الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامـعة أمحمد بوقرة بومـرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

*Ministère de l'enseignement supérieur*
*Et de la recherche scientifique*

*Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès*
*Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales*
*Etdes Sciences De Gestion*

# مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

# محاضـرات و تطبيقات
# فـي مقياس رياضيات2

**موجهة لطلبة** :
السنة الأولى

**تخصص**: جذع مشتركLMD

**من اعداد الدكتور**

دحموني خليجة

قسـم : العلوم التجارية

**السنة الجامعية:**.2022 /.2023

## المقدمة

يعتبر الجبر الخطي أحد أهم المواضيع الأساسية في كثير من مجالات العلوم، من بينها بحوث العمليات والمعلوماتية والاتصالات، وعلوم التسيير وغيرها.

تحتوي هذه المطبوعة على دروس وأمثلة وتمارين مقترحة في مقياس رياضيات2، موجهة بالدرجة الأولى لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير.

يمكن استخدام هذه المطبوعة كمقرر منهجي للطلبة لدراسة مقياس رياضيات2، وكمصدر مهم للعلوم الأخرى، من هنا كان التوجه للإسهام بهذا الجهد المتواضع نضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء واثراء للمكتبة الجامعية بإضافة جديدة.

تتكون هذه المطبوعة من خمسة فصول يشمل كل فصل على الدرس وأمثلة مختلفة محلولة، وتمارين مقترحة مع الحل.

الفصل الأول: المعادلات التفاضلية.

الفصل الثاني: الدوال ذات متغيرين.

الفصل الثالث : المصفوفات والعمليات عليها.

والفصل الرابع: محدد ومقلوب مصفوفة.

والفصل الخامس: حل جملة المعادلات الخطية.

## الفهرس.

الفصل الخامس: حل جملة المعادلات الخطية

## تعريف المعادلة التفاضلية:

لتكن $y$ دالة للمتغير الحقيقي $x$ قابلة للاشتقاق n مرة نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots\dots\dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$

حيث $y^{(n)}$ هي المشتقة النونية ل$y$.

يسمى الشكل العام ل $y(x)$ الذي يحقق المعادلة $(1)$ بالحل العام للمعادلة التفاضلية، و نسمي حل خاص للمعادلة التفاضلية كل حل يحقق بعض الشروط الخاصة و تسمى هذه الشروط بالشروط الابتدائية.

و توجد سبعة أنواع من المعادلات التفاضلية لكننا سنكتفي بالأنواع الاتية:

## تعريف المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

**هي علاقة تربط بين الدالة Y ومشتقتها الأولى للمتغير $x$ وتكون من الشكل: $\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$**

**مثلا $y' + 2y = 3x + 1$ وهناك عدة أنواع نخص بالذكر:**

1. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والقابلة للفصل وطرق حلها:

**تكون هذه المعادلات من الشكل:**

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

**يجب كتابة المعادلة التفاضلية كما يلي:** $f(x)dx = g(y)dy$

**ثم نكامل الطرفين، أي:**

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

**ونجد $y$ بدلالة $x$وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.**

- **من هنا يتضح أنه يمكن تقسيم هذا النوع من المعادلات التفاضلية إلى 3 أشكال:**

**<u>الشكل الأول:</u> لما يكون فصل المتغيرات فيها بهذا الشكل:**

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dy = f(x)dx \Leftrightarrow \int dy = \int f(x)dx$$

**ومنه يكون الحل العام هو:**

$$y = g(x) + c \ \ /c \in R$$

**حيث$g$هي الدالة الأصلية للدالة** $f$

**مثال** 1**: حل المعادلة التفاضلية التالية**:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow dy = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$$

**الحل:** $\boldsymbol{y = -\frac{1}{x} + ln|x| + c}$

**اوجد الحل الخاص للمعادلة السابقة من أجل** $x = 1 \ ; \ \ y = 2$

**بالتعويض في الحل العام** $x = 1 \ , \ \ y = 2$ **نجد** :

$$2 = -1 + \ln(1) + c \ \Leftrightarrow 2 = -1 + c$$

$$c = 3$$

**إذا الحل الخاص للمعادلة هو:**

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{x} + ln|x| + 3}$$

**<u>الشك الثاني:</u> لما يكون فصل المتغيرات فيها بهذا الشكل:**

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

**فإن** $\boldsymbol{\frac{dy}{f(y)}}$ =dx

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

**ومنه نجد الحل العام يكون على الصورة:**

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

**مثال: حل المعادلة التفاضلية :**

$$\frac{dy}{dx} + ay + b = 0 \dots 1$$

**الحل: يمكن كتابة المعادلة على الشكل:**

$$\frac{dy}{ay+b} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{ay+b} = -\int dx$$

**الحل العام للمعادلة:**

$$\boldsymbol{\frac{1}{a} ln|ay+b| = -x + c}$$

**<u>الشكل الثالث:</u> عندما يكون فصل المتغيرات فيها بالشكل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \Leftrightarrow g(x)dx = f(y)dy$$

**ومنه يكون الحل العام على الصورة:**

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c$$

**يجب أن نلاحظ أننا نحتاج إلى ثابت c واحد فقط.**

**مثال 1:**

أ- **حل المعادلة التفاضلية التالية:**

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$$

الحل: هذه المعادلة كما هي مكتوبة تظهر أنها صعبة ولكننا يمكن أن نغير كتابتها فتصبح على الصورة الآتية:

$$e^{-3y}dy = e^{2x}dx$$

ثم نكامل الطرفين:

$$\int e^{-3y}dy = \int e^{2x}dx$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

ب- **أوجد الحل الخاص لما يكون:** $x = 0$ و $y = 0$

الحل: بالتعويض في الحل العام نجد قيمة c :

$$-\frac{1}{3}e^{-3(0)} = \frac{1}{2}e^{2(0)} + c$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\frac{5}{6}$$

ومنه الحل الخاص للمعادلة هو:

$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{6}$$

مثال 2: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} + y^2e^x = y^2$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$\frac{dy}{dx} = y^2(1 - e^x)$$

$$\frac{dy}{y^2} = (1 - e^x)dx$$

**ثم نكامل الطرفين نجد:**

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (1 - e^x)dx$$

**الحل العام للمعادلة :**

$$-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c}$$

2. المعادلات التفاضليةالخطية من الرتبة الثانية:

**تعريف: تسمى معادلة خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة كل معادلة من الشكل:**

$$ay'' + by' + cy = f(x) \dots (*)$$

**حيث** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **و** $a \neq 0$ **و** $f$ **دالة.**

- **إذا كانت** $f(x) = 0$ **فإن المعادلة (*)تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية متجانسة:** $ay'' + by' + cy = 0$

**أما إذا كانت** $f(x) \neq 0$ **فإن المعادلة** $(*)$**غير متجانسة**

**بالنسبة لنا، سنهتم بالمعادلة التفاضلية المتجانسة.**

- **المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:**

**تكون عبارة عن علاقة تربط بين الدالة**$y$ **ومشتقاتها المتعاقبة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية)، وتكون من الشكل:**

$$y'' + by' + cy = 0 \dots (1)$$

**حيث** $a, b, c \in\in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

**كيفية حل المعادلة (1):**

نستعمل تحويل المتغير كما يلي:

$$\begin{cases} r^2 = y'' \\ r = y' \\ 1 = y \end{cases}$$

نتحصل على معادلة من الدرجة الثانية:

$$ar^2 + br + c = 0 \ldots (2)$$

نستعمل المميز Δ للحل:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

<u>نظرية:</u>

أ- $\Delta > 0$ المعادلة تقبل حلان متمايزان هما:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ومنه حلول المعادلة (1) هي:

الحل العام → $\boldsymbol{y = \alpha^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}}$ حيث $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$

ب- $\Delta = 0$ حلول المعادلة (2) هي جذر مضاعف:

$$r_0 = -\frac{b}{2a}$$

وحلول المعادلة (1) هي:

$\boldsymbol{y = (\alpha + \beta x) e^{r_0 x}}$ حيث $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$

<u>أمثلة:</u>

مثال1: حل المعادلة التفاضلية: $y'' + 3y' + 2y = 0$

الحل:

$$on\ pose: y'' = r^2, y' = r\ , y = 1$$

نجد:

المعادلة المميزة: $r^2 + 3r + 2 = 0 \ldots (1)$

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

المعادلة (1) تقبل جذران متمايزان هما:

$$r_1 = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$r_2 = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

**الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:**

$$\boldsymbol{y = \alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} \quad / \quad \alpha, \beta \in R}$$

**مثال**2: **حل المعادلة التفاضلية:** $y'' + 3y' - 4y = 0 \ldots (1)$

**ثم أوجد الحل الخاص لما يتحقق الشرطين:** $y'(0) = 1$ **و** $y(0) = 2$

**الحل: المعادلة المميزة ل**(1) **هي:**

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad , \quad \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -4 \end{cases}$$

**الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:**

$$\boldsymbol{y = \alpha e^{x} + \beta e^{-4x} \qquad \alpha, \beta \in R}$$

- **من أجل** $y(0) = 2$: $\alpha + \beta = 1$
- **من أجل** $y'(0) = 1$:
- $y' = \alpha e^{x} - 4\beta e^{-4x} \qquad \alpha, \beta \in R$

$$y'(0) = \alpha - 4\beta = -1$$

**نحل جملة المعادلتين:**

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 4\beta = -1 \end{cases}$$

**نجد:**

$$\alpha = \frac{7}{5} \quad ، \quad \beta = \frac{3}{5}$$

**ومنه الحل الخاص في هذه الحالة للمعادلة التفاضلية هو:**

$$\boldsymbol{y = \frac{7}{5} e^{x} + \frac{3}{5} e^{-4x}}$$

**مثال** 3: **حل المعادلة التفاضلية التالية:** $y'' - 6y' + 9y = 0$

**الحل:**

نضع: $1 = y \quad , \quad r = y' \quad , \quad r^2 = y''$

نجد المعادلة المميزة: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(9) = 36 - 36 = 0$$

إذا المعادلة المميزة تقبل جذرا مضاعفا هو: $r0 = \frac{6}{2} = 3$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\boldsymbol{y = (\alpha + \beta x)e^{3x}} \qquad \boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$$

مثال4: حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 4y = 0$

ثم أوجد الحل الخاص لما يتحقق الشرطين:

$$y'(0) = 2 \,, \qquad y(0) = 1$$

الحل:

المعادلة المميزة: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - (4 \times 4) = 16 - 16 = 0$$

المعادلة المميزة تقبل جذر مضاعف هو: $r_0 = \frac{4}{2} = 2$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\boldsymbol{y = (\alpha + \beta x)e^{2x}}$$

لما: $y(0) = 1 \;,\; \big(\alpha + \beta(0)\big)e^0 = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$y'(x) = \beta e^{2x} + 2[\alpha + \beta(x)]e^{2x} \,, \qquad y'(0) = 2$$

$$y'(0) = \beta + 2\alpha \quad ,\alpha = 1 \Leftrightarrow \beta + 2 = 2 \Leftrightarrow \beta = 0$$

إذا الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو: $\boldsymbol{y = e^{2x}}$

## 3. تمارين مقترحة للفصل الأول:

**التمرين الأول:** حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $x + yy' = 0$

2) $y' = \dfrac{y}{x}$

3) $y' + e^x y = e^x y^2$

**التمرين الثاني:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{-y}{x-3}$$

ثم الحل الخاص لما يكون: $x = 4 , y = 1$

**التمرين الثالث:** حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y'' + y' - 2y = 0$

2) $4y'' + 4y' + y = 0$

3) $4y'' + y = 0$

**التمرين الرابع:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

ثم الحل الخاص لما يكون: $y(0) = 3 , y'(0) = 1$

4. حلول التمارين المقترحة:

**حل التمرين الأول:**

$$1)\quad x + yy' = 0$$

$$yy' = -x \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = -x \quad \Leftrightarrow \quad ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y^2 = -x^2 + \frac{1}{2}c \quad , \quad \frac{1}{2}c = \alpha$$

**الحل العام للمعادلة** 1:

$$\boldsymbol{y^2 = -x^2 + \alpha}$$

$$2)\quad y' = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

**الحل العام:**

$$ln|y| = ln|x| + c \quad \Leftrightarrow e^{ln|y|} = e^{ln|x|+c} \quad \Leftrightarrow$$

$$|y| = e^{ln|x|}.e^c \quad \Leftrightarrow |y| = |x|.e^c$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = |x|.e^c} \\ \boldsymbol{y = -|x|.e^c} \end{cases}$$

$$3)\quad y' + e^x y = e^x y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x y^2 - e^x.y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(y^2 - y) \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = e^x dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int e^x dx = e^x + c$$

**لإيجاد تكامل $\frac{dy}{y^2-y}$ يجب أن نفرق الكسر:**

$$\frac{1}{y^2-y}=\frac{1}{y(y-1)}$$

$$\frac{1}{y(y-1)}=\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(y-1)+\frac{\beta y}{y(y-1)}=\frac{1}{y(y-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)y-\alpha}{y(y-1)}=\frac{1}{y(y-1)}$$

**بالمطابقة نجد:**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\alpha=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

**بالتعويض نجد:**

$$\frac{1}{y(y-1)}=-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}$$

**ومنه يصبح التكامل:**

$$\int\frac{1}{y^2-y}dy=\int\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)dy = \int-\frac{1}{y}dy+\int\frac{1}{y-1}dy$$

**الحل العام للمعادلة التفاضلية**

$$\boldsymbol{-ln|y|+ln|y-1|=e^x+c}$$

**حل التمرين الثاني:**

$$y'=-\frac{y}{x-3}\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x-3} \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{1}{x-3}dx$$

$$\int dy\frac{1}{y}=-\int\frac{1}{x-3}dx$$

**الحل العام للمعادلة (1) هو:**

$$\boldsymbol{ln|y| = -ln|x-3| + c}$$

**الحل الخاص:**

X=4 **و** y=1 **نعوض في الحل العام نجد :**

$$ln|1| = -ln|4-3| + c$$

$$ln1 = -ln1 + c \;\Leftrightarrow\; ln1 + ln1 = c \;\Leftrightarrow\; 2ln1 = c$$

**لدينا:** $ln1 = 0$ **ومنه:** $c = 0$ **أي الحل الخاص هو:**

$$ln|y| = -ln|x-3| + 0$$

$$\boldsymbol{ln|y| = -ln|x-3|}$$

**حل التمرين الثالث: نضع:**

$$1) \quad y'' + y' - 2y = 0 \;:\; \quad y'' = r^2, \qquad y' = r, \qquad y = 1$$

**نجد المعادلة المميزة هي:**

$$r^2 + r - 2 = 0 \;: \quad \Delta = (1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$$

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

**الحل العام للمعادلة (1):**

$$\boldsymbol{y = \alpha e^{x} + \beta e^{-2x}} \;, \qquad \boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$$

$$2) \qquad 4y'' + 4y' + y = 0$$

**المعادلة المميزة هي:**

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \;: \qquad \Delta = 4^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

**المعادلة المميزة تقبل جذر مضاعف هو:** $r_0 = -\frac{4}{2} = -2$

الحل العام للمعادلة (2) هو:

$$\boldsymbol{y=(\alpha+\beta x)e^{-2x}}$$

$$3)\quad 4y''+y=0$$

المعادلة المميزة:

$$4\mathrm{r}^2+1=0\ :\quad \Delta=0\ \Rightarrow r_0=0$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (3) هو:

$$y=(\alpha+\beta x)e^0\ ,\quad e^0=1$$

ومنه: $\boldsymbol{y=\alpha+\beta x\ ,\quad \alpha,\beta\in R}$

حل التمرين الرابع:

$$3)\quad y''-4y'+4y=0$$

المعادلة المميزة هي:

$$r^2-4r+4=0\ ,\quad \Delta=(-4)^2-4(1)(4)=0$$

ومنه المعادلة المميزة تقبل حل مضاعف هو: $r_0=\frac{4}{2}=2$

والحل العام للمعادلة (1) هو:

$$\boldsymbol{y=(\alpha+\beta x)e^{2x}\ ,\quad \alpha,\beta\in R}$$

الحل الخاص لما: $y(0)=3\ ,\ y'(0)=1$

$$y(0)=3\ \Leftrightarrow\ \big(\alpha+\beta(0)\big)e^0=3\ \Leftrightarrow\ \alpha=3$$

$$y'(x)=2(\alpha+\beta x)e^{2x}+\beta e^{2x}$$

$$y'(0)=1\ \Leftrightarrow\ 2(\alpha+0)e^0+\beta e^0=1\ \Leftrightarrow\ 2\alpha+\beta=1$$

ولدينا سابقا: $\alpha=3$ نعوض:

$$2(3)+\beta=1\ \Leftrightarrow\ \beta=1-6=-5$$

ومنه الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$\boldsymbol{y=(3-5x)e^{2x}}$$

# الفصل الثاني:
# الدوال ذات متغيرين

1. **تعريف:**

**نسمي دالة ذات متغيرين كل دالة ترفق بالثنائية $(x, y)$ من $R \times R$**

**عددا حقيقيا على الأكثر $Z$ من $R$ بحيث: $Z = f(x, y)$ ونكتب:**

$$f: R \times R \to R$$
$$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

**أمثلة:**

$$f_1(x, y) = 2x + 3y - 4$$
$$f_2(x, y) = x^2 + 3xy^3 - 2y$$

2. **منطقة تعريف الدالة ذات متغيرين:**

**نسمي مجال تعريف الدالة $f$ المعرفة من مجموعة البدء كل العناصر التي لها صور في مجموعة الوصول و نرمز لها ب $D_f$ وهي مجموعة جزئية من المستوي.**

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \quad Z = f(x, y)\}$$

**أمثلة:**

1) $f_1(x, y) = 2x + 3y - 4 \qquad D_{f_1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) $f_2(x, y) = \dfrac{3xy - 5}{x - y}$

$$Df_1 = \{(x, y) \in R^2 / \ x - y \neq 0\}$$
$$Df_2 = \{(x, y) \in R^2 / \ x \neq y\}$$

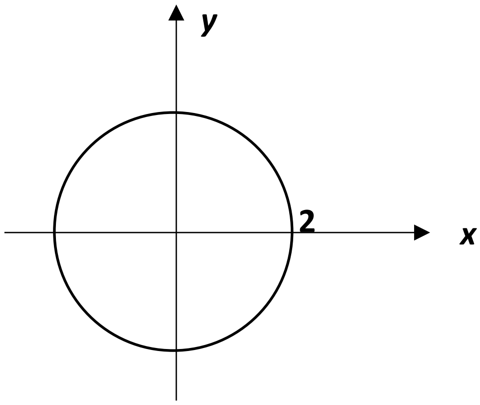
3) $f_3(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

$$Df_3 = \{(x, y) \in R^2 / \ x^2 + y^2 \neq 0\}$$
$$x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0,0)$$

4) $f_4(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$

$$Df_4 = \{(x, y) \in R^2 / \ x^2 + y^2 \neq 4\}$$

$\boldsymbol{Df}$ هو المستوي المنزوع منه الدائرة التي مركزها النقطة$(0;0)$ونصف قطرها2




$$5) \quad f_5(x,y) = \frac{1}{x+y-1}$$

$$Df_5 = \{(x,y) \in R^2 / x+y-1 \neq 0\}$$

$\mathrm{D}f_5$هو المستوي من دون المستقيم ذو المعادلة $y = -x+1$

3. الإشتقاق الجزئي للدالة ذات متغيرين من الرتبة الأولى:

تعريف: لتكن $f(x,y)$ الدالة المعرفة ب:

$$f: R \times R \to R$$

نسمي المشتق الجزئي ل $f$ من الرتبة الأولى بالنسبة للمتغير $x$ ب$\frac{\partial f}{\partial x}$والمشتق الجزئي ل f بالنسبة للمتغير $y$ ب $\frac{\partial f}{\partial y}$ ويمكن أن نرمز لهما ب: $f'_x$ , $f'_y$ على الترتيب.

أمثلة:

$$f(x,y) = x - 3y$$

المشتقة الجزئية الأولى لf بالنسبة لx هي: اشتقاق الدالة $\boldsymbol{f}$ باعتبار $\boldsymbol{x}$ متغيرا و $y$ ثابتا:

$$f'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1$$

**والمشتقة الجزئية الأولى ل$f$ بالنسبة ل$y$ هي: اشتقاق الدالة$f$ باعتبار$y$ متغيرا و$x$ ثابتا:**

$$\grave{f}_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3$$

$$2) \qquad f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

$$f'x = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y$$

$$f'y = \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

$$3) \qquad f(x,y) = x^2 \sin y$$

$$f'x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y$$

$$f'y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$$

**4. المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة ذات متغيرين:**

**يمكن الحصول على المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية باشتقاق المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى وتنتج لنا أربع مشتقات:**

- **المشتق الجزئي من الرتبة الثانية ل$f$ بالنسبة للمتغير$x$ هو مشتق الدالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة للمتغير$x$ ونرمز له ب$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$**
- **المشتق الجزئي من الرتبة الثانية ل $f$ بالنسبة للمتغير$x$ هو مشتق الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة للمتغير$y$ ونرمز له ب: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$**

- ونسمي مشتقي $f$ الجزئيين المزدوجين من الرتبة الثانية مشتق الدالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة للمتغير $y$ومشتق الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة للمتغير $x$ ونرمز لهذين المشتقين ب: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

***أمثلة:*** نقوم باستعراض الأمثلة السابقة:

**مثال**1:

$$f(x,y) = x - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

**مثال**2:

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \end{cases}$$

**مثال**3:

$$f(x,y) = x^2 siny$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xsiny \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2\cos y \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\cos y \end{cases}$$

## 5.تمارين مقترحة للفصل الثاني :

❖ **التمرين الأول: عين مجال تعريف الدالتين الاتيتين:**

$$f_1(x,y) = \ln(xy)$$

$$f_2(x,y) = \ln(3x - 5y)$$

❖ **التمرين الثاني: أوجد المشتقين الجزئيين من الرتبة الأولى لكل واحدة من الدوال التالية:**

$$f_1(x,y) = 1 + 2x^2 - y^2$$

$$f_2(x,y) = e^{\sin x + y \cos y}$$

$$f_3(x,y) = e^x \cos y$$

❖ **التمرين الثالث: أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدوال التالية:**

$$f_1(x,y) = xy + 4x^2$$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f_3(x,y) = \cos(x - 2y)$$

## 6.حلول التمارين المقترحة:

### ❖ حل التمرين الأول: تعيين مجال التعريف:

$$f_1(x,y) = \ln(3x-5y)$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 \ /3x-5y>0\}$$

$$3x-5y>0 \ \Leftrightarrow 3x>5y \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}y$$

$$f_2(x,y) = \ln(xy)$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 \ \ /xy>0\}$$

إما $x$و$y$ موجبان معا أو سالبان معا، أي يجب أن يكونا من نفس الإشارة.

### ❖ حل التمرين الثاني: إيجاد المشتقات الجزئية الأولى:

$$f1(x,y) = 1+2x^2-y^2$$

$$\frac{\partial f_1(x;y)}{\partial x} = 4x \quad , \quad \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial y} = -2y$$

$$f_2(x,y) = e^{\sin x + y\cos y}$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = \cos x \, e^{\sin x + y\cos y}$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = (\cos y - y\sin y)e^{\sin x + y\cos y}$$

$$f_3(x,y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = e^x\cos y \quad , \quad \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = -e^x \sin y$$

❖ حل التمرين الثالث: إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية.

لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية، يجب المرور بالمشتقات الجزئية من الرتبة الأولى.

$$f_1(x,y) = xy + 4x^2$$

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & \dfrac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f_1(x;y)}{\partial x} = y + 8x & & \\ & \searrow & \dfrac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y \partial x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & \dfrac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = x & & \\ & \searrow & \dfrac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 \end{array}$$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f_2(x;y)}{\partial x} = 2x & & \\ & \searrow & \dfrac{\partial^2 f_1(x;y)}{\partial y \partial x} \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x;y)}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x;y)}{\partial x \partial y}$$

$$f_3(x,y) = \cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x^2} = -\cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial f_3(x;y)}{\partial x} = -\sin(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f_3(x;y)}{\partial y \partial x} = 2\cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y^2} = -4\cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = 2\sin(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f_3(x,y)}{\partial x \partial y} = 2\cos(x$$

# الفصل الثالث:

# المصفوفات والعمليات عليها.

## 1. تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي مجموعة من العناصر مرتبة في أسطر عددها $\mathbf{m}$ وأعمدة عددها n، وتحاط هذه الأسطر بقوسين حيث $\mathbf{m}, \boldsymbol{n}$ عددان طبيعيان غير معدومان أي $m, n \in \mathbb{N}^*$.

ويرمز عادة للمصفوفات بالأحرف الكبيرة $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\ldots$ والعناصر بأحرف صغيرة $\mathbf{a}, \mathbf{b}, c\ldots$ وترفق العناصر الصغيرة بدليل $\mathbf{i}$ و $j$، حيث يدل $(i)$ على رقم السطر و $(j)$ على رقم العمود.

ومنه فإن العناصر تكتب $\boldsymbol{a_{ij}}; \boldsymbol{b_{ij}}; \boldsymbol{c_{ij}}\ldots$ حيث:

$$i = 1,2,3 \ldots m$$
$$j = 1,2,3 \ldots n$$

والشكل العام للمصفوفة هو:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اختصار لكتابة المصفوفة $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

حيث $a_{ij}$ هو العنصر العام في المصفوفة $\boldsymbol{A}$ والذي يقع في السطر $\boldsymbol{i}$ والعمود $\boldsymbol{j}$

مثال:

$$\boldsymbol{A_{2\times 3}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

2- درجة مصفوفة: إذا كانت لدينا $A = [aij]_{(m,n)}$ حيث $m \neq n$ فإن درجة المصفوفة A هي $(m \times n)$ و تسمى مصفوفة مستطيلة.

- إذا كان m=n فإن درجة المصفوفة هي واحدة منهما n أو m وتسمى المصفوفة المربعة.

مثال: لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**الدرجة 2** **الدرجة $4 \times 2$**

3- أنواع المصفوفات:

3-1- مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة وعناصر قطرها الرئيسي هو

1 والباقي أصفار ويرمز لها بالرمز $I_n$ونكتب:

$$\boldsymbol{a_{ij}} = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{i = j} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{i \neq j} \end{cases}$$

مثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-2- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي ليست كلها معدومة

$\forall i \neq j, a_{ij} = 0$ و $\exists i, a_{ii} \neq 0$

<u>مثال</u>

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

3-3- المصفوفة المثلثية من الأعلى (علوية): هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة.

<u>$\forall i > j , a_{ij} = 0$</u>

مثال: $\begin{bmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ مثلثية من الأعلى

3-4- المصفوفة المثلثية من الأسفل (سفلية): هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة.

$$\forall \boldsymbol{i} < \boldsymbol{j} \ , \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{0}$$

مثال: $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ مثلثية من الأسفل

3-5- المصفوفة المتناظرة: هي مصفوفة مربعة العناصر المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية : $\forall i,j \quad ,a_{ij} = a_{ji}$

مثال: $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ مصفوفة متناظرة

3-6- المصفوفة المتناظرة عكسيا: هي مصفوفة مربعة العناصر متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة في الإشارة وعناصر القطر الرئيسي فيها معدومة.

$$\begin{cases} aij = -aij & si \quad i \neq j \\ aij = 0 & si \quad i = j \end{cases}$$

مثال: $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ متناظرة عكسيا

3-7- المصفوفة الصفرية: جميع عناصرها معدومة.

مثال: ... $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**3-8- مصفوفة السطر ومصفوفة العمود: إذا احتوت المصفوفة على سطر فقط نقول عنها أنها مصفوفة سطر، أما إذا احتوت على عمود واحد نقول عنها مصفوفة عمود.**

**مثال:** $[1 \quad 2 \quad 1]$ **مصفوفة سطر**

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ **مصفوفة عمود**

## 4 - أثر المصفوفة:

**إذا كانت لدينا المصفوفة المربعة التالية** m=n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**العناصر:** $(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn})$**تسمى بعناصر القطر الرئيسي المصفوفة** A **و أثرها هو** $(a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn})$ **ويكتب باختصار:**

$$trA = \sum_{i=j=1}^{n} aij$$

**مثال: لدينا المصفوفة التالية:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad trA = 1 + 7 + 1 = 9$$

**ملاحظة: يمكن تحديد أثر للمصفوفة المربعة فقط، أي لما يكون:** m=n

4- منقول مصفوفة:

هي المصفوفة التي نتحصل عليها بجعل أسطر Aأعمدة وأعمدة A أسطر
ويرمز لمنقول مصفوفة ب: $A^T$
مثال:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال2:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad B^t = [0 \quad 1 \quad 2]$$

خواص منقول مصفوفة:

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A.B)^t = B^t.A^t$$

$$(A.B.C)^t = C^t.B^t.A^t$$

5-عمليات جبرية على المصفوفات:

أ- تساوي مصفوفتان:

تتساوى مصفوفتان إذا تحقق فيهما الشرطان:

- أن تكونا من نفس الدرجة.
- العناصر متساوية.

أي إذا كانت: $A = [aij]_{m\times n} \quad , \quad B = [bij]_{k\times l}$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} aij = bij \\ m = k \;\; , \;\; n = l \end{cases} \quad \forall i = 1 \ldots \ldots, m \text{ و } \forall j = 1 \ldots \ldots.., n$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 10 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

**لدينا** A **و**B **من نفس الدرجة. وكي تكون:**

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 3 \, , a_{12} = 2 \, , a_{13} = 7 \\ a_{21} = 1 \, , a_{22} = 10 \, , a_{23} = 2 \end{cases}$$

**6- العمليات على المصفوفات:**

**6-1- جمع المصفوفات وخصائصه:**

**إذا كانت لدينا:** $A = [aij]_{m\times n} \quad , \quad B = [bij]_{k\times l}$

**شرط الجمع هو:** k=m **و**L=n **(لكي نستطيع إجراء الجمع عنصر بعنصر موافق له في نفس المكان).**

$$A + B = [aij] + [bij] = [aij + bij]$$

$$j = 1,2,3 \dots n \quad , \quad i = 1,2,3 \dots m$$

**والمصفوفة الناتجة تكون من نفس درجة** A **و**B.

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

**نلاحظ أن:** (A+B) **لا يمكن حسابه لأنهما ليستا من نفس الدرجة،** (B+C) **لا يمكن.**

**لكن يمكن حساب:** (A+C) **لهما نفس الدرجة:**

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**خصائص عملية جمع المصفوفات:**

- **الجمع تبديلي حيث:** A+B = B+A **عند توفر شرط الدرجة.**
- **أالجمع تجميعي:** (A+B)+C = A+(B+C)

### 6-2- طرح المصفوفات:

**إذا كانت** A **و**B **مصفوفتان فإن:** (A-B) **يكون معرفا فقط إذا وفقط إذا كانت:**

$$A = [aij]_{m\times n} \quad , \quad B = [bij]_{k\times l}$$

**يجب أن يكون:** n=l **و**m=k **ونكتب:**

$$A - B = [aij] - [bij] = [aij - bij]$$

**والمصفوفة الناتجة تكون من نفس درجة المصفوفتان** A **و**B.

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**نلاحظ أن:** (A-B) **و**(B-C) **غير ممكن حسابهما لأنهما مختلفان في الدرجة.**

**أما** A-C **ممكن:**

$$A - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

### 7- ضرب مصفوفة في عدد حقيقي:

**إذا كانت:** $A_{(m\times n)}$ **و**k **عدد حقيقي فإن الجداء** k.A **هو عبارة عن**

**ضرب كل عنصر** aij **من المصفوفة** A **في العدد** k**، لدينا:**

$$k.A = A.k = [k.aij]$$

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad k=5$$

$$k.A=5\begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & -25 & 0\\ 15 & 5 & 10\end{bmatrix}$$

8- **جداء مصفوفتان:**

**لا نستطيع إجراء الجداء** $A.B$ **إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة** A

**مساويا لعدد أسطر المصفوفة** B.

**أي:**

$$A_{(m\times n)}\times B_{(p\times q)}=C_{(m\times q)}$$

**الشرط:** *n=p*

<u>**مثال**1:</u>

$$A\times B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}_{(3,2)}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}_{(2,3)}$$

**المصفوفة الناتجة ستكون من الدرجة** $3\times 3$.

$$C=\begin{bmatrix}(2\times 2)+(1\times 3) & (2\times 1)+(1\times -1) & (2\times 1)+(1\times 1)\\ (-1\times 2)+(3\times 3) & (-1\times 1)+(3\times -1) & (-1\times -1)+(3\times 1)\\ (1\times 2)+(-1\times 3) & (1\times 1)+(-1\times -1) & (1\times -1)+(-1\times 1)\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}7 & 1 & -1\\ 7 & -4 & 4\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

**مثال**2:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 26 & 14 \\ 19 & 11 \end{bmatrix} \;,\; B \times A = \begin{bmatrix} 19 & 23 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة 1:** ضرب المصفوفات ليس تبديلي أي: $A \times B \neq B \times A$

**وفي بعض الأحيان يمكن حساب أحدهما والأخرى لا يمكن حسابها.**

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{(3,2)} \times B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 23 \\ 3 & 19 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}_{(3,2)}$$

**لا يمكن حسابه لأن:** $B_{(2,2)} \times A_{(3,2)} \rightarrow 2 \neq 3$

**ملاحظة 2:** جداء مصفوفة مع مصفوفة الوحدة يساوي نفس المصفوفة.

$$\boldsymbol{A \times I_n + I_n \times A = A}$$

**$(I_n)$: هي العنصر الحيادي في المصفوفات، والمصفوفة الصفرية هي العنصر الحيادي في جمع المصفوفات.**

## الأسس في المصفوفات:

يمكن ضرب المصفوفة A في نفسها عدة مرات كيفما نريد ولكن يجب أن تكون A مصفوفة مربعة ليتحقق شرط الضرب.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$A^4 = A \times A \times A \times A$$

مثال: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -18 & 18 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -27 \\ -54 & 54 \end{bmatrix}$$

## 7-تمارين مقترحة للفصل الثالث:

### التمرين الأول: اكتب المصفوفات التالية:

$$A = (aij)_{(3\times4)} \quad et \quad aij = i + j - 1$$

$$B = (bij)_{(2\times5)} \quad et \quad bij = \begin{cases} o \;\; si \;\; i > j \\ ij^2 - 2j \;\; si \;\; i \leq j \end{cases}$$

### التمرين الثاني: أوجد الأعداد الحقيقية w,z,y,x حيث:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}_{(2\times2)} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}_{(2\times2)} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}_{(2\times2)}$$

### التمرين الثالث: لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- أحسب أثر المصفوفات A, B, D إن أمكن:
- أحسب إن أمكن ما يلي:

$$A + B, \quad B^t + C, \quad 2B - 3C^t, \quad AB, \quad AD, \quad BV,$$
$$D^tB, \quad D^tBD, \quad B^2, \quad V^2$$

## 8-حلول التمارين المقترحة:

### حل التمرين الأول:

$$A = (aij)_{3\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = (bij)_{2\times5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 4 & 12 & 24 & 40 \end{bmatrix}$$

### حل التمرين الثاني: إيجاد قيم w, z, y, x

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x+4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ 3y = 6+x+y \Leftrightarrow 3y - y = 6+2 \Leftrightarrow y = 4 \\ 3z = -1+z+w = \Leftrightarrow 3z - z = -1+3 \Leftrightarrow 2z = 2 \Leftrightarrow z = 1 \\ 3w = 2w+3 \Leftrightarrow 3w - 2w = 3 \Leftrightarrow w = 3 \end{cases}$$

**الحلول هي:** $x = 2,\ y = 4,\ z = 1,\ w = 3$

### حل التمرين الثالث:

**المصفوفة** A **ليس لها أثر لأنها ليست مربعة:**

$$trB = 1 + 1 + 5 = 7$$

D: **ليست مصفوفة مربعة لا يمكن حساب أثرها.**

(A+B): **لا يمكن حسابه لأن** A **و**B **ليستا من نفس الدرجة**

$$A_{(4,3)} + B_{(3,3)}$$

$B^t{}_{(3,3)} + C_{(3,3)} \rightarrow$ **ممكن حسابه**

$$B^t + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$2B_{(3,3)} + 3C^t{}_{(3,3)} \rightarrow$ **ممكن**

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 12 & 5 & 10 \\ 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$A_{(4,3)} \times B_{(3,3)} \rightarrow$ **الشرط محقق ممكن حسابه**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(4,3)} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 18 \\ 4 & 13 & 6 \\ 8 & 10 & -5 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}_{(4,3)}$$

$A_{(4,3)}.D_{(3,1)} \rightarrow$ **ممكن حسابه**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(4,3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}_{(4,1)}$$

$B_{(3,3)}.V_{(4,1)} \rightarrow$ **لا يمكن حسابه**

**الأسطر $\neq$ الأعمدة** $\quad 3 \neq 4$

$$D^t{}_{(1,3)} \times B_{(3,3)} \rightarrow \text{يمكن حسابه}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{(1,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 16 \end{pmatrix}_{(1,3)}$$

$$D^t{}_{(1,3)} B_{(3,3)} D_{(3,1)}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 16 \end{pmatrix}_{(1,3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)} = 9$$

$$B^2 = B_{(3,3)} \times B_{(3,3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3,3)} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 12 \\ 12 & 4 & 23 \end{pmatrix}_{(3,3)}$$

$$V^2 = V_{(4,1)} \times V_{(4,1)} \rightarrow \text{لا يمكن حسابه}$$

$$4 \neq 1$$

# الفصل الرابع:
# محدد ومقلوب مصفوفة

## 1. تعريف المحدد:

**كل مصفوفة مربعة A يمكن أن تشارك بعدد حقيقي يسمى بمحدد**

**المصفوفة A ويرمز له ب: $detA$ أو $|M|$**

## 2. محدد مصفوفة من االدرجة2:

$$A_{(2,2)}$$

$$A_{(2,2)} = [aij]_{(2,2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2 \times 8) - (4 \times 6) = -8$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (2 \times 4) - 1 \times -3) = 11$$

## 3. محدد مصفوفة من الدرجة3:

$$A_{(3,3)}$$

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أ- طريقة ساريس: صالحة لحساب محدد مصفوفة مربعة من الدرجة 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$(\searrow + \searrow + \searrow) - (\swarrow + \swarrow + \swarrow)$$

$$|A| = [(a_{11}.a_{22}.a_{33}) + (a_{12}.a_{23}.a_{31}) + (a_{13}.a_{21}.a_{32})]$$
$$- [(a_{13}.a_{22}.a_{31}) + (a_{11}.a_{23}.a_{32}) + (a_{12}.a_{21}.a_{33})]$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| = &[(\mathbf{2}\times\mathbf{6}\times\mathbf{1})+(\mathbf{3}\times\mathbf{7}\times\mathbf{8})+(\mathbf{4}\times\mathbf{5}\times\mathbf{9})]\\ &-[(\mathbf{4}\times\mathbf{6}\times\mathbf{8})+(\mathbf{2}\times\mathbf{7}\times\mathbf{9})+(\mathbf{3}\times\mathbf{5}\times\mathbf{1})]=\mathbf{27}\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\mathbf{27}$$

طريقة 2:

طريقة المحددات الصغرى: نضع إشارات وهمية متناوبة بداية ب+ على العنصر الأول من السطر الأول فيكون محدد المصفوفة هو مجموع الجداءات الناتجة من الإشارة الوهمية في العدد اسفلها في المحدد $\mathbf{2}\times 2$ الناتج بحذف سطر و عمود هذا العنصر.

مثال:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&-\end{vmatrix}$$

1- حسب السطر 1 مثلا:

$$|\boldsymbol{A}|=+\boldsymbol{a}_{11}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{22}&\boldsymbol{a}_{23}\\\boldsymbol{a}_{32}&\boldsymbol{a}_{33}\end{vmatrix}-\boldsymbol{a}_{12}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{21}&\boldsymbol{a}_{23}\\\boldsymbol{a}_{31}&\boldsymbol{a}_{33}\end{vmatrix}+\boldsymbol{a}_{13}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{21}&\boldsymbol{a}_{22}\\\boldsymbol{a}_{31}&\boldsymbol{a}_{32}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|=&\boldsymbol{a}_{11}(\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{a}_{23})-\boldsymbol{a}_{12}(\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{23})\\&+\boldsymbol{a}_{13}(\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32}-\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{31})\end{aligned}$$

2- حسب العمود 2 مثلا:

$$|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{a_{12}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}}\\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}}\end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{22}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{13}}\\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}}\end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{32}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{13}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}}\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{a_{12}}(\boldsymbol{a_{21}a_{33}} - \boldsymbol{a_{23}a_{32}}) + \boldsymbol{a_{22}}(\boldsymbol{a_{11}a_{33}} - \boldsymbol{a_{13}a_{31}}) - \boldsymbol{a_{32}}(\boldsymbol{a_{11}a_{23}} - \boldsymbol{a_{13}a_{21}})$$

بصفة عامة:

من أجل مصفوفة من الدرجة $n \geq 1$، خاصة من أجل $n \geq 4$ يمكن أن نحسب المحدد وفق الاسطر أو وفق الأعمدة:

وفق العمود: لتكن

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = (a_{ij})ij = \cdots n$$

$$\forall j = 1 \ldots\ldots.. n, \quad detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\ D_{ij}$$

حيث $D_{ij}$ هو محدد المصفوفة الجزئيةمن الدرجة $(n-1)$الناتجة

من حذف السطر $i$والعمود$j$ من $A$و $i$ يختار من بين القيم من 1 إلى $n$ و من الأفضل اختيار العمود الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار.

وفق السطر:

$$\forall i = 1 \ldots\ldots \mathrm{n}, \qquad \mathrm{detA} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij}$$

مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 5 & 8 & 0\end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}D_{11} + 2.(-1)^{1+2}D_{12} + 3.(-1)^{1+3}D_{13}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & 6\\ 5 & 0\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 5 & 8\end{vmatrix}$$

$|A| = -48 - 2(-30) + 3(32 - 25) = 33$

## 4. بعض خواص المحددات:

- ✓ A وB مصفوفتان مربعتان من الدرجة n على الترتيب لدينا:

$$|A.B| = |A|.|B| = |B.A|$$

- ✓ محدد مصفوفة فيها سطران وعمودان متساويان يكون معدوما.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- ✓ محدد مصفوفة فيها أسطر مرتبطة خطيا أو أعمدة مرتبطة خطيا، معدوم،

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

لأن العمود 2 مرتبط خطيا مع العمود 1: $C_2 = 2C_1$

- ✓ محدد مصفوفة في سطر أو عمود معدوم، معدوم

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

- ✓ محدد مصفوفة مثلثية = جداء عناصر القطر الرئيسي.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3$$

- **العمليات الأساسية:**

- **نظرية** 1: **إذا كانت** A **مصفوفة مربعة و**B **مصفوفة ناتجة عن** A **يتبادل سطرين فإن:**

$$|A| = -|B|.$$

**نفس الشيء بالنسبة لتبادل عمودين**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- **نظرية** 2: **إذا ضربنا عمود (سطر) في عدد فالمحدد يضرب في هذا العدد.**

$$2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 1 & 3 & 4 \\ 2 \times 2 & 4 & 1 \\ 2 \times 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

**أي لدينا:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k_{a12} & a_{13} \\ a_{21} & k_{a22} & a_{23} \\ a_{31} & k_{a32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

- **نظرية** 3: **إذا ضربنا سطر أو عمود في عدد** k **وأضفناه إلى عمود آخر (أو سطر آخر) يبقى المحدد ثابت.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

**مثال 1:**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$l_1 \rightarrow l_1 + 2l_3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

$$l_3 \rightarrow 2l_2 + l_3$$

**مثال 2:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$l_2 \rightarrow -2l_1 + l_2 \qquad l_3 = l_2 + l_3$$

**وهو جداء القطر الرئيسي** $(1 \times -1 \times -1) = 1$

**حساب مقلوب مصفوفة مربعة:**

**5.تعريف مقلوب أو معكوس مصفوفة:**

**لتكن** A **مصفوفة مربعة من الدرجة** $n$**، نقول أن** A **تقبل معكوس إذا و فقط إذا كان:** $|A| \neq 0$

**ومعكوس المصفوفة يحقق العلاقة:** $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

**6.حساب مقلوب مصفوفة بطريقة المصفوفة المساعدة (المرافقة):**

**معكوس** A **نرمز له** $A^{-1}$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}.(\mathbf{comA})^{\mathbf{t}}$$

$$ComA = \left(Cofa_{ij}\right)_{1\le i.j\le n} = (-1)^{i+j}\left|\Delta_{ij}\right|$$

$\left|\Delta_{ij}\right|$**: هو محدد المصفوفة الناتجة بعد حذف السطر** i **والعمود** j **من المصفوفة** A.

$(\boldsymbol{comA})^{\boldsymbol{t}}$**: تسمى المصفوفة المساعدة أو المرافقة.**

**مثال** 1:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

**إذن** $A^{-1}$ **موجودة**

$$A^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}.(comA)^t$$

$$ComA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(comA)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

**مثال** 2: **أوجد معكوس** B **حيث:**

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$|B|=(2\times 2)-(3\times 1)=1\neq 0$$

**إذا** $B^{-1}$ **موجودة**

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}(comB)^{t}$$

$$ComB=\begin{bmatrix}+2 & -1\\ -3 & +2\end{bmatrix}\quad,\quad (comB)^{t}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

**7.إيجاد مقلوب مصفوفة بطريقة Gauss:**

**أولا: التحويلات الأساسية على الأسطر:**

1) $l_i\to \lambda l_i \quad / \lambda\neq 0$

2) $l_i\to l_i+\lambda l_j \quad / \lambda\neq 0$

3) $l_i\to l_j$

- **طريقة غوس تعتمد على هذه التحويلات، حيث يكون لدينا:**

$$(A/I)\to(I/A^{-1})$$

**مثال 1: المصفوفة** $A_{(2,2)}$ :

**نرمز للسطر الأول ب** $l_1$ **و السطر الثاني** $l_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \; l_2 \to l_1 + l_2$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) : l_1 \to -4l_2 + l_1$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) => A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**مثال 2:**

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$$

$$(\ A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$l_2 \longrightarrow l_2 - 4l_1$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$l_3 \longrightarrow l_3 + l_1$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad l_2 \to -\frac{1}{8} l_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad l_3 \to l_3 - 4l_2$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right) \qquad l_3 \rightarrow 2l_3$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2\end{array}\right) \qquad l_2 \rightarrow l_2 - \frac{5}{8} l_3$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2\end{array}\right) \qquad l_1 \rightarrow l_1 - 2l_2 - l_3$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & -\frac{5}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2\end{array}\right) \rightarrow \quad (I_3|A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4}\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2\\ 7 & -3 & -5\\ -8 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

**مثال** 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) \longrightarrow (\mathbf{I}|\mathbf{A^{-1}})$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad l_2 \rightarrow l_2 - 3l_1$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0\\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \quad l_3 \to l_3 + 2l_1$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \quad l_3 \to l_3 + l_2$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

**بما أننا تحصلنا على سطر صفري فإن المصفوفة A لا تقبل معكوس.**

**8.خصائص مقلوب مصفوفة:**

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $(A.B.C)^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$
- $(A.A^{-1}) = (A^{-1}.A) = I_n,$ مصفوفة الوحدة $I_n$
- $|A||A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

## تمارين مقترحة للفصل الرابع:

### التمرين الأول:

أحسب محددات المصفوفات التالية:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & -1 & 6\\ 3 & -6 & 7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}x & 0 & c\\ -1 & x & b\\ 0 & -1 & a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 6 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

### التمرين الثاني:

أوجد معكوس المصفوفات التالية إن وجد بإستعمال طريقة المصفوفة المساعدة (المرافقة):

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 4 & 8 & 12\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

### التمرين الثالث:

أوجد معكوس المصفوفات التالية إن وجد باستعمال طريقة *gauss*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -6 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

## 9.حلول التمارين المقترحة:

### حل التمرين الأول:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1) - (1)(3) = -5$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = 2(-7+36) - 3(35-18) - 4(-30+3) = 115$$

- محدد المصفوفة $C$ يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي لأنها مصفوفة مثلثية من الأسفل.

$$|\boldsymbol{C}| = 0(2)(3)(8) = 0$$

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} x & 0 & c \\ 1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & b \\ -1 & a \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & c \\ -1 & a \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}| = x(xa+b) - c = ax^2 + bx - c$$

- لا يمكن حساب محدد المصفوفة $E$ لأن $E$ ليست مصفوفة مربعة.

- محدد المصفوفة $F$ يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي لأنها مصفوفة مثلثية من الأعلى:

$$|F| = (1)(3)(6)(5) = 90$$

### حل التمرين الثاني:

أ- إيجاد معكوس المصفوفة A:

- أولا: إيجاد محدد A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

- إيجاد المصفوفة المساعدة:

$$ComA = \begin{bmatrix} +2 & -1 \\ -3 & +2 \end{bmatrix}_{(2\times2)}, \quad (comA)^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- إيجاد معكوس A بتطبيق العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.(comA)^t$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب-إيجاد معكوس $B$:

- أولا: حساب محدد $B$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|B| = (12 + 5) - 2(10 + 12) = 17 - 44 = -27 \neq 0 \to \exists B^{-1}$$

- إيجاد المصفوفة المساعدة:

$$ComB = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$ComB=\begin{bmatrix}17 & -10 & 8\\ -3 & -3 & -3\\ 22 & -5 & 4\end{bmatrix}\Longrightarrow\quad (comB)^t=\begin{bmatrix}17 & -3 & 22\\ -10 & -3 & -5\\ 8 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

- حساب المعكوس:

$$B^{-1}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}17 & -3 & 22\\ -10 & -3 & -5\\ 8 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

ت- حساب معكوس المصفوفة $D$:

$$|D|=1\times 2\times 4=8\neq 0\rightarrow \exists D^{-1}$$

- المصفوفة المساعدة:

$$ComD=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$ComD=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix}\rightarrow\quad (comD)^t=\begin{bmatrix}8 & -8 & 4\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- حساب معكوس $D$:

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}(comD)^t$$

$$D^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}8 & -8 & 4\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

- حساب معكوس المصفوفة **C**:

**أولا: حساب محدد المصفوفة $C$:**

**نلاحظ في المصفوفة $C$، أن السطر الثاني ضعف السطر الأول وبالتالي محددها معدوم.**

$$|C| = 0$$

**ومنه لا يمكن حساب معكوس $C$**

**حل التمرين الثالث:**

1. **إيجاد معكوس** A **بطريقة** *gauss*:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) : l_2 \longrightarrow l_1 + l_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) : \ l_1 \longrightarrow -4l_2 + l_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(A/I) \rightarrow (I/A^{-1})$$

**ومنه:**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **إيجاد معكوس** $B$ **بطريقة** *gauss*:

$$(B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) : l_2 \longrightarrow -2l_1 + l_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) : \ l_1 \longrightarrow 3l_2 + l_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) : l_2 \longrightarrow -l_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$(B/I) \rightarrow (I\backslash B^{-1})$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}-5 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$$

3. **إيجاد معكوس المصفوفة $C$ بطريقة** *gauss*:

$$(C/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\-6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$l_2 \longrightarrow l_2 - l_1$

$l_3 \longrightarrow 6l_1 + l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$l_1 \longrightarrow l_1 + l_2$

$l_3 \longrightarrow 4l_2 + l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1\end{array}\right)$$

$l_3 \longrightarrow -l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1\end{array}\right)$$

$l_1 \longrightarrow l_1 + l_3$

$l_2 \longrightarrow l_2 + l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1\\0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1\\0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1\end{array}\right)$$

$$(C/I) \rightarrow (I/C^{-1})$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\-3 & -3 & -1\\-2 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

4. **إيجاد معكوس** $\boldsymbol{D}$ **بطريقة** *gauss*:

$$(D/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$l_3 \longrightarrow l_3 - l_1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $l_2 \longrightarrow l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$l_3 \longrightarrow l_3 - 2l_2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$l_1 \longrightarrow l_1 - l_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(D/I) \rightarrow (I/D^{-1})$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

# الفصل الخامس:

# حل جملة المعادلات الخطية.

## 1. تعريف:

نسمي جملة $n$ معادلة خطية ذات $p$ مجهول : $x_1, x_2, \dots, x_p$ الجملة:

$$(1)\dots\dots\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- $A = [\,a_{ij}]_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le i\le n}}$ من $M_{n,p}(k)$ تسمى مصفوفة الجملة ورتبتها تسمى رتبة الجملة، ويسمى الشعاع $B = (b_i)_{1\le i\le n}$ الطرف الثاني للجملة.
- عندما يكون الطرف الثاني معدوما نقول أن الجملة متجانسة وهي تقبل على الأقل الحل $(0,0,\dots,0)$ المسمى بالحل الصفري أو الحل التافه.

## 2. الكتابة المصفوفية للجملة:

لنعتبر الشعاعين $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ عندئذ نكتب الجملة (1) بالشكل:

$$AX = B \dots (2)$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

وبالتالي حل الجملة$(1)$ يؤول إلى إيجاد الشعاع $\mathbf{X}$ حل المعادلة.$(2)$ ان وجد.

## 3- طرق حل جملة المعادلات الخطية:

### 3-1- طريقة كرامر:

تعريف: نقول عن الجملة $(1)$ أنها جملة كرامر إذا كان $n = p$ وكان $detA \neq 0$ أي المصفوفة A قابلة للقلب.

حل جملة معادلات خطية بطريقة كرامر:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

نقوم بكتابة الجملة على الشكل المصفوفي $A.X = B$

إذا رمزنا ب: $A = [aij]$, $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, n$, فإن $A_1$ هي

المصفوفة الناتجة عن A بتبديل عمودها الأول بالشعاع $\boldsymbol{B}$، و ب: $A_2$

المصفوفة الناتجة عن A بتبديل عمودها الثاني بالشعاع $\mathbf{B}$ وهكذا.

اذن:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & .\ b_n \end{pmatrix}$$

- إذا كان $detA \neq 0$ يكون للجملة حل وحيد يعطى بالعلاقة:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}, \quad x_2 = \frac{detA_2}{detA}, \quad \dots \quad , \quad x_n = \frac{detA_n}{detA}$$

وبصفة عامة حل كرامر هو:

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\boldsymbol{A}|}$$

- أما إذا كان $detA \neq 0$ فإن الجملة لا تقبل حلولا أو تقبل مالا نهاية من الحلول.

مثال1: لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

لدينا:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}8 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

$detA=-17\neq 0$ ، ومنه للجملة حل وحيد يعطى بالشكل:

$$x_1=\frac{detA_1}{detA}=1,\quad x_2=\frac{detA_2}{detA}=2$$

**مثال 2: حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرامر.**

$$(I)\quad \begin{cases}2x+y-3z=5\\ 3x-2y+2z=5\\ 5x-3y-z=16\end{cases}$$

**الشكل المصفوفي للجملة (I):**

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -3 & -1\end{pmatrix}} . \underset{X}{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 16\end{pmatrix}}$$

**بما أن عدد المعادلات = عدد المجاهيل يعني أن A مصفوفة مربعة.**

$$|A|=2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & 2\\ -5 & -1\end{vmatrix}+3=2(8)-(-13)+3(1)=26\neq 0$$

$|A|\neq 0$ **إذا الجملة (I) هي جملة كرامر تقبل حلا وحيدا هو:**

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 2\\ 16 & -3 & -1\end{vmatrix}}{26}=\frac{26}{26}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 3 & 5 & 2\\ 5 & 16 & -1\end{vmatrix}}{26}=-\frac{78}{26}=-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & -2 & 5\\ 5 & -3 & 16\end{vmatrix}}{26}=-\frac{52}{26}=-2$$

حل الجملة هي: $(x,y,z)=(1,-3-2)$

## 2.3- حل جملة المعادلات الخطية بطريقة المقلوب (المعكوس):

الشكل المصفوفي للجملة هو:

$$A.X=B\ \dots(1)$$

$$|A|\neq 0$$

اذن $A^{-1}$ موجودة يمكن ضرب طرفي المعادلة $(1)$ في $A^{-1}$ نجد:

$$\begin{gathered}A^{-1}.(AX)=A^{-1}.B\\ (A.A^{-1}).X=A^{-1}.B\\ I_n.X=A^{-1}.B\\ X=A^{-1}.B\end{gathered}$$

أي الجملة تقبل حلا وحيدا هو:

$$X=A^{-1}.B$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{|A|}.(ComA)^t}$$

مثال: حل الجملة التالية بطريقة المعكوس:

$$(I)\ \begin{cases}7x_1-x_2-x_3=0\\ 10x_1-2x_2+x_3=8\\ 6x_1+3x_2-2x_3=7\end{cases}$$

الكتابة المصفوفية للجملة:

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & -1\\ 10 & -2 & 1\\ 6 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 8\\ 7\end{pmatrix}$$

A . X = B

$$|A|=7\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}10 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}10 & -2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-61\neq 0$$

**إذن $A^{-1}$ موجودة**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.(comA)^t$$

$$ComA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10- & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$ComA = \begin{bmatrix} 1 & 26 & 42 \\ -5 & -8 & -27 \\ -3 & -17 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(comA)^t = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-61}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{61}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -17 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{61}\begin{bmatrix} -61 \\ -183 \\ -244 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

### 3-3- حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غوص gauss:

**الخطوات:**

- **نكتب الجملة الخطية على الشكل المصفوفي:**

$$AX = B \quad \dots (1)$$

- **نضع المصفوفة A على اليسار والمصفوفة $B$ على اليمين بهذا الشكل:**

$$(A/B)=\left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & .\ a_{nn}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{matrix}\right)$$

- نقوم بعمليات أولية على الأسطر وهي:

1-تغيير ترتيب سطرين $L_i \longrightarrow L_j \quad , \ i \neq j$

- 2- ضرب سطر بعدد غير معدوم $L_i \longrightarrow \lambda L_i \quad / \quad (\lambda \neq 0)$
- 3- ضرب سطر في عدد غير معدوم و إضافته إلى سطر $L_i \longrightarrow L_j + L_i$

حتى نتوصل إلى جملة مكافئة على شكل مدرج لها نفس الحلول في حالة الجملة تقبل حلا وحيدا:

الكتابة $(s)$ نحولها إلى:

$$(s_1)\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ 0 \ + \quad c_{22}x_2 \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ 0 \quad + \quad 0 \ldots + c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

- نقوم بإيجاد قيمة المجهول $x_n$ من المعادلة الأخيرة ونعوضها في المعادلة ما قبل الأخيرة وهكذا صعود و بالتتالي حتى نحصل على $x_1$.

مثال 1: حل الجملة أدناه بطريقة غوص.

$$(S_1)=\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3z=-6 \\ -x+2y-2z=7 \end{cases}$$

$$(A\backslash B)=\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{matrix}\right)\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

نقوم بالتحويل:

$$l_2 \to l_2 - \frac{1}{2} l_1$$

نتحصل على:

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -6\\ -1 & 2 & -2 & 7\end{array}\right)$$

نقوم بالتحويل:

$$l_3 \rightarrow l_3 - \frac{1}{2} l_1$$

نتحصل على

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-3}{2} & 3 & -6\\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 7\end{array}\right)$$

نقوم بالتحويل:

$$l_3 \rightarrow l_3 - (\frac{5}{2}/(-\frac{3}{2}))l_2$$

نتحصل على:

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -6\\ 0 & 0 & 3 & -3\end{array}\right)$$

$$(S_1'):\begin{cases}2x + y + 0z = 0 \ldots (1)\\ -\frac{3}{2}y + 3z = -6 \ldots (2)\\ 3z = -3 \qquad \ldots (3)\end{cases}$$

من (3) نجد: $z = -\frac{3}{3} = -1$ اذا $z = -1$

نعوض z بقيمته في المعادلة (2) نجد:

$$-\frac{3}{2}y - 3 = -6 \leftrightarrow y = 2$$

**نعوض** z **و** y**في المعادلة** $(1)$ **نجد:**

$$2x = -2 \leftrightarrow x = -1$$

**حلول الجملة هي:**

$$\begin{gathered} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{gathered}$$

**مثال** 2: **حل الجملة بطريقة** *gauss*:

$$(S_2) = \begin{cases} x + 5y + 3z = 1 \\ -2x + y + 4z = 2 \\ 4x + y - z = 3 \end{cases}$$

**الكتابة المصفوفية للجملة:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \times \quad X \quad = \quad B$$

$$A\backslash B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right): \begin{array}{l} l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 4l_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & -19 & -19 & -1 \end{array}\right): l_3 \to l_3 + \frac{19}{10} l_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{5} \end{array}\right)$$

$$(S_2') = \begin{cases} x + 5y + zz = 1 \\ 10y + 10z = 4 \\ 0 = \dfrac{33}{5} \ (\text{تناقض}) \end{cases}$$

ومنه المعادلة الأخيرة مستحيلة أن الجملة $(S_2)$ لا تقبل حلولا ومنه مجموعة الحلول هي: $\emptyset$.

كيفية تحديد مجموعة الحلول:

خلال وضع الجملة على الشكل المدرج قد نصادف نوعين من المعادلات:

- إذا ظهرت معادلة من النوع $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ في هذه الحالةالجملة لا تقبل حلولا.

- وإذا لم تظهر معادلة من النوع السابق، بل ظهرت معادلة من النوع $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_3 = 0$ نحذفها ونتابع حتى نتوصل إلى جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{ir}x_r + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{ms}x_s + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

حيث أن المعاملات الموجودة في بداية جميع الأسطر ليست كلها معدومة وتسمي المتغيرات الموالية لها متغيرات أساسية، أما بقية المتغيرات إن وجدت فتسمى متغيرات ثانوية.

نميز حالتين:

1- في حالة عدم وجود متغيرات ثانوية الجملة تقبل حلا وحيدا، يتم تعيينه ابتداء من السطر الأخير ثم بالتعويض بالقيم المحسوبة صعودا حتى السطر الأول.
2- و في حالة وجود متغيرات ثانوية يتم تحويلها إلى الطرف الثاني حتى نحصل على جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = b_1 - a_{1(s+1)}x_{s+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{ir}x_r + \cdots + a_{is}x_s = b_i - a_{i(s+1)}x_{s+1} - \cdots - a_{in}x_n \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{ms}x_s = b_m - a_{m(s-1)}x_{s+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

**نحلها صعودا من المعادلة الأخيرة كما سبق ورأينا لكن هذه المرة بدلالة المتغيرات الثانوية. بما أن المتغيرات الثانوية كيفية نستنتج أنه من أجل كل اختيار لقيم المتغيرات الثانوية نحصل على قيم جديدة للمتغيرات الأساسية ومنه فالجملة تقبل مالا نهاية من الحلول.**

## 4. تمارين مقترحة للفصل الخامس:

### التمرين (1):

لتكن الجملة (S) المعرفة كما يلي:

$$(S) = \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ mx - y - z = 0 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$$

- أكتب (s)على الشكل المصفوفي.
- عين قيمm حتى تكون الجملة (s) جملة كرامر.
- حل الجملة $(s)$ لما يكون: $m = 0$بطريقة كرامر.

### التمرين (2):

أوجد حلا للجملة (I)بطريقة المقلوب.

$$(I): \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -18 \\ 3x_1 + x_3 = -7 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -27 \end{cases}$$

### التمرين (3):

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية:

$$(S): \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

- أكتب $(s)$على الشكل المصفوفي.
- حل الجملة $(s)$ بطريقة gauss.

## 5.حلول التمارين المقترحة:

### حل التمرين (1):

**الشكل المصفوفي للجملة (S) هو:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \times \quad X \quad = \quad B$$

**تعيين قيم ل m حتى تكون (s) لكرامر:**

$|A_m| \neq 0 \leftrightarrow$ **لكرامر** $(s)$

**حساب** $|A_m|$:

$$|A_m| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1-1) + (m+3) + 3(-m+3) = -2m+8$$

$$|A_m| \neq 0 \leftrightarrow -2m+8 \neq 0 \leftrightarrow m \neq 4$$

**ومن** $(s)$**لكرامر إذا كان:**

$$m \in R - \{4\}$$

**حل الجملة** $(s)$**بطريقة كرامر من أجل** $m = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**الجملة تقبل حلا هو:**

$$xj = \frac{|Aj|}{|A|}$$

**بالتعويض:**

$$|A_0| = 8$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A_0|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = -\frac{6}{8}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A_0|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A_0|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{5}{8}$$

**ومنه حل الجملة هو:**

$$(x, y, z) = \left(-\frac{6}{8}, \quad -\frac{5}{8}, \quad \frac{5}{8}\right)$$

**حل التمرين (2):**

**الشكل المصفوفي للجملة (I):**

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -7 \\ -27 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \quad . \quad \mathrm{X} \ = \qquad \mathrm{B}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

**إذن $A^{-1}$ موجودة**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . (comA)^t$$

$$ComA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**حيث:**

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$ComA = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 9 \\ -6 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(comA)^t = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ -12 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} & -\frac{3}{15} \\ \frac{12}{15} & -\frac{6}{15} & -\frac{7}{15} \\ -\frac{9}{15} & \frac{3}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} & -\frac{3}{15} \\ \frac{12}{15} & -\frac{6}{15} & -\frac{7}{15} \\ -\frac{9}{15} & \frac{3}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 \\ -7 \\ -27 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

حل الجملة هو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1,1,-4)$$

حل التمرين (3):

الشكل المصفوفي للجملة$[s]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A . X = B

الحل بطريقة غوص:

$$(A\backslash B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

نقوم بتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية من الأعلى (ما تحت القطر أصفار).

**التحويل:**

$$l_2 = l_2 - l_1$$

$$l_3 = l_3 - 2l_1$$

**ينتج:**

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$l_3 \rightarrow l_3 - l_2$$

**ينتج:**

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

**تصبح الجملة** $(s)$**كما يلي:**

$$(s)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \ldots (1) \\ -x_2 - 2x_3 = -1\ \ldots\ (2) \\ x_3 = 1 \qquad \ldots \qquad (3) \end{cases}$$

**من** $(3)$ **ينتج** $x_3 = 1$

**نعوض في** $(2)$ **نجد:** $-x_2 = -2 + 2 \leftrightarrow x_2 = 0$

**نعوض** $x_2$ **و** $x_3$ **في المعادلة** $(1)$ **نجد**

$$x_1 = +2(0) + 1 = 2 \leftrightarrow x_1 = 1$$

**ومنه حل الجملة هو:**

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,0,1)$$

## قائمة المراجع:

### المراجع باللغة العربية:

1 **فاتح بن عمران بن محمد الدوسري- محمد بن عبد الله بن أحمد عبده ، الدوال الخاصة و بعض تطبيقاتها، جامعة القصيم** 2011.
2 **مجدي أمين كتبي، المرشد لحل المعادلات التفاضلية، جامعة أم القرى مكة المكرمة، الطبعة الأولى** 1999.
3 **محمد حازي، بوابة التحليل التفاضلي، الدوال ذات عدة متغيرات حقيقية، دروس مبسطة (المجلس الأعلى للغة العربية)، منشورات المجلس** 2017.
4 **مسعودان هادية ، محاضرات و تطبيقات لمادة رياضيات**2 **، مطبوعة جامعية ، جامعة العربي تبسي ، الجزائر** 2019**/**2020.

### المراجع باللغة الأجنبية:

1 C.Baba-Hamed , K.Ben Habib , Analyse , Rappels de cours et exercices avec solutions , O.P.V , 1993
2 Denis Serre , les matrice théorie et pratique , Dunod , Paris 2001
3 Jean-Jacques Colin , Bien débuté on mathématique L1 , L classes préparatoires Capes matrice , déterminant 2eme édition, France , Lyon 2012
4 Kell , L , M , Elementary differential equations , $6^{th}$ edition , Mc Graw – Hill , New York,1965.
5 Paul Broussous , Fonctions de plusieurs variables , parcours renforcés , première année , Université de Poitier , 2009/2010.
6 Philippe fortin et Roland Pomès , , Méthodes Algèbre/ Analyse/ Probabilités, Vuibert, mathématiques, Méthodes Paris 1994.