la détermination de la valeur de w à la paroi S_1 , on utilise la condition de réflexion pour la vitesse tangentielle tel que $W'=-W$ (le « ' » symbolise une cellule fictive située à l'extérieur de la paroi solide).

De plus, on suppose pour ce cas d'indétermination qu'il existe une variation linéaire sur l'intervalle $R-h/2 \leq r \leq R+h/2$ qui aboutit à l'expression suivante :

$$W(r, z, t) = \frac{2(R-r)}{h} W(R-h/2, z, t)$$

Dans l'approximation des dérivées de W par rapport à r , la valeur de W' qui est ainsi définie permet de résoudre L_w au point $(R-h/2, z, t)$.

d- Sur la paroi S_4

Au voisinage des parois du cylindre intérieur ($r=R_1$), le cylindre intérieur est disposé sur l'axe de symétrie de sorte que le traitement des variables sur ces parois nécessite des considérations particulières (fig.IV6)

La paroi passe dans ce cas entre deux lignes du maillage définissant ainsi une demi-maille, cette dernière permet d'éviter le problème de réflexion de la vitesse tangentielle car elle ne peut pas se faire à l'intérieur du cylindre tournant.

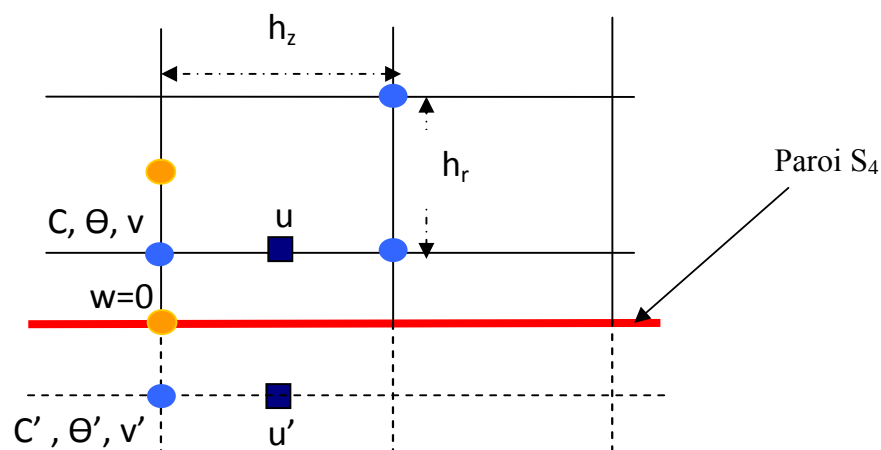


Figure IV.6: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_4 , $r=R_1$

La valeur de v au point (i, j_{cy}) est donnée par l'approximation suivante :

$$v_{i,j_{cy}} = \frac{1}{3} \left(v_{i,j_{cy+1}} + 2v_{rot} \right)$$

V_{rot} est la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

IV.6 Hypothèse sur la vitesse de rotation du cylindre intérieur

Pour éviter la création des instabilités dues à la vitesse de rotation nous avons opté pour une variation linéaire évolutive de cette dernière depuis la valeur initiale, nulle, à la valeur imposée proposé par A. Ghezal et al [53].

Des tests numériques effectués, ont conduit au choix d'une variation linéaire au cours des premiers vingt plans en temps atteignant la valeur limite v_0 .

L'expression suivante qui donne l'évolution de la vitesse de rotation $v_{rot}(t)$ du cylindre intérieur en fonction du temps est comme suit:

$$v_{rot}(t) = \begin{cases} \frac{t}{20} v_0 & \text{si } t < \frac{20}{64} \\ v_0 & \text{si } t > \frac{20}{64} \end{cases}$$

Où v_0 est la vitesse de rotation imposée.

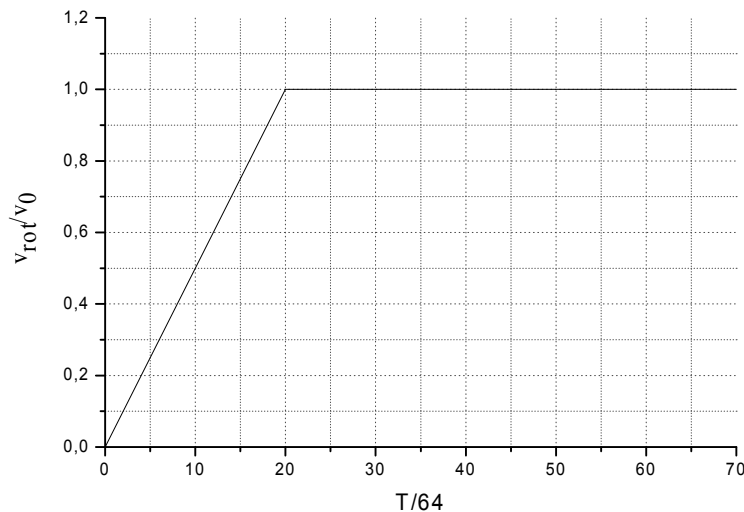


Figure IV.7: Evolution de la vitesse de rotation au cours du temps

On note aussi que les termes du créés de la composante azimutal de la vitesse sont pris de la forme du produit des vitesses dans deux plans en temps, le plan n et le plan $n+1$. Cette forme s'est avérée, après des tests numériques, plus adaptée pour la rapidité de la convergence que de considérer la vitesse dans le même plan en temps

IV.7 Procédé itératif

Après la discrétisation des dérivées temporelles et spatiales des (IV.2.a-f), on obtient un système algébrique non linéaire résultant des équations aux différences finies, accompagné des conditions aux limites, qui est résolu par un processus itératif déjà utilisé par Fortin [56], Begis[57] et Peyret et Childress [58].

Par un souci de commodité de notation, nous avons introduit les symboles $u_h, v_h, w_h, P_h, \Theta_h$ et C_h représentant les valeurs des inconnues dans les positions données dans la maille

de M.A.C, c'est-à-dire : $u_h = u_{i,j+1/2}^{n+1}$, $v_h = v_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$, $w_h = w_{i+1/2,j}^{n+1}$, $\Theta_h = \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$,

$C_h = C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ et $P_h = P_{i,j}^{n+1}$

Le système d'équation discrétisé résultant est mis sous la forme symbolique simple suivante :

$$\begin{cases} L_u (u_h, v_h, w_h, P_h, \Theta_h, C_h) = 0 \\ L_v (u_h, v_h, w_h) = 0 \\ L_w (u_h, w_h, P_h) = 0 \\ D (u_h, w_h, p_h) = 0 \\ L_\theta (u_h, w_h, \theta_h) = 0 \\ L_C (u_h, w_h, C_h) = 0 \end{cases} \quad (IV.3)$$

Où $L_u, L_v, L_w, D, L_\theta$ et L_C sont les opérateurs de différences relatifs au système d'équations correspondant respectivement aux variables du problème u, v, w, P, Θ et C . Ces équations sont appliquées sur tous les points de la grille MAC qui supportent l'écoulement.

Le principe de cette méthode est de corriger petit à petit les valeurs estimées des champs u, v, w, P, Θ et C dans chaque itération jusqu'à obtenir des solutions du problème à une certaine valeur de résidu prédéfini antérieurement par le critère de convergence.

Les variations brutales des variables, qui sont engendrées au cours des premières itérations sont très déstabilisantes. Dans le but de réduire les amplitudes des variations, des sous relaxations régulières ont été utilisées pour les variables à l'intérieur d'un pas de temps.

Si V et l'indice de l'itération, le système (IV.3) est défini alors par le système d'équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_h^{v+1} - \mathbf{u}_h^v + \mathbf{KL}_u(\mathbf{u}_h^v, \mathbf{v}_h^v, \mathbf{w}_h^v, \mathbf{P}_h^v, \Theta_h^v, \mathbf{C}_h^v) = 0 \\ \mathbf{v}_h^{v+1} - \mathbf{v}_h^v + \mathbf{KL}_v(\mathbf{u}_h^{v+1}, \mathbf{v}_h^v, \mathbf{w}_h^v) = 0 \\ \mathbf{w}_h^{v+1} - \mathbf{w}_h^v + \mathbf{KL}_w(\mathbf{u}_h^{v+1}, \mathbf{w}_h^v, \mathbf{P}_h^v) = 0 \\ \Pi_h^{v+1} - \Pi_h^v + \beta \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{v+1}, \mathbf{w}_h^{v+1}) = 0 \\ \Theta_h^{v+1} - \Theta_h^v + \chi \mathbf{L}_c(\mathbf{u}_h^{v+1}, \mathbf{w}_h^{v+1}, \Theta_h^v) = 0 \\ \mathbf{C}_h^{v+1} - \mathbf{C}_h^v + \omega \mathbf{L}_c(\mathbf{u}_h^{v+1}, \mathbf{w}_h^{v+1}, \mathbf{C}_h^v) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.4})$$

Où les coefficients de sous relaxation sont choisis tel que :

$$0 < K < 1$$

$$0 < \beta < 1$$

$$0 < \chi < 1$$

$$0 < \omega < 1$$

Les coefficients K, β, χ, ω , sont des paramètres qui doivent être choisis de façon à assurer la convergence du système (IV.4). Pour cela il est nécessaire d'étudier les conditions de la stabilité du système d'équations (IV.4), dont lequel l'indice d'itération v est identique à l'indice de variation en pas de temps n , ce qui rend le système évolutif dans le temps (v).

IV.8. Stabilité et convergence de la méthode numérique

Pour notre cas, on a utilisé les résultats de l'étude de la stabilité donnée par R.Peyret [58] (1976) et repris par A.Bouhana [59] 1982. La condition de convergence est assurée seulement, si le rayon spectral de la matrice d'amplification relative au système simplifié, ne dépasse pas l'unité. Cela conduit aux conditions de convergence suivantes ;

Les conditions de convergence sont alors :

$$\begin{cases} K > 0, \beta > 0, \chi > 0 \\ \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{Ta} + \frac{h^2}{4K} + \beta \right) < 1 \\ \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{TaPe} + \frac{h^2}{4K} \right) < 1 \end{cases} \quad (IV.5)$$

Les valeurs sont déterminées par des tests numériques. Pour des valeurs de K, β, χ , la meilleure convergence est obtenue avec une valeur de β proche du maximum permis par l'équation.

Pour améliorer la convergence, le procédé décrit précédemment a été modifié par l'utilisation de la technique de Gauss - Seidel qui consiste à utiliser dans chacune des relaxations les valeurs des inconnues correspondant à l'itération $(v+1)$ dès qu'elles sont calculées.

Afin de limiter le nombre d'itérations et par conséquent le temps de calcul, on impose que la convergence du procédé itératif soit obtenue quand :

$$\text{Max}(|L_u|, |L_v|, |L_w|, |D|, |L_\Theta|, |L_C|) < \varepsilon$$

Dans notre cas, les erreurs de troncature sont estimées à $0(h^2, k^2)$ pour le pas de temps $k=1/64$ et les différents pas de l'espace. Les valeurs de ε sont de l'ordre de h^2 ($\varepsilon=10^{-5}$).

Dans la figure (IV.8), il est exposé l'organigramme du processus itératif utilisé pour résoudre le système d'équations.

Q_{\max} et Q_{\min} : délimitent le domaine où l'on cherche la valeur optimale de χ qui assure la bonne convergence.

NHH : représente le nombre maximum d'itération demandé.

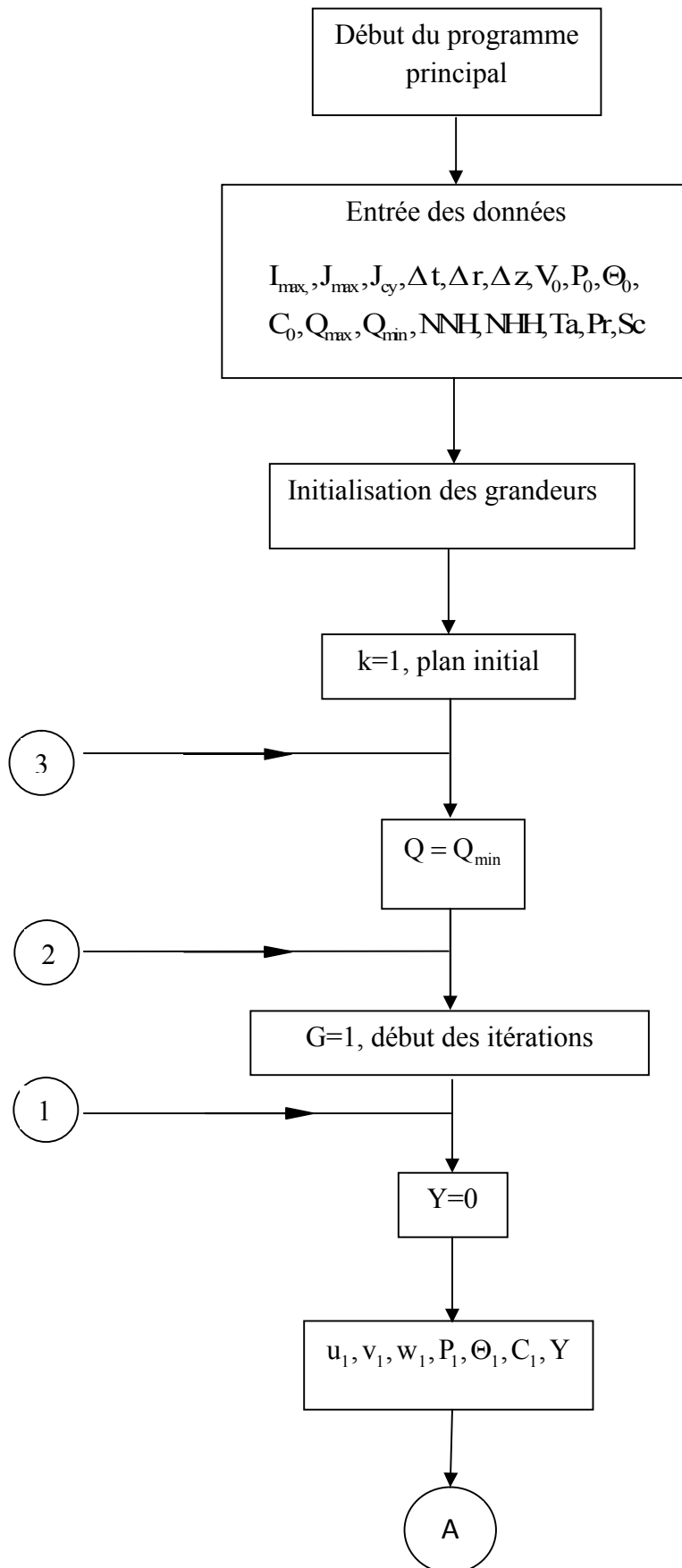
NNH : représente le nombre maximum de pas en temps demandé.

K : compteur des itérations effectuées dans le temps.

G : compteur des itérations effectuées pour la convergence.

Y : le maximum entre les opérateurs $L_u, L_v, L_w, D, L_\Theta$ et L_C

L'instruction Transfert est une simple affectation des éléments des matrices $U_1, V_1, W_1, P_1, \Theta_1$ et C_1 respectivement dans les matrices $U_0, V_0, W_0, P_0, \Theta_0$ et C_0 pour les remplir au prochain plan du temps.



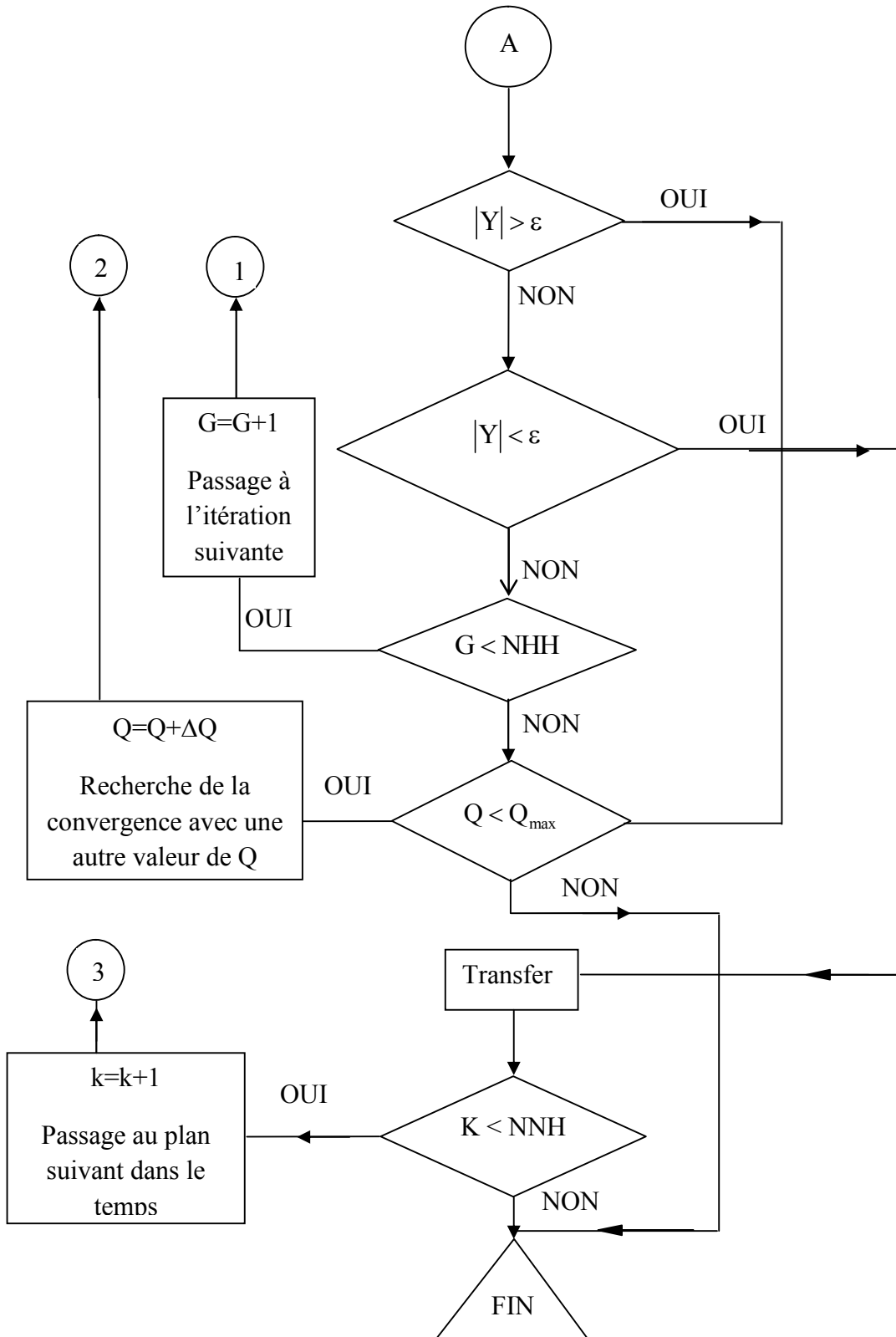


Figure IV.8: Organigramme du processus itératif

Chapitre . V

Résultats et discussion

V.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus analytiquement et numériquement, sur l'influence d'un champ magnétique externe sur le transfert de chaleur et de masse d'un fluide visqueux incompressible, électriquement conducteur, dans un espace annulaire horizontal, soumis à des conditions aux limites de type Dirichlet (concentration et température constantes). Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le nombre de Hartmann Ha , le nombre de Taylor et le nombre d'Eckert sur la structure de l'écoulement ont été aussi discutés.

V.2. Etude de densité de maillage

Pour assuré des résultats numériques plus fiable, on commence par examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, et déduire la qualité de l'approximation du solution.

Pour étudier l'influence du maillage sur les résultats numériques, on a procédé aux choix de la maille indépendante qui a été obtenu en utilisant quatre mailles de taille différentes tel que : (16x16) ; (32x32) ; (48x48) ; (64x64) suivant les directions r et z . La figure (IV.1) montre l'effet du maillage sur le profil radial de la composante azimutal de la vitesse au milieu de l'espace annulaire. On remarque que les profils de vitesse présentent une grande similitude entre eux Néanmoins il faut noter que les courbes correspondant aux pas 1/48 et 1/64 sont assez proches entre elles par rapport à celles du pas 1/16.

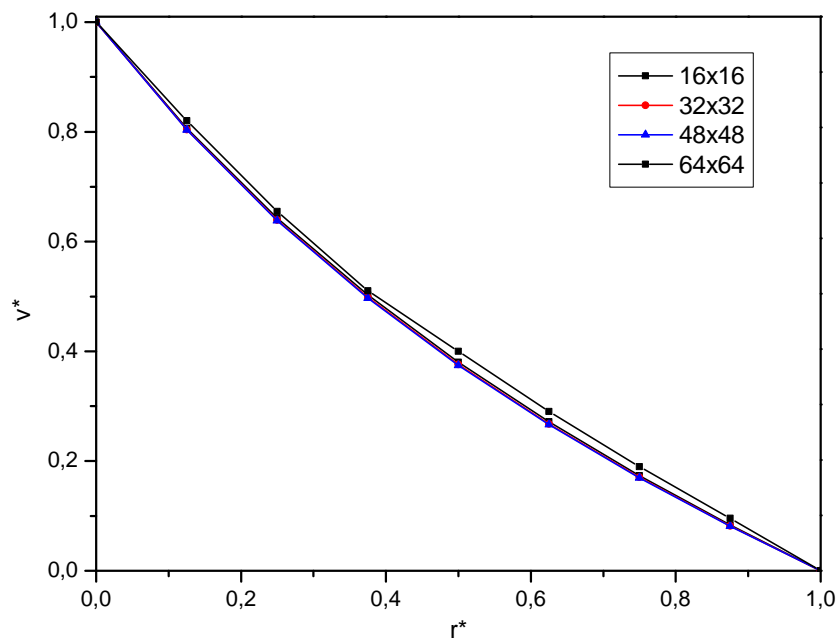


Figure. V.1: Influence du maillage sur le profil radial de la vitesse azimutal pour $\eta = 0.5$, $Ta = 20$, $Ec = 0$, $Ha = 0$, $z^* = 7$.

Le tableau IV.2 montre l'effet du maillage sur la précision du code numérique utilisé pour les conditions suivantes, $Ha=2$, $Ec = 0.5$, $Ta=20$. Les résultats indiquent que pour un maillage d'ordre 48×48 la solution a convergé vers des résultats à peu près constants. Augmenter le maillage jusqu'à 64×64 ne change pratiquement pas les résultats obtenus pour, Nu et Sh mais, par contre augmente considérablement le temps de calcul.

En plus ce maillage permet l'utilisation du schéma numérique pour des valeurs du nombre de Hartmann élevées. On a constaté que la taille de la maille (48×48) est suffisante pour assurer une bonne résolution du problème étudié. Ce qui nous avons conduit à l'utiliser pour notre étude.

	Pas=1/16	Pas=1/32	Pas=1/48	Pas=1/64
\overline{Nu}_i	1,43014	1,43911	1,44101	1,44113
\overline{Nu}_e	0,71957	0,72099	0,72122	0,72123
\overline{Sh}_i	2,17897	2,16583	2,16366	2,15858
\overline{Sh}_e	0,11598	0,11222	0,11107	0,11261

Tableau V.1 : Effet du maillage sur la précision des résultats pour $Ha=2$, $Ec = 0$, $Ta=20$

Ces résultats montrent que le maillage régulier de pas 48×48 est suffisant pour assurer une bonne résolution spatiale du problème.

V.3. Validation des modèles numériques

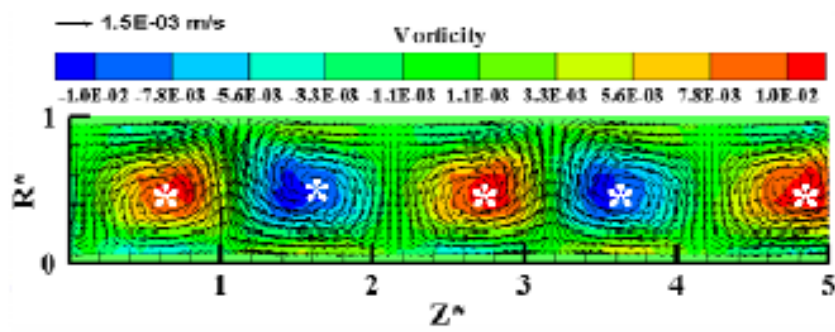
Afin de tester la validité des résultats numériques obtenus, nous avons effectué des calculs par rapport au champ dynamique de l'écoulement pour le régime d'écoulement Taylor Vortex Flow (TVF), sous des conditions qui se rapprochent respectivement de celles utilisées par Dong Liu et al [60] et Abcha et al [61].

Dong Liu et al [60] ont étudié expérimentalement la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette avec un gradient radial de la température. Le dispositif expérimental utilisé est un Digital Particle Image Velocimetry (DPIV) ils ont considéré quatre modèles du cylindre externe sans et avec différents nombres des ailettes (6, 9 et 18), le rapport des rayons et d'aspect de chaque modèles étaient 0.825 et 48, respectivement.

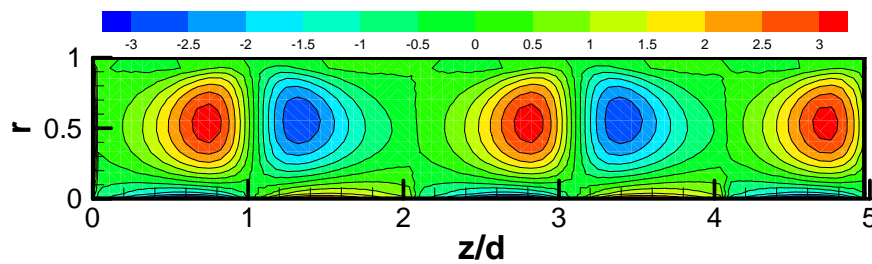
La comparaison a porté sur les résultats expérimentaux de l'évolution du champ de la vortécité sur le plan radial-axial (r,z) à $Re=115$, sans la présence du gradient de température et avec un modèle du cylindre extérieur sans ailettes. La figure IV.2 montre une bonne concordance entre résultats de l'étude actuelle et ceux de Dong Liu et al [60]

Abcha et al [61] ont adapté la technique de vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) au système Couette-Taylor afin de mesurer les profils des vitesses axiales et radiales, des champs de la vortécité et leur dépendance spatio-temporelle.

Les figures (IV. 3) et (IV. 4), représentent les résultats numériques obtenu en utilisant notre code de calcul et ceux obtenus par Abcha et al [61] relatifs à la distribution des composantes radiale et axiale de la vitesse, respectivement, ceci pour des positions radiale et axiale données. La comparaison indique une bonne concordance.

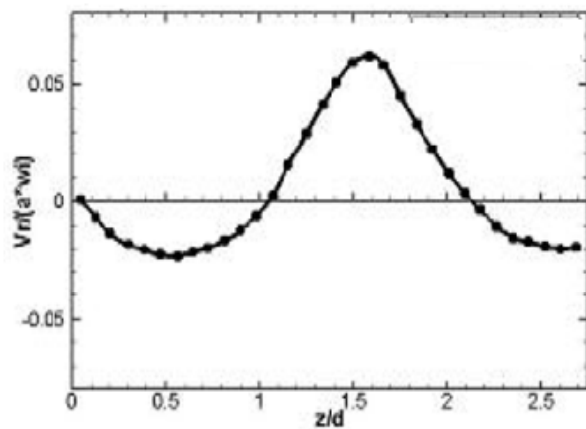


(a)

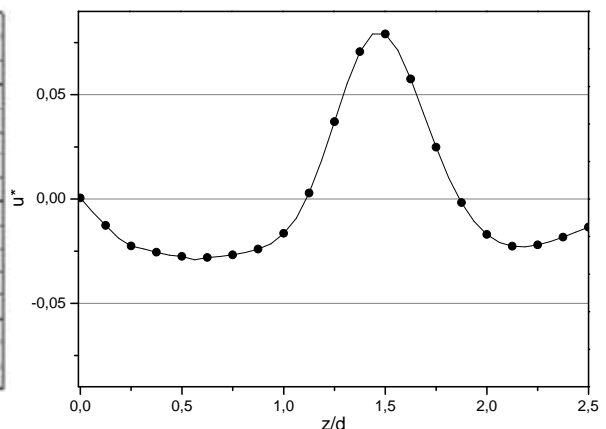


(b)

Figure V.2 : Champ de vorticité à $Re=115$ /Régime TVF, (a) résultats expérimentaux d’après Dong Liu et al [60], b) résultats de notre simulation numérique



(a)



(b)

Figure V.3: Composante radiale du profil de la vitesse à $Re=125$ /Régime TVF, (a) résultats expérimentaux d’après Abcha et al [61], b) résultats de notre simulation numérique

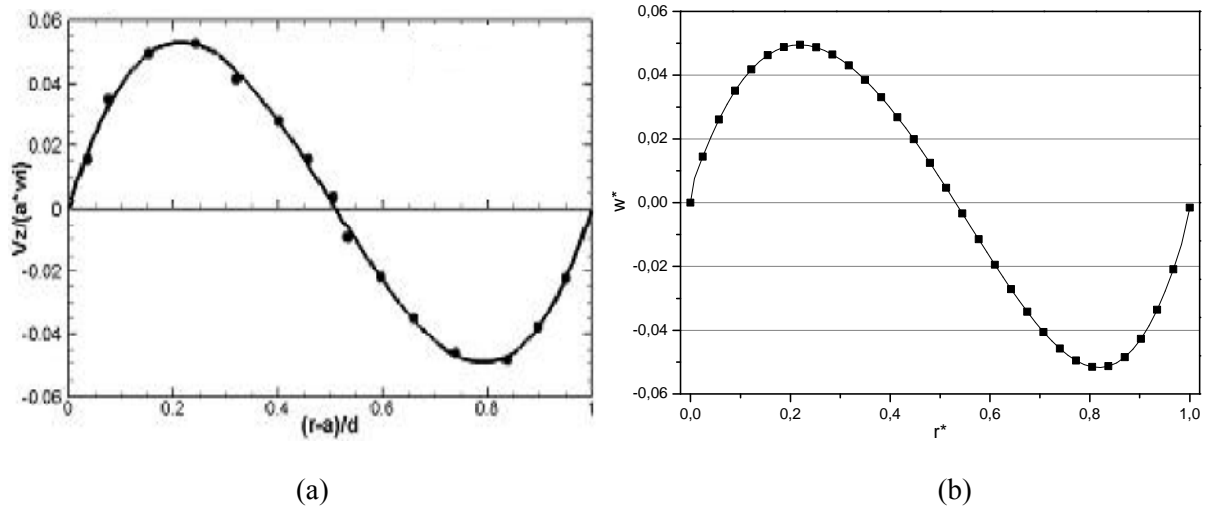


Figure V.4 : Composante axiale du profil de la vitesse à $Re=125$ / Régime TVF résultats expérimentaux d'après Abcha et al [61], b) résultats de notre simulation

V.4. Influence du champ magnétique sur le champ dynamique

Lorsque la rotation du cylindre intérieur atteint une valeur critique ($Ta_c = 70$), on observe dans l'espace annulaire un écoulement secondaire sous forme de rouleaux toroïdaux contra-rotatifs. En effet, en raison de la rotation du fluide et de la force centrifuge qu'elle crée, une dépression apparaît au voisinage de la paroi du cylindre intérieur à faible valeur de pression statique. Par contre au voisinage de la paroi du cylindre extérieur, une forte valeur de pression statique est obtenue. Cette dépression est due à la circulation contrarotative des particules pour chaque paire de cellules voisines.

L'application d'un champ magnétique constant dans la direction axiale du système permet d'agir sur la dynamique de l'écoulement entre les cylindres coaxiaux d'un fluide visqueux électriquement conducteur dans la limite de faibles nombre de Prandtl.

Nous avons représenté les profils radiaux des vitesses pour différents nombres d'Hartmann au milieu de l'entrefer (Figures V. 5, V. 6 et V. 7).

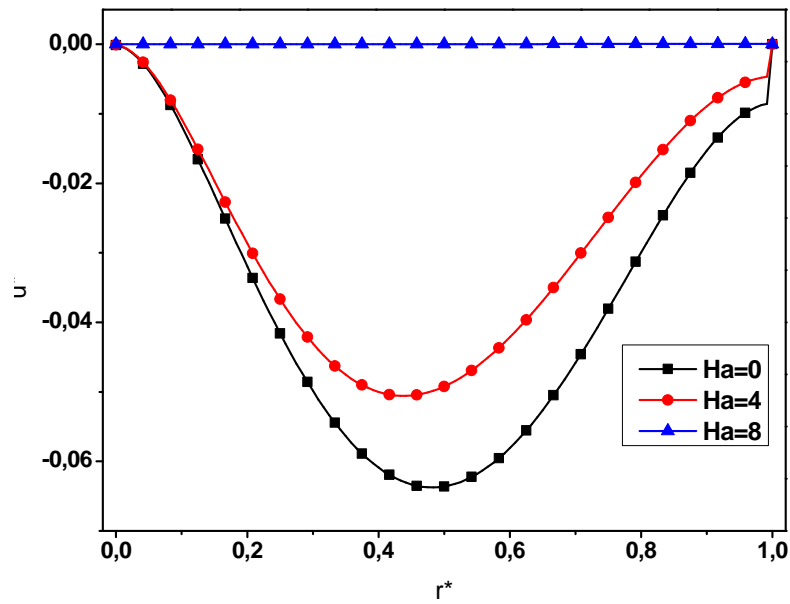


Figure V.5: Profile de la vitesse radiale à différents nombres de Hartmann, $Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$

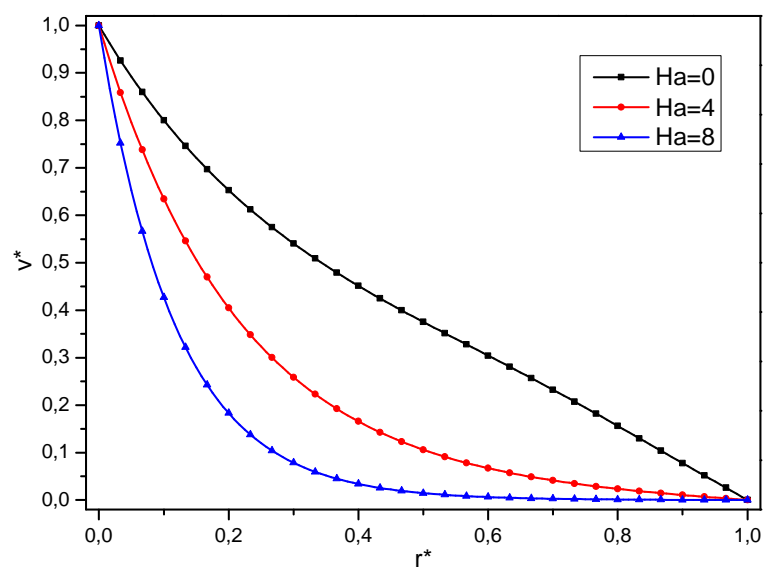


Figure V. 6: Profile de la vitesse azimutale à différents nombres de Hartmann, $Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$

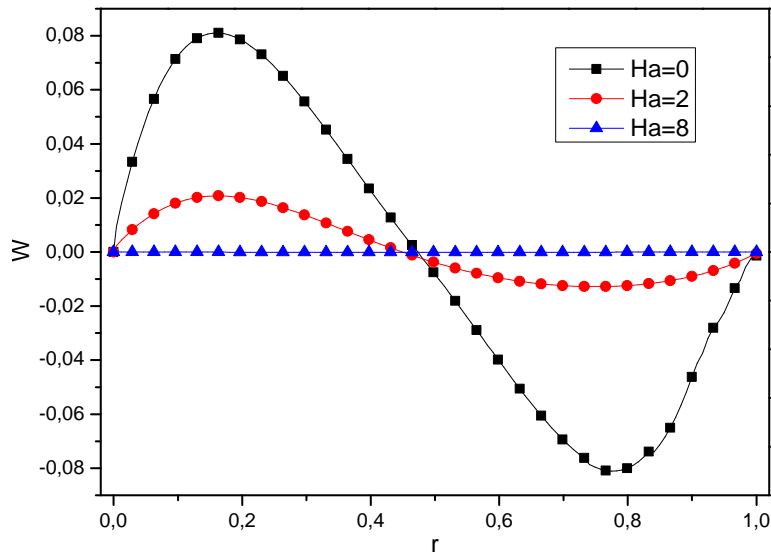


Figure V. 7: Profile de la vitesse axiale à différents nombres de Hartmann, $Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$

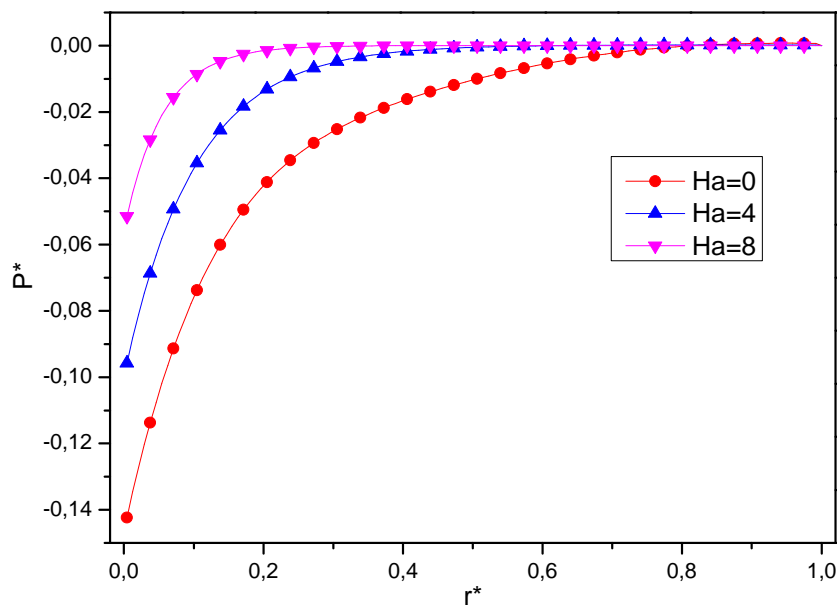


Figure V.8: Profile de la pression à différents nombres de Hartmann, $Ta/Ta_c = 1,43$ et $z/d=7$

Les Figures (IV. 5, IV. 6 et IV. 7) montrent la variation de la vitesse radiale U , azimutale V et axiale W en fonction de nombres de Hartmann

Dans la partie centrale, nous constatons que les vitesses diminuent lorsque le champ magnétique augmente. Ceci s'explique par le cisaillement vertical qui se produit dans les composantes U et V de la vitesse, produisant des courants qui conjointement avec le champ axial génèrent des forces de volume (force de Lorentz) agissant contre les cisaillements. L'atténuation de l'écoulement radial et axial dans la partie centrale réduit la vitesse radiale et

axiale. Par conséquent et en raison de la conservation de la masse, la vitesse azimutale est également réduite.

Le gradient de pression est dominant (Figure V. 78) ce qui traduit la suppression des oscillations des instabilités d'où la formation des tourbillons est diminuée.

Nous avons également représenté sur les figures (V. 9, V. 10 et V. 11), les champs des vitesses pour différents nombres de Hartmann respectivement. Ces figures montrent que l'écoulement subit en général un amortissement dès lors qu'on applique un champ magnétique. Celui-ci est plus important au centre que sur les parois de la conduite. Cela provoque l'apparition de fines couches où le gradient de vitesse est très élevé. Celles-ci sont appelées couches limites de Hartmann (Kakarantzas et al [62]). Notons que, pour une intensité du champ magnétique $Ha > 10$, l'écoulement est complètement ralenti à cause de la forte dominance des forces électromagnétiques (les forces de Lorentz)

V.4.1 Le champ de la vitesse radiale

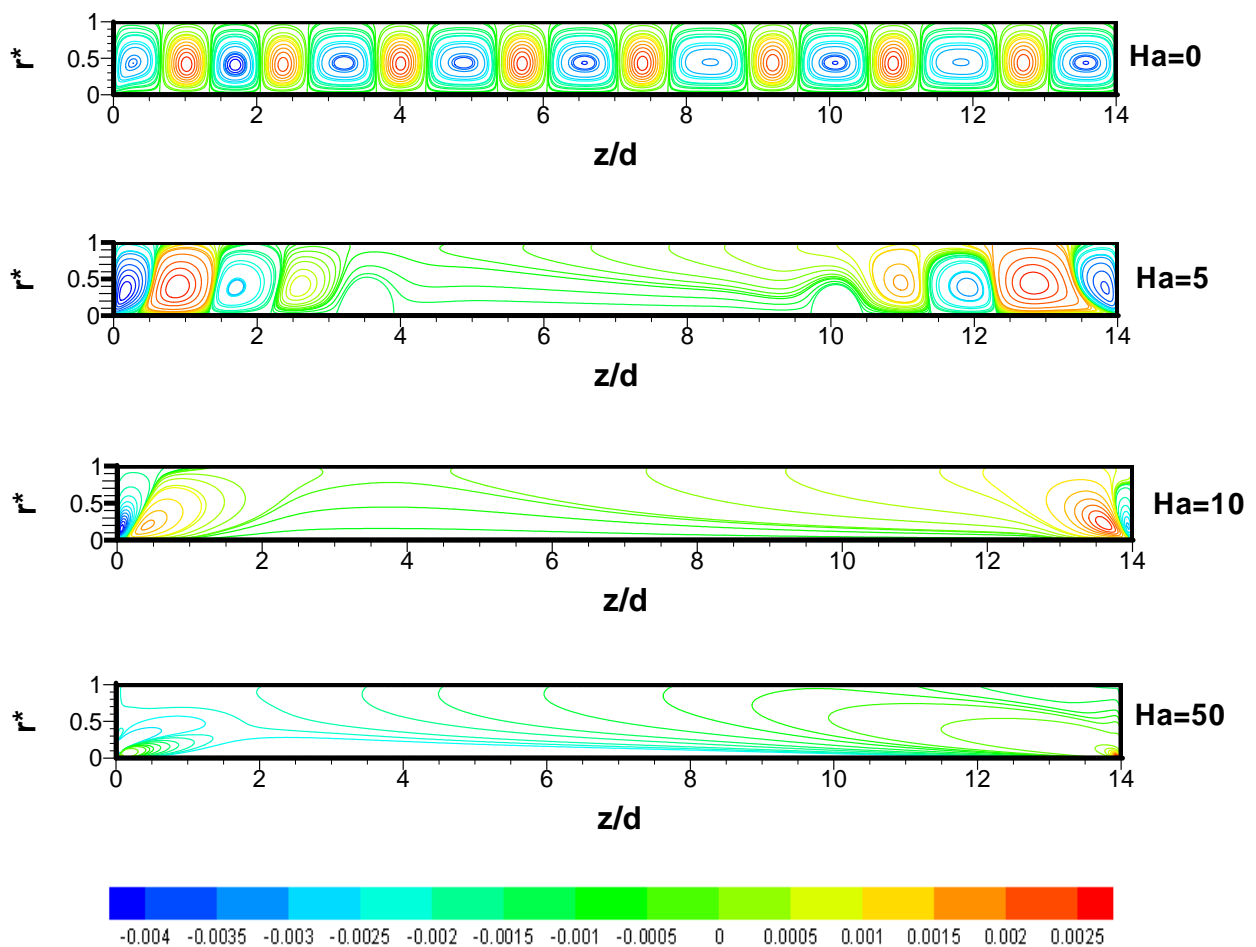


Figure V. 9 : Contours de la vitesse radiale à différents nombres de Hartmann à $Ta = 100$.

V.4.2 Le champ de la Vitesse azimutale

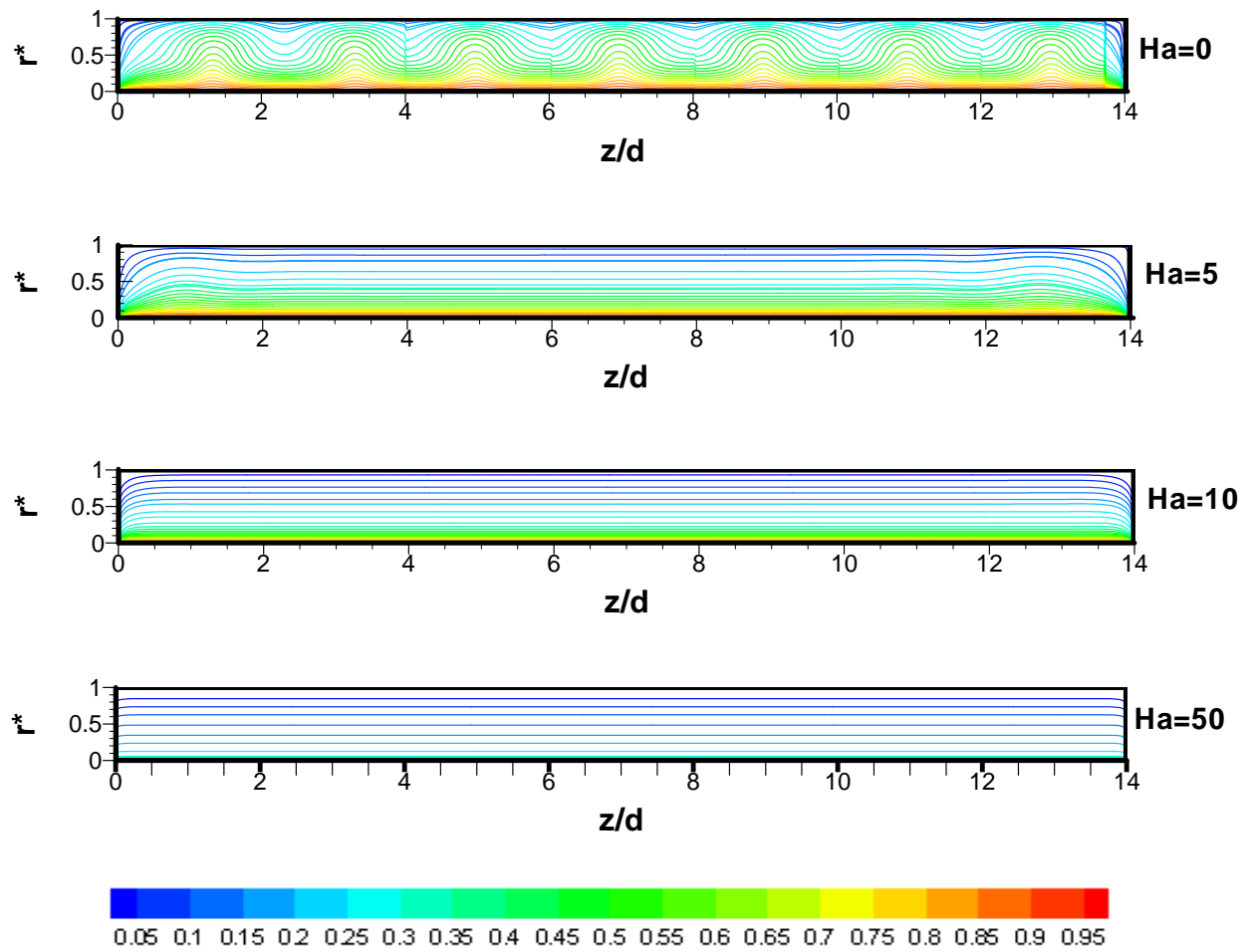
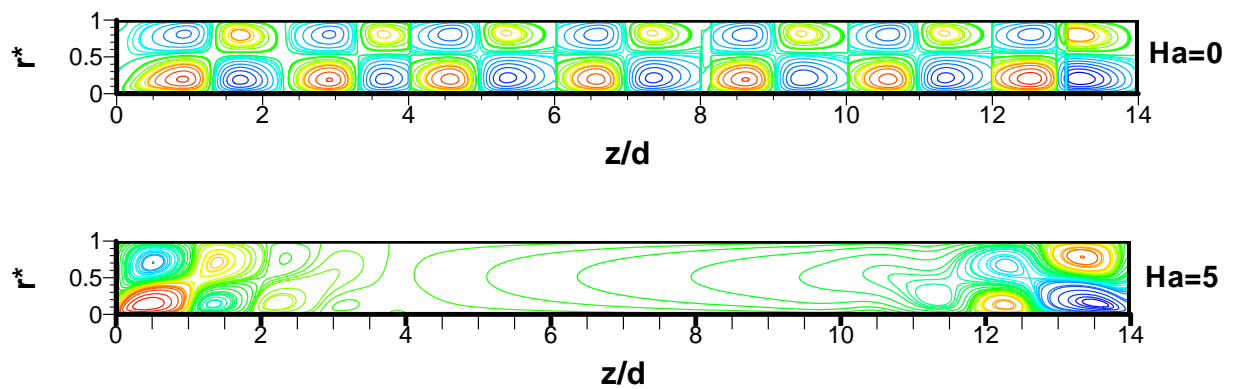


Figure V. 10: Contours de la vitesse azimutale à différents nombres de Hartmann à $Ta = 100$.

V.4.3 Le champ de la vitesse axiale



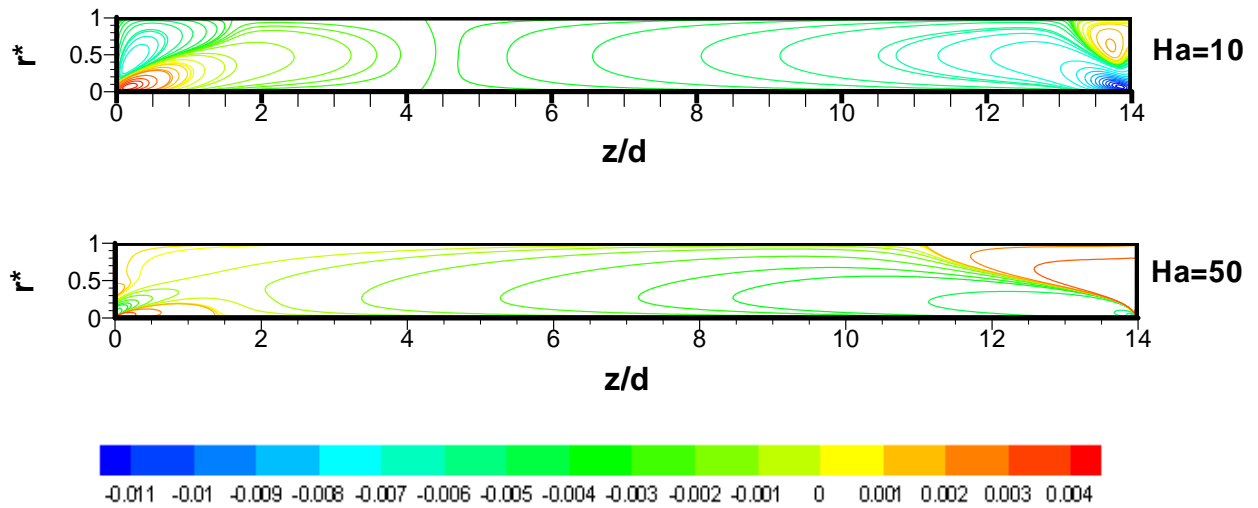


Figure V. 11: Contours de la vitesse axiale à différents nombres de Hartmann à $Ta = 100$.

V.4.4 Le champ de Pression

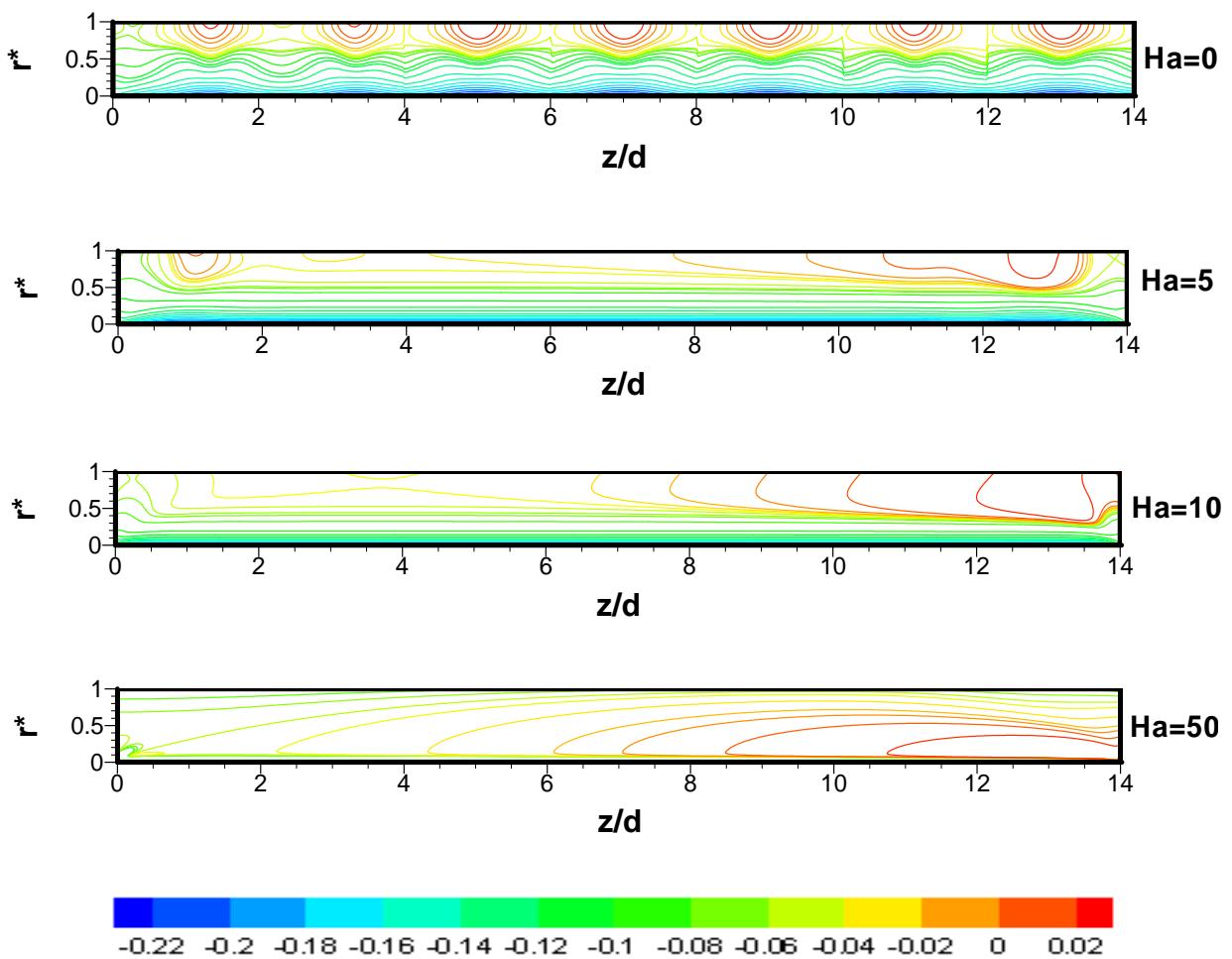


Figure V. 12 : Le champ de pression à différents nombres de Hartmann à $Ta = 100$.

La représentation des contours de la pression en fonction de nombre de Hartmann est schématisée dans la figure V. 12 L'analyse du champ de pression en absence du champ magnétique indique l'apparition des zones de surpression et de dépression sur les cylindres intérieur et extérieur, ceci est dû à la circulation contrarotative des particules pour chaque paire de cellules voisines. Au fur et à mesure que l'intensité du champ magnétique augmente, jusqu'à la valeur maximale considérée dans cette étude $Ha=50$, on observe des modifications importantes sur la forme des cellules et la répartition de la pression statique. Il apparaît que la pression est également réduite et converge rapidement vers une valeur asymptotique le long de la direction du champ magnétique.

V.3.5 Les lignes de courants

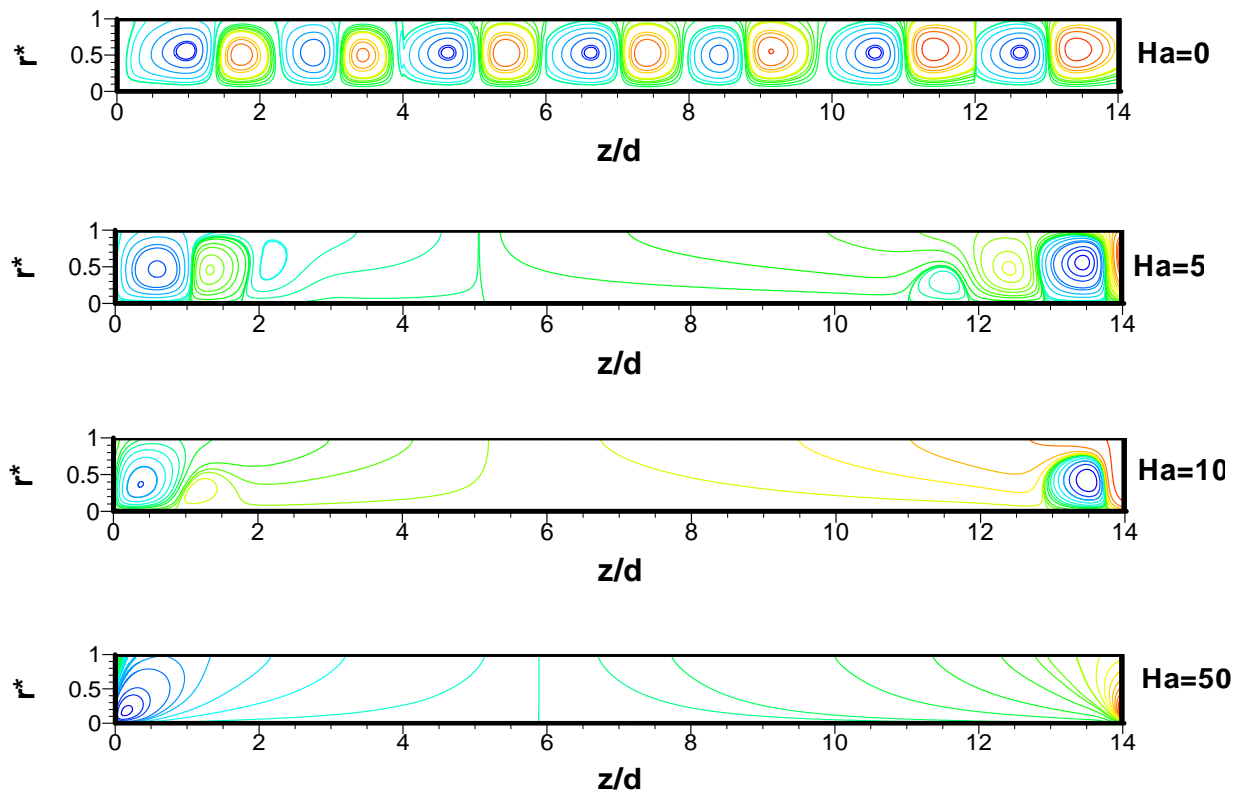


Figure V. 13 : Influence du champ magnétique sur les lignes de courant pour, $Ta=100$

Une coupe horizontale de la fonction de courant est représentée dans la figure V. 13 pour $Ta = 100$ et $Ha = 0, 5, 10$ et 50 . Les contours rouges et bleus représentent les circulations dans le sens horaire et anti-horaire, respectivement. En absence du champ magnétique, on observe un écoulement secondaire sous forme de rouleaux toroïdaux contra-rotatifs, créés par la rotation du cylindre intérieur se faisant avec une valeur supérieure à celle du nombre de Taylor critique. Les tourbillons formés dans les parties supérieure et inférieure sont affectés par les

parois d'extrémité et elles sont plus grandes que les tourbillons qui sont adjacentes au plan médian. Lorsque le champ magnétique est appliqué à $Ha = 20$, la force de Lorentz réduit l'écoulement secondaire par la suppression progressive des cellules du milieu de l'espace annulaire au fur et à mesure que l'intensité du champ augmente, ce qui a pour effet de stabiliser l'écoulement. Lorsque le nombre de Hartmann augmente à $Ha=50$, les cellules sont détruites et déplacées à proximité du cylindre intérieur.

V.5 comparaison entre les résultats analytiques et numériques

La comparaison entre les résultats numériques et analytiques obtenus par développement limité des fonctions de Bessel modifiées de premier ordre avec un terme, deux termes et trois ont été présentés pour les faibles valeurs de nombre de Hartmann ($Ha < 1$). Voir figures V.14 et V.15

V.5.1 Effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le profil de température

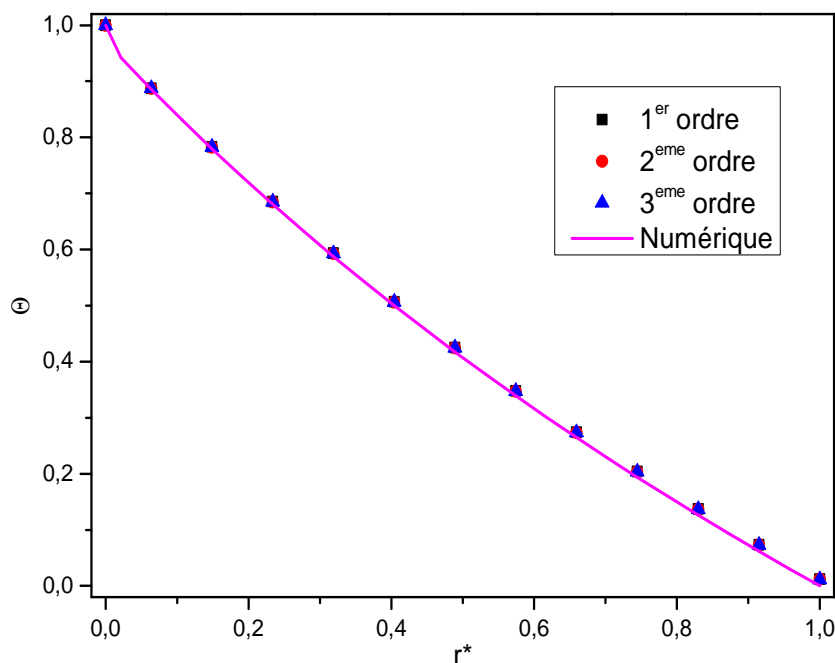


Figure V.14 : L'effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur la distribution de la température, pour $Ha = 0.5$, $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.5$.

A partir de la figure V.14 on remarque que les résultats analytiques pour les trois cas de développement limité de fonctions de Bessel modifiées avec un, deux et trois termes coïncident bien avec les résultats numériques pour de faibles nombre de Hartmann $Ha = 0,5$.

V.5.2 Effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre de Nusselt

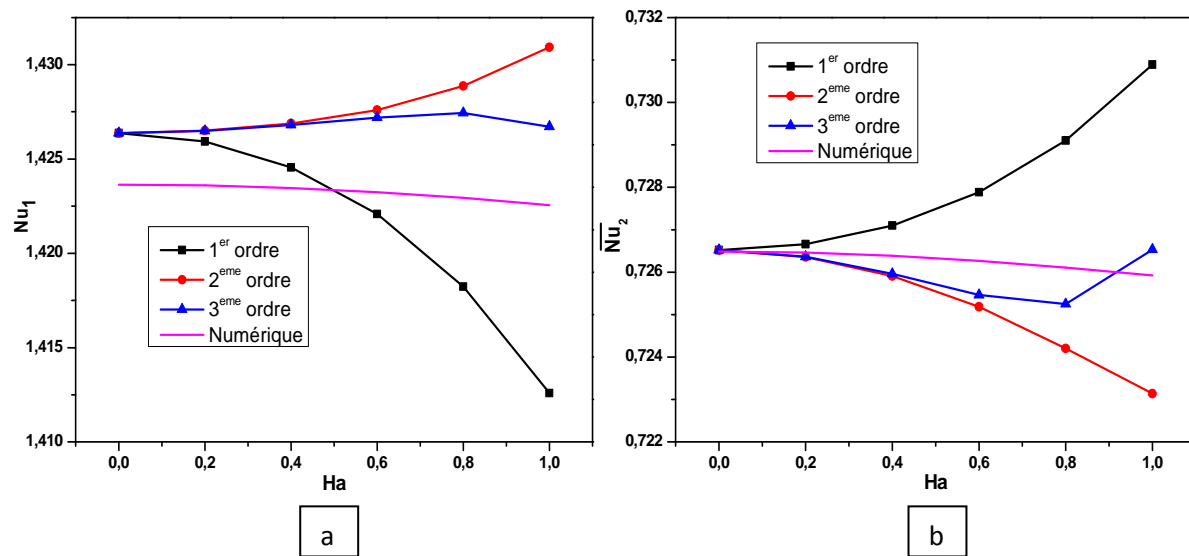


Figure V.15 : L'effet de l'ordre de développement des fonctions de Bessel sur le nombre de Nusselt moyen, surfaces de cylindres intérieur (a) et extérieur (b) en fonction de nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$.

Comme on peut le remarquer sur la figure V.15, que ce soit pour le nombre de Nusselt moyen sur les surfaces de cylindres intérieur et extérieur en fonction de nombre Hartmann, l'approche analytique correspondant à l'approximation avec trois termes est plus près de l'approche numérique. Par conséquent, les prochains résultats analytiques dans ce travail seront calculés par l'approximation avec trois termes de fonctions de Bessel modifiées I_1 et K_1 .

De ces résultats, il faut noter que la différence dans les valeurs est due essentiellement aux hypothèses simplificatrices choisies dans l'approche analytique (la composante radiale et axiale de la vitesse est nulle dans l'étude analytique).

V.5.3 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de vitesse azimutale

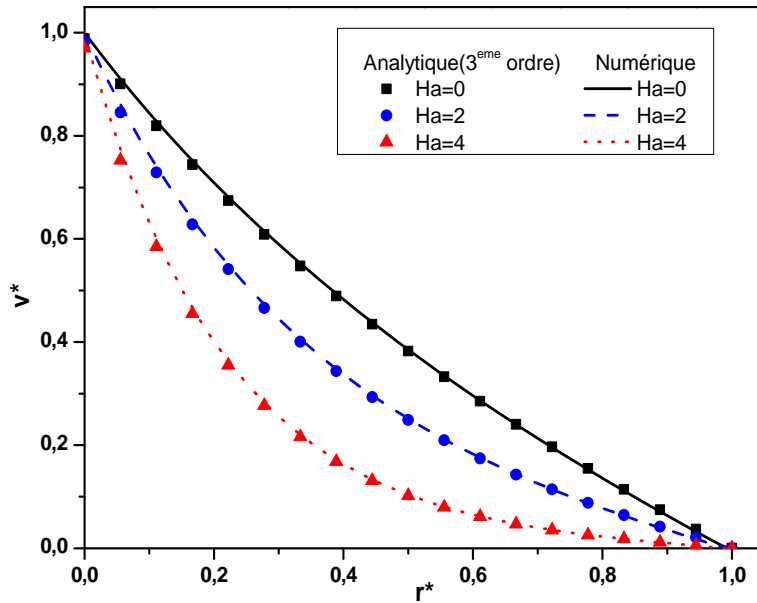


Figure V.16 : Comparaison des résultats analytique et numérique de profil de vitesse, $\eta = 0.5, Ta=20, t^*=120$.

V.5.4 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de température

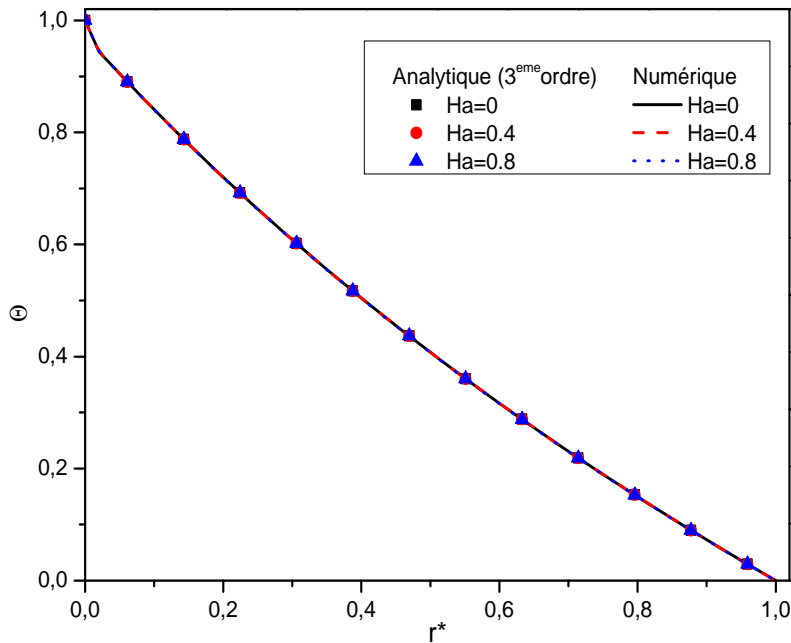


Figure V.17 : Comparaison des résultats analytique et numérique du profil de température, $\eta = 0.5, Ta=20, Pr = 0.02, Ec=0.0001, t^*=120$.

La vitesse et la température sont évaluées numériquement et analytiquement pour différentes valeurs du nombre de Hartmann sur les figures V.16 et V.17 respectivement. Cette comparaison entre les profils de vitesse et de température pour des faibles valeurs de Ha , obtenus par ces deux méthodes différentes a conduit à un bon accord.

On peut noter que le profil de la vitesse en l'absence du champ magnétique est quasi-linéaire, en augmentant le nombre de Hartmann Ha on constate une nette diminution de la vitesse entre les deux cylindres, parce que la force centrifuge est contre productive et la force électromagnétique de Lorentz joue le rôle d'un amortisseur dans l'écoulement.

A partir de la figure V.17 on constate que l'influence du champ magnétique est faible sur le profil radial de la température et quasiment insignifiante pour la faible valeur de nombre de Prandtl ($Pr=0,02$) correspondant aux métaux liquides. Il convient à noter que l'effet du champ magnétique sur la distribution de la température est négligeable, alors que les changements induits par le champ magnétique sur le gradient de température et par conséquent le nombre de Nusselt peuvent être considérables.

V.6 Ecoulement de Couette circulaire avec un gradient radial de température

V.6.1 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de température

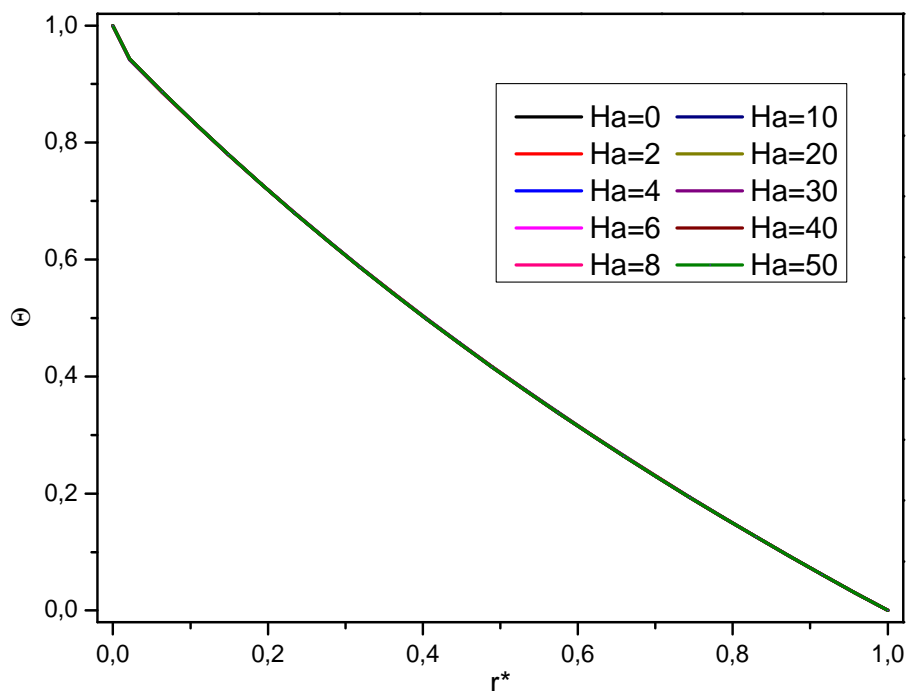


Figure V.18 : Profil de température en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Ta=20$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$, $t^* = 120$.

Comme le montre la figure V.18, le profil de température est similaire à celui représenté sur la figure V.17. Il est évident que l'effet de l'intensité de champ magnétique sur le profil radial de température est insignifiant. Ceci est valable pour le cas de faibles ou de grandes valeurs de nombre de Hartmann. Aussi, nous pouvons remarquer que le profil de température ne change pas avec $Ec = 0,5$ et $Ec = 0,0001$, donc le nombre Eckert n'affecte pas la température pour $Pr=0,02$.

V.6.2 L'effet de nombre de Hartmann sur la distribution du nombre de Nusselt local

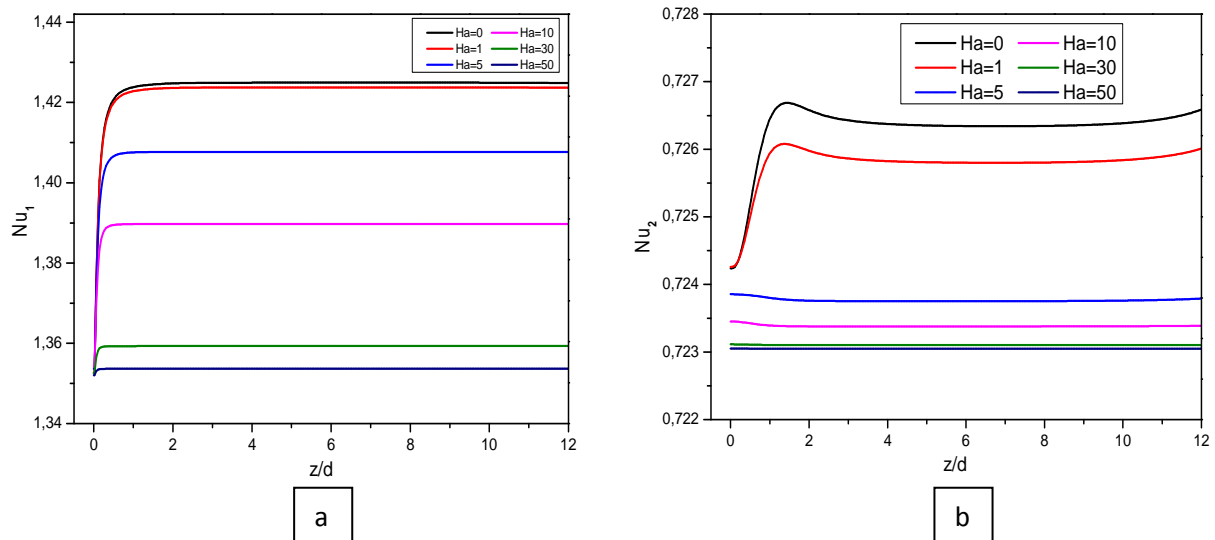


Figure V.19 : L'effet de nombre de Hartmann sur la distribution du nombre de Nusselt local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$, $t^* = 120$

La figure V.19 montre l'influence du nombre de Hartmann sur la distribution du nombre de Nusselt le long des surfaces intérieures et extérieures de cylindres pour un nombre $Ec=0.5$. On constate que l'augmentation du nombre de Hartmann provoque une diminution progressive du nombre de Nusselt local sur les deux surfaces des cylindres.

En fait, lorsque le nombre Eckert est considérable, la production de la chaleur dans le fluide est importante à cause de la dissipation visqueuse, ce qui fait augmenter la température du fluide dans l'espace annulaire. Cela va entraîner une diminution du gradient de température au voisinage du cylindre intérieur, et une augmentation du gradient de température au voisinage du cylindre extérieur. Une augmentation significative du nombre de Hartmann provoque une réduction de la force centrifuge, qui se traduit par une diminution progressive du nombre de Nusselt

L'analyse de la variation du nombre de Nusselt local sur le cylindre intérieur et extérieur pour $Ec=0.5$, montre qu'il tend vers une valeur limite, cette valeur est d'autant moins élevée que le nombre de Hartmann est grand.

V. 6.3 L'effet du nombre d'Eckert sur la distribution du nombre de Nusselt local

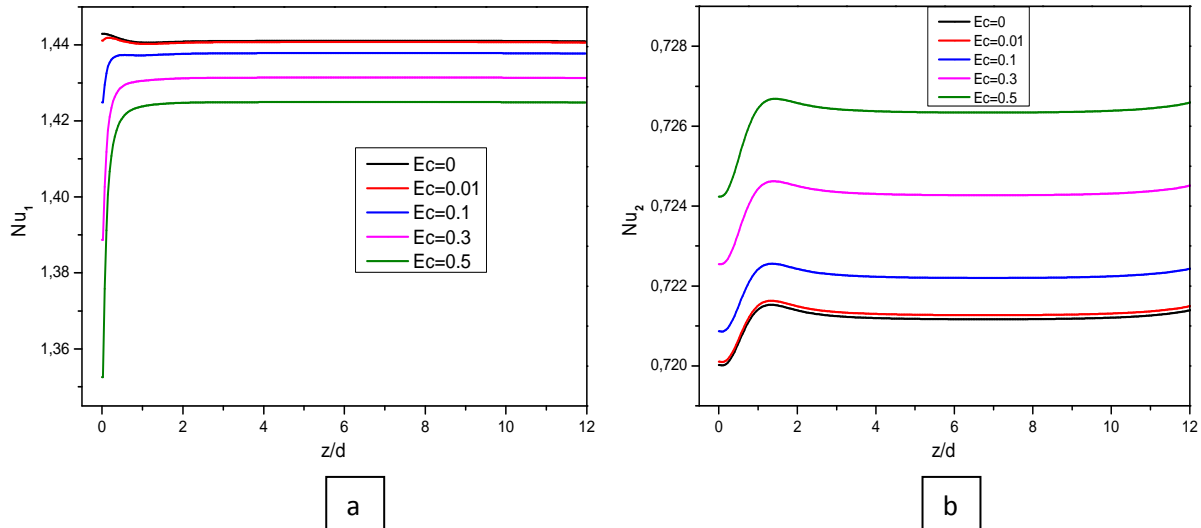


Figure V.20 : L'effet du nombre d'Eckert sur la distribution du nombre de Nusselt local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha=0$, $t^*=120$.

L'Effet du nombre Eckert sur la distribution du nombre de Nusselt local sur les cylindres intérieur et extérieur est présenté sur la Figure V.20, pour $Ha = 0$. Comme on peut le voir, En augmentant la valeur du nombre Eckert, le transfert de chaleur dû à la dissipation visqueuse dans l'espace annulaire est amélioré, ce qui conduit à l'augmentation de la température moyenne du fluide au niveau de cette région, en particulier à proximité du cylindre intérieur et devient supérieure à celle imposée auparavant. Les températures adimensionnelles des cylindres intérieur et extérieur sont maintenues à 1,0 et 0,0, respectivement. Il est évident qu'en augmentant la température moyenne du fluide dans l'espace annulaire, le taux de transfert de chaleur entre le fluide et le cylindre intérieur diminue en raison de la réduction de l'écart de température entre eux. Contrairement à l'autre cas, le nombre de Nusselt local sur le cylindre extérieur augmente au fur et à mesure que le nombre Eckert augmente en raison de l'augmentation de la différence entre la température de fluide et la température de cylindre extérieur.

V.6.4 L'effet du nombre d'Eckert sur le nombre de Nusselt moyen

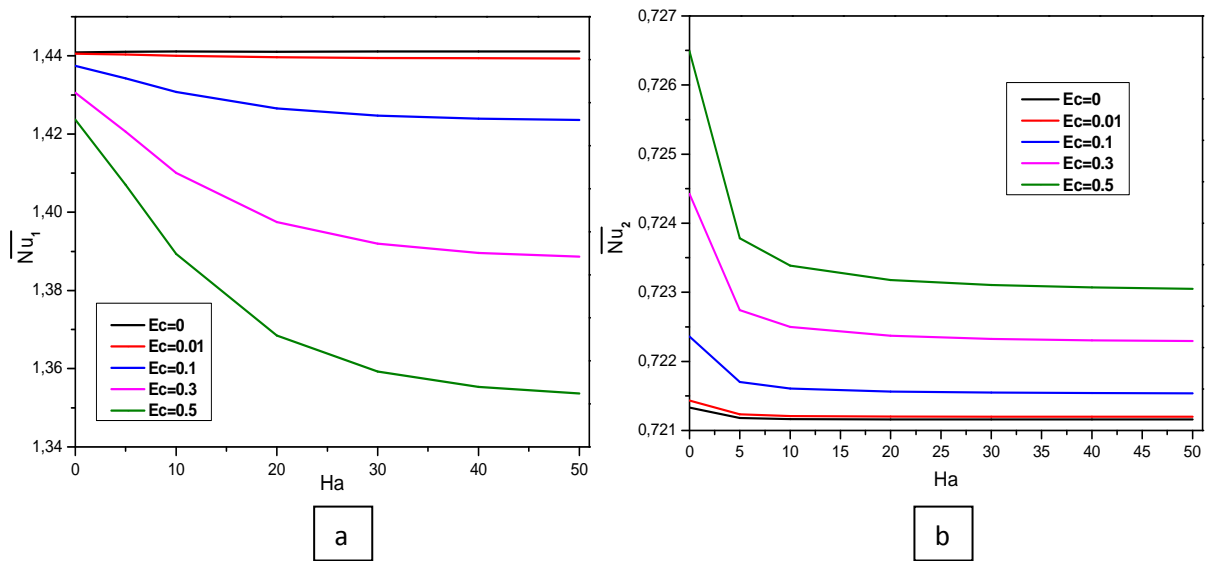


Figure V.21: L'effet du nombre d'Eckert sur le nombre de Nusselt moyen, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $t^* = 120$.

De cette figure V.21, on peut noter que le nombre de Nusselt moyen sur le cylindre extérieur est inférieur au nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur, en raison que la vitesse et le gradient de température sont plus élevés dans le cylindre intérieur que dans le cylindre extérieur. Également, les résultats montrent l'influence de la dissipation visqueuse sur le taux de transfert de chaleur, le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre Eckert sur le cylindre extérieur, mais il diminue avec l'augmentation du nombre Eckert sur le cylindre intérieur. Ainsi, si le nombre Eckert est grand, l'intensité du champ magnétique provoque une nette diminution du nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur et extérieur. Comme le nombre de Hartmann augmente et donc la puissance des forces de flottabilité diminue, le nombre de Nusselt moyen sur les deux surfaces tend à une valeur limite représentant l'établissement du régime thermique qui reste pratiquement constante en fonction de nombre de Hartmann.

V.7. Etude de l'influence du champ magnétique en régime transitoire

Dans cette partie, certains résultats sont présentés dans les figures (V.22, V.23, V.24 et V.25) pour différentes valeurs de temps adimensionnels pour la distribution de la vitesse et de la température dans l'espace annulaire.

V.7.1 Evolution de la vitesse azimutale au cours du temps

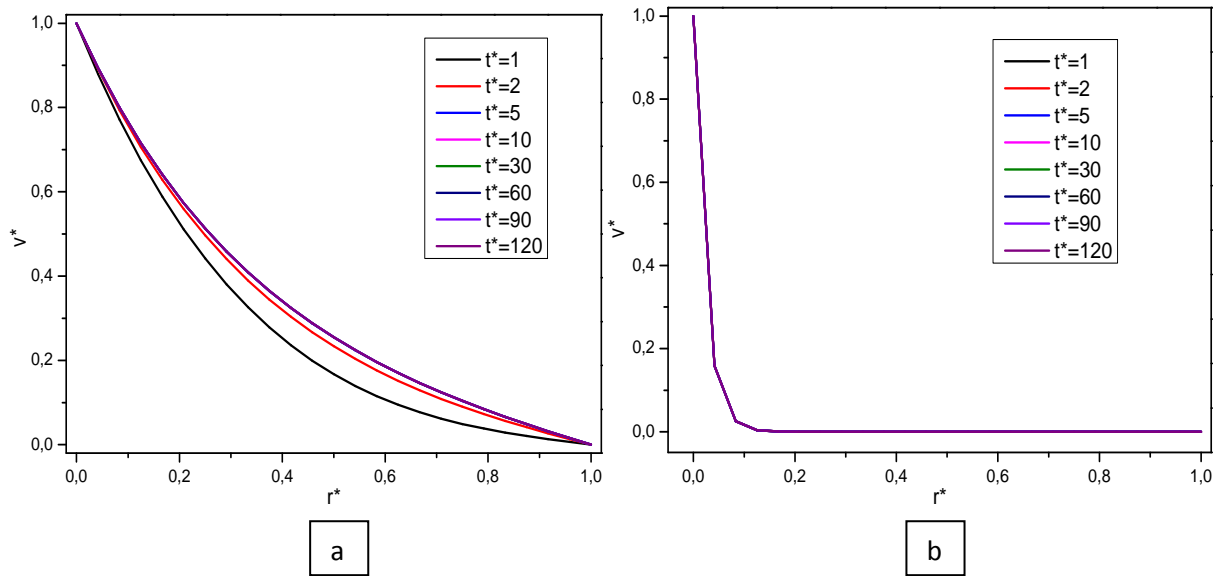


Figure V.22 : La distribution de la vitesse à différents temps pour (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$ pour $z/d=7$, $Ta=20$.

V.7.2 Evolution de la température au cours du temps

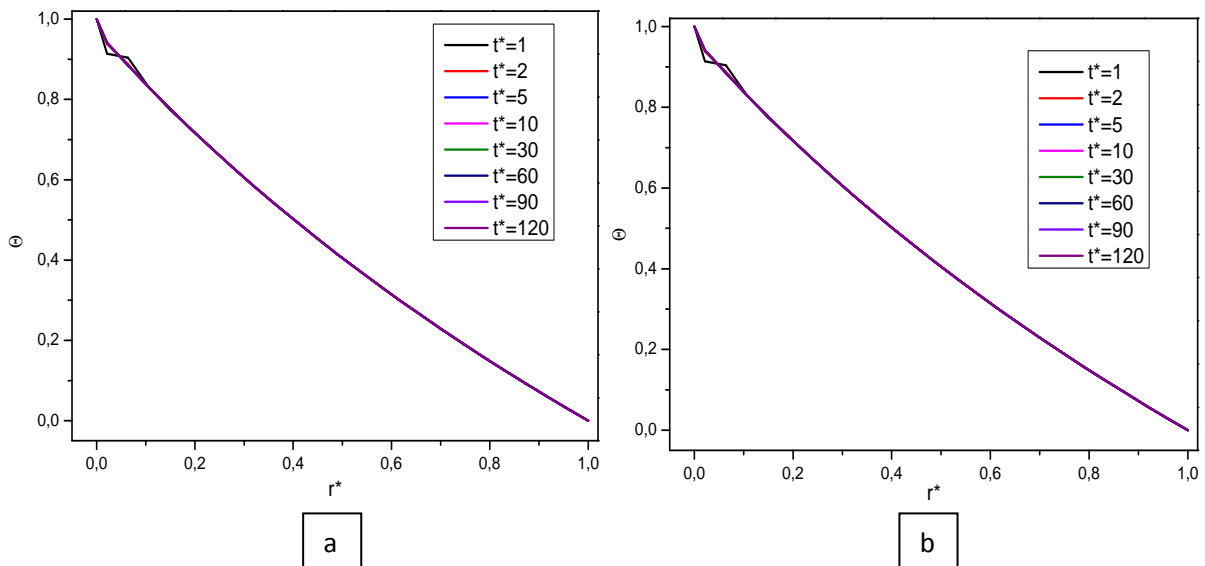


Figure V.23 : La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 0.0$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=0,02$

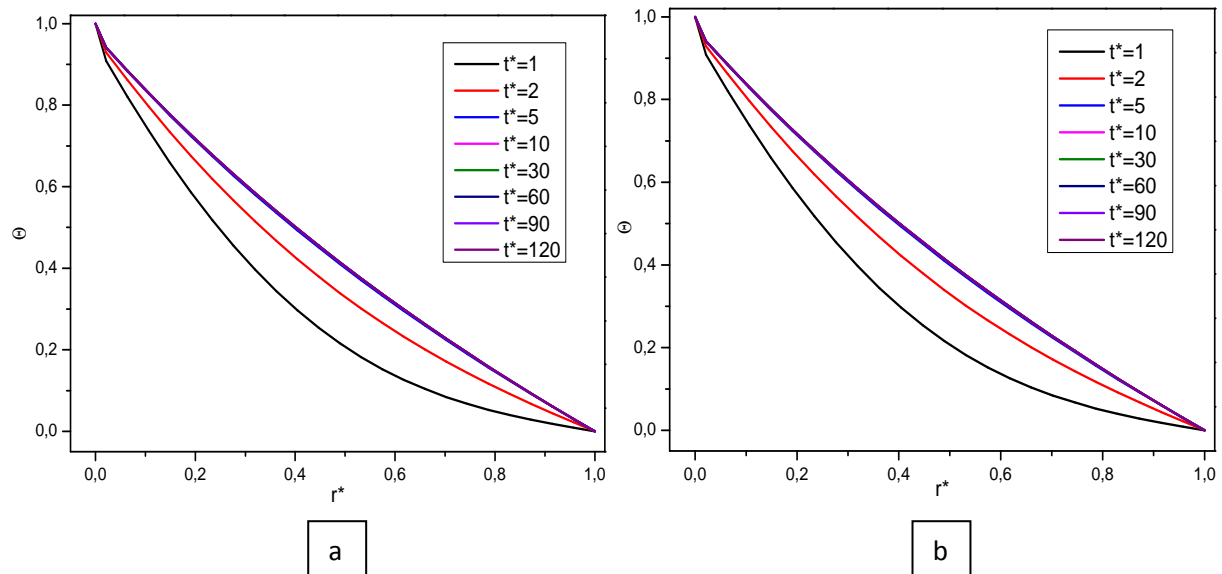


Figure V.24 : La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 2$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=1$.

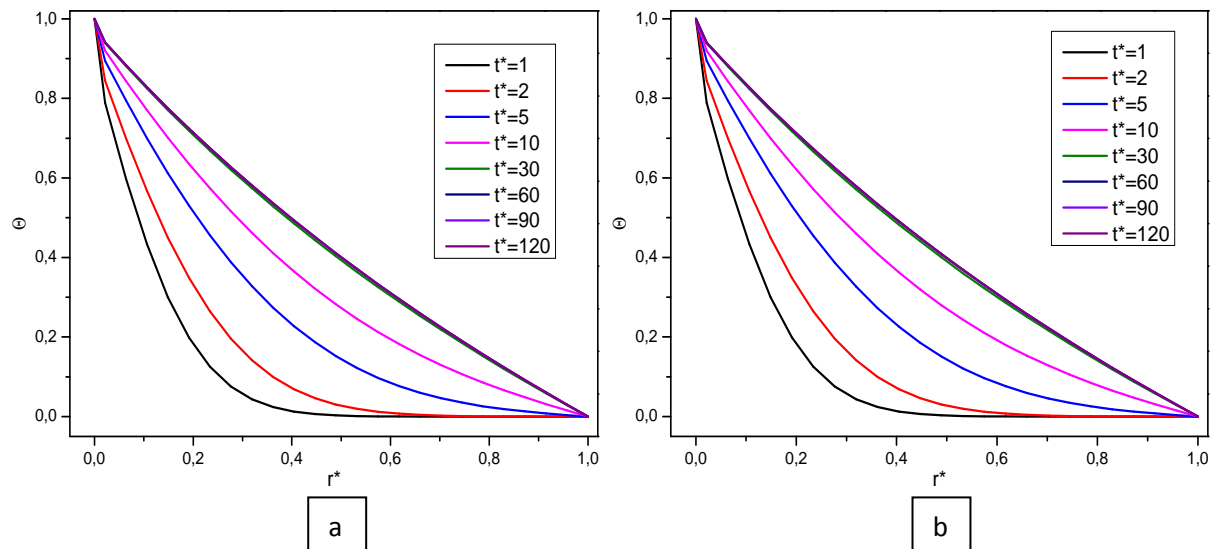


Figure V.25 : La distribution de la température à différents temps pour (a) $Ha = 0.0$ et (b) $Ha = 50$, pour $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=7$

A partir de la figure V.23, nous pouvons remarquer que pour une faible valeur de nombre de Prandtl ($Pr = 0,02$), l'évolution suivant le temps n'a pas une influence significatif sur la température, il atteint rapidement un état stable au point que nous ne pouvons pas remarquer la différence entre l'état de l'écoulement stationnaire et instationnaire.

Comme nous le savons, pour un fluide de grand nombre de Prandtl, le transfert de la quantité de mouvement est plus rapide que le transfert de chaleur. On peut le voir clairement sur les Figures V.22 et V.25 où la distribution de la composante azimutale de la vitesse atteint un état d'équilibre plus rapidement que la température. On constate qu'il n'y a pas beaucoup de

différence dans le profil de vitesse à $t = 10$ par rapport à $t = 120$, mais en comparant la distribution de la température à $t = 10$ avec des autres profils supérieures à $t=10$, indique que beaucoup plus de temps est encore nécessaire pour atteindre l'état d'équilibre.

V.8 Ecoulement de Couette circulaire avec un gradient radial de concentration

V.8.1 Effet du nombre de Hartmann sur le profil de concentration

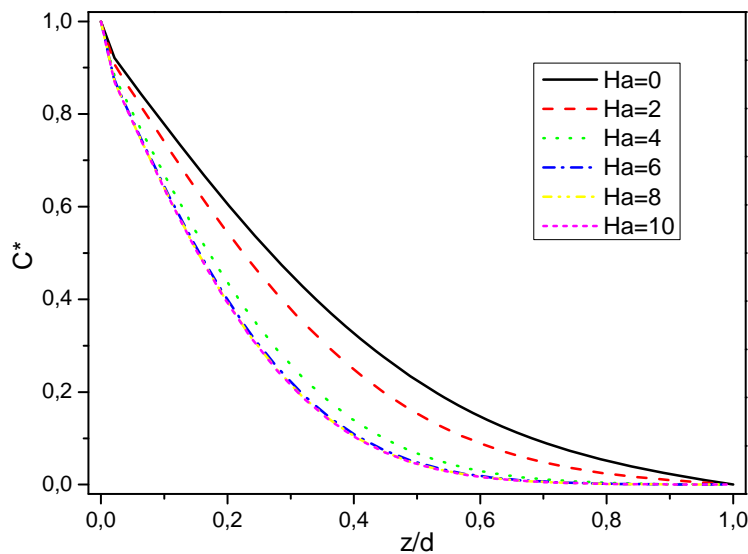


Figure V.26 : La distribution de la concentration en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Ta=20$, $Pr = 0.02$, $Ec=0$, $t^*=120$, $z/d=7$.

L'influence du nombre de Hartmann sur la concentration dans l'espace annulaire est présentée sur la figure. V.26, on constate que la concentration diminue à partir du cylindre intérieur où il est considéré comme étant une source de concentration, qui va tendre vers une valeur presque nulle dans le cylindre extérieur. Comme on peut également le constater sur cette figure, pour un nombre de Hartmann croissant la concentration diminue dans la cavité.

V.8.2 Effet du nombre de Hartmann sur le nombre de Sherwood local

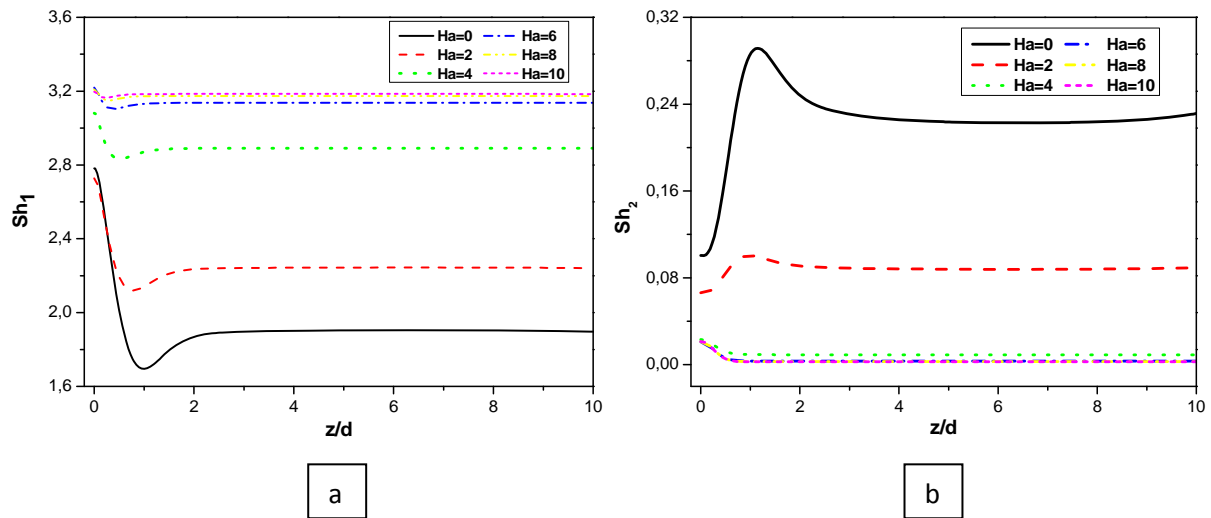


Figure V.27 : L'effet du nombre de Hartmann sur le nombre de Sherwood local, le cylindre (a) intérieur et (b) extérieur en fonction du nombre de Hartmann, pour $\eta = 0.5$, $Sc=10$, $Ec=0$, $t^*=120$

Le taux de transfert de masse à travers la cavité annulaire est étudié en utilisant le nombre de Sherwood local calculé dans les cylindres intérieur et extérieur, pour différents nombre Hartmann et pour un nombre de Schmidt $Sc = 10$ dans la figure V.27

On peut remarquer que le taux de transfert de masse est supérieur sur le cylindre intérieur par rapport au cylindre extérieur, ce qui est raisonnable étant donné que la vitesse et le gradient de concentration sont supérieurs dans le cylindre intérieur que dans le cylindre extérieur. Le nombre de Sherwood sur la surface du cylindre extérieur diminue avec la diminution de l'intensité du champ magnétique. Un autre point intéressant est le comportement inattendu du nombre de Sherwood locale avec l'augmentation du nombre de Hartmann, l'application d'un champ magnétique axial tend à augmenter le transfert de masse sur le cylindre intérieur.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail a été consacré à l'étude numérique de la convection thermosolutale dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux dont le cylindre intérieur est en rotation, sous l'influence d'un champ magnétique externe et uniforme et en tenant en compte de la dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie. La structure des écoulements dans de telle configuration est essentiellement liée aux nombres de Hartmann (Ha), de Taylor (Ta), d'Eckert, du rapport d'aspect (Γ), du rapport des rayons (η), de Schmidt (Sc) et de Prandtl (Pr). Cette étude nous a permis de trouver des résultats relatifs aux transferts de chaleur et de masse.

La comparaison des résultats analytiques correspondant au développement limité de trois termes de fonctions de Bessel modifiées et numériques indique une bonne concordance dans certains cas.

La solution exacte est plus générale avec des conditions aux limites variables. Par conséquent, on peut facilement obtenir une autre solution exacte pour différents paramètres avec des conditions différentes.

L'application d'un champ magnétique engendre quelques changements intéressants sur le mouvement du fluide et sur le transfert de chaleur et de masse car il provoque un amortissement de l'écoulement au sein du système. Celui-ci est plus important, lorsqu'on applique une intensité plus importante du champ magnétique.

Les résultats obtenus montrent que l'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement. Pour les faibles valeurs du nombre de Taylor, les lignes de courant se présentent sous forme des lignes parallèles à l'axe des cylindres. En augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les tourbillons commencent à apparaître aux l'extrémité de l'espace annulaire, les tourbillons envahissent l'espace annulaire d'une manière progressive pour occuper tout l'espace annulaire à la valeur critique, Lorsque le champ magnétique est appliqué, la force de Lorentz réduit l'écoulement secondaire par la suppression progressive des cellules du milieu de l'espace annulaire au fur et à mesure que l'intensité du champ augmente, ce qui a pour effet de stabiliser l'écoulement. Notons que, pour une intensité du champ magnétique $Ha > 10$, l'écoulement se ralentisse totalement à cause de la forte dominance des forces électromagnétiques (les forces de Lorentz).

Ainsi les résultats montrent que le champ de vitesse et de concentration diminue dans l'espace annulaire avec l'augmentation de nombre de Hartmann. Cependant une augmentation

du nombre de Hartmann a une influence insignifiante sur le champ de température. Les effets de l'intensité du champ magnétique et le nombre Eckert sur le nombre de Nusselt et de Sherwood ont été examinés. Le nombre de Nusselt diminue au fur et à mesure que le nombre de Hartmann augmente sur les deux surfaces des cylindres intérieur et extérieur. En outre, on remarque que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre Eckert sur le cylindre extérieur, mais il diminue avec l'augmentation du nombre Eckert sur le cylindre intérieur. L'application d'un champ magnétique génère quelques changements intéressants dans le transfert de masse, une augmentation du nombre de Hartmann fait diminuer le nombre de Sherwood sur le cylindre extérieur fixe. il améliore le transfert de matière sur le cylindre intérieur rotatif.

En perspectives, nous envisageons de :

- Compléter l'étude par la considération de l'effet de la gravité sur le transfert de chaleur et de masse
- Etudier l'effet de l'orientation du champ magnétique
- Mener une étude expérimentale en utilisant des techniques de mesure (PIV, LDA, la camera IR) serait intéressante.
- Etudier l'influence du champ magnétique sur les nano fluide

Références
Bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S.Chandrasekhar, “Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability”, Oxford University Press, Oxford (1961)
- [2] H.Kikura, Y. Takeda et Durst, F, “Velocity profile measurement of the Taylor vortex flow of a magnetic fluid using the ultrasonic Doppler method”, *Exp. Fluids*, 26, 208-214 (1999).
- [3] R. Bessaih, Ph. Marty et M. Kadja, “Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure”, *Acta Mechanica*, vol. 135, pp. 153 167 (1999).
- [4] T. Hayat, K. Masood, M. Ayub, “Couette and Poiseuille flows of an Oldroyd 6-constant fluid with magnetic field”, *J. Math. Anal. Appl.* 298 (2004) 225–244.
- [5] T. Hayat, S. Nadeem, S. Asghar, “Hydromagnetic couette flow of an Oldroyd-B fluid in a rotating system”, *Int. J. Eng. Sci.* 42 65–78 (2004).
- [6] S. Asghar, M.R. Mohyuddin, T. Hayat, “Effects of Hall current and heat transfer on flow due to a pull of eccentric rotating disks”, *Int. J. Heat Mass Transf.* 48 599–607(2005).
- [7] M Kaneda, T. Tagawa, J Noir and J M Aurnou, “Variations in driving torque in Couette-Taylor flow subject to a vertical magnetic field”, *Journal of Physics: Conference Series* 14 Fourteenth International Couette-Taylor Workshop, 42–47(2005).
- [8] Hiroshige Kikura, Masanori Aritomi, Yasushi Takeda, ”Velocity measurement on Taylor–Couette flow of a magnetic fluid with small aspect ratio”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 289 342–345 (2005).
- [9] T. Hayat, A.H. Kara, “Couette flow of a third-grade fluid with variable magnetic field”, *Math. Comput. Modelling* 43 132–137 (2006).
- [10] H.A. Attia, “Effect of Hall current on the velocity and temperature distributions of Couette flow with variable properties”, *Phys. A* 371 195–208 (2006)
- [11] H.A. Attia, “Unsteady hydromagnetic Couette flow of dusty fluid with temperature dependent viscosity and thermal conductivity under exponential decaying pressure gradient”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 13 1077–1088 (2008).
- [12] H.A. Attia, “The effect of variable properties on the unsteady Couette flow with heat transfer considering the Hall effect”, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 13 1596–1604 (2008)
- [13] A. Feiz-Dizaji, M.R. Salimpour, F. Jam, “Flow field of a third-grade non-Newtonian fluid in the annulus of rotating concentric cylinders in the presence of magnetic field”, *J. Math. Anal. Appl.* 337 632–645 (2008)

- [14] G. S. Seth & Raj Nandkeolyar et al, “MHD Couette Flow in a Rotating System in the Presence of an Inclined Magnetic Field”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 3, no. 59, 2919 – 2932 (2009)
- [15] S. Das, S.L. Maji, M. Guria , R.N. Jana, “Unsteady MHD Couette flow in a rotating system”, *Mathematical and Computer Modelling* 50 1211-1217 (2009)
- [16] R. Ellahi a, T. Hayat , F.M. Mahomed , A. Zeeshan, “Analytic solutions for MHD flow in an annulus”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 15 1224–1227(2010)
- [17] Yaqing Liu , Liancun Zheng, Xinxin Zhang, “Unsteady MHD Couette flow of a generalized Oldroyd-B fluid with fractional derivative”, *Computers and Mathematics with Applications* 61 443–450 (2011).
- [18] G.S. Seth, J.K. Singh, “Effects of Hall current of unsteady MHD Couette flow of class-II in a rotating system”, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 6(4) 473-484(2013). Available online at www.jafmonline.net
- [19] Jenn-Shyang Kuo, Jik Chang Leong, “Analysis of a conducting fluid in a thin annulus with rotating insulated walls under radial magnetic effect”, *Volume 37, Issue 5, 1 March*, 3021–3035 (2013)
- [20] Tatsuo Sawada, Hiroshige Kikura, Atsushi Saito et Takahiko Tanahashi, “Convection of a Magnetic Fluid in Concentric Horizontal Annuli under Nonuniform Magnetic Fields”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 7:212-220 (1993)
- [21] H. Ben Hadid et D. Henry, “Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field”, *J. Cryst. Growth* 166 436-673 (1996).
- [22] S.K. Singh, B.K. Jha, et A.K. Singh, “Natural convection in vertical concentric annuli under a radial magnetic field”, *Heat and Mass Transfer*, 32, pp. 399–401 (1997).
- [23] M.F. El-Amin, “Combined effect of viscous dissipation and joule heating on MHD forced convection over a non-isothermal horizontal cylinder embedded in a fluid saturated porous medium”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 263, pp. 337–343 (2003).
- [24] H.S. Takhar, A.J. Chamkha, G. Nath, “Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with a magnetic field”, *Heat and Mass Transfer*, 39 297-304 (2003).
- [25] Sankar, M., Venkatachalappa, M. and Shivakumara, I.S. “Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus”, *International Journal of Engineering Science*, 44, pp. 1556–1570 (2006).

- [26] R. Bessaïh, A. Boukhari et Ph.Marty, "Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol 36, pp. 893-901 (2009).
- [27] W. Wrobel, E. Fornalik-Wajs, J.S. Szmyd, "Experimental and numerical analysis of thermo-magnetic convection in a vertical annular enclosure", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31 1019–1031 (2010).
- [28] M.A. Azim, A.A. Mamun, M.M. Rahman, "Viscous Joule heating MHD–conjugate heat transfer for a vertical flat plate in the presence of heat generation", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 37 666–674 (2010).
- [29] O.D. Makinde, O.O. Onyejekwe, "A numerical study of MHD generalized Couette flow and heat transfer with variable viscosity and electrical conductivity", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 323 2757–2763 (2011).
- [30] S.C. Kakarantzas, I.E. Sarris, N.S. Vlachos, "Natural convection of liquid metal in a vertical annulus with lateral and volumetric heating in the presence of a horizontal magnetic field", *International journal of Heat and Mass Transfer* 54 3347-3356 (2011).
- [31] Omid Mahian, Shohel Mahmud, Ioan Pop, "Analysis of first and second laws of thermodynamics between two isothermal cylinders with relative rotation in the presence of MHD flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 4808–4816 (2012)
- [32] H.R. Mozayyeni, A.B Rahimi, "Mixed convection in cylindrical annulus with rotating outer cylinder and constant magnetic field with an effect in the radial direction", *Scientia Iranica B* 19 (1) 91–105 (2012)
- [33] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpay, D.D. Ganji, "Magnetic field effects on natural convection around a horizontal circular cylinder inside a square enclosure filled with nanofluid", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39 978–986 (2012)
- [34] Ashorynejad Hamid Reza, A. Mohamad Abdulmajeed., "Sheikholeslami Mohsen., Magnetic field effects on natural convection flow of a nanofluid in a horizontal cylindrical annulus using Lattice Boltzmann method", *International Journal of Thermal Sciences* Volume 64, 240- 250 (2013)
- [35] M. Sheikholeslami , M.Gorji-Bandpy, D.D. Ganji, Soleimani Soheil "Effect of a magnetic field on natural convection in an inclined half-annulus enclosure filled with Cu–water nanofluid using CVFEM", *Advanced Powder Technology* Volume 24, issue 6, 980–991 (2013).

- [36] M. Sheikholeslami, M.Gorji-Bandpy “Ganji D.D. MHD free convection in an eccentric semi-annulus filled with nanofluid. Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers Volume 45, Issue 4, Pages 1204–1216 (2014)
- [37] S. Aberkane, M.Ihdene, M. Mouderes, A. Ghezal, “Axial magnetic field effect on Taylor-Couette flow”, Journal of Applied Fluid Mechanics, Volume 8, Number 2, April (2015)
- [38] Y.Gelfgat, “Rotating magnetic fields as a means to control the hydrodynamics and heat/mass transfer in the processes of bulk single crystal growth”, Journal of Crystal Growth 198/199, 165-169 (1999)
- [39] A. Kharicha, A. Alemany, D. Bornas, “Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer in a lid driven flow”, Int. J. Heat Mass Transf. 47 1997–2014 (2004).
- [40] A. Kharicha, A. Alemany, D. Bornas, “Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound Doppler shift method”, Int. J. Eng. Sci. 43 589–615 (2005).
- [41] M. Abricka, Yu.Gelfgat, J. Kruminš, “Heat and Mass Transfer in a Cylindrical Vessel with the Melt Exposed to the Influence of Combined Electromagnetic Fields”, International Scientific Colloquium Modelling for Material Processing Riga, June 8-9 (2006)
- [42] M. Venkatachalappa, Younghae Do, M. Sankar, “Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus”, International Journal of Engineering Science 49 262–278 (2011)
- [43] S. Aberkane, M.Ihdene, M. Mouderes, A. Ghezal, “Effect of an axial magnetic field on the heat and mass transfer in rotating annulus”, International Journal of Physical Sciences, Vol.9(16), pp. 368-379 , August (2014)
- [44] P. A. Davidson, ”An Introduction to Magnetohydrodynamics”, University of Cambridge, (2001)
- [45] Vincent DOUSSET, Numerical simulations of MHD flows past obstacles in a duct under externally applied magnetic field, these de Doctorat, université de Coventry, Décembre (2009)
- [46] I.U. Mbeledogu et A. Ogulu, “Heat and mass transfer of an unsteady MHD natural convection flow of a rotating fluid past a vertical porous flat in the presence of radiative heat transfer”, International journal of heat and mass transfer 50, 1902-1908 (2007)
- [47] M.Abramowitz, and I. A. Stegun,. “Handbook of Mathematical Functions”, National Bureau of Standards, (1964).

- [48] K. Vajravelu, J.R. Cannon, D. Rollins, J. Leto, “On solutions of some non-linear differential equations arising in third grade fluid flows”, *International Journal of Engineering Science* 40 1791–1805 (2002)
- [49] R. Temam, “Sur l’approximation des équations de Navier Stokes par la méthode des pas fractionnaires”, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 32 377-385 (1969).
- [50] M. Fortin, R. Peyret, R. Temam, “Résolution numérique des équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible”, *J. Mech.* 10 357- 390 (1971).
- [51] R. Peyret, “Unsteady evolution of horizontal jet in a stratified fluid”, *J. Fluid. Mech.* 78, part 1, 49-63 (1976).
- [52] R. Peyret R et al. “Calcul de l’écoulement d’un fluide visqueux compressible autour d’un obstacle de forme parabolique”, *lecture note de physique* 19, 222-229 (1973)
- [53] A.Ghezal, B.Porterie, J.C. Loraud, “Modélisation du transfert de chaleur, avec couplage conduction convection, entre un obstacle en mouvement hélicoïdal est un fluide visqueux en écoulement confiné”, *Int.J.Heat.Mass.Trans. Trans.* 329-341 (1992).
- [54] A.Ghezal, B.Porterie, J.C.Loraud, “Etude dynamique et thermique d’un écoulement pulsé en présence d’un solide chauffé en rotation”, *Mécanique & Industries* 12, 45-65 (2011).
- [55] F.H. Harlow et J. Eddie Welch, “Numerical calculation of time-dependen viscous incompressible flow of fluid with free surface”, *The physics of fluids* Vol. 8, N°12, 2182-2190 (1965).
- [56] M.Fortin, “Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens par la méthode des éléments finis”, *Thèse de Doctorat d’état, Univ. Paris VI* (1972).
- [57] D. Begis, “Analyse numérique de l’écoulement d’un fluide de Bingham”, *Thèse de troisième cycle Univ. Paris IV* (1972).
- [58] R. Peyret et S. Childress, “A numerical study of tow dimensional convection by motile particles”, *Journal de mécanique, Vol. 15, N°5* (1976).
- [59] A. Bouhanna, “Contribution à l’étude d’un Ecoulement de Fluide Réel à Symétrie Axiale dans une Cavité Cylindrique”, *thèse de Magister, Univ.USTHB* (1982).
- [60] Dong Liu, Seok-Hwan Choi, Hyoung-Bum Kim, “Experiments on the stability of taylor-couette flow with radial temperature gradient” *10th International Conference on Fluid Control, Measurements, and Visualization, Moscow-Russia, 17-21, August* (2009).
- [61] Abcha et al, “Etude comparative de la visualisation d’écoulements par particules anisotropes et de la vélocimétrie par imagerie de particules (PIV)”, *12ème Colloque National de la Recherche en IUT, Brest, 1-2 juin* (2006)

[62] S.C. Kakarantzas et I.E. Sarris, A.P. Grecos et N.S. Vlachos, “Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp.250–259 (2009).

ANNEXES

Rappel sur les fonctions et les équations de Bessel

L'astronome Allemand **F. W. BESSEL** (1784-1846) est connu pour ces travaux sur les équations différentielles qui portent son nom et sur la première étude systématique des solutions générales de cette équation (solutions appelées Fonctions de Bessel). Les fonctions de Bessel sont associées à des problèmes possédant une symétrie cylindrique ou sphérique. Elles interviennent par exemple dans l'étude des vibrations d'une membrane circulaire, dans la propagation de la lumière dans une fibre optique cylindrique, dans la distribution de la température dans un cylindre circulaire et dans d'autres domaines de l'ingénierie et de la physique. C'est pour cette raison qu'elles sont également appelées 'fonctions cylindriques'.

1. Fonctions de Bessel :

Les fonctions de **Bessel** sont solutions de l'équation différentielle linéaire de second ordre :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A.1})$$

Où $y = f(x)$ et ν un réel positif qui porte le nom d'équation différentielle de **Bessel** d'ordre ν .

- Pour des valeurs de ν non entières, une solution possible de l'équation de Bessel est de la forme suivante :

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

Où

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \quad (\text{A.2})$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \quad (\text{A.3})$$

$J_\nu(x)$ est une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre ν et $\Gamma(k+\nu+1)$ est la fonction gamma définie comme suit :

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

- Pour $U = n$ (entier), les deux solutions données aux équations (A.2) et (A.3) ne sont plus indépendantes l'une de l'autre. Elles obéissent alors à la relation suivante :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{pour } n=0,1,2,\dots \quad (\text{A.4})$$

Où

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (\text{A.5})$$

Une autre solution possible pour l'équation (A.1) (**équation du second ordre**), qui est également valide lorsque U est un entier et on a :

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \quad (\text{A.6})$$

$N_\nu(x)$ est appelé la fonction de **Neumann** d'ordre U (ou aussi la fonction de **Bessel** de deuxième espèce).

Notons que plusieurs auteurs utilisent la désignation $Y_\nu(x)$ au lieu de $N_\nu(x)$. Cette fonction est définie comme suit :

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

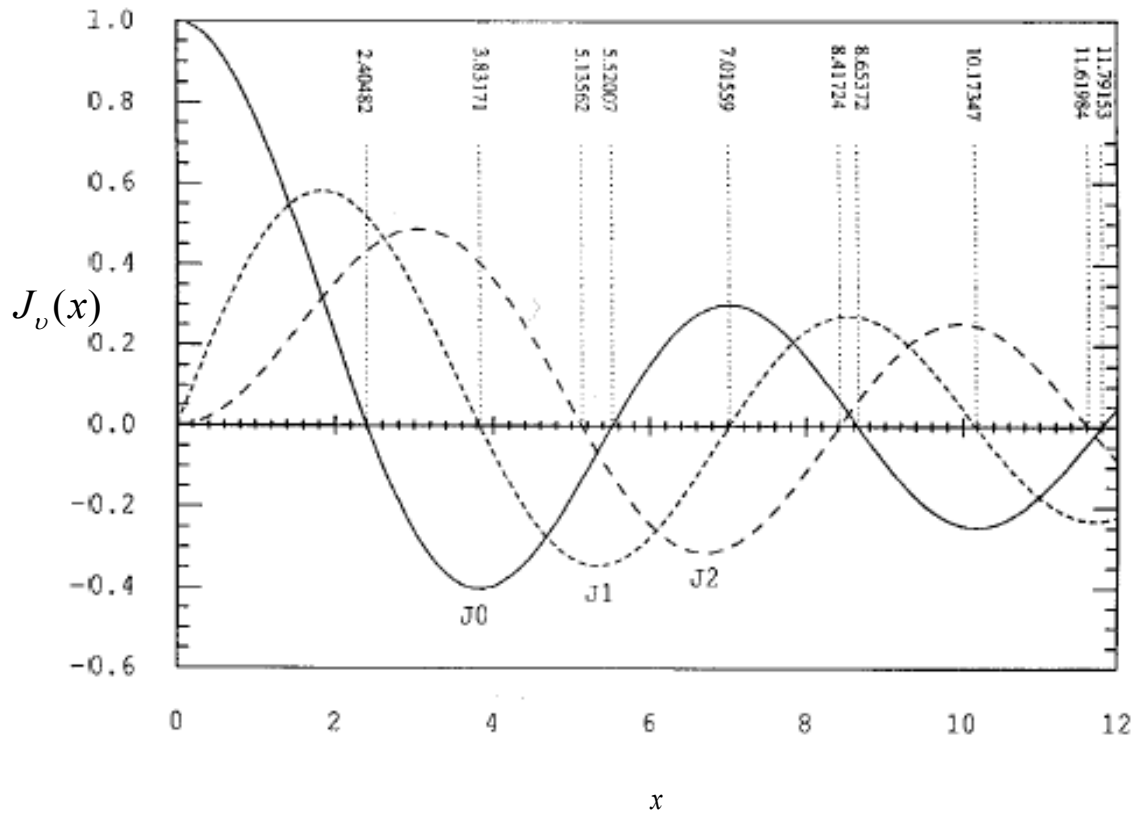
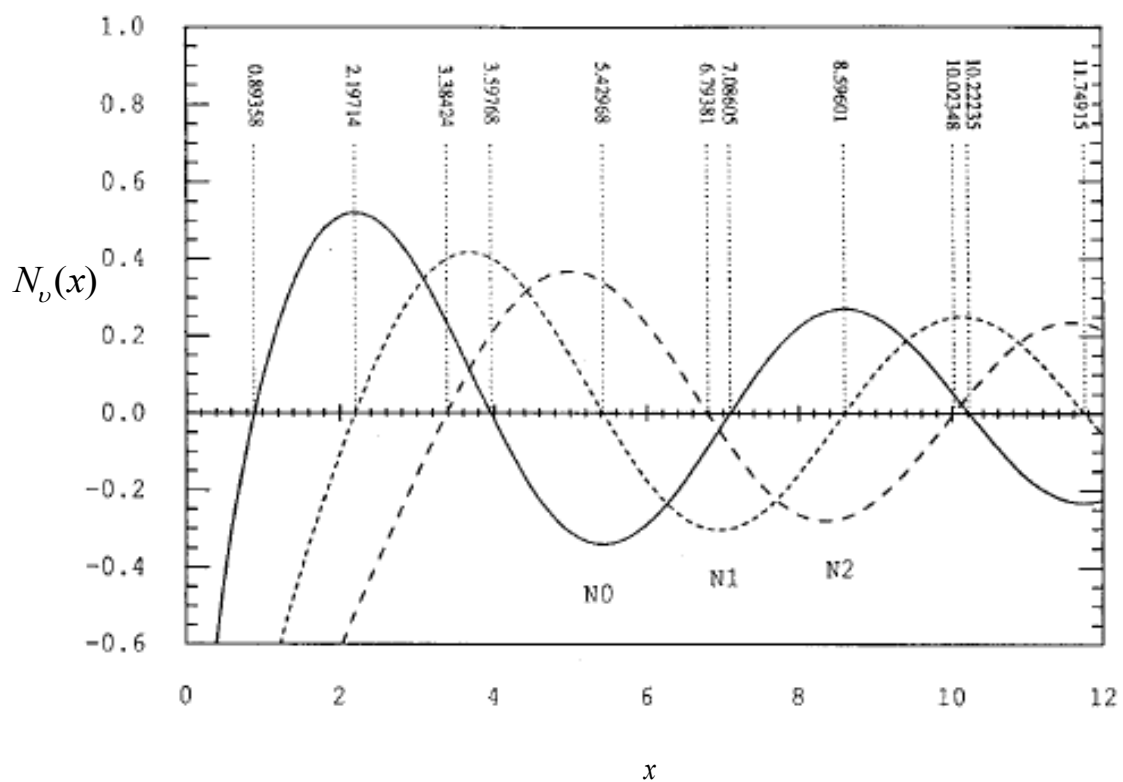
Ou bien :

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[2 \log \frac{x}{2} + 2(0,5772) \right] - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} J_\nu(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left\{ \sum_{\tau=1}^k \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\nu+\tau} \right) \right\} \frac{x^{\nu+2k}}{2} \quad (\text{A.7})$$

Les graphiques de quelques-unes de ces fonctions sont présentés aux figures A.1 et A.2.

La fonction $N_\nu(x)$ diverge pour $x = 0$. Pour cette raison, elle n'est utilisée que dans les problèmes physiques où l'origine ($x = 0$) est exclue.

La fonction $J_\nu(x)$, quant à elle, présente un caractère oscillatoire et elle est continue.

figureA.1. Graphiques des fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ figureA.2. Graphiques des fonctions de Neumann $N_\nu(x)$

2. Formule de Récurrence :

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu-1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2(k+\nu)(x)^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} k! \Gamma(k+\nu)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^\nu (-1)^k (x/2)^{2k+(\nu-1)}}{k! \Gamma(k+(\nu-1)+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (\text{A.8})$$

De façon similaire, on peut déduire :

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] = x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad (\text{A.9})$$

Si l'on effectue la dérivation du membre de gauche de chacune des deux équations (A.8) et (A.9), on peut écrire que :

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) \quad \text{et} \quad J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x)$$

Soit la relation :

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (\text{A.10})$$

et

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad (\text{A.11})$$

De même on démontre et nous admettrons que :

$$\frac{d}{dx} \left[J_\nu(kx) \right] = \frac{\nu}{x} J_\nu(kx) - k J_{\nu+1}(kx) \quad (\text{A.12})$$

et

$$\frac{d}{dk} \left[J_\nu(kx) \right] = \frac{\nu}{k} J_\nu(kx) - x J_{\nu+1}(kx) \quad (\text{A.13})$$

La fonction de **Bessel** de deuxième espèce $Y_\nu(x)$ satisfait pleinement aux équations de Récurrences précédemment établies pour la fonction $J_\nu(x)$.

3. Comportement asymptotique :

Nous pouvons approximer les fonctions $J_\nu(x)$ et $N_\nu(x)$ pour $x \ll 1$ et pour $\nu \neq 0$ par les expressions suivantes :

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}$$

et

$$N_\nu(x) = \frac{-2^\nu (\nu-1)!}{\pi x^\nu} \tag{A.14}$$

Lorsque $\nu = 0$, nous avons :

$$J_0(x) = 1$$

$$N_0(x) = \frac{2(\ln x + c - \ln 2)}{\pi} \tag{A.15}$$

Nous pouvons facilement trouver le comportement asymptotique de ces fonctions pour des grands arguments. Par exemple, pour $\nu = 0$, l'équation de Bessel devient :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \tag{A.16}$$

En posant :

$y = x^{-1/2} f(x)$, l'équation (A.16) nous donne :

$$f'' + f \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right) = 0 \tag{A.17}$$

qui a pour solution lorsque x tend vers l'infini.

$$f = C_0 \cos(x + \varphi)$$

C_0 et φ sont des constantes, nous devons poser $\varphi = -\pi/4$ pour que le comportement asymptotique ($x \rightarrow \infty$) épouse parfaitement la courbe de $J_0(x)$.

$$J_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \tag{A.18}$$

et nous devons poser $\varphi = -3\pi/4$ pour $N_0(x)$.

$$N_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.19})$$

Pour un ν quelconque, on a :

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (\text{A.20})$$

$$N_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (\text{A.21})$$

Les fonctions de Bessel, de première et de deuxième espèce, se comportent comme des fonctions sinusoïdales, pour de grandes valeurs de leur argument. Elles représentent des ondes stationnaires cylindriques.

4. Développements en séries de puissance des fonctions de Bessel :

Les fonctions de **Bessel** d'indice entier se développent en séries de puissances de la façon suivante ([47] p.360) :

$$J_n(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{A.22})$$

Lorsque x est petit, on déduit de (A.22), les développements limités suivants :

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + O(x)^8 \quad (\text{A.23})$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + O(x)^7 \quad (\text{A.24})$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{x^6}{3072} + O(x)^8 \quad (\text{A.25})$$

$$J_3(x) = \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{768} + \frac{x^7}{15360} + O(x)^8 \quad (\text{A.26})$$

$$J_4(x) = \frac{x^4}{384} - \frac{x^6}{7680} + O(x)^8 \quad (\text{A.27})$$

$$J_5(x) = \frac{x^5}{3840} - \frac{x^7}{92160} + O(x)^8 \quad (\text{A.28})$$

Par ailleurs, les fonctions de **Neumann** se développent ainsi ([47] p.360) :

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right\} J_0(x) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{4}x^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3}{(3!)^2} - \dots \right\} \quad (\text{A.29})$$

$$N_n(x) = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}x\right) J_n(x) - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{A.30})$$

Où $\Psi(n)$ est la fonction Psi, lorsque n est un entier, est définie par :

$$\Psi(1) = -\gamma_e \quad \Psi(n)_{n \geq 2} = -\gamma_e + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (\text{A.31})$$

et γ_e est la constante d'Euler qui vaut :

$$\gamma_e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right] = 0,5772156649... \quad (\text{A.32})$$

Il vient :

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} (\gamma - \ln 2 + \ln x) + O(x)^2 \quad (\text{A.33})$$

$$N_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \frac{x}{\pi} \left[\frac{-1 + 2\gamma}{2} - \ln 2 + \ln x \right] + O(x)^3 \quad (\text{A.34})$$

$$N_2(x) = -\frac{4}{\pi x^2} - \frac{1}{\pi} + O(x)^2 \quad (\text{A.35})$$

$$N_3(x) = -\frac{16}{\pi x^3} - \frac{2}{\pi x} - \frac{x}{4\pi} + O(x)^3 \quad (\text{A.36})$$

$$N_4(x) = -\frac{96}{\pi x^4} - \frac{8}{\pi x^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{x^2}{24\pi} + O(x)^4 \quad (\text{A.37})$$

$$N_5(x) = -\frac{768}{\pi x^5} - \frac{48}{\pi x^3} - \frac{2}{\pi x} - \frac{x}{12\pi} + O(x)^4 \quad (\text{A.38})$$

5. Fonctions de Bessel modifiées :

En remplaçant x par jx , nous obtenons l'équation de Bessel modifiée que voici :

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (\text{A.39})$$

Pour des valeurs non-entières de ν , une solution possible de l'équation suivante (A.39) est la suivante :

$$y(x) = AI_\nu(x) + BI_{-\nu}(x) \quad (\text{A.40})$$

où

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{A.41})$$

Pour des valeurs entières ($\nu = n$), I_ν et $I_{-\nu}$ ne sont plus indépendantes ; elles sont reliées par :

$$I_n(x) = I_{-n}(x)$$

Une utilisation possible, dans ce cas est :

$$y(x) = AI_n(x) + BK_n(x) \quad (\text{A.42})$$

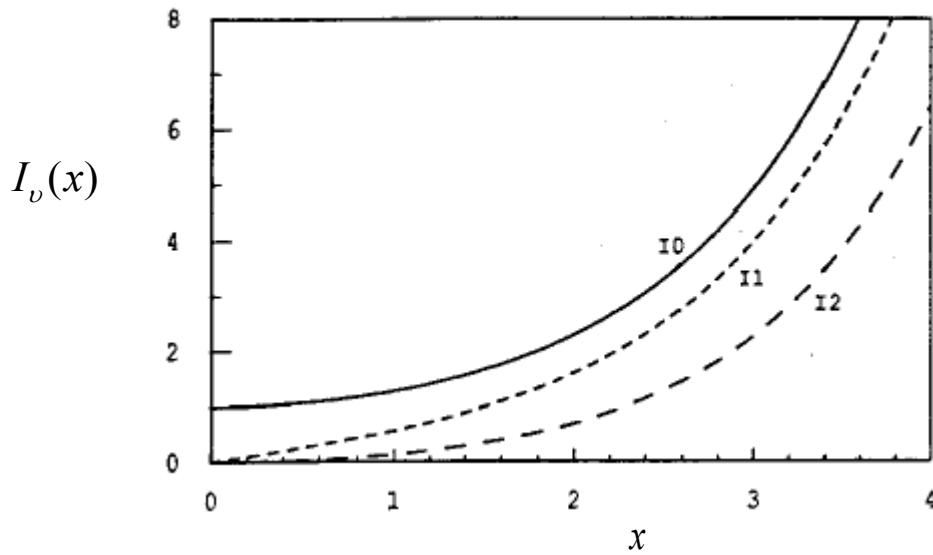
Où

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \right]^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{1}{4} x^2 \right)^k + (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{1}{2} x \right) I_n(x) \\ + (-1)^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \right]^n \sum_{k=0}^{\infty} \{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \} \frac{\left(\frac{1}{4} x^2 \right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{A.43})$$

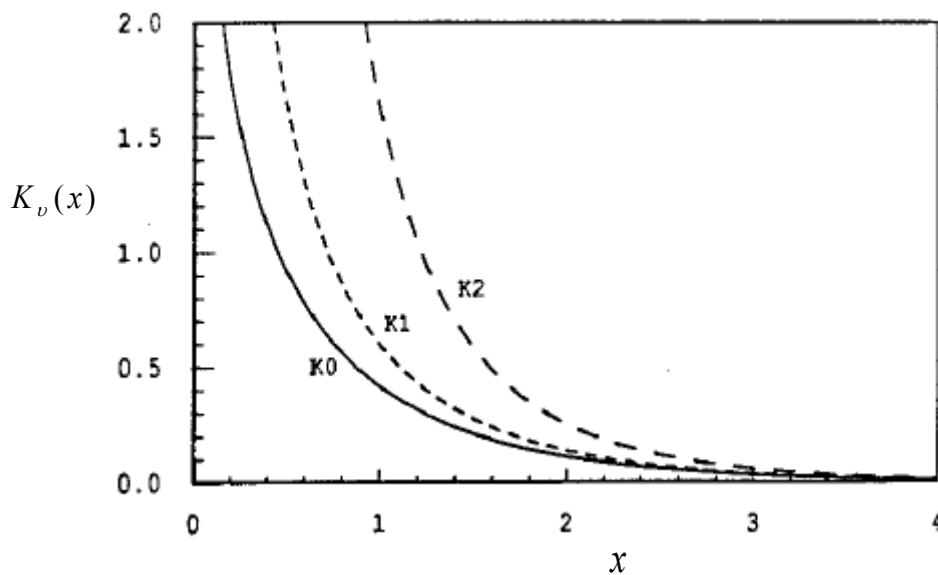
Les figures (A.3) et (A.4) illustrent quelques-unes de ces fonctions. Leurs comportements asymptotiques sont de forme :

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (\text{A.44})$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (\text{A.45})$$



FigureA.3. Fonctions de Bessel modifiée $I_\nu(x)$



FigureA.4. Fonctions de Bessel modifiée $K_\nu(x)$

Les équations de Bessel modifiées se comportent pour de grandes valeurs de leur argument, comme des ondes évanescentes.

Les fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ sont reliées aux équations de Bessel par les équations suivantes :

$$I_\nu(jx) = e^{j\nu\pi/2} J_\nu(x) \quad (\text{A.46})$$

$$K_\nu(jx) = \frac{\pi}{2} e^{-j(\nu+1)\pi/2} (J_\nu(x) - jN_\nu(x)) \quad (\text{A.47})$$



Axial Magnetic Field Effect on Taylor-Couette Flow

S. Aberkane^{1†}, M. Ihdene², M. Moderes³ and A. Ghezal³

¹ Energetic department, faculty of engineering Sciences, Boumerdes-35000, Algeria

² University of Yahia Farès, Médéa- 26000, Algeria

³ Laboratory of theoretical and applied fluid mechanics, university of sciences and technology Houari Boumediene Bab Ezzouar, Algiers-16111, Algeria

†Corresponding Author Email: aberkane.sofian@gmail.com

(Received Des 21, 2013; accepted May 19, 2014)

ABSTRACT

This study is interested in the effect of an axial magnetic field imposed on incompressible flow of electrically conductive fluid between two horizontal coaxial cylinders. The imposed magnetic field is assumed uniform and constant. The effect of heat generation due to viscous dissipation is also taken into account. The inner and outer cylinders are maintained at different uniform temperatures. The movement of the fluid is due to rotation of the cylinder with a constant speed. An exact solution of the equations governing the flow was obtained in the form of Bessel functions. A finite difference implicit scheme was used in the numerical solution. The velocity and temperature distributions were obtained with and without the magnetic field. The results show that for different values of the Hartmann number, the velocity between the two cylinders decreases as the Hartmann number increases. Also, it is found that by increasing the Hartmann number, the average Nusselt number decreases. On the other hand, the Hartmann number does not affect the temperature.

Keywords: Rotating cylinders, viscous dissipation, heat transfer, magnetic field, Bessel function, finite difference.

NOMENCLATURE

a	thermal diffusivity	u	radial velocity
B_0	external magnetic field density	v	angular velocity
C_p	specific heat	w	axial velocity
d	width of the annular space	μ	dynamic viscosity
Ec	Eckert number	ν	fluid kinematic viscosity
Ha	Hartmann number	θ	non-dimensional temperature
Pr	Prandtl number	ρ	fluid density
r	radius	σ	electric conductivity
t	time	Ω	rotational speed
T	temperature	η	radius ratio
k	thermal conductivity	ϕ	viscous dissipation function

1. INTRODUCTION

The study of flow of electrically conductive fluids, called magnetohydrodynamic (MHD) has attracted much attention due to its various applications. In astrophysics and geophysics, it is applied to the study of stellar structures, terrestrial cores and solar plasma. In industrial processes, it finds its application in MHD pumps, nuclear reactors, the extraction of geothermal energy, metallurgical and crystal growth in the field of semiconductors, the control of the behavior of fluid flow and heat and mass transfer and the stability of convective flows. Several studies have been conducted to evaluate the effect of magnetic field on the convective flows for

different conditions. Chandrasekhar (1961) has made the prediction of the linear stability of hydrodynamics and hydromagnetic Taylor-Couette flow. Tatsuo et al (1993) carried out experimental investigations about the natural convection of a magnetic fluid between two concentric cylinders and horizontal isotherms. Ben Hadid, and Henry (1996) investigated numerically the effect of a constant magnetic field on a three-dimensional buoyancy-induced flow in a cylindrical cavity, they put in light the structural changes of the flow induced by the magnetic field for each field orientation. Singh et al (1997) presented exact solutions for fully developed natural convection in open-ended vertical concentric annuli under a radial magnetic field. Bessaih et al

(1999) studied numerically MHD laminar flow of a liquid metal contained in a cylindrical enclosure having an aspect ratio equal to 1, and whose upper wall is in rotation. The assembly is subjected to a vertical external magnetic field. El Amin (2003) studied the effects of both first- and second-order resistance due to the solid matrix on forced convective flow from a horizontal circular cylinder in the presence of a magnetic field and viscous dissipation, with a variable surface temperature boundary condition. The study of the effects of the azimuthal magnetic field of an electrically conducting fluid in a rotating annulus has also been presented by Kurt *et al.* (2004). Hayat and Kara (2006) investigated the Couette time-dependent flow of an incompressible third-grade fluid subjected to a magnetic field of variable strength analytically. Group theoretic methods were employed to analyze the nonlinear problem and a solution for the velocity field was obtained analytically. Sankar *et al.* (2006) studied numerically a natural convection of a low Prandtl number electrically conducting fluid under the influence of either axial or radial magnetic field in a vertical cylindrical annulus. They showed that the magnetic field can be suppress the flow and heat transfer. Bessaih *et al.* (2009) studied the MHD stability of an axisymmetric rotating flow in a cylindrical enclosure containing liquid metal ($Pr = 0.015$), with an aspect ratio equal to 2, and subjected to a vertical temperature gradient and an axial magnetic field. Wrobel *et al.* (2010) presented an experimental and numerical analysis of a thermo-magnetic convective flow of paramagnetic fluid in an annular enclosure with a round rod core and a cylindrical outer wall under gravitational and magnetic environments. Azim *et al.* (2010) studied numerically the effect of magnetic field and Joule heating on the coupling of convection flow along and conduction inside a vertical flat plate in the presence viscous dissipation and heat generation. Ellahi *et al.* (2010) determined analytic solutions for a nonlinear problem governing the MHD flow of a third grade fluid in the annulus of rotating concentric cylinders. Makinde and Onyejekwe (2011) investigated a steady flow and heat transfer of an electrically conducting fluid with variable viscosity and electrical conductivity between two parallel plates in the presence of a transverse magnetic field. Venkatachalappa *et al.* (2011) carried out numerical computations to investigate the effect of axial or radial magnetic field on the double-diffusive natural convection in a vertical cylindrical annular cavity. Kakarantzas *et al.* (2011) studied numerically the combined effect of a horizontal magnetic field and volumetric heating on the natural convection flow and heat transfer of a low Prandtl number fluid in a vertical annulus. Seth *et al.* (2011) studied the effects of rotation and magnetic field on unsteady Couette flow of a viscous incompressible electrically conducting fluid between two horizontal parallel porous plates in a rotating medium. Mozayyeni and Rahimi (2012) investigated numerically the problem of mixed convection of a fluid in the fully developed region between two horizontally concentric cylinders with infinite lengths, in the presence of a constant magnetic field with a radial MHD force direction, considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid in both steady and unsteady states. Seth *et al.* (2012) investigated the effects of

Hall current on unsteady hydromagnetic Couette flow of a viscous incompressible electrically conducting fluid in a rotating system in the presence of an inclined magnetic field. Seth and Singh (2013) studied theoretically the effect of Hall current and a uniform transverse magnetic field on unsteady MHD Couette flow of class-II in a rotating system. J. Prakash (2014) proved analytically that the principle of the exchange of stabilities in convection in a Rotating Ferrofluid Saturated Porous is not, in general, valid for the case of free boundaries but the study shown that a sufficient condition for the validity of this principle can be derived. Bhuiyan *et al.* (2014) studied numerically the effects of joule heating on magneto-hydrodynamic natural convection flow in presence of viscous dissipation and pressure stress work from a horizontal circular cylinder.

Although the exact solutions for the Hartmann flow and the MHD Couette flow have been achieved for more than seventy years, the solutions for a heat transfer in flow between concentric rotating cylinders, also known as Taylor Couette flows, under external magnetic field have been restricted to high Hartmann numbers.

The aim of the present study is to examine analytically and numerically the effects of an external axial magnetic field applied to the forced convection flow of an electrically conducting fluid between two horizontal concentric cylinders, considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid. It should be noted that the natural convection is supposed negligible in this work, which is not always the case of the vertical cylinder. The forced flow is induced by the rotating inner cylinder, in slow constant angular velocity and the other is fixed.

1. FORMULATION OF THE PROBLEM

Consider a laminar flow of a viscous incompressible electrically conductive fluid between two coaxial cylinders. The inner cylinder of radius r_1 is rotated at a constant speed Ω_1 and the outer cylinder of radius r_2 is kept fixed. The inner and outer walls are maintained at a constant and different temperatures T_1 and T_2 respectively, while the top and bottom walls are insulated. The two cylinders are electrically isolated. The flow is subjected to a constant uniform and axially magnetic field B_0 . Geometry of the problem is presented in Fig.1. We assume that the magnetic Reynolds number is neglected. When the magnetic field is uniform and externally applied, its time variations can be neglected and the set of flow equations further simplified to involve only the Navier-Stokes equations and the conservation of the electric current. Also we assume that the electric field is zero. In this study the viscous dissipation term in the energy equation is considered.

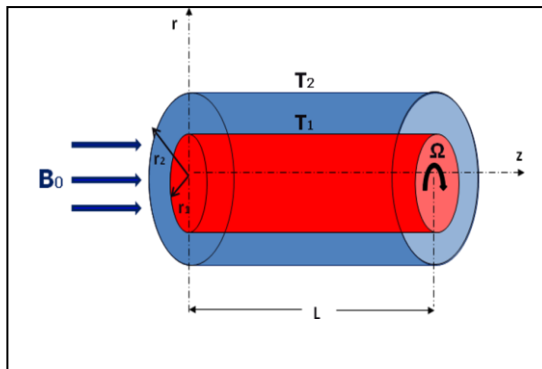


Fig. 1. Geometry of the problem

2. ANALYTICAL STUDY

The flow is assumed to be steady, laminar and unidirectional, therefore the radial and axial components of the velocity and the derivatives of the velocity with respect to θ and z are zero. Under these assumptions and in cylindrical coordinates, the governing equations for the flow following the azimuthal direction can be written as follows:

$$v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\sigma v B_0^2}{\rho} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 \quad (2)$$

$$r = r_1 : v(r) = \Omega_1 r_1, T = T_1 \quad (3)$$

$$r = r_2 : v(r) = 0, T = T_2 \quad (4)$$

The governing equation and boundary conditions, eq.(1) to (4), which are in non-dimensional form, become:

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \left(\frac{Ha^2}{(1-\eta)^2} + \frac{1}{r^{*2}} \right) v^* = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) = -Ec Pr \left(\frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^*} \right)^2 \quad (6)$$

$$r^* = \eta : v^*(r^*) = 1, \theta = 1 \quad (7)$$

$$r^* = 1 : v^*(r^*) = 0, \theta = 0 \quad (8)$$

Where

$$r^* = \frac{r}{r_2}, v^* = \frac{v}{\Omega_1 r_1}, \eta = \frac{r_1}{r_2}, Ha = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}, \theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2},$$

$$Pr = \frac{\nu}{a}, Ec = \frac{(\Omega_1 r_1)^2}{Cp \Delta T}$$

Where, the stars are dropped for convenience.

The velocity profile in the annular space is obtained by solving the Eq. (5) as follows:

$$v(r) = C_1 I_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r \right) + C_2 K_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r \right) = 0 \quad (9)$$

Where:

$$M = \frac{Ha}{1-\eta}$$

C_1 and C_2 are the constants of integration, which are determined from the boundary conditions on the velocity.

$$C_1 = \frac{K_1(M) - b K_1(\eta M)}{I_1(\eta M) K_1(M) - K_1(\eta M) I_1(M)}$$

$$C_2 = \frac{b I_1(\eta M) - I_1(M)}{I_1(\eta M) K_1(M) - K_1(\eta M) I_1(M)}$$

I_1 is the modified Bessel function of the first kind of order 1, and K_1 is the modified Bessel function of the second kind of order 1.

To obtain the temperature field from Eq. (6), we performed calculations by using the first, second and third term used by Omid M. et al (2012) of the expansions of the modified Bessel functions $I_1(Mr)$ and $K_1(Mr)$ for small values of Ha .

3.1 Expansion with one term of Bessel modified functions

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2Mr} \quad (10)$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} \quad (11)$$

By substituting the values of $I_1(Mr)$ and $K_1(Mr)$ from the above expansions in the velocity equation, Eq. (9), and using the new velocity distribution in Eq. (6) to find the temperature field.

The temperature gradient is given then by the following equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 2Br \frac{C_2^2}{M^2 r^3} + \frac{C_3}{r} \quad (12)$$

The temperature profile is given by:

$$\theta = C_3 \ln(r) + C_4 - \frac{Ec Pr C_2^2}{(Mr)^2} \quad (13)$$

Where

C_3 and C_4 are the constants of integration with respect to θ :

$$C_3 = \frac{\left(1 - C_4 + \frac{Br C_2^2}{M^2 \eta^2} \right)}{\ln(r)}$$

$$C_4 = \frac{Br C_2^2}{M^2}$$

3.1 Expansion with two terms of modified Bessel functions

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2} Mr + \frac{(Mr)^3}{16} \quad (14)$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} + \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{Mr}{2} \right) - \frac{1}{4} (-2\gamma + 1) \right] (Mr) \quad (15)$$

Where:

γ is Euler's constant defined by:

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \ln(m) \right]$$

$$= 0,5772156649\dots$$

The temperature gradient is therefore expressed as follows:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{C_3}{r} - Br \left[\frac{C_1^2 M^6 r^5}{384} - \frac{C_1 C_2 M^2 r}{4} + \frac{C_1 C_2 M^4 r^3}{32} + \frac{2C_2^2}{M^2 r^3} - \frac{2C_2^2 \ln(r)}{r} + \frac{C_2^2 M^2 r}{8} \right] \quad (16)$$

The temperature profile is given by:

$$\theta = C_3 \ln(R) + C_4 - Br \left[\frac{C_1^2 M^6 r^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2 r^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4 r^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2 r^2} - C_2^2 (\ln(r))^2 + \frac{C_2^2 M^2 r^2}{16} \right] \quad (17)$$

Where

C_3 and C_4 are the constants of integration, which are determined from the boundary conditions on the temperature.

$$C_3 = 1 - C_4 + Br \left[\frac{C_1^2 M^6 \eta^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2 \eta^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4 \eta^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2 \eta^2} - C_2^2 (\ln(\eta))^2 + \frac{C_2^2 M^6 \eta^6}{16} \right]$$

$$C_4 = Br \left[\frac{C_1^2 M^6}{2304} - \frac{C_1 C_2 M^2}{8} + \frac{C_1 C_2 M^4}{128} + \frac{C_2^2}{M^2} + \frac{C_2^2 M^2}{16} \right] \quad (18)$$

3.1 Expansion with three terms of modified Bessel functions

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2}Mr + \frac{(Mr)^3}{16} + \frac{(Mr)^5}{384} \quad (19)$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} + \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{4}(-2\gamma + 1) \right] (Mr)$$

$$+ \left[\frac{1}{16} \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{5}{2} - 2\gamma\right) \right] (Mr)^3 \quad (20)$$

The temperature gradient is given by the following equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{C_3}{r} - \frac{Br}{r} \left[2C_2^2 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{2C_2^2}{M^2 r^2} + C_5 (Mr)^6 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + C_6 (Mr)^6 - \frac{1}{384} C_2^2 (Mr)^6 \left(\ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \right)^2 + C_7 (Mr)^2 + C_8 (Mr)^4 - \frac{1}{32} C_2^2 (Mr)^4 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + C_9 (Mr)^8 - \frac{1}{3072} C_1 C_2 (Mr)^8 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{92160} C_1^2 (Mr)^{10} \right] \quad (21)$$

Where

The constants C_5 to C_9 are given in terms of C_1 and C_2 as follows:

$$C_5 = \frac{11}{2304} C_1^2 - \frac{1}{192} C_1 C_2 - \frac{1}{192} C_2^2 \gamma$$

$$C_6 = \frac{11}{2304} C_2^2 \gamma + \frac{7}{2304} C_1 C_2 - \frac{1}{384} C_2^2 \gamma - \frac{1}{384} C_1^2 - \frac{125}{55296} C_2^2 - \frac{1}{192} C_1 C_2 \gamma$$

$$C_7 = \frac{1}{4} C_2^2 \gamma - \frac{7}{16} C_2^2 + \frac{1}{4} C_1 C_2$$

$$C_8 = \frac{1}{32} C_2^2 - \frac{1}{32} C_2^2 \gamma - \frac{1}{48} C_1 C_2$$

$$C_9 = \frac{7}{24576} C_1 C_2 - \frac{1}{3072} C_1 C_2 \gamma - \frac{1}{3072} C_1^2$$

The solution of the energy equation is:

$$\theta = C_4 + C_3 \ln(r) + Br \left[C_{10} (Mr)^6 + C_{11} (Mr)^8 + C_{12} (Mr)^4 + \frac{1}{2} C_7 (Mr)^2 - \frac{1}{921600} C_1^2 (Mr)^{10} + C_2^2 \left(\ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \right)^2 2C_2^2 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{C_2^2}{(Mr)^2} + \frac{1}{6} C_5 (Mr)^6 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + C_6 (Mr)^6 - \frac{1}{2304} C_2^2 (Mr)^6 \left(\ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \right)^2 + \frac{1}{6912} C_2^2 (Mr)^6 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{128} C_2^2 (Mr)^4 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{24576} C_1 C_2 (Mr)^8 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \right] \quad (22)$$

Where

The Constants C_{10} , C_{11} and C_{12} are given as follows:

$$C_{10} = \frac{1}{36} C_5 + \frac{1}{6} C_6 - \frac{1}{41472} C_2^2$$

$$C_{11} = \frac{1}{8} C_9 + \frac{1}{196608} C_1 C_2$$

$$C_{12} = \frac{1}{4} C_8 + \frac{1}{512} C_2^2$$

3. NUMERICAL STUDY

In this numerical study, we consider a two-dimensional and axisymmetric unsteady flow. We opted for the velocity - pressure formulation due to its rapidity of prediction, its lower cost, and its ability to simulate real conditions. The finite difference scheme adopted for the resolution is very similar to that used by R.Peyret (1976), A.Ghezal et al (1992) and (2011), this is a semi implicit scheme of Crank-Nicholson type. The spatial discretization using the Marker And Cell (MAC) is shown in fig.2.

The iterative procedure is assumed converged when the following test is verified

$$\max(|L_u|, |L_v|, |L_w|, |L_\theta|, |L_\Pi|) < \varepsilon$$

where L_u , L_v , L_w , L_θ and L_Π represents operators differences relating to system equations corresponding to the problem variables u , v , w , θ and Π respectively, ε is of the order of 10^{-4} depending on the considered case. We then proceeded to a study of the mesh sensitivity of the field of study. This study led us to retain a mesh of 336 nodes along the direction r and 48 nodes in the z direction.

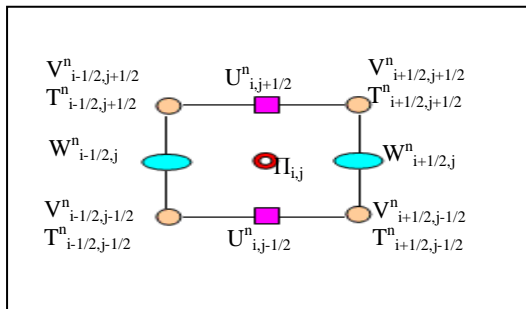


Fig. 2. M.A.C cell

4.1 Mathematical equations

Based on these dimensionless variables, the conservation equations of mass, momentum and energy are written in non rotating frame cylindrical coordinates as follows (where the stars are dropped for convenience):

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{Ha^2 u}{(1-\eta)Ta} \tag{24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{vu}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{Ha^2 v}{(1-\eta)Ta} \tag{25}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{26}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1-\eta}{PrTa} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{(1-\eta)Ec\Phi}{Ta} \tag{27}$$

Where:

$Ha = Bd \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$ is the Hartmann number,

$Ta = \frac{\Omega_1 r_1 d}{\nu}$ is the Taylor number,

$d = r_1 - r_2$ is the width of the annular space,

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$$

is the viscous dissipation function

The rate of heat transfer in non – dimensional for the inner and outer cylinder is given by:

$$Nu_i(z) = -\xi \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=\eta}$$

$$Nu_e(z) = -\xi \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

With: $\xi = 1 - \eta$

The average Nusselt number on the inner and outer cylinders is given by:

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{L} \int_0^z Nu_i(z) dz$$

$$\overline{Nu}_e = \frac{1}{L} \int_0^z Nu_e(z) dz$$

4.2 Initial and boundary conditions

At the time $t=0$:

$$u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = \Pi(r, z, 0) = \theta(r, z, 0) = 0 \tag{28}$$

The boundary conditions are as follows:

$$r = \eta \quad z \geq 0 : \quad u(r_1, z) = v(r_1, z) = w(r_1, z) = 0, \quad \theta(r_1, z) = l \tag{29}$$

$$r = 1 \quad z \geq 0 : \quad u(r_2, z) = v(r_2, z) = w(r_2, z) = \theta(r_2, z) = 0 \tag{30}$$

$$\eta < r < 1 \quad z = 0 : \quad u = v = w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{31}$$

$$z = L : \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

4. RESULTS AND DISCUSSION

In order to understand the physical situation of the problem and the effects of the Hartmann and Eckert numbers, we have found the numerical and analytical values of the velocity, temperature, and the Nusselt number.

The results obtained through the numerical code were presented in figs. 3 and 4 were compared with those calculated using the three analytical approach for small value of Hartmann number.

It is noticed from fig. 3 that the analytical results for the three cases of the expansions with one, two and three term of modified Bessel functions coincide well with the numerical results for small Hartmann number $Ha=0.5$. It can also be observed that the influence of the order of development on temperature is negligible

As can be seen from fig. 4 that whether for the average Nusselt number on inner and outer surfaces versus Hartman numbers. The analytic approach corresponding to the expansion of three terms is closer to the numerical approach.

For the Hartmann number values less than $Ha=0.2$ the influence of the order of development in the analytical approach is insignificant.

So the next analytical results in this work are done by the expansions with three terms of modified Bessel functions.

The velocity and temperature are evaluated analytically and numerically for different values of Hartmann number in figs. 5 and 6.

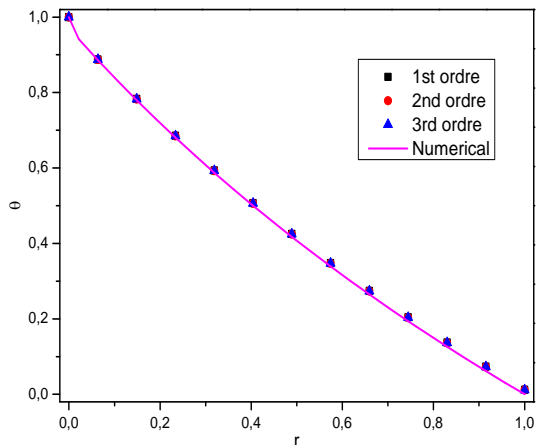


Fig. 3. Effect of the development of Bessel functions on temperature distribution, for $Ha = 0.5$, $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.5$.

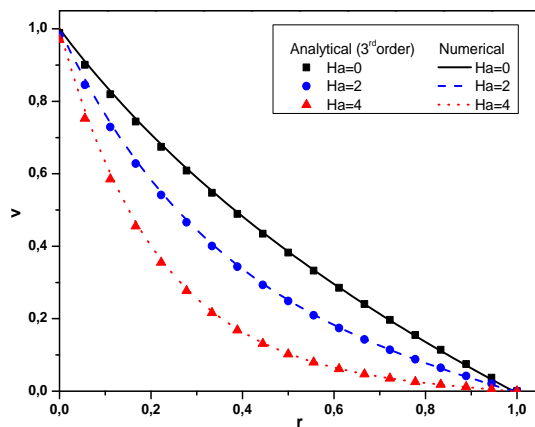


Fig. 5. Comparison of analytical and numerical results of velocity profile, for $\eta = 0.5$, $Ta = 20$, $t^* = 120$.

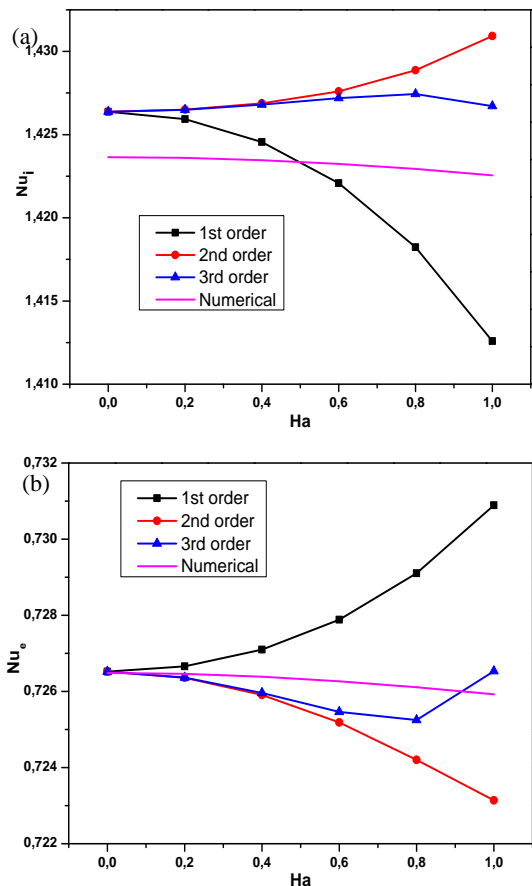


Fig. 4. Effect of the development of Bessel functions on average Nusselt number on (a) inner and (b) outer surfaces of the cylinder against the Hartmann number, for $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.5$

Obviously, the velocity and temperature profiles, for various Ha obtained via these two different methods, agree with each other reasonably well. We can notice that the velocity profile without magnetic field $Ha = 0$ is quasi-linear, and an increase in Hartman number,

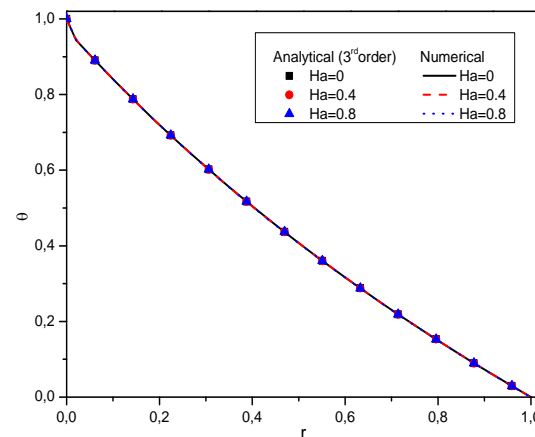


Fig. 6. Comparison of analytical and numerical results Temperature profile, for $\eta = 0.5$, $Ta = 20$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.0001$, $t^* = 120$.

which causes a reduction of the velocity in the annular space because the centrifugal force is counter-productive and the Lorentz electromagnetic force acts as a flow damper.

It is observed from fig. 6 that the effect of weak magnetic field on the radial profile of temperature is insignificant. It

It should be noted that the effect of magnetic field on the temperature distribution is insignificant, whereas the changes induced by the magnetic field on the temperature gradient and therefore on the Nusselt number is considerable.

Fig. 7 displays the effect of Hartmann number on the temperature, as shown in this figure, the temperature profile is similar to those shown in Figs. 6. It is evident that the effect of weak and strong magnetic field on the radial profile of temperature is insignificant. It is valid in the case of low and high values of Hartmann

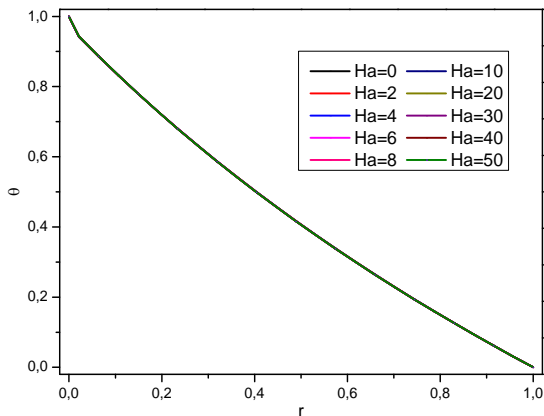


Fig. 7. Temperature profile as a function of Hartmann number, for $\eta = 0.5$, $Ta=20$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$, $t^*=120$.

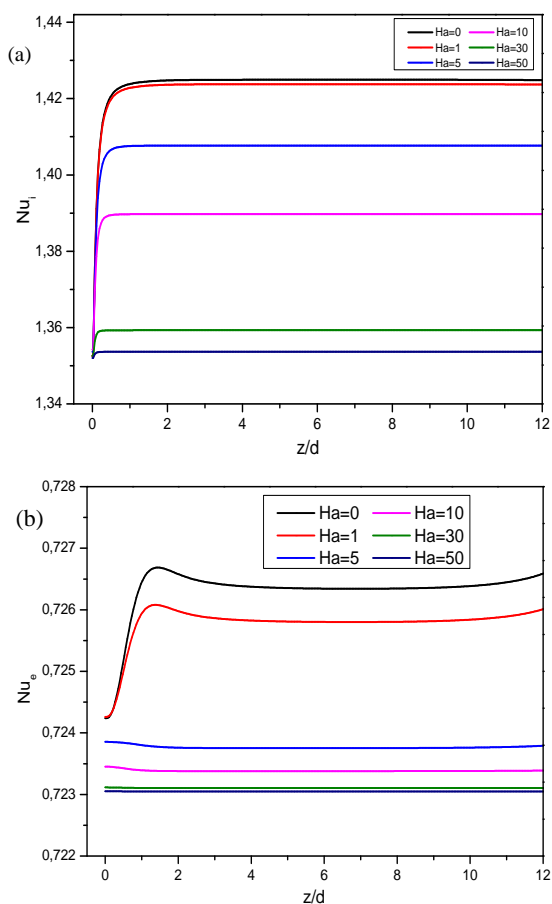


Fig. 8. Effect of Hartman number on local Nusselt number distribution on (a) inner and (b) outer cylinders, for $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec=0.5$, $t^*=120$

number. Also we can notice that the temperature profiles don't change for $Ec=0.5$ and $Ec=0.0001$, so the Eckert number don't affect the temperature.

Fig. 8 shows the effect of Hartmann number on the local Nusselt number on the inner and outer surfaces, for an Eckert number $Ec = 0.5$. It is found that for high values of Hartmann number, the local Nusselt number on the inner and outer surfaces decreases.

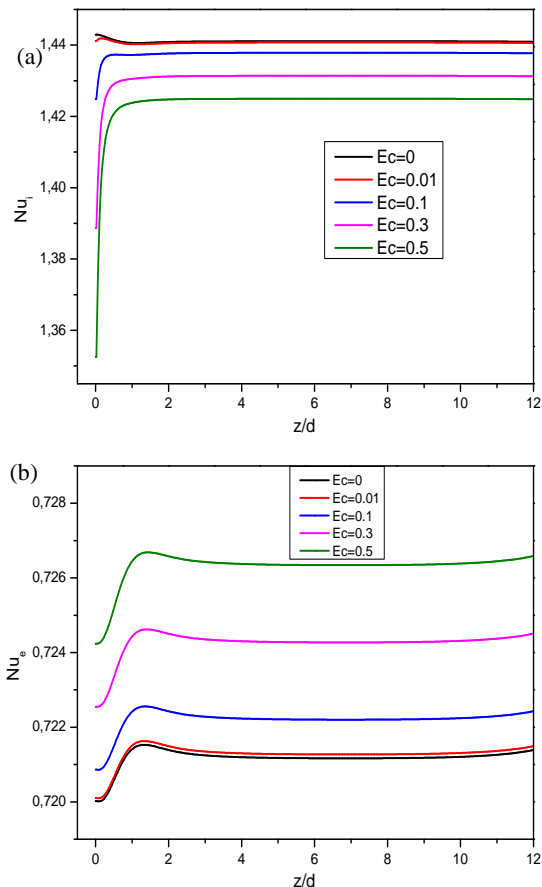


Fig. 9. Effect of Eckert number on local Nusselt number distribution on (a) inner and (b) outer cylinders, for $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha=0$, $t^*=120$.

In fact when the Eckert number is considerable. The heat generation in the fluid increases due to viscous dissipation. Thus the temperature of the fluid in the annular space increases causing a decrease in the temperature gradient in the vicinity of the inner cylinder and an increase of the gradient in the vicinity of the outer cylinder. A significant increase in the Hartmann number, causes a reduction of the centrifugal force, which results in a gradual decrease in the Nusselt number. The analysis of the variation of local Nusselt number on the inner and outer cylinder shows that this number tends to a limit value.

Effect of Eckert number on the distribution of local Nusselt number on the inner and outer cylinders is displayed in Fig. 9, for $Ha = 0$. As can be seen, with increase of Eckert number, the influence of heat transfer due to the viscous dissipation in the annular space is improved, which leads to the increase in the average temperature of the fluid at this region. The dimensionless temperatures of inner and outer cylinders are maintained at 1.0 and 0.0, respectively. It is evident that by increasing the average temperature of fluid in annular space, the rate of heat transfer between the fluid and inner cylinder decreases due to the reduction of the temperature difference between them. Secondly, the convective heat transfer between the fluid and the outer cylinder is improved because of the increase in the temperature.

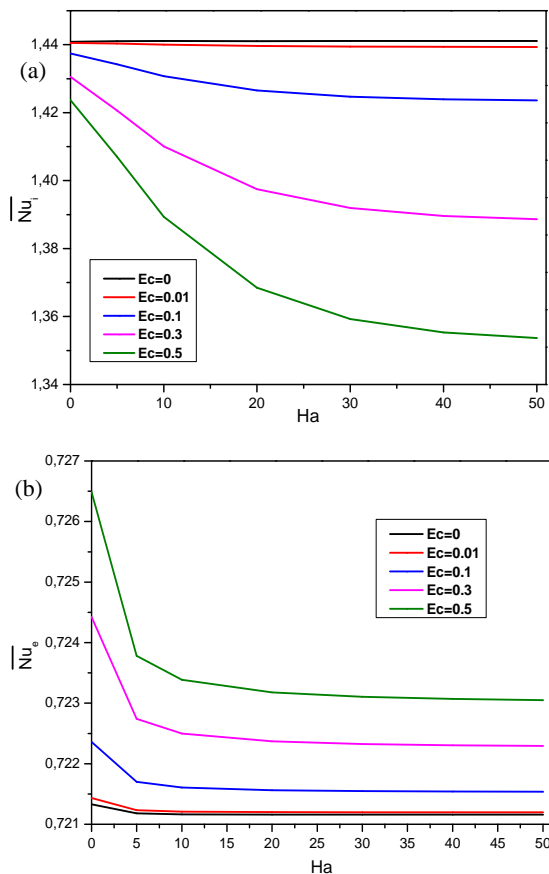


Fig. 10. Effect of Eckert number on average Nusselt number on (a) inner and (b) outer surfaces of the cylinder against the Hartmann number, $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $t^* = 120$.

It is observed from fig. 10 that the effect of increasing Hartmann number is the decrease the average Nusselt number on both surfaces of the cylinder. So a considerably increasing Hartmann number, which leads to a reduction of the centrifugal force, results in a progressive decrease in the Nusselt number.

From this figure, it can also be noticed that the average Nusselt number on the outer cylinder is lower than on the inner cylinder, because the velocity and temperature gradient are higher for the cold inner cylinder than for the outer cylinder. Also the results show the effects of viscous dissipation terms on the rate of heat transfer, the average Nusselt number increases with an increase in the Eckert number on the outer cylinder, but it decreases on the inner cylinder. In fact, as the Eckert number is large the heat generated in the annulus increases due to viscous dissipation, and thus the temperature of the fluid increases. This causes a decrease in the temperature gradient close to the inner cylinder, and an increase in the gradient in the vicinity of the outer cylinder.

In this part, some results are presented in different non-dimensional time values for the distribution of velocity and temperature in the annulus Figs (11, 12, 13 and 14).

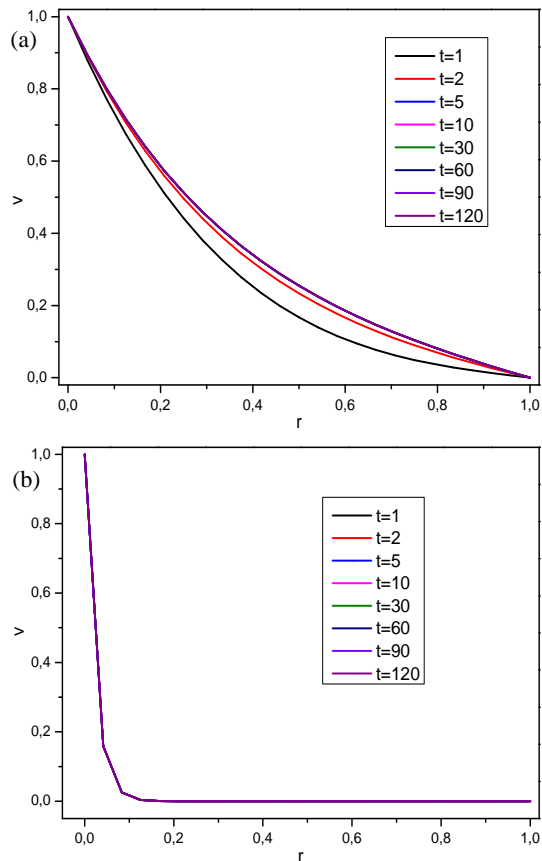


Fig. 11. Velocity distribution at different times at $z/d=7$ for (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$ for $Ta=20$.

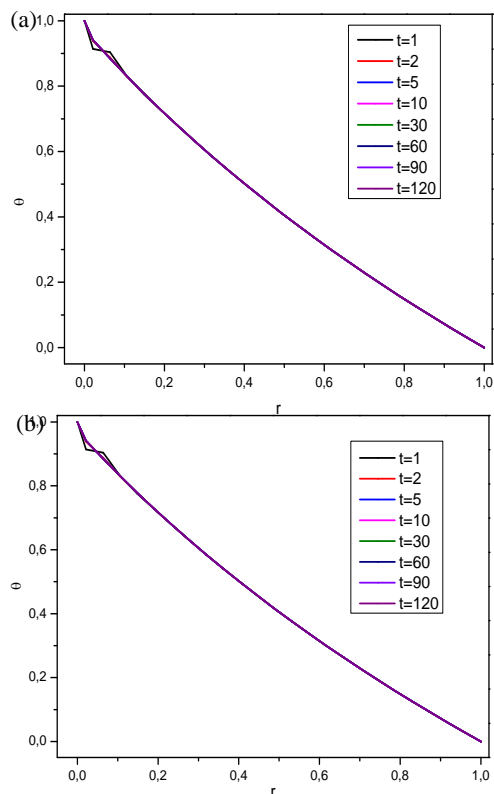


Fig.12. Temperature distribution at different times at $z/d=7$ for (a) $Ha = 0.0$ and (b) $Ha = 50$ for $Ta=20$, $Ec=0, Pr=0,02$

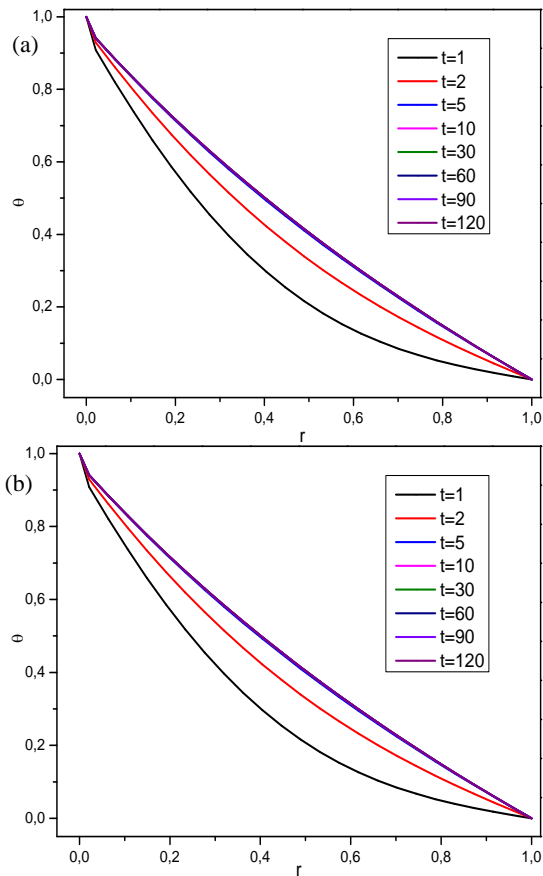


Fig. 13. Temperature distribution at different times at $z/d=7$ for (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$ for $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=1$.

There is not much difference in velocity at $t=10$ compared to $t=120$, but comparing temperature distribution at $t=10$ with values greater than 10, it indicates that much more time is still needed to reach steady-state.

From fig. 12, we can notice that for a small value of Prandtl number ($Pr=0,02$), The effect of the time variation is found to be not significant on the temperature, it reaches faster a steady-state to the point that we can't notice the difference between the steady and unsteady states flows.

As we know, for larger fluid Prandtl number, the momentum flow transfer is faster than heat transfer. This can be seen clearly in Fig. 14 (for a fluid with $Pr = 7$) and the distribution of the azimuthal component of velocity reaching a steady-state quicker than the temperature at the mid-length.

CONCLUSION

In this study, the forced convection flow of an electrically conducting fluid between two horizontal concentric cylinders in the presence of an axial magnetic field and a temperature gradient considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid has been investigated numerically and analytically. The velocity distribution in the annulus is obtained analytically in terms of the modified Bessel functions

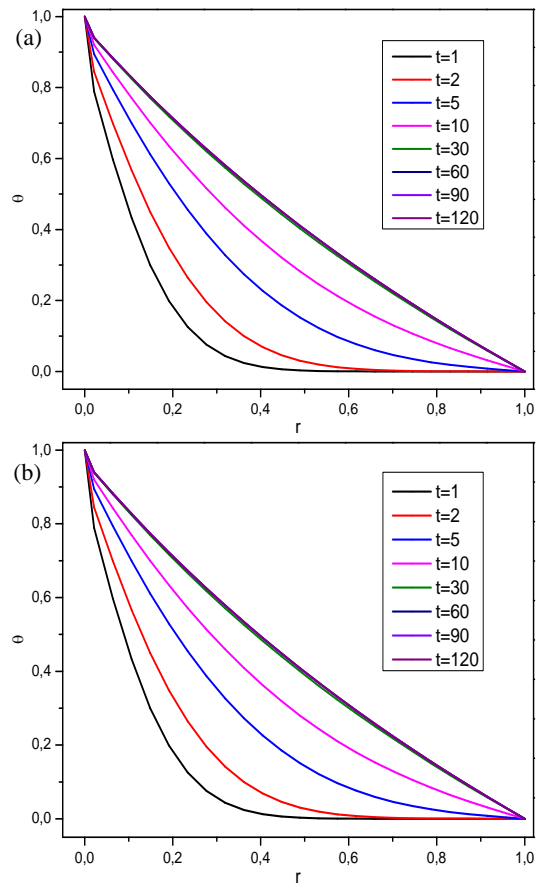


Fig. 14. Temperature distribution at different times at $z/d=7$ for (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$ for $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=7$.

whose argument contains Hartmann number and radial coordinate. To obtain the temperature, the expansions of the modified Bessel functions, with three terms which coincides better with the numerical results, are used in the energy equation.

It is found that the velocity decreases in the annulus with increase of Hartmann number. However an increase in Hartmann number does not affect the temperature. The effects of magnetic field strength and Eckert number on local and average Nusselt number have been examined. The results show that an increase in Hartmann number reduces the Nusselt number on both surfaces of the cylinders. Also it was noticed that as the Eckert number increases average Nusselt number increases on the outer cylinder, but opposite trend is observed on the inner cylinder. In addition, some results of the unsteady state have been discussed in this work.

REFERENCES

- Azim M.A., Mamun A.A., Rahman M.M. (2010), Viscous Joule heating MHD-conjugate heat transfer for a vertical flat plate in the presence of heat generation, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37, 666–67.
- Ben Hadid H., and Henry D. (1996). Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a

- constant magnetic field, *J. Cryst. Growth*, 166, 436-673.
- Bessaih R., Marty Ph., Kadja M. (1999). Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure, *Acta Mechanica*, 135, 153-167.
- Bessaih R., Boukhari A. and Marty Ph. (2009). Magneto-hydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36, 893-901.
- Bhuiyan A. S., Azim N. H. M. A. and Chowdhury M. K. (2014). Joule Heating Effects on MHD Natural Convection Flows in Presence of Pressure Stress Work and Viscous Dissipation from a Horizontal Circular Cylinder, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 7(1), 7-13.
- Chandrasekhar, S. (1961). Hydrodynamic and hydromagnetic stability, *Clarendon*.
- Hayat T., Kara A.H. (2006). Couette flow of a third-grade fluid with variable magnetic field, *Math. Compute. Modeling*, 43, 132-137.
- El-Amin M.F. (2003). Combined effect of viscous dissipation and joule heating on MHD forced convection over a non-isothermal horizontal cylinder embedded in a fluid saturated porous medium, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 263, 337-343.
- Ellahi R., Hayat T., Mahomed F.M., Zeeshan A. (2010). Analytic solutions for MHD flow in an annulus, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 15, 1224-1227.
- Ghezal A., Porterie B., Loraud J.C. (1992). Modélisation du transfert de chaleur, avec couplage conduction convection, entre un obstacle en mouvement hélicoïdal et un fluide visqueux en écoulement confiné, *Int.J.Heat.Mass.Trans. Trans.* 329-34.
- Ghezal A., Porterie B. (2011). Loraud J.C., Etude dynamique et thermique d'un écoulement pulsé en présence d'un solide chauffé en rotation, *Mécanique & Industries* 12, 45-65.
- Kakarantzas S.C., Sarris I.E., Vlachos N.S. (2011). Natural convection of liquid metal in a vertical annulus with lateral and volumetric heating in the presence of a horizontal magnetic field, *International journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 3347-3356.
- Kurt E., Busse, F.H. and Pesch, W. (2004). Hydromagnetic convection in a rotating annulus with an azimuthal magnetic field, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 18, 251-263.
- Makinde O.D., Onyejekwe O.O. (2011). A numerical study of MHD generalized Couette flow and heat transfer with variable viscosity and electrical conductivity, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 323, 2757-2763.
- Mozayyeni H.R., Rahimi A.B. (2012). Mixed convection in cylindrical annulus with rotating outer cylinder and constant magnetic field with an effect in the radial direction, *Scientia Iranica B*, 19 (1), 91-105.
- Omid M., Shohel M., Ioan P. (2012). Analysis of first and second laws of thermodynamics between two isothermal cylinders with relative rotation in the presence of MHD flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 4808-4816.
- Peyrret R. (1976). Unsteady evolution of horizontal jet in a stratified fluid, *J. Fluid mechanics*, 78, part 1, 49-63.
- Prakash J. (2014). On Exchange of Stabilities in Ferromagnetic Convection in a Rotating Ferrofluid Saturated Porous Layer, *Journal of Applied Fluid Mechanics...*, 7(1), 147-154.
- Sankar, M., Venkatachalappa, M. and Shivakumara, I.S. (2006). Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus, *International Journal of Engineering Science*, 44, 1556-1570.
- Seth, G.S., Md. S. Ansari and R. Nandkeolyar (2011). Effects of rotation and magnetic field on unsteady Couette flow in a porous channel, *Journal of Applied Fluid Mechanics.*, 4(2), 95-103.
- Seth, G.S., R. Nandkeolyar and Md. S. Ansari (2012). Effects of Hall current and rotation on unsteady MHD Couette flow in the presence of an inclined magnetic field, *Journal of Applied Fluid Mechanics.*, 5(2), 67-74.
- Seth G.S., Singh J.K. (2013). Effects of Hall current of unsteady MHD Couette flow of class-II in a rotating system, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 6 (4), 473-484.
- Singh S. K., Jha B. K., Singh A. K. (1997). Natural convection in vertical concentric annuli under a radial magnetic field, *Heat and Mass Transfer*, 32, 399-40.
- Tatsuo S., Hiroshige K., Atsushi S and Takahiko, T. (1993). Convection of a Magnetic Fluid in Concentric Horizontal Annuli under Nonuniform Magnetic Fields, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 7, 212-220.
- Wrobel W., Fornalik-Wajs E., Szmyd J.S. (2010). Experimental and numerical analysis of thermo-magnetic convection in a vertical annular enclosure, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31, 1019-1031.
- Venkatachalappa M., Do Younghae, Sankar M. (2011). Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus, *International Journal of Engineering Science*, 49, 262-278.

Full Length Research Paper

Effect of an axial magnetic field on the heat and mass transfer in rotating annulus

Sofiane ABERKANE^{1*}, Malika IHDENE², Mourad MODERES³ and Abderahmane GHEZAL⁴

¹Département Energétique, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université M'Hamed Bougara de Boumerdés-35000, Algérie.

²Université de Yahia Farès, Médéa- 26000, Algérie.

³Faculté des hydrocarbures et de la chimie, Université M'Hamed Bougara de Boumerdés-35000, Algérie.

⁴Laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée, Faculté de physique, Université des sciences et de la technologie de Houari Boumediene Bab Ezzouar, Alger-16111, Algérie.

Received 27 May 2014; Accepted 4 August, 2014

This study is interested in the effect of an axial magnetic field imposed on incompressible flow of electrically conductive fluid between two horizontal coaxial cylinders. The imposed magnetic field is assumed uniform and constant. The effect of heat generation due to viscous dissipation is also taken into account. The inner and outer cylinders are maintained at different uniform temperatures and concentrations. The movement of the fluid is due to rotation of the cylinder with a constant speed. An exact solution of the governing equations for momentum and energy are obtained in the form of Bessel functions. A finite difference implicit scheme was used in the numerical solution to solve the governing equations of convection flow and mass transfer. The velocity, concentration and temperature distributions were obtained with and without the magnetic field. The results show that for different values of the Hartmann number, the velocity and concentration between the two cylinders decreases as the Hartmann number increases. On the other hand, the Hartmann number does not affect the temperature. Also, it is found that by increasing the Hartmann number, the Nusselt and Sherwood numbers decreases.

Key words: Rotating cylinders, viscous dissipation, heat transfer, mass transfer, magnetic field, Bessel function, finite difference.

INTRODUCTION

The study of flow of electrically conductive fluids, called magnetohydrodynamic (MHD) has attracted much attention due to its various applications. In astrophysics and geophysics, it is applied to the study of stellar structures, terrestrial cores and solar plasma. In industrial processes, it finds its application in MHD pumps, nuclear

reactors, the extraction of geothermal energy, metallurgical and crystal growth in the field of semiconductors, the control of the behavior of fluid flow and the stability of convective flows. The analysis of flow and heat and mass transfer, known as the double-diffusive convection, in cylindrical annuli has been

*Corresponding author. E-mail: aberkane.sofian@gmail.com

Author(s) agree that this article remain permanently open access under the terms of the [Creative Commons Attribution License 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

investigated in several pieces of literature. However, to the author's knowledge a few studies have been conducted on double-diffusive convection in a rotating annulus in the presence of a magnetic field. Recently, the effect of magnetic field on the laminar convection in either vertical or horizontal rotating concentric annuli has been investigated. Ben and Henry. (1996) investigated numerically the effect of a constant magnetic field on a three-dimensional buoyancy-induced flow in a cylindrical cavity, they put in light the structural changes of the flow induced by the magnetic field for each field orientation. Singh et al. (1997) presented exact solutions for fully developed natural convection in open-ended vertical concentric annuli under a radial magnetic field. El Amin (2003) studied the effects of both first- and second-order resistance due to the solid matrix on forced convective flow from a horizontal circular cylinder in the presence of a magnetic field and viscous dissipation, with a variable surface temperature boundary condition. Hayat and Kara (2006) investigated the Couette time-dependent flow of an incompressible third-grade fluid subjected to a magnetic field of variable strength analytically. Group theoretic methods were employed to analyze the nonlinear problem and a solution for the velocity field was obtained analytically. Sankar et al. (2006) studied numerically a natural convection of a low Prandtl number electrically conducting fluid under the influence of either axial or radial magnetic field in a vertical cylindrical annulus. They showed that the magnetic field can be suppress the flow and heat transfer. Bessaïh et al. (2009) studied the MHD stability of an axisymmetric rotating flow in a cylindrical enclosure containing liquid metal ($Pr = 0.015$), with an aspect ratio equal to 2, and subjected to a vertical temperature gradient and an axial magnetic field. Azim et al. (2010) studied numerically the effect of magnetic field and Joule heating on the coupling of convection flow along and conduction inside a vertical flat plate in the presence viscous dissipation and heat generation. Ellahi et al. (2010) determined analytic solutions for a nonlinear problem governing the MHD flow of a third grade fluid in the annulus of rotating concentric cylinders. Makinde and Onyejekwe (2011) investigated a steady flow and heat transfer of an electrically conducting fluid with variable viscosity and electrical conductivity between two parallel plates in the presence of a transverse magnetic field. Kakarantzas et al. (2011) studied numerically the combined effect of a horizontal magnetic field and volumetric heating on the natural convection flow and heat transfer of a low Prandtl number fluid in a vertical annulus. Seth et al. (2011) studied the effects of rotation and magnetic field on unsteady Couette flow of a viscous incompressible electrically conducting fluid between two horizontal parallel porous plates in a rotating medium. Mozayyeni and Rahimi (2012) investigated numerically the problem of mixed convection of a fluid in the fully developed region

between two horizontally concentric cylinders with infinite lengths, in the presence of a constant magnetic field with a radial MHD force direction, considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid in both steady and unsteady states. Seth and Singh (2013) studied theoretically the effect of Hall current and a uniform transverse magnetic field on unsteady MHD Couette flow of class-II in a rotating system. Takhar et al. (2003) studied the unsteady mixed convection flow over a rotating vertical cone in the presence of a magnetic field. Recently, some attention has been paid by Ashorynejad (2013) to the effect of magnetic field convection on natural convection heat transfer in a horizontal cylindrical annulus enclosure filled with nanofluid using the Lattice Boltzmann method. Also Sheikholeslami et al. (2013) solved the problem of heat and fluid flow of a nanofluid in a half-annulus enclosure with one wall under constant heat flux in presence of magnetic field using control volume based finite element method. In another publication Sheikholeslami et al. (2014) applied Lattice Boltzmann Method to simulate the effect of magnetic field on free convection of nanofluid, in an eccentric semi-annulus. In a recent paper Aminfar et al. (2014) experimentally studied the effects of using magnetic nanofluid and also applying an external magnetic field on the critical heat flux of subcooled flow boiling in vertical annulus.

Some surveyed studies in the literature were concerned primarily with the double diffusive convection, Teamah (2007) carried out a numerical study of double-diffusive laminar mixed convection within a two-dimensional, horizontal annulus rotating cylinders. The results for both average Nusselt and Sherwood numbers were correlated in terms of Lewis number, thermal Rayleigh number and buoyancy ratio. Moreover, Molki et al. (1990) applied the naphthalene sublimation technique to an annulus with a rotating inner cylinder in order to study heat transfer in the entrance region to obtain heat transfer data for laminar flows and compare them with results of mass transfer. Kefeng and Wen-Qiang (2006) simulated numerically the characteristics of transient double-diffusive convection in a vertical cylinder using a finite element method. Recently, Venkatachalappa et al. (2011) carried out numerical computations to investigate the effect of axial or radial magnetic field on the double-diffusive natural convection in a vertical cylindrical annular cavity.

Although the exact solutions for the Hartmann flow and the MHD Couette flow have been achieved for more than seventy years, the solutions for a heat transfer in flow between concentric rotating cylinders, also known as Taylor Couette flows, under external magnetic field have been restricted to high Hartmann numbers.

The aim of the present study is to examine analytically and numerically the effects of an external axial magnetic field applied to the forced convection flow of an electrically conducting fluid between two horizontal

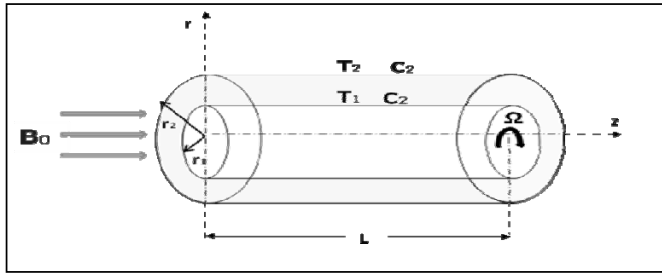


Figure 1. Geometry of the problem.

concentric cylinders, considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid. Also we investigated numerically the effects of the magnetic field on the mass transfer in the annular cavity. It should be noted that the natural convection is supposed negligible in this work, which is not always the case of the vertical cylinder. The forced flow is induced by the rotating inner cylinder, in slow constant angular velocity and the other is fixed.

FORMULATION OF THE PROBLEM

Consider a laminar flow of a viscous incompressible electrically conductive fluid between two coaxial cylinders. The inner cylinder of radius r_1 is rotated at a constant speed Ω_1 and the outer cylinder of radius r_2 is kept fixed. The inner and outer walls are maintained at a constant and different temperatures and concentrations, but their values for the inner are higher than the outer, while the top and bottom walls are insulated and impermeable. The two cylinders are electrically isolated. The flow is subjected to a constant uniform and axially magnetic field B_0 . Geometry of the problem is presented in Figure 1. We assume that the magnetic Reynolds number is neglected. When the magnetic field is uniform and externally applied, its time variations can be neglected and the set of flow equations further simplified to involve only the Navier-Stokes equations and the conservation of the electric current. Also we assume that the electric field is zero. In this study the viscous dissipation term in the energy equation is considered.

ANALYTICAL STUDY

The flow is assumed to be steady, laminar and unidirectional, therefore the radial and axial components of the velocity and the derivatives of the velocity with respect to θ and z are zero. Under these assumptions and in cylindrical coordinates, the governing equations for the flow following the azimuthal direction can be written as follows:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} v = 0 \tag{1}$$

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 \tag{2}$$

$$r = r_1 : v(r) = \Omega_1 r_1, T = T_1 \tag{3}$$

$$r = r_2 : v(r) = \Omega_2 r_2, T = T_2 \tag{4}$$

The governing equation and boundary conditions, Equations (1) to (4), which are in non-adimensional form, become:

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \left(\frac{Ha^2}{(1-\eta)^2} + \frac{1}{r^{*2}} \right) v^* = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) = -Ec Pr \left(\frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^*} \right)^2 \tag{6}$$

$$r^* = \eta : v^*(r^*) = 1, \theta = 1 \tag{7}$$

$$r^* = 1 : v^*(r^*) = b, \theta = 0 \tag{8}$$

Where

$$r^* = \frac{r}{r_2}, v^* = \frac{v}{\Omega_1 r_1}, \eta = \frac{r_1}{r_2}, b = \frac{\Omega_2 r_2}{\Omega_1 r_1}, Ha = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}, Pr = \frac{\nu}{a}, Ec = \frac{(\Omega_1 r_1)^2}{C_p \Delta T}$$

Where, the stars are dropped for convenience. The velocity profile in the annular space is obtained by solving the Equation (5) as follows:

$$v(r) = C_1 I_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r \right) + C_2 K_1 \left(\frac{Ha}{1-\eta} r \right) = 0 \tag{9}$$

Where:

$$M = \frac{Ha}{1-\eta}$$

C_1 and C_2 are the constants of integration, which are determined from the boundary conditions on the velocity.

$$C_1 = \frac{K_1(M) - b K_1(\eta M)}{I_1(\eta M) K_1(M) - K_1(\eta M) I_1(M)}$$

$$C_2 = \frac{b I_1(\eta M) - I_1(M)}{I_1(\eta M) K_1(M) - K_1(\eta M) I_1(M)}$$

I_1 is the modified Bessel function of the first kind of order 1, and K_1 is the modified Bessel function of the second kind of order 1. To obtain the temperature field from Equation (6), we performed calculations by using the expansions with three terms of the modified Bessel functions $I_1(Mr)$ and $K_1(Mr)$ used by Omid et al. (2012), for small values of Ha . It can be used as following:

$$I_1(Mr) \cong \frac{1}{2}Mr + \frac{(Mr)^3}{16} + \frac{(Mr)^5}{384} \tag{10}$$

$$K_1(Mr) \cong \frac{1}{Mr} + \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{4}(-2\gamma + 1) \right] (Mr) + \left[\frac{1}{16} \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{5}{2} - 2\gamma\right) \right] (Mr)^3 \tag{11}$$

Where γ is Euler's constant defined by:

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \ln(m) \right] = 0,5772156649\dots$$

By substituting the values of $I_1(Mr)$ and $K_1(Mr)$ from the above expansions in the velocity equation, Equation (9), and using the new velocity distribution in Equation (6) to find the temperature field. The temperature gradient is given then by the following equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{C_3}{r} - \frac{Br}{r} + \left[\begin{aligned} &2C_2^2 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \frac{2C_2^2}{Mr^2} + C_5(Mr)^6 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) + \\ &C_6(Mr)^6 - \frac{1}{384}C_2^2(Mr)^6 \left(\ln\left(\frac{Mr}{2}\right)\right)^2 \\ &+ C_7(Mr)^2 + C_8(Mr)^4 - \frac{1}{32}C_2^2(Mr)^4 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \\ &+ C_9(Mr)^8 - \frac{1}{3072}C_1C_2(Mr)^8 \ln\left(\frac{Mr}{2}\right) \\ &-\frac{1}{92160}C_1^2(Mr)^{10} \end{aligned} \right] \tag{12}$$

Where the constants C_5 to C_9 are given in terms of C_1 and C_2 as follows:

$$C_5 = \frac{11}{2304}C_1^2 - \frac{1}{192}C_1C_2 - \frac{1}{192}C_2^2\gamma$$

$$C_6 = \frac{11}{2304}C_2^2\gamma + \frac{7}{2304}C_1C_2 - \frac{1}{384}C_2^2\gamma - \frac{1}{384}C_1^2 - \frac{125}{55296}C_2^2 - \frac{1}{192}C_1C_2\gamma$$

$$C_7 = \frac{1}{4}C_2^2\gamma - \frac{7}{16}C_2^2 + \frac{1}{4}C_1C_2$$

$$C_8 = \frac{1}{32}C_2^2 - \frac{1}{32}C_2^2\gamma - \frac{1}{48}C_1C_2$$

$$C_9 = \frac{7}{24576}C_1C_2 - \frac{1}{3072}C_1C_2\gamma - \frac{1}{3072}C_1^2$$

The solution of the energy equation is:

$$\theta = C_4 + C_3 \ln(r) + Br + \left[\begin{aligned} &C_{10}(M)^6 + C_{11}(M)^8 + C_{12}(M)^4 + \frac{1}{2}C_7(M)^2 - \frac{1}{92160}C_1^2(M)^{10} \\ &+ C_2^2 \left(\ln\left(\frac{M}{2}\right) \right)^2 \alpha C_2^2 \ln\left(\frac{M}{2}\right) + \frac{C_2^2}{(M)^2} + \frac{1}{6}C_5(M)^6 \ln\left(\frac{M}{2}\right) \\ &+ C_6(M)^6 - \frac{1}{2304}C_2^2(M)^6 \left(\ln\left(\frac{M}{2}\right) \right)^2 + \frac{1}{6912}C_2^2(M)^6 \ln\left(\frac{M}{2}\right) \\ &-\frac{1}{128}C_2^2(M)^4 \ln\left(\frac{M}{2}\right) - \frac{1}{24576}C_1C_2(M)^8 \ln\left(\frac{M}{2}\right) \end{aligned} \right] \tag{13}$$

Where the Constants C_{10} , C_{11} and C_{12} are given as follows:

$$C_{10} = \frac{1}{36}C_5 + \frac{1}{6}C_6 - \frac{1}{41472}C_2^2$$

$$C_{11} = \frac{1}{8}C_9 + \frac{1}{196608}C_1C_2$$

$$C_{12} = \frac{1}{4}C_8 + \frac{1}{512}C_2^2$$

NUMERICAL STUDY

In this numerical study, we consider two-dimensional and axisymmetric unsteady flow. We opted for the velocity - pressure formulation due to its rapidity of prediction, its lower cost, and its ability to simulate real conditions. The finite difference scheme adopted for the resolution is very similar to that used by Peyrret (1976), and Ghezal and Porterie. (2011), this is a semi implicit scheme of Crank-Nicholson type, iterative process based on the perturbation of the continuity equation by introducing an artificial compressibility. The spatial discretization using the marker and cell (MAC) is shown in Figure 2. The iterative procedure is assumed converged when the following test is verified

$$\max(|L_u|, |L_v|, |L_w|, |L_\theta|, |L_C|, |D|) < \epsilon$$

where L_u , L_v , L_w , L_θ , L_C and D represents operators differences relating to system equations corresponding to the problem variables u , v , w , θ , C and Π respectively, ϵ is of the order of 10^{-5} depending on the considered case.

We then proceeded to a study of the mesh sensitivity of the field of study. This study led us to retain a mesh of 336 nodes along the direction r and 48 nodes in the z direction.

Mathematical equations

Based on these dimensionless variables, the conservation equations of mass, momentum and energy are written in non rotating frame cylindrical coordinates as follows (where the stars are dropped for convenience):

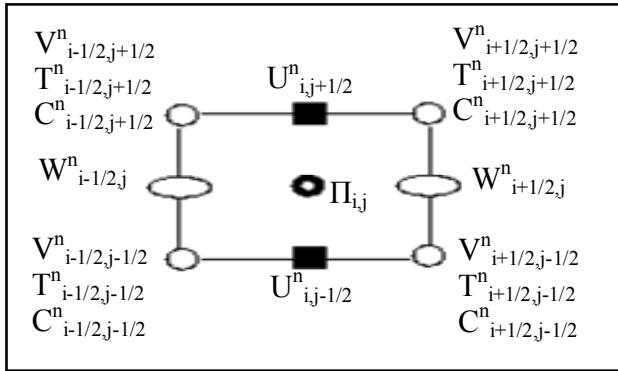


Figure 2. M.A.C cell.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2 u}{(1-\eta)Ta} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2 v}{(1-\eta)Ta} \tag{16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1-\eta}{Ta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Pr Ta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{(1-\eta)Ec\Phi}{Ta} \tag{18}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + v \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1-\eta}{Sc Ta} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \tag{19}$$

Where:

$Ha = Bd \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$ is the Hartmann number,

$Ta = \frac{\Omega_1 r_1 d}{\nu}$ is the Taylor number,

$Pr = \frac{\nu}{a}$ is the Prandtl number

$Sc = \frac{\nu}{D}$ is the Schmidt number,

$d = r_1 - r_2$ is the width of the annular space,

$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$ is the viscous dissipation function.

The rate of heat transfer in non – dimensional for the inner and outer cylinder is given by:

$$Nu_i(z) = -\xi \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=\eta}$$

$$Nu_e(z) = -\xi \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

With: $\xi = 1 - \eta$

The average Nusselt number on the inner and outer cylinders is given by:

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{L} \int_0^z Nu_i(z) dz$$

$$\overline{Nu}_e = \frac{1}{L} \int_0^z Nu_e(z) dz$$

Similarly, we can calculate both local Sherwood number as follows:

$$Sh_i(z) = -\xi \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=\eta}$$

$$Sh_e(z) = -\xi \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

Initial and boundary conditions

At the time $t=0$:

$$u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = \Pi(r, z, 0) = \theta(r, z, 0) = C(r, z, 0) = 0 \tag{20}$$

The boundary conditions are as follows:

$$r = \eta \quad z \geq 0 : \quad u(r_1, z) = v(r_1, z) = w(r_1, z) = 0$$

$$\theta(r_1, z) = C(r_1, z) = 1 \tag{21}$$

$$r = 1 \quad z \geq 0 : \quad u(r_2, z) = v(r_2, z) = w(r_2, z) = 0$$

$$\theta(r_2, z) = C(r_2, z) = 0 \tag{22}$$

$$\eta < r < 1 \quad z = 0 : \quad u = v = w = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

$$z = L : \quad u = v = w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{24}$$

RESULTS AND DISCUSSION

In order to understand the physical situation of the problem and the effects of the Hartmann and Eckert numbers, we have found the numerical and analytical

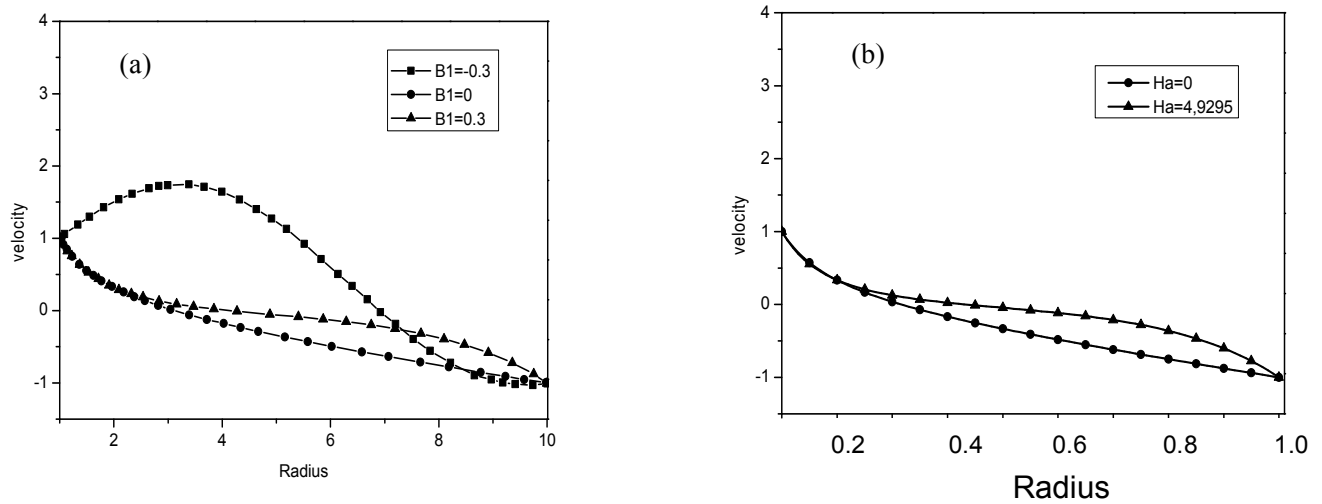


Figure 3. Velocity profile of the fluid in the annulus for $b = -1$, (a) Result of Dizaji Feiz et al. (2008), (b) Results of the present analytical study.

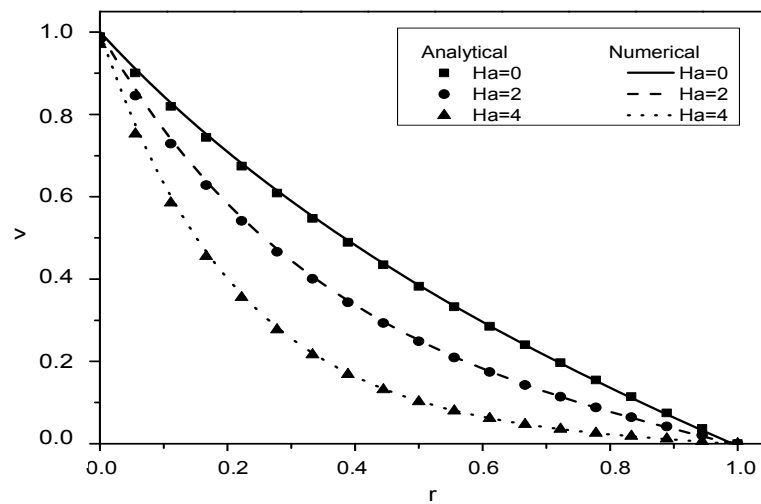


Figure 4. Comparison of analytical and numerical results of velocity profile, for $\eta = 0.5, b=0, Ta=20, t=120$.

values of the velocity, temperature, concentration, the Nusselt number and Sherwood number. The analytical method developed in the present work has been compared in Figure 3 with the results obtained by Feiz-Dizaji (2008), for the velocity profiles of the fluid in the annulus of concentric cylinders with velocity ratio $b = -1$. The results are found to be in good agreement except for the negative values of magnetic field B_1 which cannot exist in our non-dimensional study, Hartmann number (Ha) is a strictly positive non-dimensional number.

The results obtained through the developed code in FORTRAN based on an implicit finite-difference method

described earlier, are compared with those calculated using the analytical approach for small value of Hartmann number. The velocity, temperature and average Nusselt numbers are evaluated analytically and numerically for different values of Hartmann number in Figures 4, 5 and 6.

Obviously, the velocity and temperature profiles, for various Ha obtained via these two different methods, agree with each other reasonably well. We can notice in Figure 4 that the velocity profile without magnetic field $Ha = 0$ is quasi-linear, and an increase in Hartman number, which causes a reduction of the velocity in the annular space because the centrifugal force is counter-productive

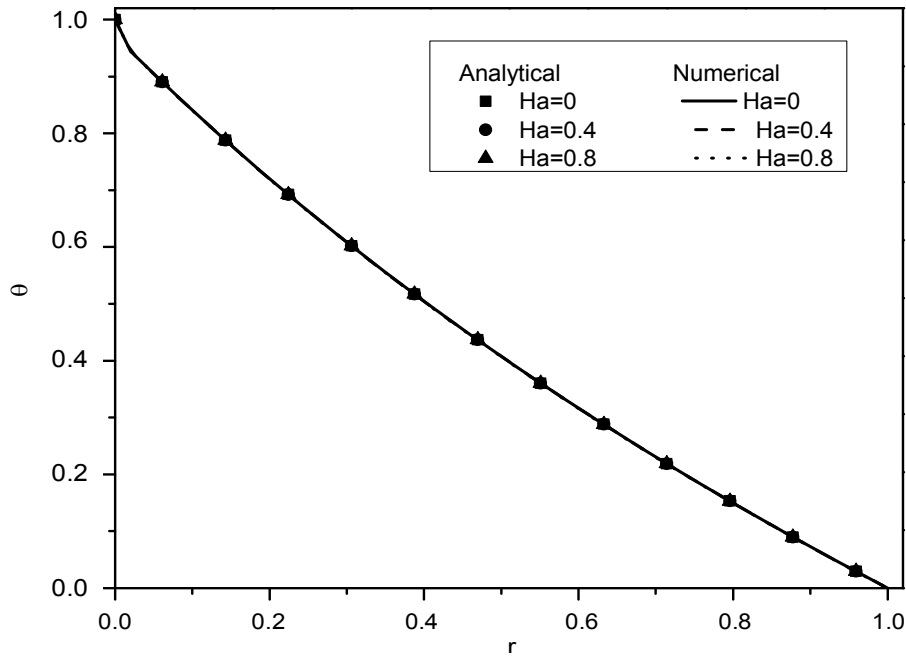


Figure 5. Comparison of analytical and numerical results of temperature profile, for $\eta = 0.5, b=0, Ta=20, Pr = 0.02, Ec=0.5, t=120$.

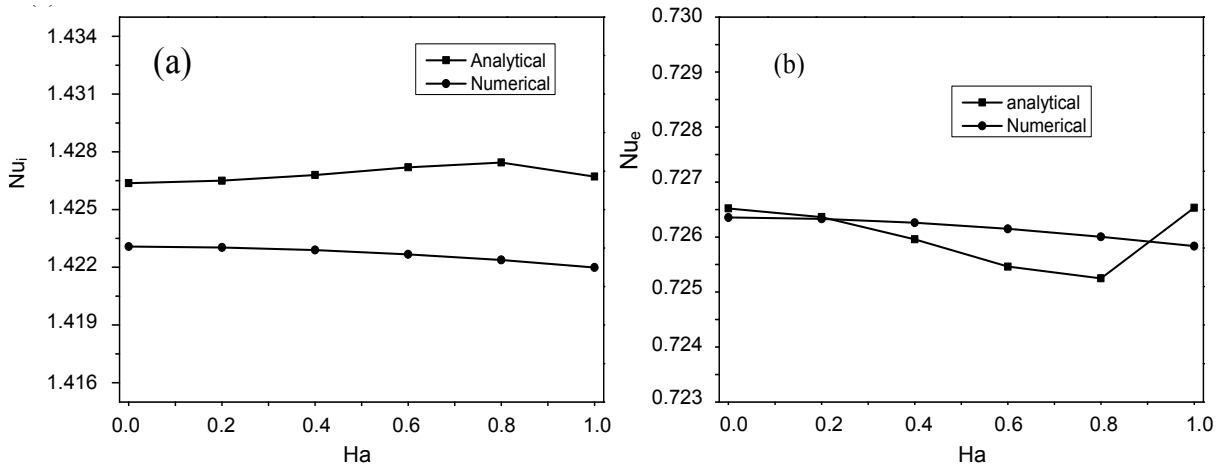


Figure 6. Comparison of analytical and numerical results of average Nusselt number on (a) inner and (b) outer surfaces of the cylinder against the Hartmann number, for $\eta = 0.5, b=0, Pr = 0.02, Ec=0.5$.

and the Lorentz electromagnetic force acts as a flow damper. It is observed from Figure 5 that the effect of weak magnetic field on the radial profile of temperature is insignificant for small value of Prandtl numbers ($Pr=0.02$) which is appropriate for liquid metal. It is valid in the case of low and high values of Hartmann number. Figure 6 displays the effect of Hartmann number on the average Nusselt number on inner and outer surfaces. As can be seen, from this figure that the analytic approach

corresponding to the expansion with three terms of the modified Bessel functions is closer to the numerical approach. The difference between the analytical and numerical values is approximately 10^{-3} , even the results obtained from the present theoretical analysis are restricted to a one-dimensional flow and the numerical results are calculated using two-dimensional axisymmetric flow. Figure 7 shows the effect of Hartmann number on the local Nusselt number on the inner and

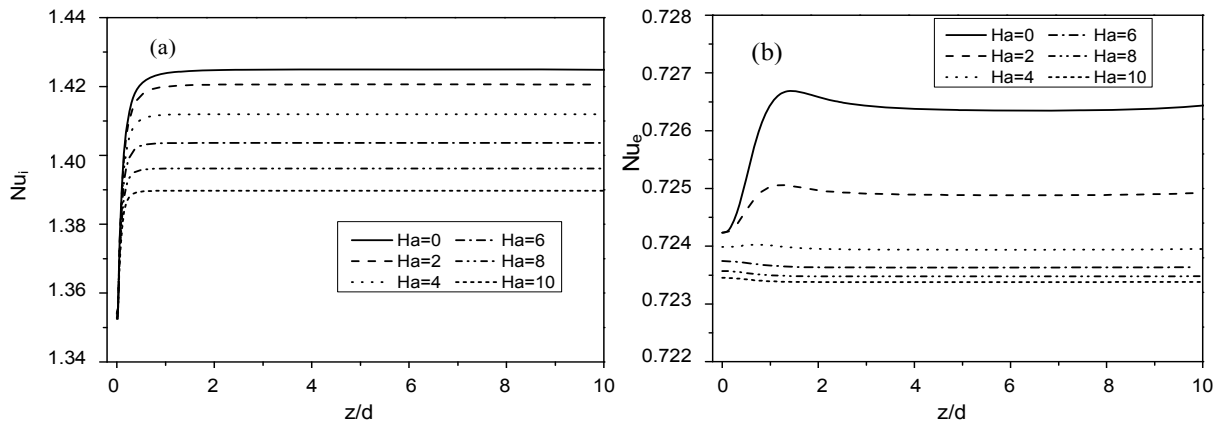


Figure 7. Effect of Hartman number on local Nusselt number distribution on (a) inner and (b) outer cylinders, for $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ec = 0.5$, $t^* = 120$.

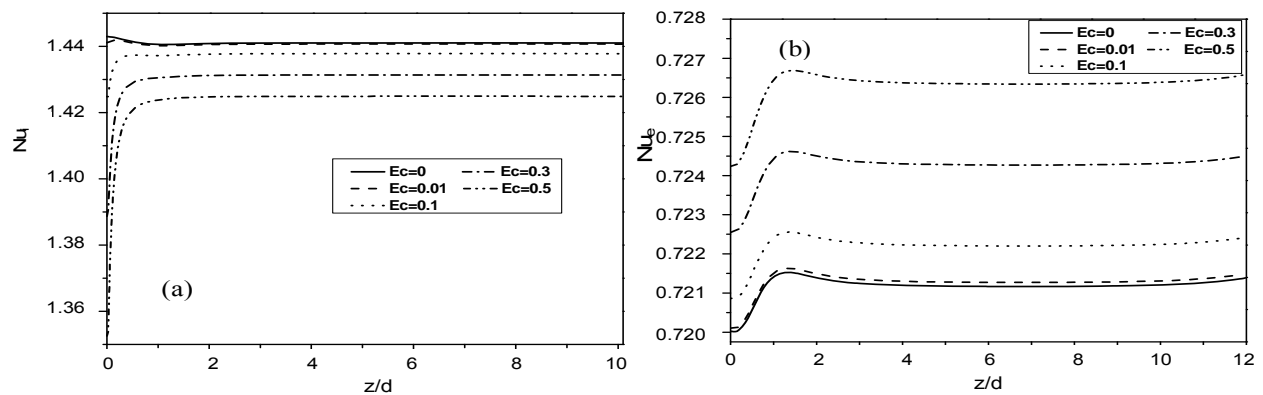


Figure 8. Effect of Eckert number on local Nusselt number distribution on (a) inner and (b) outer cylinders, for $\eta = 0.5$, $Pr = 0.02$, $Ha = 0$, $t^* = 120$.

outer surfaces, for an Eckert number $Ec = 0.5$. It is found that for high values of Hartmann number, the local Nusselt number on the inner and outer surfaces decreases.

In fact when the Eckert number is considerable, the heat generation in the fluid increases because of the viscous dissipation. Thus the temperature of the fluid in the annular space increases causing a decrease in the temperature gradient in the vicinity of the inner cylinder and an increase of the gradient in the vicinity of the outer cylinder. A significant increase in the Hartmann number causes a reduction of the centrifugal force, which results in a gradual decrease in the Nusselt number. It is worth to mention that this phenomenon is in full accordance with what was previously observed by Mozayeni (2013) for a horizontal cylindrical annulus, also by El-Amin (2003) for horizontal cylinder in a porous medium and by Takhar et al. (2003). for rotating vertical cone.

The analysis of the variation of local Nusselt number on the inner and outer cylinder shows that this number tends to a limit value. It can be noticed that the Nusselt number on the outer cylinder is lower than on the inner cylinder, because the velocity and temperature gradient are higher for the cold inner cylinder than for the outer cylinder. It should be also noted that the effect of magnetic field on the temperature distribution is insignificant, whereas the changes induced by the magnetic field on the temperature gradient and therefore on the Nusselt number is considerable.

Effect of Eckert number on the distribution of local Nusselt number on the inner and outer cylinders is displayed in Figure 8, for $Ha = 0$. As can be seen, with increase of Eckert number, the influence of heat transfer due to the viscous dissipation in the annular space is improved, which leads to the increase in the average temperature of the fluid at this region, especially near the

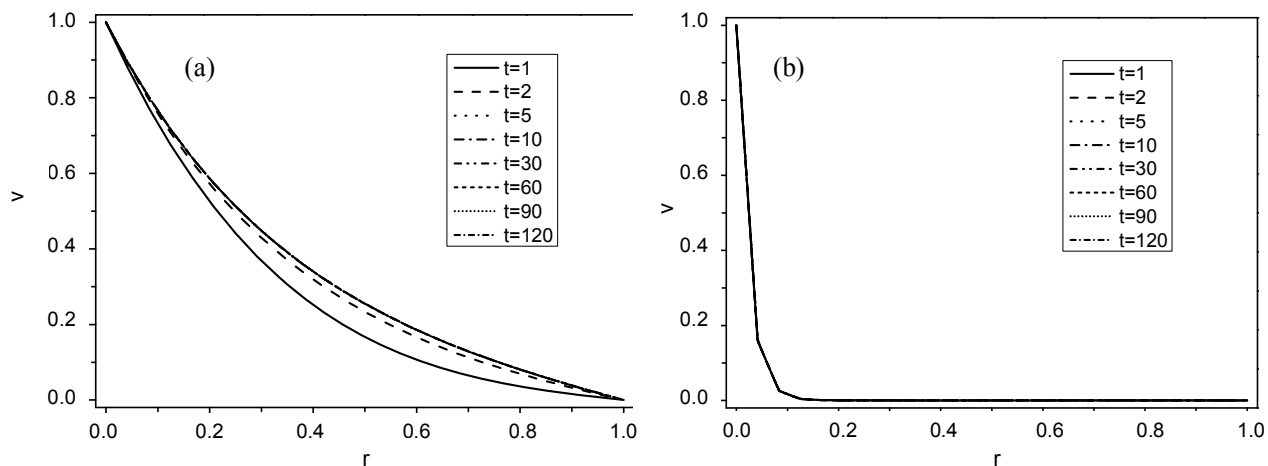


Figure 9. Velocity distribution at different times at $z/d=7$ and for $Ta=20$, (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 50$.

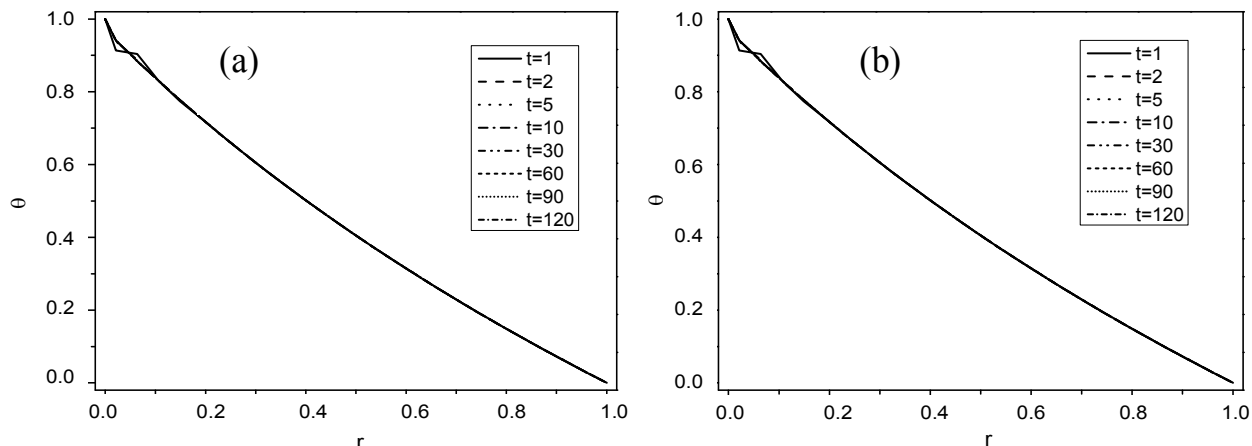


Figure 10. Temperature distribution at different times for $z/d=7$, $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=0.02$, for (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha=50$.

inner cylinder, to be more than in the past. The dimensionless temperatures of inner and outer cylinders are maintained at 1.0 and 0.0, respectively.

It is evident that by increasing the average temperature of fluid in annular space, the rate of heat transfer between the fluid and inner cylinder decreases due to the reduction of the temperature difference between them. In contrast to the other case, the local Nusselt number on the outer cylinder increases as the Eckert number increases because of the enhancement of temperature differences between the fluid and the outer cylinder.

In this part, some results are presented in different non-dimensional time values for the distribution of velocity and temperature in the annulus Figures 9, 10, and 11. From Figure 10, we can notice that for a small value of

Prandtl number ($Pr=0.02$), The effect of the time variation is found to be not significant on the temperature, it reaches faster a steady-state to the point that we can't notice the difference between the steady and unsteady states flows. As we know, for larger fluid Prandtl number, the momentum flow transfer is faster than heat transfer. This can be seen clearly in Figure 11 (for a fluid with $Pr = 7$) and the distribution of the azimuthal component of velocity reaching a steady-state quicker than the temperature at the mid-length. There is not much difference in velocity at $t = 10$, compared to $t=120$, but comparing temperature distribution at $t=10$ with values greater than 10, it indicates that much more time is still needed to reach steady-state.

The effects of Hartmann number on the concentration

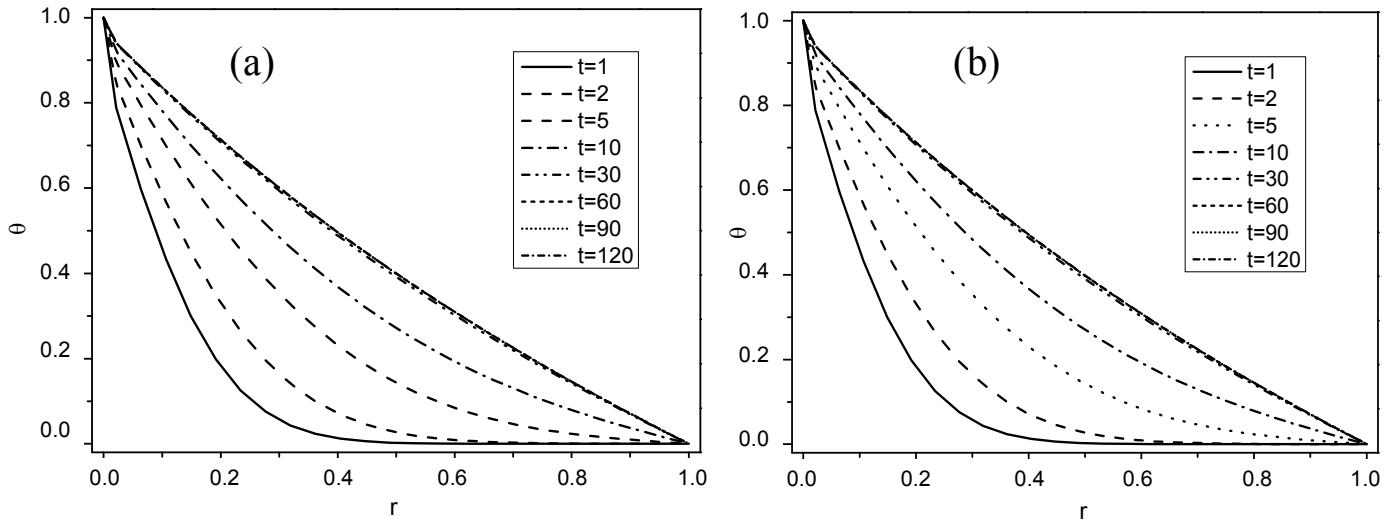


Figure 11. Temperature distribution at different times at $z/d=7$, for $Ta=20$, $Ec=0$, $Pr=7$, for (a) $Ha = 2$ and (b) $Ha = 5$.

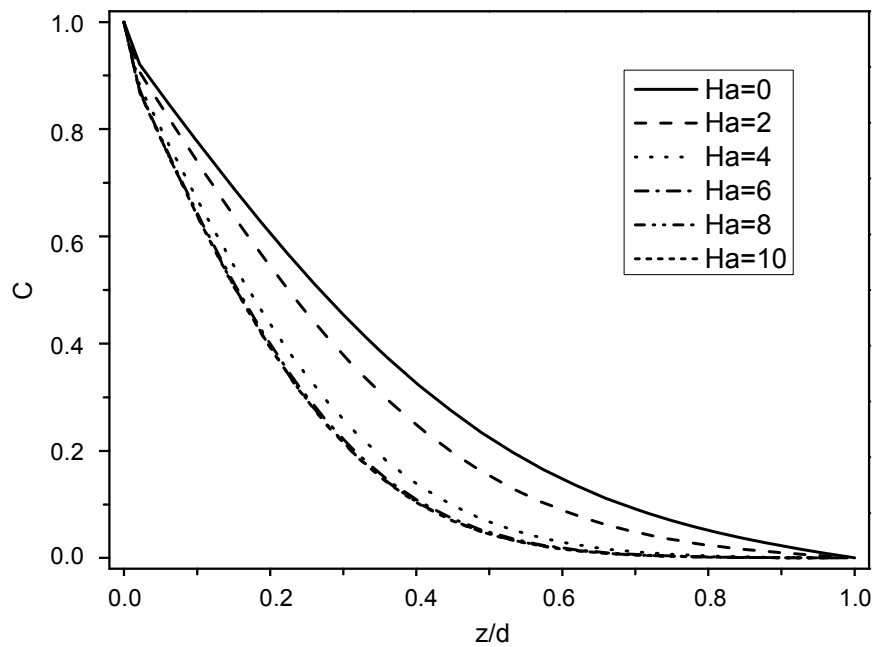


Figure 12. Concentration profile as a function of Hartmann number, for $\eta = 0.5$, $Ta=20$, $Pr= 0.02$, $Ec=0$, $t=120$, $z/d=7$.

At the annulus center are shown in Figure 12. It is observed that the concentration decrease from the inner cylinder where is considered to be a source for the concentration to tends towards almost zero value in the outer cylinder. As can be also seen from this figure, for increasing Hartmann number the concentration decreases in the annular cavity.

The mass transfer rate across the annular cavity is investigated using the computed local Sherwood numbers in the inner and outer cylinders, for different Hartmann number and $Sc=10$ in Figure 13. It can be noticed that the rate of mass transfer is higher on the inner cylinder than on the outer cylinder. This is reasonable to expect since the velocity and concentration

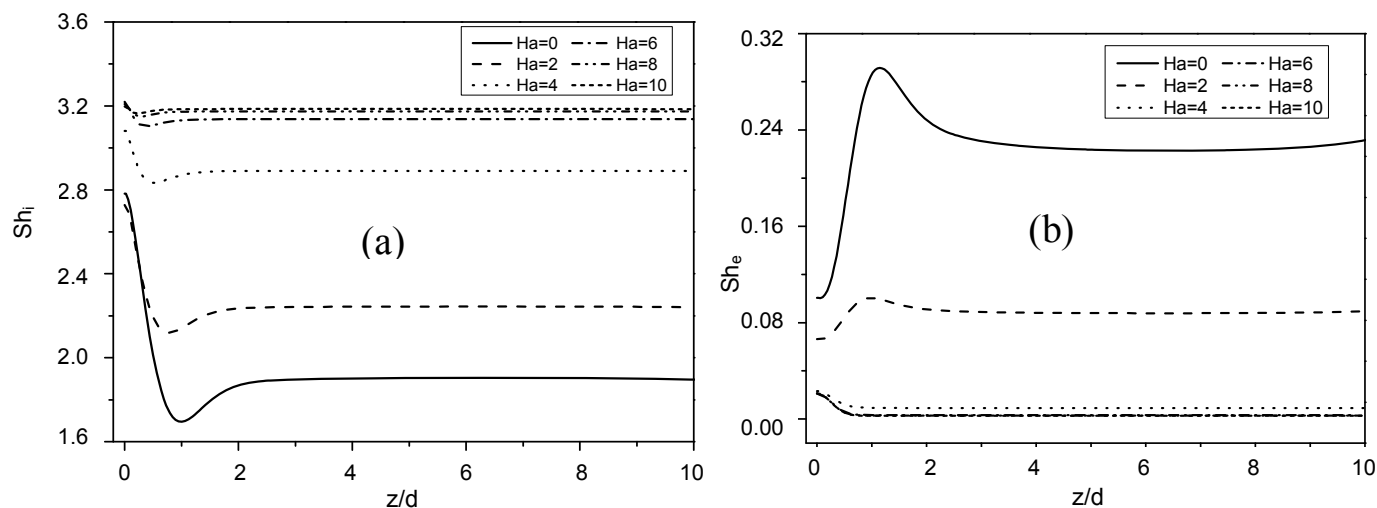


Figure 13. Effect of Hartman number on local Sherwood number distribution on (a) inner and (b) outer cylinders, for $\eta = 0.5$, $Sc=10$, $Ec=0$, $t=120$.

gradient are higher for the inner cylinder than for the outer cylinder. The rate of mass transfer profile on the outer surface is decreased with decreasing the values of the magnetic field parameter. Another interesting point is the unexpected behavior of local Schmidt number with an increase in Hartman number, the application of an axial magnetic field tends to decrease the mass transfer on the inner cylinder.

CONCLUSION

In this study, the MHD forced convection flow and mass transfer of an electrically conducting fluid between two horizontal concentric cylinders in the presence of an axial magnetic field considering the effects of viscous heat dissipation in the fluid has been investigated numerically and analytically. The velocity distribution in the annulus is obtained analytically in terms of the modified Bessel functions whose argument contains Hartmann number and radial coordinate. To obtain the temperature, the expansions of the modified Bessel functions, with three terms are used in the energy equation.

It is found that the velocity and concentration decreases in the annulus with increase of Hartmann number. However, an increase in Hartmann number does not affect the temperature. The effects of magnetic field strength and Eckert number on local Nusselt number have been examined. The results show that an increase in Hartmann number reduces the Nusselt number on both surfaces of the cylinders. Also it was noticed that as the Eckert number increases local Nusselt number increases on the outer cylinder, but opposite trend is observed on the inner cylinder. The application of a magnetic field generates some interesting changes in mass transfer, an

increasing in Hartmann number causes a reduction on the locale Sherwood number.

Conflict of Interest

The authors have not declared any conflict of interest.

REFERENCES

- Aminfar H, Mohammadpourfard M, Maroofiazar R (2014). Experimental study on the effect of magnetic field on critical heat Flux of ferrofluid flow boiling in a vertical annulus. *Exper. thermal. fluid sci.* [://dx.doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2014.06.023](http://dx.doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2014.06.023).
- Ashorynejad Hamid RA, Mohamad A, Sheikholeslami M (2013). Magnetic field effects on natural convection flow of a nanofluid in a horizontal cylindrical annulus using Lattice Boltzmann method. *Int. J. Thermal Sci.* pp. 240-250. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.006>
- Azim MA, Mamun AA, Rahman MM (2010). Viscous Joule heating MHD-conjugate heat transfer for a vertical flat plate in the presence of heat generation. *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 37:666-67. <http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.02.002>
- Ben HH, Henry D (1996). Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field. *J. Cryst. Growth* 166:436-673. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0248\(96\)00044-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0248(96)00044-9)
- Bessaïh R, Boukhari A, Marty PH (2009). Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer. *Int. Commun. Heat. Mass Transfer* 36:893-901. <http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2009.06.009>
- Hayat T, Kara AH (2006). Couette flow of a third-grade fluid with variable magnetic field. *Math. Compute. Modeling* 43:132-137. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2004.12.009>
- EI-Amin MF (2003). Combined effect of viscous dissipation and joule heating on MHD forced convection over a non-isothermal horizontal cylinder embedded in a fluid saturated porous medium. *J. Magnet. Magnetic Mater.* 263:337-343. [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853\(03\)00109-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853(03)00109-4).
- Ellahi R, Hayat T, Mahomed FM, Zeeshan A (2010). Analytic solutions

- for MHD flow in an annulus. *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* 15:1224–1227. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.050>
- Feiz-Dizaji A, Salimpour MR, Jam F (2008). Flow field of a third-grade non-Newtonian fluid in the annulus of rotating concentric cylinders in the presence of magnetic field. *J. Math. Anal. Appl.* 337:32–645. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.110>
- Ghezal A, Porterie B (2011). Loraud J.C., Etude dynamique et thermique d'un écoulement pulsé en présence d'un solide chauffé en rotation. *Mécanique Industries* 12:45-65. <http://dx.doi.org/10.1051/meca/2011004>
- Molki M, Astill KN, Leal E (1990). Convective heat-mass transfer in the Convective heat-mass transfer in the entrance region of a concentric annulus having a rotating inner cylinder entrance. *Int. J. Heat. Fluid Flow*, 11:2. [http://dx.doi.org/10.1016/0142-727X\(90\)90005-V](http://dx.doi.org/10.1016/0142-727X(90)90005-V)
- Kakarantzas SC, Sarris IE, Vlachos NS (2011). Natural convection of liquid metal in a vertical annulus with lateral and volumetric heating in the presence of a horizontal magnetic field. *Int. J. Heat. Mass Transfer* 54:3347–3356. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.03.051>
- Makinde OD, Onyejekwe OO (2011). A numerical study of MHD generalized Couette flow and heat transfer with variable viscosity and electrical conductivity. *J. Mag. Magn. Mater.* 323:2757–2763. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2011.05.040>
- Mozayyeni HR, Rahimi AB (2012). Mixed convection in cylindrical annulus with rotating outer cylinder and constant magnetic field with an effect in the radial direction. *Scientia Iranica B* 19(1)91–105. <http://dx.doi.org/10.1016/j.scient.2011.12.006>
- Omid M, Shohel M, Ioan P (2012). Analysis of first and second laws of thermodynamics between two isothermal cylinders with relative rotation in the presence of MHD flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* 55:4808–4816. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.04.048>
- Peyret R (1976). Unsteady evolution of horizontal jet in a stratified fluid. *J. Fluid mech.* 78:(1):49-63. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112076002322>
- Sankar M, Venkatachalappa M, Shivakumara IS (2006). Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus. *International J. Eng. Sci.* 44:1556–1570. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2006.06.004>
- Seth GS, Ansari MdS, Nandkeolyar R (2011). Effects of rotation and magnetic field on unsteady Couette flow in a porous channel. *J. Appl. Fluid Mech.* 4(2):95-103. Available online at www.jafmonline.net
- Seth GS, Singh JK (2013). Effects of Hall current of unsteady MHD Couette flow of class-II in a rotating system. *J. Appl. Fluid Mech.* 6(4):473-484. Available online at www.jafmonline.net
- Sheikholeslami M, Gorji-Bandpy M, Ganji DD, Soleimani S (2013). Effect of a magnetic field on natural convection in an inclined half-annulus enclosure filled with Cu–water nanofluid using CVFEM. *Advan. Powder Technol.* 24(6):980–991. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apt.2013.01.012>
- Sheikholeslami M, Gorji-Bandpy M, Ganji DD (2014). MHD free convection in an eccentric semi-annulus filled with nanofluid. *J.Taiwan Instit. Chem. Eng.* 1204–1216. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtice.2014.03.010>
- Singh SK, Jha BK, Singh AK (1997). Natural convection in vertical concentric annuli under a radial magnetic field. *Heat. Mass Transfer*, 32:399–401, Springer-Verlag. <http://dx.doi.org/10.1007/s002310050137>
- Venkatachalappa M, Do Younghae Sankar M (2011). Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus. *Int. J. Eng. Sci.* 49:262–278. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.12.002>
- Kefeng Shi, Wen-Qiang Lu (2006). Time evolution of double-diffusive convection in a vertical cylinder with radial temperature and axial solutal gradients. *Int. J. Heat. Mass Transfer* 49:995-1003. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.0.009>
- Takhar HS, Chamkha AJ, Nath G (2003). Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with a magnetic field, *Heat Mass Transfer* 39:297–304. <http://dx.doi.org/10.1007/s00231-002-0400-1>
- Teamah MA (2007). Numerical simulation of double diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder. *Int. J. Thermal Sci.* 46:637–648. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.09.002>