

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des Science de l'Ingénieur

Thèse de Doctorat

Présentée par :

M^{me} GUEMMADI Messaouda

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT** en :

Filière : Sciences Physique

Option : Fluide et Énergétique

TITRE

Convection Forcée de Fluides Viscoélastiques en Milieu Confiné – Cas de la Lubrification Hydrodynamique

Devant le jury composé de :

MANSOURI Kacem	Professeur	UMBB	Président
OUIBRAHIM Ahmed	Professeur	UMMTO	Directeur de thèse
BOUTOUDJ Mohand Saïd	Professeur	UMMTO	Examineur
HACHEMI Madjid	Professeur	UMBB	Examineur
NEBBALI Rezki	Maître de Conférences A	UMMTO	Examineur

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Le secret du bonheur est de faire ce que tu aimes.

Le secret de la réussite est d'aimer ce que tu fais.

La soutenance d'une thèse marque assurément la fin d'une étape dans la vie d'un chercheur. Je voudrai saisir cette occasion pour exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont, en premier lieu à mon directeur de thèse Monsieur Ouibrahim Ahmed, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou (UMMTO) et Directeur du Laboratoire Energétique Mécanique et Matériaux (LEMM). Il m'a ainsi initié à la recherche, et grâce à ses conseils, sa passion, sa générosité et sa patience, a guidé mes pas dans la recherche. Il a su m'obliger à aller toujours plus en avant, et m'a prodigué les conseils nécessaires qui m'aidèrent à mener à bien cette contribution. Qu'il trouve, dans l'aboutissement de ce travail, l'expression de l'infinie reconnaissance du chercheur respectueux et fidèle.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur Mansouri Kacem, Professeur à l'Université M'Hamed Bougara, Boumerdès (UMBB) pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse et celui d'examiner ce travail.

De même, j'exprime ma plus profonde gratitude aux examinateurs de ce jury, plus précisément, Professeur Boutoudj Mohand Saïd (UMMTO), Professeur Hachemi Madjid (UMBB) et Directeur du Laboratoire Energétique Mécanique et Ingénierie (LEMI) et enfin, Dr. Nebbali Rezki, Maître de Conférences à l'UMMTO. Je leur suis reconnaissante pour tout le temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Allouche Moussa, Maître de Conférences à l'Université de Béjaïa pour m'avoir aidé en ce qui concerne les aspects numériques.

J'exprime toute ma reconnaissance et ma gratitude à l'ensemble du corps enseignant du département de Génie Mécanique de l'UMBB et à son administration.

Ma vie à Boumerdès n'aurait pas pu être si riche sans mes amies en pensant à : Kacimi Hamida, Lounice Souhila, Larbes Chahrazed, Brahimi Faïza, et Madani Baya.

Enfin ces remerciements ne seraient pas complets s'ils n'expriment pas ma gratitude envers toute ma famille pour le soutien qu'ils m'ont toujours apporté ; ma mère Fatma à qui je dois toute ma réussite, mon père, mes sœurs et mes frères.

Je terminerai ces remerciements en exprimant tout mon respect et mon amour à mon mari Ridha qui m'a sans cesse soutenu et supporté pendant la dernière étape de ce travail, sans oublier ceux qui me donnent la joie de vivre et toute la motivation nécessaire pour affronter le quotidien : en pensant à ma fille Roeya et mon fils Aous, que Dieu les protège.

À mon mari et mes enfants

À ma mère et mon père

À mes sœurs et mes frères

À tous ceux qui me sont chers

Résumé

La lubrification hydrodynamique revêt une grande importance dans le domaine industriel ; d'où la nécessité primordiale d'élaborer de nouveaux lubrifiants. Les propriétés des lubrifiants sont améliorées par l'ajout d'additifs chimiques, ce qui modifie considérablement leur comportement rhéologique. Dans cette thèse, on considère l'étude de la lubrification hydrodynamique d'un palier en utilisant un lubrifiant ayant des propriétés viscoélastiques décrites par le modèle de Maxwell généralisé (UCM). La complexité des équations (Quantité de mouvement, Energie et Constitutives) couplées, associés au problème thermo-hydrodynamique dans une telle géométrie, nécessite une résolution plutôt numérique. En utilisant le logiciel commercial Fluent 6.3 associé à un code de calcul développé en C⁺⁺, via des fonctions définies par des UDFs (User Defined Functions) et des UDSs (User Defined Scalars), nous étudions premièrement le cas où l'arbre et le coussinet sont d'abord concentriques. La motivation de ce test est destinée à comparer les résultats avec la solution analytique ; ce qui permet de valider les résultats numériques par l'utilisation du code développé en C⁺⁺ et aussi de donner une assurance pour utiliser ce code dans la simulation numérique de plusieurs problèmes de lubrification plus compliqués. Le deuxième problème traité est la lubrification hydrodynamique des paliers par le fluide de Maxwell généralisé (UCM) avec une viscosité qui varie en fonction de la température. Dans ce cas, on détermine plusieurs grandeurs mécaniques à savoir : la distribution du champ de pression, le champ de vitesse, le champ de température, le champ de contraintes et la charge portante, ainsi que les effets des paramètres viscoélastiques du fluide (temps de relaxation et viscosité) cinématique (vitesse de rotation de l'arbre) et enfin géométrique (excentricité du palier).

MOTS CLES : CFD, Fluide non Newtonien, Fluides viscoélastiques, Lubrification, Modèle de Maxwell, nombre de Deborah, Paliers, Rhéologie, Thermo-visco-élasto-hydrodynamique.

Abstract

The hydrodynamic lubrication interest is still of great importance, so that more and more elaborated lubricants are considered. They, however, involve consequently more and more hydrodynamic complexity as a result of the rheological properties of the additives. In this thesis, we consider lubricants having viscoelastic properties described by an Upper Convected Maxwell model (UCM) used in the case of journal bearing lubrication. The complexity of the coupled associated equations (Momentum, Energy and Constitutive) to describe the thermo-hydrodynamic prevailing in such geometry requires numerical solutions. Using the commercial Finite Volume software Fluent 6.3 together with an appropriate developed computational code, via UDFs (User Defined Functions) and UDSs (User Defined Scalars), we study first the problem when the journal and the bearing are concentric. The motivation for this test case is to compare with analytical solution to validate then the results obtained from numerical code developed in C⁺⁺ and to provide a level of confidence to use this code for simulating more complicated journal bearing problem. The second problem studied is that of a common journal bearing problem in which lubricant is an Upper Convected Maxwell model (UCM) with viscosity varying with temperature. So that we determine the pressure distribution as well as the flow velocity profile, the temperature distribution and the stress field in the core and the load bearing capacity; all together with the effects of the viscoelastic lubricant parameters (relaxation time and shear viscosity) kinematics (journal rotational speed) as well as geometric (journal eccentricity).

KEY WORDS: CFD, Deborah number, Journal bearing, Lubrication, Maxwell model, non Newtonian fluids, Rheology, Thermo-visco-Elasto-Hydrodynamic, Viscoelastic fluids.

ملخص

التشحييم الهيدروديناميكي ذو أهمية كبيرة في المجال الصناعي. وبالتالي فإن الحاجة البدائية لتطوير مواد التشحييم الجديدة. يتم تحسين خصائص مواد التشحييم عن طريق إضافات كيميائية، والتي تعدل إلى حد كبير سلوكها الانسيابي. في هذه الأطروحة نعتبر دراسة التشحييم الهيدروديناميكي للحامل باستخدام مواد التشحييم مع خصائص اللزوجة الموصوفة من قبل نموذج ماكسويل المعمم (UCM). يتطلب تعقيد المعادلات المزدوجة (كمية الحركة المحفوظة، كمية الكتلة المحفوظة، المعادلات المكونة و معادلة حفظ الطاقة) المرتبطة بالمشكلة الحرارية الهيدروديناميكية في مثل هذا الشكل الهندسي، حلا عدديا بالأحرى. التكيف في سياق السوائل المعقدة لبرنامج (FLUENT) يستلزم إنشاء برنامج مساعد متطور في C++، عبر sFUD (تعريف الدوال المستخدمة) و UDSs (تعريف القيم المستخدمة). ندرس أولا المشكلة التي يكون فيها المحور و العمود متحد المركز. الدافع وراء هذا الاختيار هو مقارنة النتائج مع الحل التحليلي، مما يجعل من الممكن التحقق من صحة النتائج العددية و أيضا إعطاء تأكيد على C++ في محاكاة عدد من المشاكل الخاصة بالتشحييم و الأكثر تعقيدا. وتتمثل المشكلة الثانية في التشحييم الهيدروديناميكي للمحامل بواسطة سوائل ماكسويل المعممة (UCM) ذات اللزوجة التي تختلف حسب درجة الحرارة. في هذه الحالة، يتم تحديد العديد من الكميات الميكانيكية، وهي : توزيع حقل الضغط، حقل السرعة، حقل درجة الحرارة، مجال (وقت الاسترخاء و اللزوجة) وكذلك تأثير سرعة دوران العمود وأيضا تأثير الانحراف.

كلها مفتاحيه: محامل، تزييت، نموذج ماكسويل، سوائل لزجة مسترخية، CFD، سائل غير نيوتوني، عدد ديورا، حرارة-لزوجة-استرخاء-هيدروديناميك.

Table des Matières

RESUME

ABSTRACT

ملخص

NOMENCLATURE

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION GENERALE1

CHAPITRE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES EFFETS THERMIQUES ET VISCOELASTIQUES EN LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

1. Introduction	5
2. Effets thermiques	5
3. Effets viscoélastiques	17
4. Conclusion	21

CHAPITRE II : GENERALITES SUR LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE DES PALIERS LISSES

1. Introduction.....	24
2. La lubrification	24
3. Modes d'action d'un lubrifiant	25
a. Le régime onctueux	25
b. Le régime hydrodynamique	25
4. Caractéristiques d'un lubrifiant.....	26
4.1 La viscosité.....	26
4.2 Propriétés de transfert thermique	28
4.2.1 Conductivité thermique	28
4.2.2 Capacité thermique massique.....	28
4.2.3 Masse volumique.....	28
4.2.4 viscosité dynamique.....	29
4.3 L'onctuosité	29
4.4 L'oxydabilité	29
4.5 La corrosivité	29
4.6 L'inflammabilité	29

4.7 La résistance au froid	29
4.8 Caractéristiques diverses	29
5. Formation du film d'huile	29
6. Répartition des pressions au sein du film d'huile	30
7. Lubrification hydrodynamique par un fluide Newtonien.....	31
7.1 Équations de Reynolds.....	31
7.2 Equation de Reynolds en coordonnées cartésiennes.....	32
7.3 Conditions de Sommerfeld	34
7.4 Conditions de Gumbel.....	34
7.5 Conditions dites de Reynolds.....	34
8. Résolution de l'équation de Reynolds – solution de Sommerfeld- Palier	
infiniment long.....	35
8.1 Calcul de la Pression.....	35
8.2 Calcul des efforts.....	36
9. Conclusion.....	38

CHAPITRE III : COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES VARIES DES FLUIDES COMPLEXES

1. Introduction.....	40
2. Modèles rhéologiques.....	40
2.1 Equations constitutives.....	41
2.2 Fluide Newtonien.....	41
2.3 Fluides non Newtoniens.....	41
2.3.1 Fluides non Newtonien au comportement indépendant du temps	41
2.3.1.1 Lois de comportement à une dimension	42
a. Loi-puissance.....	42
b. Loi de Cross	42
c. Loi de Carreau	42
2.3.1.2 Lois de comportement à trois dimensions.....	43
3. Comportement viscoélastique	45
3.1 Définition de la viscoélasticité.....	45
3.1.1 Loi de comportement à une dimension.....	46
3.1.2 Généralités sur les modèles viscoélastiques linéaires.....	46

a.	Le comportement d'un élément de Maxwell.....	47
b.	Interprétation qualitative des phénomènes dépendant du temps..	47
3.2	Effet de Weissenberg.....	48
3.3	Le modèle de Maxwell Sur-convecté.....	48
3.4	Dérivation particulière et dérivation convective.....	49
3.5	Nombre sans dimension viscoélastiques.....	51
3.5.1	Nombre de Weissenberg.....	51
3.5.2	Nombre de Deborah.....	51
4.	Conclusion.....	51

CHAPITRE IV : LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE ET TRANSFERT THERMIQUE EN FLUIDES VISCOELASTIQUES DE MAXWELL– DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS ASSOCIEES

1.	Caractéristiques d'un palier lisse et épaisseur du film lubrifiant.....	53
2.	Equations générales de la mécanique des films minces.....	54
2.1	Loi de comportement.....	54
2.2	Equation de continuité.....	55
2.3	Equation de quantité de mouvement.....	55
2.4	Equation de l'énergie	55
3	Développement des équations	55
3.1	Hypothèses	56
3.2	Équation de continuité :.....	56
3.3	Equations constitutives	56
3.4	Equations de quantité de mouvement.....	57
3.5	Equation de l'énergie.....	58
4	Equations adimensionnelles.....	58
4.1	Variables adimensionnelles	58
4.2	Equation de continuité adimensionnelle.....	58
4.3	Equations constitutives adimensionnelles.....	58
5	Système final d'équations adimensionnelles	63
6	Conditions aux limites	65
6.1	Conditions aux limites sur la vitesse	65
	• Dans le domaine fluide	65
	• Conditions aux limites sur l'arbre	65
	• Conditions aux limites sur le coussinet	65
6.2	Conditions aux limites sur la pression P et les contraintes τ_{ij}	65

6.3 Conditions aux limites adimensionnelles.....	65
• Conditions adimensionnelles sur la vitesse	65
• Conditions adimensionnelles sur la pression P et les contraintes τ_{ij}	66
6.4 Conditions aux limites sur la température	66
6.4.1 Champ de température dans le coussinet	66
6.4.2 Champ de température sur l'arbre	67
7 Conclusion	68

CHAPITRE V : RESOLUTION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE D'ÉCOULEMENT DE COUETTE EN FLUIDE VISCOELASTIQUE DE MAXWELL

1. Introduction.....	70
2. Calculs analytiques.....	70
2.1 Etude analytique de l'écoulement plan/plan.....	70
2.2 Etude analytique de l'écoulement de Couette	74
3. Procédure numérique.....	80
3.1 Simulation numérique de l'écoulement de Couette plan par Fluent	84
3.2 Simulation numérique de l'écoulement de Couette par Fluent	86
3.3 Résultats et discussion	87
4. Etude de l'écoulement de Couette avec transfert de chaleur	89
4.1 Calculs Analytique.....	92
4.2 Calcul Numérique sous Fluent	92
4.2.1 Procédure numérique	92
4.2.2 Résultats et discussion	94
4.2.2.1 Champs de vitesse et de température.....	94
4.2.2.2 Effet du temps de relaxation λ sur la température	95
5. Conclusion	97

CHAPITRE VI: SIMULATION NUMERIQUE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE EN FLUIDE VISCOELASTIQUE DE MAXWELL -ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA CINEMATIQUE ET DES PROPRIETES RHEOLOGIQUES SUR LES CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE TEMPERATURE

1. Introduction	100
2. Procédure numériques.....	100
2.1 Critère de convergence.....	101
2.2 Schématisation du palier étudié.....	101

2.3 Vecteurs vitesses dans l'entrefer.....	102
3. Comparaison du champ de pression et champ de contraintes entre un fluide Newtonien et un fluide de Maxwell.....	103
4. Charge hydrodynamique pour un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell.....	106
5. Influence de la cinématique et les propriétés rhéologiques du lubrifiant sur les champs de contraintes.....	108
5.1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur les champs de contraintes.....	108
5.1.1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ de pression.....	108
5.1.2 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur la différence des contraintes normales N_1	110
5.1.3 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ des contraintes de cisaillement τ_{xy}	112
5.2 Effet de la viscosité μ de fluide viscoélastique sur les champs de contraintes	114
5.2.1 Effet de la viscosité μ de fluide viscoélastique sur le champ de pression.....	114
5.2.2 Effet de la viscosité μ de fluide viscoélastique sur la différence des contraintes normales N_1	116
5.2.3 Effet de la viscosité μ de fluide viscoélastique sur le champ des contraintes de cisaillement τ_{xy}	117
5.3 Effet du temps de relaxation sur les champs de contraintes.....	118
5.3.1 Effet du temps de relaxation sur le champ de pression.....	118
5.3.2 Effet du temps de relaxation sur la différence des contraintes normales N_1	119
5.3.3 Effet du temps de relaxation sur le champ des contraintes de cisaillement τ_{xy}	120
5.4 Effet de l'excentricité ε sur les champs de contraintes.....	122
5.4.1 Effet de l'excentricité ε sur le champ de pression.....	122
5.4.2 Effet de l'excentricité ε sur la différence des contraintes normales N_1	123
5.4.3 Effet de l'excentricité ε sur le champ des contraintes de cisaillement τ_{xy}	124
6. Influence de la cinématique et les propriétés rhéologiques du lubrifiant sur le champ de température.....	125
6.1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ de température T	125
6.2 Effet de l'excentricité ε sur le champ de température T	128

6.3 Effet du temps de relaxation sur le champ de température T.....	131
7. Force hydrodynamique pour le fluide de Maxwell étudié.....	132
8. Conclusion.....	134
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	138
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....	141
ANNEXES.....	147

Liste des Figures

Chapitre 2

Figure (II.1) : Courbe de Stribeck.....	26
Figure (II.2) : Ecoulement de Couette	26
Figure (II.3) : Schématisation d'un palier lisse.....	30
Figure (II.4) : (a) : distribution de la pression, (b) : distribution de la pression et de la force hydrodynamique.....	30
Figure (II.5) : Système d'axes en coordonnées cartésiennes	33
Figure (II.6) : Conditions de Sommerfeld.....	34
Figure (II.7) : Conditions de Gumbel.....	34
Figure (II.8) : Conditions de Reynolds ou de Swift et Stieber.....	35
Figure (II.9) : Allure de la pression.....	36
Figure (II.10) : Section droite du palier.....	37
Figure (II.11.a) : Variation de la charge sans dimension W en fonction de l'excentricité relative ε	38
Figure (II.11.b) : Variation de l'angle de calage ϕ en fonction de l'excentricité relative ε	38

Chapitre 3

Figure (III-1) : Rhéogramme d'un fluide Newtonian ($\mu = \text{tg}\alpha$).....	41
Figure (III.2) : Schématisation du corps élastique.....	47
Figure (III.3) : Schématisation du corps visqueux.....	47
Figure (III.4) : Schématisation de corps viscoélastiques : a) exemple de solide, b) exemple de liquide.....	48
Figure (III.5) : Solide (élément de Kelvin-Voigt).....	48
Figure (III.6) : Liquide (élément de Maxwell).....	48
Figure (III.7) : Ecoulement de Couette.....	50

Figure (III.8) : Dérivation convective et repère convectif.....	51
---	----

Chapitre 4

Figure (IV.1) : Palier lisse.....	55
Figure (VI.2) : Section droite du palier.....	55
Figure (IV.3) : Schéma de l'écoulement d'un fluide.....	57
Figure (IV.4) : Schéma représentatif d'un palier lisse.....	67

Chapitre 5

Figure (V.1) : Ecoulement de cisaillement simple entre deux plans parallèles.....	72
Figure (V.2) : Ecoulement de Couette.....	76
Figure (V.3) : Schématisation du problème étudié.....	86
Figure (V.4) : Vecteurs vitesses.....	86
Figure (V.5) : Evolution de la contrainte normale τ_{xx}	86
Figure (V.6) : Evolution de la contrainte normale τ_{yy}	87
Figure (V.7) : Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy}	87
Figure (V.8) : Maillage.....	88
Figure (V.9) : Comparaison de l'évolution de la vitesse en fonction de r analytiquement et numériquement.....	89
Figure (V.10) : Comparaison de l'évolution de la contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ en fonction de r analytiquement et numériquement.....	89
Figure (V.11) : Comparaison de l'évolution de la contrainte normale $\tau_{\theta\theta}$ en fonction de r analytiquement et numériquement.....	90
Figure (V.12) : Evolution de la température dans l'espace annulaire	95
Figure (V.13) : Vecteurs vitesses dans l'espace annulaire.....	96
Figure (V.14) : Contours de la température statique du fluide.....	96
Figure (V.15) : Evolution de la température en fonction de r à $\theta=0$ pour différentes valeurs de λ	97
Figure (V.16) : Evolution de $\tau_{\theta\theta}$ en fonction de r à $\theta=0$ pour différentes valeurs de λ	97

Chapitre 6

Figure (VI.1) : Schématisation du palier étudié.....	101
Figure (VI-2) : Vecteurs vitesse dans l'entrefer.....	102
Figure (VI-3) : Vecteurs vitesse dans les deux parties convergente et divergente successivement.....	102
Figure (VI.4) : Comparaison de la distribution de la Pression le long de la surface de l'arbre entre un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell : ($\mu=0.3 \text{ Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	104
Figure (VI.5) : Comparaison de la distribution de la contrainte de cisaillement le long de la surface de l'arbre entre un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell : ($\mu=0.3 \text{ Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	104
Figure (VI.6) : Variation de la Pression maximale d'un fluide Newtonien et d'un fluide de Maxwell en fonction de la viscosité μ : ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	105
Figure (VI.7) : Variation de la contrainte de cisaillement maximale d'un fluide Newtonien et d'un fluide de Maxwell en fonction de la viscosité μ : ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	105
Figure (VI.8) : Evolution de la différence des contraintes normales N_1 le long de la surface de l'arbre ($\mu=0.3 \text{ Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	106
Figure (VI.9) : Evolution de la composante de la force hydrodynamique en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre pour deux valeurs de l'excentricité ($\mu=0.3 \text{ Pa.s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-4} \text{ s}$).....	107
Figure (VI.10) : Evolution de la force hydrodynamique en fonction de la viscosité μ ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$).....	107
Figure (VI-11) : Contour de champs de pression dans l'entrefer.....	108
Figure (VI-12): Evolution de la pression le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω	109
Figure (VI-13) : Evolution de la pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω	109
Figure (VI-14) : Evolution de la pression maximale en fonction de la vitesse de rotation ω	110
Figure (VI-15) : Contour de champs de différence des contraintes normales N_1 dans l'entrefer.....	110
Figure (VI-16) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω	111

Figure (VI-17) : Evolution de la différence des contraintes normales N_1 le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω	112
Figure (VI-18) : Evolution de la différence des contraintes normales maximum en fonction de la vitesse de rotation ω	111
Figure (VI-19) : Contour de champs de contraintes de cisaillement τ_{xy} dans l'entrefer.....	112
Figure (VI-20) : Evolution des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω	113
Figure (VI-21) : Evolution du champ de contrainte de cisaillement τ_{xy} le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω	114
Figure (VI-22) : Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy} maximale en fonction de la vitesse de rotation ω	114
Figure (VI-23) : Evolution de champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique.....	115
Figure (VI-24) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre.....	115
Figure (VI-25) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique.....	116
Figure (VI-26) : Evolution de la différence des contraintes normales maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre.....	117
Figure (VI-27) : Evolution de champ de contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique.....	117
Figure (VI-28) : Evolution de la contrainte de cisaillement maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre.....	118
Figure (VI.29) : Evolution de champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ	118
Figure (VI.30) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités.....	119

Figure (VI.31) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ	120
Figure (VI.32) : Evolution de la différence des contraintes normales maximales le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités.....	120
Figure (VI.33) : Evolution de champ des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ	121
Figure (VI.34) : Evolution de champ des contraintes de cisaillement maximales le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités.....	121
Figure (VI.35) : Evolution de champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε	122
Figure (VI.36) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε	123
Figure (VI.37) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε	123
Figure (VI.38) : Evolution de la différence des contraintes normales maximales le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε	124
Figure (VI.39) : Evolution des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε	124
Figure (VI.40) : Evolution des contraintes de cisaillement maximales le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε	125
Figure(VI.41) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $\omega=191$ tr/min.....	126
Figure(VI.42) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $\omega=1000$ tr/min.....	126
Figure(VI.43) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $\omega=1500$ tr/min.....	127
Figure(VI.44) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant et de la température moyenne de la surface interne du coussinet en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre.....	127
Figure(VI.45) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.5 et $w=191$ tr/min.....	128

Figure(VI.46) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.6 et $w=191$ tr/min.....	129
Figure(VI.47) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.8 et $\omega=191$ tr/min.....	129
Figure(VI.48) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.9 et $\omega=191$ tr/min.....	130
Figure(VI.49) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant et de la température moyenne de la surface interne du coussinet en fonction de l'excentricité pour $w=191$ tr/min.....	130
Figure(VI.50) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre pour deux valeurs de l'excentricité.....	131
Figure(VI.51) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre ω pour un lubrifiant de modèle Newtonien et de modèle de Maxwell, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3$ Pa.s.....	133
Figure (VI.52) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de la vitesse de rotation ω de l'arbre.....	133
Figure (VI.53) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de la viscosité μ de fluide viscoélastique pour différents temps de relaxation λ	133
Figure (VI.54) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de l'excentricité ε pour différentes vitesses de rotation de l'arbre.....	134

Nomenclature

1. Caractères latins

- a : Coefficient de dilatation volumique
- C: Jeu radial (cm)
- C_p: Chaleur spécifique (J/kg.°C)
- D : Diamètre de l'arbre (m)
- E: Indice de viscosité
- F_x : Composante de la charge hydrodynamique suivant x (N)
- F_y : Composante de la charge hydrodynamique suivant y (N)
- h : Epaisseur du film d'huile (mm)
- h: Coefficient de transfert de chaleur (W/m².°C)
- k: Conductivité thermique (W/m.°C)
- L : Longueur du palier (m)
- N₁ : Première différence des contraintes normale (Pa)
- N_{1max} : Première différence des contraintes normale maximale (Pa)
- O_a : Le centre de l'arbre
- O_c : Le centre du coussinet
- P: Pression hydrodynamique du film (Pa)
- P_{max}: Pression hydrodynamique maximale du film (Pa)
- q : Flux de chaleur échangée à l'interface coussinet-lubrifiant
- R_a: Rayon de l'arbre (cm)
- R_c: Rayon du coussinet (cm)
- T_a : Température de l'arbre (°C)
- T_b : Température du coussinet (°C)
- T : Température du fluide (°C)
- T_{max} : Température du fluide maximale (°C)
- U : Vitesse linéaire du fluide (m/s)
- V_r: Composante de la vitesse suivant r (m/s)
- V_θ : Composante de la vitesse suivant θ (m/s)
- V_x : Composante de la vitesse suivant x (m/s)
- V_y : Composante de la vitesse suivant y (m/s)

W : Charge hydrodynamique (N)

2. Caractères grecs

Φ : Angle de calage ($^{\circ}$)

τ_{xy} : Contrainte de cisaillement (Pa)

$\tau_{xy\max}$: Contrainte de cisaillement maximale (Pa)

Σ_{ij} : Echelles des contraintes

ε : Excentricité relative

ρ : Masse volumique (Kg/m^3)

ε_{ij} : Tenseur de taux de déformation

σ_{ij} : Tenseur des contraintes

λ : Temps de relaxation (s)

ω : Vitesse de rotation de l'arbre (rpm)

μ_p : Viscosité du fluide viscoélastique (Pa.s)

μ_s : Viscosité du fluide Newtonien (Pa.s)

μ_0 : Viscosité du fluide a une température initiale T_0 (Pa.s)

3. Sigles

CFD : Computational Fluid Dynamic

CFX : Computational Fluid Xerography

ERFs : Fluides magnéto-Rhéologiques

PTT : Phan-Thein-Tanner

UCM : Upper Convected Maxwell model

UDF : User Define Function

UDS : User Define Scalar

THD : TermoHydroDynamique

TEHD : TermoElastoHydroDynamique

4. Nombre sans dimension

De : Nombre de Deborah

De^* : Nombre de Deborah rapporter au rayon R

N_d : Nombre de dissipation

Pe : Nombre de Peclet

Re : Nombre de Reynolds

S : Nombre de Sommerfeld

We: Nombre de Weissemberg

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

L'étude des fluides viscoélastiques continue de susciter à un intérêt scientifique indéniable. En effet, ces fluides complexes sont présents dans de nombreux processus industriels, dans les domaines aussi variés que l'agroalimentaire, la métallurgie, le médical, la plasturgie, l'industrie pétrolière, la lubrification hydrodynamique des paliers lisses, pour n'en citer que quelques exemples.

Durant la dernière décennie, les effets non Newtoniens dans les problèmes de lubrification sont de plus en plus étudiés. La plupart des études réalisées considèrent le lubrifiant comme fluide Newtonien ou non Newtonien, mais purement visqueux. Les modèles viscoélastiques fréquemment employés sont: Oldroyd, PTT et Maxwell. En raison de la complexité des équations associées au problème de la lubrification hydrodynamique, le calcul numérique est largement et essentiellement utilisé ; ce qui nécessite des codes de calcul et des logiciels appropriés.

Les paliers hydrodynamiques ont pour objectif principal de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes modernes. Ils sont constitués de trois parties : le coussinet (géométrie fixe), l'arbre en rotation, et le film lubrifiant qui les sépare. De nos jours, ils sont pour la plupart très visés tant au niveau de la température de fonctionnement qu'au niveau de l'épaisseur minimale du film fluide. Cette situation résulte des conditions de plus en plus sévères appliquées sur ces organes de guidage de rotors. L'accroissement des vitesses et des charges augmente l'énergie dissipée dans le film d'huile donc les températures, modifiant sensiblement les caractéristiques du lubrifiant et les performances du palier. Ceci entraîne une baisse de la viscosité du lubrifiant, donc de la capacité de charge. Il conviendra donc de tenir compte des effets thermiques locaux (dissipation visqueuse et transfert thermique).

Les effets thermiques dans les paliers hydrodynamiques ont été largement étudiés au cours des dernières années, ainsi que les effets viscoélastiques, mais peu d'études regroupent les deux approches.

Le but de l'étude menée au cours de cette thèse de Doctorat a donc été de développer, à partir d'un modèle existant, une modélisation numérique qui tienne compte d'un plus grand nombre de paramètres, tels que les effets viscoélastiques (viscosité et temps de relaxation), les

effets de la vitesse de rotation de l'arbre, les effets de l'excentricité et enfin les effets thermiques, afin qu'elle soit la plus précise possible. De plus, des codes en C⁺⁺ ont été développés et intégrés dans Fluent dans le but d'utiliser ce logiciel pour modéliser des fluides viscoélastiques, qui sont décrit par le modèle de Maxwell sur-convecté.

Le manuscrit de cette thèse est subdivisé en six chapitres.

L'étude bibliographique qui constitue le premier chapitre, synthétise les travaux effectués sur la lubrification hydrodynamique par des fluides Newtoniens et non-Newtoniens, et les méthodes analytiques et numériques de résolution. Cette étude rassemble aussi les travaux effectués sur les phénomènes thermiques dans les paliers hydrodynamiques.

Le deuxième chapitre présente des généralités sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses, traitant en détails tous les aspects concernant la lubrification hydrodynamique, tant pratique que théorique en rappelant les équations fondamentales en lubrification hydrodynamique, spécialement en palier lisse. Les solutions analytiques associées à travers les relations caractéristiques donnant la distribution du champ de pression dans l'espace confiné et des contraintes s'exerçant sur l'arbre sont aussi considérées.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation des différents modèles rhéologiques, tant empiriques, analogiques que tensorielles. Allant de modèles simples, purement scalaires, jusqu'à des modèles à plusieurs paramètres caractéristiques du fluide composant les lois de comportement ou équations constitutives.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses par des fluides viscoélastiques, le modèle rhéologique utilisé est le modèle de Maxwell généralisé (UCM). Dans ce chapitre, les équations régissant la lubrification sont développées et simplifiées selon les hypothèses simplificatrices. A l'aide de l'adimensionnalisation, nous avons mis en évidence les nombres adimensionnels prépondérants qui gouvernent l'intensité des termes de ces équations. Outre le nombre de Reynolds, caractéristique des fluides purement visqueux, on a mis aussi en évidence le nombre de Deborah qui caractérise justement la viscoélasticité, plus précisément l'importance relative entre les effets élastiques et les effets visqueux. Concernant les effets thermiques, l'adimensionnalisation a mis en relief le nombre de Péclet et le nombre de dissipations. Evidemment, la complexité des équations obtenues ne peuvent permettre leur traitement analytique. Leur résolution ne peut se faire que numériquement.

Dans le cinquième chapitre, nous avons traité analytiquement puis numériquement les écoulements des fluides viscoélastiques de type Maxwell sur-convecté (Upper Convected

Maxwell model) dans des géométries simples (deux plans parallèles, deux cylindres concentriques). Cette étude est faite dans le but de valider les codes développés en C⁺⁺ et pour les exécutés ensuite avec Fluent sous formes des UDFs (User Defined Functions) et des UDSs (User Defined Scalars), afin d'enrichir la base de données du logiciel Fluent, qui traite uniquement les fluides visqueux et non pas les fluides viscoélastiques.

Le sixième chapitre qui constitue le cœur de la contribution originale du travail effectué dans cette thèse ; porte premièrement ; sur une étude numérique comparative de la lubrification hydrodynamique par un fluide Newtonien et un fluide de Maxwell sur convecté à faible temps de relaxation, à la fois pour comparer et valider les codes de calcul développés en C⁺⁺ dans le domaine de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses. Ensuite, on a étudié l'influence des propriétés rhéologiques (temps de relaxation, viscosité du fluide), des caractéristiques cinématiques (vitesse de rotation de l'arbre) et géométriques (excentricité du palier) sur les champs de pression, de contraintes et de température ainsi que la force hydrodynamique.

Enfin, nous terminons le travail par une conclusion générale qui met en relief les principaux résultats obtenus et les perspectives d'une recherche améliorée sur certains aspects de cette étude.

CHAPITRE I

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES EFFETS THERMIQUES ET VISCOELASTIQUES EN LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Chapitre I - Etude Bibliographique sur les Effets Thermiques et Viscoélastiques en Lubrification Hydrodynamique

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une analyse bibliographique conséquente qui fait une rétrospective sur les différents travaux scientifiques intéressant la lubrification hydrodynamique quand de plus les lubrifiants sont non-Newtoniens et certains ont des propriétés viscoélastiques et qu'il faille par ailleurs tenir compte des effets thermiques en général. En effet le modèle isotherme fut utilisé durant de nombreuses années mais ne donne des résultats intéressants que dans des cas simple pour lesquels l'énergie dissipée est faible et l'augmentation de la température trop faible pour induire une variation de la viscosité du lubrifiant. Cette observation, mise en évidence par des études expérimentales, conduit naturellement à étudier les phénomènes thermiques. Ces phénomènes thermiques sont avec les effets dynamiques parmi les phénomènes les plus étudiés dans la lubrification hydrodynamique et ce, depuis de nombreuses années. Dans l'optique de toujours prédire au mieux les performances des paliers hydrodynamiques, d'autres phénomènes s'ajoutent à ces études, comme le comportement viscoélastique et le transfert de chaleur dans les solides.

De nombreuses études font l'historique des travaux effectués sur les phénomènes thermiques et la lubrification hydrodynamique avec des fluides non Newtoniens, notamment celles de Khonsari, Fillon, Frêne, Weng, Al Moatassem, Dowson, Tanaka, Phyllips, Tichy, Dana Grecov, Kai lui, chen, Amit chauhan, Amit sigla, Mukesh sahu et all. Nous présentons aussi dans cette partie une revue bibliographique sur les principaux travaux effectués sur les effets thermiques et viscoélastiques en lubrification hydrodynamique.

2. Effets thermiques

Plusieurs travaux consacrés aux effets thermiques ont été diversement conduits ; théoriquement, numériquement et/ou expérimentalement. Elles s'intéressent pour la plus part, si non exclusivement, à des fluides Newtoniens.

L'importance des effets thermiques en lubrification hydrodynamique a été mise en évidence dès les premières études scientifiques, cependant la prise en compte de ces effets pour le calcul des mécanismes est récente.

La première approche théorique de ce problème a été effectuée par Kingsbury en 1933, et c'est en 1962 que Duncan Dowson est le premier, qui a présenté les équations générales de la

lubrification thermo- hydrodynamique. Cependant, grâce aux progrès récents, on commence aujourd'hui à résoudre dans la plupart des cas, les équations qui régissent les phénomènes thermiques en lubrification.

En 1933, Kingsbury a proposé de tenir compte des variations de la température et de la viscosité à travers l'épaisseur du film. Cette étude théorique et expérimentale, donne la première solution correcte du problème thermique en lubrification, mais ne s'applique qu'à un cas axisymétrique.

En 1937, Swift a présenté une approche qui utilise un modèle global. Une température moyenne de fonctionnement est utilisée pour calculer une viscosité moyenne. Bien que n'offre pas de résultats très précis, cette méthode présente l'avantage d'être rapide et simple à mettre en œuvre.

En 1944, Hagg a développé une formulation analytique du travail de Kingsbury en choisissant une variation simple de la viscosité en fonction de la température pour des paliers fonctionnant à haute vitesse.

Deux années plus tard et durant la Seconde Guerre mondiale, Fogg a mis en évidence expérimentalement un phénomène de portance qu'il attribue, à la dilatation du fluide sous l'effet de l'échauffement dû au cisaillement dans un blochet à faces parallèles.

En 1949, Cope a fait intervenir l'équation de l'énergie pour obtenir la température dans le film et par conséquent, les variations de la viscosité à travers le film. Il a montré que ces variations influencent fortement les performances du blochet à faces parallèles.

En 1958, Cameron a montré que dans le cas du blochet à faces parallèles, les déformations thermiques peuvent expliquer le phénomène de « coin thermique » observé par Fogg. Il a démontré également que la variation de viscosité avec la température joue un rôle beaucoup plus important que la dilatation du fluide.

En 1962, Dowson a exposé un travail qui représente une avancée considérable dans l'étude des phénomènes thermiques. Il a modifié l'équation de Reynolds classique afin de prendre en compte les variations de la viscosité et de la masse volumique à travers l'épaisseur du film fluide. C'est l'équation de Reynolds généralisée qui, couplée avec l'équation de l'énergie, permet l'étude locale des phénomènes thermiques en lubrification hydrodynamique.

En 1964, Dowson et Hudson ont mené une étude sur un blochet dans lequel ils imposent une condition d'égalité de flux à l'interface film- coussinet. Ceci implique la résolution de l'équation de la chaleur, dite équation de Laplace, dans le coussinet. De plus, il faut imposer de nouvelles conditions sur les autres frontières du coussinet. Le problème thermo-hydrodynamique ainsi posé n'admet pas de solution analytique.

Deux années plus tard, Dowson, Hudson, Hunter et March ont réalisé une étude expérimentale sur un blochet dans laquelle ils ont mesuré pour la première fois les champs de pression et de température dans le coussinet et l'arbre. Cette étude a mis en évidence les transferts de chaleur dus à l'écoulement du fluide ainsi que la faible variation circonférentielle de

la température dans l'arbre, ce qui a permis de considérer par la suite l'arbre comme un solide avec une symétrie axiale [Freine 1990].

En 1972, Nicolas et Frêne ont effectué une comparaison théorique et expérimentale pour un palier soumis à une charge centrale et un couple quelconque. Les calculs sont ensuite effectués pour différentes positions de la rainure axiale d'alimentation située au point d'épaisseur maximale du film fluide. Ils ont constaté deux points importants, le premier, c'est que la pression maximale croît quand le degré de misalignement augmente et son point d'application se rapproche de l'une des extrémités du palier, ainsi que le deuxième est que la valeur minimale du film diminue lorsque le degré de misalignement augmente.

En 1974, Huebner a proposé une étude thermo- hydrodynamique tridimensionnelle d'une butée dans laquelle il a montré qu'il est souvent possible d'utiliser une solution adiabatique pour déterminer les conditions de fonctionnement. Il a montré également que la méthode des éléments finis est particulièrement adaptée à l'étude de configurations géométriques complexes.

Durant la même période (1974), B.C. Majumdar et A.K. Saha ont décrit une série d'expériences pour déterminer la distribution de la température dans un palier lubrifié par un fluide incompressible. Ils ont conclu que la température maximale se produit près de la position de l'épaisseur de film minimum et qu'avec l'augmentation de la vitesse il y a une élévation de la température. Ils ont démontré à travers cette étude expérimentale, l'importance des effets thermiques dans les paliers en les comparant avec des calculs isothermes, lesquels surestiment de 35% la capacité de charge du palier.

En 1979, Boncompain et Frêne ont présenté une étude sur les caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier fonctionnant en régime laminaire dans laquelle ils concluent que les effets thermiques perturbent fortement les coefficients de rigidité et d'amortissement.

Durant la même période (1979), Pinkus et Wilcook ont présenté une synthèse d'études relatives aux effets thermiques en lubrification hydrodynamique et ils ont conclu que la variation de la viscosité en fonction de la température, a une grande influence sur la distribution de la température dans le film et que la variation de la température à travers l'épaisseur du film fluide est importante. Ils ont conclu aussi que pour des conditions de fonctionnement normal, le gradient axial de la température est négligeable et que les conditions aux limites sur la température peuvent être très variées car elles dépendent de l'environnement et de l'implantation du palier.

En 1983, Mitsui, Hori et Tanaka ont réalisé une étude théorique et expérimentale de refroidissement du fluide au niveau de la rainure d'alimentation. Ils mesurent les températures aux surfaces du coussinet et de l'arbre ainsi que les températures d'entrée et de sortie du film. Ils introduisent alors un coefficient de mélange obtenu expérimentalement qui varie entre 0.4 et 0.8 et qui peut être utilisé dans les calculs THD pour prédire la température d'entrée du fluide au niveau de la rainure.

Durant la même année, Ferron et al ont présenté une comparaison entre théorie et expérimentation sur un palier lisse. Le modèle THD tient compte des transferts thermiques entre le fluide, l'arbre et le coussinet et de la recirculation du lubrifiant et de la cavitation. Ils ont

mesuré expérimentalement les pressions et les températures dans un palier soumis à différentes charges à plusieurs vitesses. Ils ont observé une bonne concordance entre théorie et expérimentation, mais soulignent que les dilatations différentielles ainsi que les déformations thermiques doivent être prises en compte afin d'obtenir une meilleure précision dans le calcul et dans les mesures.

Y.P.Ting et K.L.Peddicord, ont mené en 1983 des études théorique, numérique et expérimentale sur le problème du transfert de chaleur dans une géométrie excentrée pour un fluide Newtonien. Ils ont examiné deux conditions aux limites : la première est d'imposer une fonction de température sur la frontière extérieure et la seconde est d'imposer une condition de convection avec un coefficient de transfert thermique constant et une température ambiante constante. Les solutions générales sont décrites et elles sont valables pour une région annulaire de taille quelconque et un degré d'excentricité quelconque. L'évaluation des solutions analytiques est vérifiée par une expérience appropriée. Plusieurs approximations numériques sont examinées dans cette étude pour leurs appropriations aux problèmes d'écoulements des fluides dans des géométries excentriques.

En 1984, Boncompain a proposé une modélisation de la zone inactive du film dans laquelle il modélise les filets fluides grâce à une largeur équivalente de fluide dans la zone de rupture. Les filets proviennent de la division du film lubrifiant dans la zone de divergence du contact. Une largeur fictive du fluide est définie et la conservation du débit est appliquée.

Au cours de la même année (1984), Hansen, Tonnesen et Lund ont présenté une étude théorique sur les effets thermiques dans les paliers. La variation de la viscosité dans le film est évaluée par un polynôme d'ordre quatre, ce qui permet de trouver une solution approchée de l'équation de l'énergie. Ils tiennent compte des transferts thermiques par conduction dans le coussinet ainsi que l'échange de chaleur dans la rainure d'alimentation. Ils ont observé une bonne corrélation entre leurs travaux théoriques et leurs précédentes expérimentations pour la variation de la température et la pression.

En 1986, Khonsari et Beaman ont exposé une étude THD dans laquelle ils ont tenu compte de la cavitation et du mélange de fluide dans la rainure. Ils ont étudié deux conditions aux limites différentes, dans lesquelles ils considèrent que l'arbre est isotherme et la surface intérieure du coussinet est adiabatique. Ils ont montré dans cette étude que les gradients de la température suivant l'épaisseur du film sont beaucoup plus importants que ceux suivant la direction circonférentielle. Ils ont conclu que l'hypothèse proposée sur l'adiabatique de la surface du coussinet est une solution satisfaisante qui donne de bons résultats et permet de gagner un gain de temps de calcul non négligeable.

Durant la même période (1986), Boncompain, Fillon et Frêne ont présenté une analyse THD et incluent le calcul des déformations thermo élastiques. Ils aboutissent à la même conclusion que Khonsari sur les gradients de température et ont montré que la plus grande partie de la chaleur est évacuée par le fluide. Dans le but de recueillir des données sur la répartition de température dans un palier et de les comparer avec les résultats théoriques obtenus par Boncompain et les autres. Mitsui et al, ont poursuivi leurs travaux avec une expérimentation. Ils concluent que la température maximale augmente fortement avec la vitesse ou la viscosité et décroît avec l'augmentation de l'excentricité.

En 1987, Mutsui a présenté la suite de son travail dans lequel il résout numériquement l'équation de l'énergie par la méthode des différences finies, dans le film complet et dans les filets fluides. Il a considéré que la température ne varie pas axialement dans les filets fluides. Les résultats numériques obtenus présentent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux sur les variations de la température maximale dans le palier. Il a conclu que la température maximale de la surface du coussinet dépend directement de la viscosité de lubrifiant, de l'excentricité relative et de la vitesse de rotation de l'arbre.

Durant la même année, Rajalingham et Prabhu ont étudié expérimentalement l'influence de la variation de la viscosité en fonction de la température sur les caractéristiques d'état d'équilibre des coussinets. Ils ont observé que la variation de la température dans la direction axiale est négligeable.

En 1988, Gethin a proposé une modélisation par élément finis pour analyser les performances thermo-hydrodynamiques des paliers. Il a comparé deux modélisations avec des résultats expérimentaux et il a obtenu une bonne concordance pour la température maximale dans le film. Il a conclu qu'un gain de temps de calcul conséquent peut être obtenu tout en minimisant la perte de précision.

En 1990, J.F.Lin et L.Y.Wang ont analysé l'effet thermo- hydrodynamique d'un arc partiel d'un coussinet de largeur finie avec des lubrifiants non Newtonien, obéissant au modèle de la loi en puissance. Une méthode numérique approximative a été appliquée dans cette étude pour résoudre le problème thermo- hydrodynamique de la lubrification avec les fluides non Newtonien dans un arc partiel d'un coussinet. Ils ont utilisé l'équation d'énergie y compris le terme de dissipation convectif et visqueux, couplé avec l'équation de Reynolds pour déterminer la distribution de la température dans le film fluide. La prétention que la température varie uniquement dans la direction radiale ce qui simplifie l'analyse et les calculs de manière significative sans altérer l'exactitude de la solution. L'influence du terme convectif est généralement mineure sur la distribution de la température. Les résultats numériques sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Par ailleurs la loi en puissance fait une différence substantielle dans la distribution de la température lorsque le comportement non Newtonien dans le système de lubrification est pris en considération.

En 1991, Han et Paranjpe ont présenté une méthode de résolution basée sur les volumes finis pour prédire les performances THD des paliers hydrodynamiques. Ils ont étudié un palier d'une automobile et ils ont montré que la pression d'alimentation et la configuration de l'alimentation ont une importance non négligeable sur les performances du palier.

En 1992, Fitzgerald et Neal ont étudié la répartition de la température ainsi que les transferts thermiques dans les paliers. L'objectif de cette étude est de fournir des données thermiques pour les paliers avec rainures d'alimentation axiale.

Durant la même année (1992), Fillon a réalise une étude expérimentale et théorique TEHD sur les paliers à patins oscillants et a montré que les conditions de fonctionnement ont une grande influence sur la variation de la température dans les paliers qui sont plus sensibles à la vitesse qu'à la charge. Il a confirmé les observations expérimentales par l'utilisation d'un modèle

numérique développé et il a montré que les déformations thermo-élastiques conduisent à une réduction du jeu d'assemblage dans les paliers hydrodynamiques à patins.

En 1994, Rajalingham a présenté une note technique dans laquelle il développe l'influence du transfert de chaleur par conduction à travers le film lubrifiant sur les performances THD d'un palier lisse. Il a montré que l'augmentation de la conduction à travers le film, augmente la capacité de charge et diminue la température maximale dans le palier.

En 1994, Paranjpe et Han ont proposé une étude THD tridimensionnelle d'un palier soumis à une charge statique, tenant compte de la conservation de la masse dans la zone de cavitation, de la conduction à travers le coussinet et l'arbre et des recirculations et mélange de fluide dans la rainure. Ils ont conclu que la chaleur évacuée par conduction dans les solides ne représente qu'une petite part de la chaleur dissipée par rapport à celle évacuée par le fluide et qu'elle représente 90%.

En 1995, Swanson et Kirk ont présenté une étude expérimentale dans laquelle ils ont analysé deux types de paliers, un en acier et l'autre en bronze, soumis à une charge constante. Ils ont décrit le profil de température et de pression dans les deux cas et ils ont trouvé des différences. Ils attribuent ces écarts aux déformations thermiques.

En 1996, Khonsari, Jang et Fillon ont effectué une analyse générale THD des paliers hydrodynamiques. Ils ont proposé une méthode simple et rapide pour calculer la distribution de la température dans le palier. Ils valident cette méthode avec les résultats expérimentaux.

Durant la même année (1996), Pliakas et Parkins ont présenté une étude expérimentale d'un palier lisse comportant une rainure d'alimentation située selon la direction de la charge. Ils ont mesuré les températures et l'excentricité pour différentes conditions de fonctionnement et en déduisant leurs équations empiriques qui permettent de prédire les températures.

En 1996, Fillon et Khonsari ont complété les travaux expérimentaux effectués par Bouchoule sur les paliers à patins fonctionnant à hautes vitesses avec une étude sur les paliers à patins oscillants où ils ont donné une méthode qui permet de déterminer les températures de fonctionnement et à la surface des patins.

En 1998, Banwait et Chandrawat ont mené une étude sur un palier lisse où ils ont testé deux conditions aux limites à l'entrée et ont tenu compte des transferts de chaleur du coussinet vers le fluide dans la rainure d'alimentation et ont conclu que ce phénomène doit être pris en compte afin d'obtenir des résultats précis.

En 1998, A. Dadouche a présenté également une étude théorique et expérimentale sur les effets thermiques dans les butées hydrodynamiques à géométrie fixe. Les principales conclusions tirées de l'étude expérimentale sont les suivantes : les conditions de fonctionnement influencent sur le champ de température et notamment les températures situées dans la zone la plus chaude, la température maximale ne varie pas linéairement avec la température d'alimentation, le champ de pression est très sensible à l'augmentation de la charge, par contre l'effet de la vitesse de rotation est très limité, le débit de fuite augmente avec la vitesse de rotation et diminue avec la charge appliquée et les conditions de fonctionnement affectent sensiblement l'épaisseur du film.

En 1998, Kucinski a étudié expérimentalement les effets thermiques transitoires dans un palier lisse dont il mesure le champ de température pendant les phases de démarrage et d'arrêt ainsi que, pour des changements de vitesse de rotation de l'arbre.

Durant la même année (1998), Ma et Taylor ont présenté une analyse comparative de différents types de paliers à travers leurs performances notamment thermiques. Ils ont conclu que pour chaque palier, les caractéristiques de fonctionnement comme l'épaisseur minimale du film, la température maximale, la puissance dissipée ou le débit changent et ils ont conclu aussi que les paliers de forme circulaire ont de meilleures performances que les paliers non circulaires.

En 1998, S.S.Banwait et H.N.Chandrawat ont étudié les conditions thermiques pour un coussinet plat. Les conclusions principales sont les suivantes : Les conditions aux limites décrites comme première condition sont plus appropriées, le transfert thermique à partir du bord de sortie dans la rainure d'alimentation doit être considéré pour simuler correctement les conditions réelles. Un choix approprié des propriétés thermodynamiques de coussinet permet d'obtenir de bons résultats.

En 2000, Pierre et M.Fillon ont présenté une étude tridimensionnelle de l'influence des paramètres géométriques sur les performances THD d'un palier lisse. Ils ont analysé les effets des différents facteurs géométriques tels que la longueur, le diamètre ou le jeu radial sur le comportement du palier pour différentes conditions de fonctionnement. Ils ont conclu que les performances du palier dépendent fortement des conditions de fonctionnement ou de la géométrie du palier.

Durant la même année (2000), A. Dadouche et M. Fillon ont présenté une analyse théorique et expérimentale des phénomènes thermiques dans les butées. Ils ont utilisé un dispositif d'essai qui a permis de mesurer les champs de pression et de température à l'interface film/patin et l'épaisseur minimale du film séparant les deux surfaces en mouvement relatif. Les résultats expérimentaux sont obtenus sur une butée hydrodynamique à huit patins fixes. Ils ont analysé l'influence des conditions de fonctionnement (charge appliquée et vitesse de rotation) sur les différentes caractéristiques de la butée. La simulation numérique est effectuée à l'aide d'un code de calcul tenant compte des effets thermiques locaux. La confrontation entre les différents résultats théoriques et expérimentaux est partiellement bonne. Ils ont mis en évidence l'importance des déformations thermiques et mécaniques des éléments de la butée dans la détermination des performances de la butée, en particulier la pression et l'épaisseur du film lubrifiant. Ils ont conclu que le champ de température n'est pas très affecté par ces paramètres. Ils ont montré aussi que la zone la plus chaude du patin se trouve là où l'épaisseur du film est minimale.

En 2001, H.J.Kim, P.Ehret, D.Dowson et C.M.Taylor ont exposé une étude en deux parties. Dans la première partie, ils ont présenté des solutions des problèmes de la lubrification thermo-élasto- hydrodynamique dont le nombre de Peclet soit plus élevé ou plus petit. Les températures de surface sont calculées en utilisant l'équation de la chaleur donnée par Carslaw et Jaeger. L'équation de l'énergie est traitée dans le cas bidimensionnel où ils ont approché la variation de la température à travers le film par un profil quadratique. Pour résoudre l'ensemble des équations non linéaires qui régissent le problème, Taylor et les autres proposent un schéma de relaxation qui prend en compte le couplage faible entre l'équation de Reynolds et l'équation d'énergie

dans la région du contact à haute pression. Ils ont conclu que le processus itératif correspond à un processus à deux étages dans lequel, la pression et la température évoluent indépendamment et que le schéma numérique utilisé, fournit une convergence stable. Les développements numériques décrits dans la première partie, sont effectués pour incorporer la considération des effets non Newtoniens. Dans la deuxième partie, Ils ont présenté des solutions entièrement couplées du problème de la lubrification thermo-élasto-hydrodynamique de contact circulaire dans le cas d'un fluide non Newtonien. Les résultats numériques sont comparés à une série de résultats expérimentaux effectués par Cann et Spikes. La comparaison des résultats sous des conditions identiques mais avec un contact en acier-acier est également entrepris et prouvé qu'un contact en acier-saphir représente un bon simulateur de contact d'acier-acier en termes de température et épaisseur de film. L'influence du rapport de viscosité est également considérée et indique que l'équation de Yasutomi et al mène seulement à une différence marginale comparée à l'équation de Reynolds pour les cas considérés.

En 2002, Gandjalikhan et Moayeri ont exposé une étude THD tridimensionnelle de palier comportant une rainure d'alimentation axiale, de dimension finie et fonctionnant en régime laminaire établi. Ils ont utilisé une méthode basée sur la technique CFD. Ils ont résolu l'équation de Navier Stokes complète ainsi que l'équation de l'énergie et ils ont considéré le transfert thermique à travers le coussinet et l'arbre. Ils ont tenu compte également du phénomène de cavitation grâce à un modèle tridimensionnel qui donne un mélange homogène équivalent au lieu de proportions locales de fluide et de gaz. Les vitesses, la pression et la température suivant la direction circonférentielle, axiale et suivant l'épaisseur du film sont calculées. Ils ont comparé leurs résultats avec plusieurs résultats expérimentaux de la littérature. Ils ont conclu que le modèle utilisé pour la cavitation donne de bon résultats et confirment que la température de l'arbre ne varie que faiblement suivant la direction circonférentielle et que très peu axialement. Ils ont montré également que l'étude bidimensionnelle surestime la température maximale et plus largement la pression maximale par rapport à l'étude tridimensionnelle.

En 2002, H. Moreau, P. Maspeyrot et J. Frêne ont mis en oeuvre des moyens expérimentaux permettant de mesurer les épaisseurs du film d'huile dans les paliers de vilebrequin et la tête de bielle d'un moteur XU10J4R de la société PSA Peugeot Citroën en fonctionnement réel. L'analyse du comportement des paliers permettra de maîtriser les épaisseurs du film d'huile afin de diminuer les pertes par frottements et d'améliorer le rendement mécanique. L'instrumentation utilisée pour mesurer les épaisseurs dans les paliers de vilebrequin est très satisfaisante tant sur la qualité des résultats des mesures que sur la durée de vie des capteurs. Elle a permis d'analyser l'influence du régime et couple moteur, de la viscosité de l'huile et du jeu des paliers de vilebrequin sur les épaisseurs du film lubrifiant. Une bonne connaissance de l'influence de ces paramètres sur les épaisseurs du film d'huile a pu ainsi être obtenue dans le cas du moteur étudié. Ils ont observé que les efforts d'inertie et les amplitudes de variation des épaisseurs du film d'huile deviennent de plus en plus importants avec l'augmentation du régime moteur. Ces efforts d'inertie génèrent des déformations élastiques du palier de tête de bielle pouvant atteindre $15\text{ }\mu\text{m}$ à $2500\text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. La comparaison entre un fonctionnement à vide et à pleine charge a permis de mettre en évidence les effets de la compression et de la combustion du mélange air-essence sur les épaisseurs du film d'huile dans les paliers de vilebrequin pour les régimes inférieur à $3000\text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

Au cours de la l'année 2003, J.Bouyer a présenté dans sa thèse une étude générale sur les paliers lisses cylindriques et a tenu compte des effets hydrodynamique, thermo- hydrodynamique et thermo-elasto-hydrodynamique et également les problèmes d'usure, de cavitation et de misalignement. Il a abordé le problème de déformation élastique due aux champs de pression et de température. Il a validé ses résultats, expérimentalement et analytiquement, pour les dilatations dues aux champs de pression et de température. Il a conclu que le modèle TEHD a une forte influence sur tout les paramètres du palier lorsqu'il est fortement sollicité. Les déformations mécaniques, dues au champ de pression, ainsi que les déformations thermiques, dues à la fois aux dilatations des éléments du palier et aux gradients thermiques existants à l'interface, ont une influence considérable sur les performances du palier. L'excentricité est très importante, la pression maximale s'est diminuée de presque 50% dans certains cas de paliers sévèrement chargés, l'épaisseur minimale du film augmente de près de 40%. Il a conclu finalement que la prise en compte des déformations mécaniques et thermiques est indispensable à la détermination précise des caractéristiques de fonctionnement d'un palier soumis à des conditions de fonctionnement sévères.

En 2004, I. Riche et B. Villechaise ont conduit une étude sur la lubrification d'un palier dans une zone très localisée où l'épaisseur du film est particulièrement faible. Le problème ainsi posé est un problème de lubrification élasto- hydrodynamique rugueuse où il y a de fortes variations relatives d'épaisseur de film. Ils ont comparé les résultats obtenus dans cette situation par les équations de Navier- Stokes d'une part et par l'équation de Reynolds d'autre part. Puis ils ont vérifié les influences mutuelles des différentes fréquences spatiales de la rugosité et du film lubrifiant. Ils ont considéré cette situation micro- élasto- hydrodynamique comme intermédiaire entre les lubrifications limite et mixte. Ils ont donné un aperçu bibliographique montrant les deux approches, statistiques et déterministes, utilisées généralement pour intégrer la rugosité dans les équations de la lubrification élasto- hydrodynamique. Ils ont justifié le choix d'une approche déterministe pour cette étude.

En 2005, S.A. Gandjalikhan Nassab a étudié numériquement l'effet de l'inertie du lubrifiant sur le comportement thermo- hydrodynamique des coussinets. La technique numérique utilisée dans cette étude est CFD pour résoudre les équations régissant le problème de la lubrification. Le palier étudié a une longueur finie et fonctionne dans des conditions régulières dont le fluide est incompressible et l'écoulement est laminaire. Dans cette étude Gandjalikhan a déterminé les solutions des équations tridimensionnelles de Navier- Stokes avec ou sans terme d'inertie couplées avec l'équation de l'énergie et l'équation de conduction de la chaleur dans le coussinet et l'arbre. Il a pris en considération aussi l'effet de cavitation par l'utilisation d'un modèle approprié tridimensionnel de cavitation. Il a validé les solutions obtenues pour différentes valeurs de l'excentricité et pour différentes valeurs de la vitesse de rotation de l'arbre avec des résultats expérimentaux et a conclu que les résultats obtenus sont acceptables.

En 2006, A.Campos, A.Sottomayor et J. Seabra ont proposé un modèle thermique d'un fluide non Newtonien sous des conditions de lubrification élasto- hydrodynamique, le modèle non newtonien est appliqué à l'analyse d'un contact lubrifié avec de l'huile MIL-l-23699. Le concept de la viscosité apparente est employé pour présenter le comportement non Newtonien du lubrifiant et le comportement thermique du contact dans l'équation de Reynolds. La viscosité apparente permet l'application du modèle rhéologique mieux adapté à chaque lubrifiant, sans

faire appel aux formulations spéciales du problème EHD. La technique de Newton- Raphson est employée pour obtenir la géométrie de film lubrifiant et la distribution de la pression à l'intérieur du contact EHD. Ils ont évalué les efforts de cisaillement développés dans le film fluide supposant le modèle rhéologique de Maxwell non linéaire. Les surfaces et la distribution de la température de lubrifiant sont déterminées en utilisant la méthode simplifiée de Houpert appliquée à la zone de contact d'admission et la méthode thermique proposée par Tevaarwerk est appliquée dans la zone de contact à haute pression. Ils ont abouti à des résultats significatifs pour la zone minimum de l'épaisseur du film, le facteur de réduction de l'épaisseur du film, pour l'élévation de la température du lubrifiant et de la température des surfaces, le coefficient de frottement à l'intérieur du contact. Les résultats sont validés avec d'autres résultats expérimentaux et montrant une très bonne concordance.

Pendant la même période (2006), M. Boukrouche et R. El Mir ont traité un problème décrivant le mouvement d'un fluide incompressible, non- isotherme, et non newtonien dans un domaine mince à trois dimensions. Ils ont établi d'abord un résultat d'existence pour les solutions faibles de ce problème. Par la suite, ils ont étudié l'analyse asymptotique quand une dimension du domaine liquide tend vers zéro. Ils ont obtenu l'équation spécifique pour une faible valeur de Reynolds, les conditions aux limites de frontière fluide- solide et les conditions aux limites pour la température. Ils ont montré l'unicité des résultats.

En 2007, S. Abdallah Ahmed et M. Fillon ont analysé l'influence des effets thermiques et des déformations mécaniques sur les performances des butées hydrodynamiques à géométrie fixe. Ils ont utilisé la méthode des différences finies pour obtenir les champs de la température et de la pression hydrodynamique et ont utilisé la méthode des éléments finis pour obtenir le champ des déplacements de la surface des patins. Les déformations mécaniques du grain mobile sont également prises en compte pour résoudre le problème TEHD. Ils ont analysé l'influence des conditions de fonctionnement (charge appliquée et vitesse de rotation de l'arbre) sur les différentes caractéristiques de butée. Ils ont conclu que pour déterminer précisément les caractéristiques de fonctionnement d'une butée hydrodynamique à patins fixes, il ne faut pas négliger les déformations mécaniques, en particulier, lorsque la charge appliquée est élevée.

Durant la même année (2007), P.K.Saini et al ont développé un modèle mathématique pour analyser l'effet des polymères additifs sur la lubrification thermo élasto- hydrodynamique (EHL) sous une forte charge. Les équations de Reynolds et de la température moyenne pour des contraintes de couple du fluide sont dérivées en utilisant le rapport rhéologique présenté par Stokes. Les caractéristiques thermo élasto- hydrodynamique calculées pour les huiles modifiées par les polymères sont vérifiées pour avoir une grande dépendance sur le paramètre de contraintes. Des polymères additifs sont présentés pour provoquer une augmentation significative d'épaisseur de film fluide avec une réduction remarquable du coefficient du frottement sans élévation de la pression du fluide. En outre, les polymères additifs s'avèrent pour causer une minimisation de la réduction thermique de l'épaisseur de film aussi bien que la diminution de la température du fluide, en particulier dans des conditions de charge élevées et vitesse réduite, où les films fluides sont minces.

Toujours en 2007, J. Cui et al ont étudié numériquement la lubrification élasto- hydrodynamique non newtonienne d'un point de contact elliptique, dans des conditions

thermiques et isothermes. Dans deux parties d'étude, ils ont utilisé une technique de multi degré dans la première partie pour déterminer la pression et l'épaisseur de film fluide alors que dans la deuxième partie ils ont utilisé la technique de relaxation de colonne par colonne pour déterminer la température. Cependant, des propriétés newtoniennes et non Newtoniennes de lubrifiant ont été considérées. Ils ont proposé dans cette étude un schéma numérique simplifié pour l'évaluation de l'effort de cisaillement et la viscosité du lubrifiant non Newtonien. Ce schéma est vérifié en comparant les solutions thermiques d'état d'équilibre sans simplification. La durée de calcul exigée pour le cas thermique et non Newtonien était typiquement 14 h sur un ordinateur individuel avec une unité centrale de traitement de 2,8 GHz.

En 2007, L.M.Gao et al ont présenté une étude sur la lubrification élasto- hydrodynamique dans des conditions de fonctionnement quasi-statiques. Différentes méthodes numériques ont été considérées et comparées en termes d'assiduité et de convergence de la solution numérique telles que : la méthode de Newton- Raphson (N-R), la méthode de multi- grille (MG) et la technique rapide de transformée de Fourier (FFT). Ils ont constaté que la convergence numérique de la méthode de (MG) est beaucoup plus rapide, et par conséquent le temps d'exécution requis était sensiblement inférieur à la méthode de (N-R). Ce dispositif est particulièrement évident, quand une tolérance plus serrée est indiquée sur l'itération de la pression et de la charge élevée. En outre, la méthode multi-grille est plus efficace uniquement quand on prend en considération les quatre- niveaux des grilles, comparable avec celle de la technique de FFT. Ils ont conclu que la méthode de (MG) offre des possibilités intéressantes pour être appliqué efficacement pour modéliser des problèmes EHL réalistes.

Toujours en 2007, W. Habchi et al ont présenté une adaptation des algorithmes classiques pour résoudre le problème de contact élasto- hydrodynamique. Ils ont employé une méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de Reynolds. Cette méthode permet de réduire rigoureusement le nombre de degrés de liberté, comparés à la discrétisation classique en différences finies de l'équation de Reynolds. Ceci est couplé à l'utilisation de la théorie de Boussinesq. Une linéarisation typique des équations correspondantes permet d'analyser le contact le plus fortement chargé. Ils ont utilisé des techniques multi- grilles pour réduire le temps de calcul. Ce modèle est alors adapté pour expliquer le comportement non newtonien du lubrifiant par l'utilisation d'un modèle rhéologique approprié. L'influence du comportement rhéologique sur différents paramètres de contact est examinée sur plusieurs cas d'essai où les conditions de fonctionnement ont été choisies de telle manière que les effets thermiques soient négligeables et le comportement non newtonien énoncé. Ils ont conclu que la pression transitoire et l'épaisseur de film sont réduites quand le SRR augmente, alors qu'un modèle newtonien prévoit des profils constants d'épaisseur de film et de pression pour une vitesse d'entraînement constante.

D.M .Nuruzzama et al, en 2010, ont calculé, numériquement, la pression et la capacité de charge du palier par la méthode des éléments finis. Pour vérifier la validation des résultats numériques, une comparaison est effectuée dans ce travail par le calcul analytique. Pendant le calcul, l'analyse isotherme a été considérée. Les résultats obtenus par les auteurs montrent que l'augmentation de l'excentricité provoque une augmentation de la charge hydrodynamique.

En 2012, Mukesh Sahu et al, ont présenté l'aspect thermodynamique du palier en trois dimensions par l'utilisation de CFD. Ils ont découvert que la répartition de la pression sur la surface de l'arbre n'était pas le meilleur sur le plan circonférentiel et axial, avec ou sans tenir compte de l'effet de la température. Ils ont utilisé Gambit comme générateur de maillage et Fluent pour la simulation. A partir de là, les résultats obtenus montrent que l'augmentation de la force de frottement fait augmenter la température et réduit la viscosité ainsi que la pression maximale du lubrifiant présent à l'intérieur du palier lisse.

Amit Singla et al en 2014, ont publié une étude numérique par l'utilisation de la technique de CFD pour analyser les performances hydrodynamiques des paliers circulaires. Ils ont présenté des résultats pour la distribution de la pression et de la température au niveau du palier pour un fluide Newtonien. Ils ont considéré que la viscosité varie en fonction de la température. Les résultats montrent que lorsque la viscosité est constante, la température et la pression augmente, mais dans la pratique, l'augmentation de la température réduit la viscosité du lubrifiant et affect la capacité de charge du palier, ce qui peut donner une mauvaise prévision.

Amit Chauhan et al ont proposé une analyse thermo-hydrodynamique du palier lisse. Au cours de l'analyse, l'écart de contrainte et de température est pris en compte sur le film fluide. À partir des résultats obtenus, ils ont constaté qu'il est très éloigné que la mise en place d'une viscosité constante à un certain stade de l'évaluation peut en outre conduire à une mauvaise prédiction du palier. Ainsi, l'article dominant donne la prédiction du destin de la performance du palier.

En 2017, Andrzej Mischak et Grzegorz Sikora ont présenté une étude sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses avec des huiles de propriétés non Newtoniennes. Pour l'analyse de la lubrification hydrodynamique, un modèle constitutif du troisième ordre a été supposé dans cette étude. Une partie principale de cet article est consacrée pour déterminer l'équation, qui décrit la viscosité apparente. De cette manière, le modèle de viscosité apparente est utilisé dans les équations de quantité de mouvement. Ces équations sont intégrées afin de désigner les composantes des vecteurs vitesse. Par substitution des conditions aux limites appropriées, une équation de type Reynolds modifiée est obtenue dans cette étude. Les résultats numériques montrent la répartition de la pression hydrodynamique, suivis de la désignation de la capacité de charge, de la force de friction et du coefficient de frottement.

En 2017, A.W. Pratomo et al ont proposé une étude basée sur CFD pour effectuer une comparaison entre une lubrification hydrodynamique des paliers lisses par des fluides non-Newtonien et fluides Newtonien en présence de cavitation. Les résultats, y compris la distribution de la pression hydrodynamique, la capacité de charge et la force de frottement sont obtenus et comparés pour optimiser la profondeur de la cuvette. Les résultats obtenus dans cette étude illustrent une performance supérieure du lubrifiant newtonien par rapport aux autres types de lubrifiants.

Toujours en 2017 Talha Zia et al ont proposé une étude pour modéliser le comportement Newtonien d'un lubrifiant par la résolution de l'équation de Reynolds 2-D et calculer l'épaisseur du film fluide. Une deuxième étude a été réalisée pour un lubrifiant de type viscoélastique. Les résultats de simulation montrent qu'à faible vitesse initiale, le lubrifiant newtonien n'est pas efficace contre les charges cycliques pour empêcher le contact physique et l'usure des surfaces en

interaction. Les caractéristiques viscoélastiques du lubrifiant contribuent visiblement à améliorer les profils de pression et l'épaisseur du film. Il réduit les risques de rupture du film lubrifiant et améliore la durée de vie du vilebrequin en empêchant l'usure de l'adhésif.

3. Effets Viscoélastiques

Les effets non-Newtoniens sont très variés, selon le fluide considéré et les sollicitations auxquelles il est soumis. De manière générale, l'effet prédominant dans les paliers de moteur est l'effet de "shear-thinning" ou l'effet rhéofluidifiant, traduisant l'hypothèse d'une dépendance de la viscosité avec le taux de cisaillement. La revue bibliographique a pour but de rappeler les principales études théoriques, expérimentales et modélisations numériques dédiées à l'analyse du comportement rhéologique du lubrifiant viscoélastique des paliers lisses.

En 1985 Noriyasu Mori et al ont mené des études numériques et expérimentales sur l'écoulement d'un fluide non Newtonien entre deux cylindres excentriques. La méthode numérique utilisée est la méthode des différences finies ainsi que le dispositif expérimental est présenté par deux cylindres excentriques de rayon 22 mm pour le cylindre intérieur et 25 mm pour le cylindre extérieur. L'excentricité utilisée dans cette étude varie entre 0.8 et 0.95. L'objectif principal de ces études est de calculer la distribution de la pression dans l'espace annulaire et étudier l'effet de la vitesse de rotation du cylindre intérieur sur la zone d'écoulement secondaire (Angle of secondary flow region). Les résultats obtenus montrent que l'augmentation de l'angle de cette zone, pour un fluide non Newtonien, est moins importante comparable avec un fluide Newtonien. Numériquement, ils ont remarqué que la position de la vitesse axiale maximale et la dimension de la région de l'écoulement secondaire sont influés par le gradient de la pression et la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Ils ont étudié aussi le gradient de la pression sur le cylindre extérieur, par la présence d'un écoulement axial du fluide non Newtonien et ils ont montré que l'élasticité du fluide influe largement sur la distribution de la vitesse et le gradient de la pression sur le cylindre extérieur.

S.H.Wang, H.H.Zhang et D.Y.Hua ont analysé l'influence des caractéristiques viscoplastiques et viscoélastiques du lubrifiant sur la lubrification élasto- hydrodynamique. Ils ont dérivé l'équation de la lubrification pour un modèle rhéologique non newtonien et ils ont couplé l'équation de lubrification avec l'équation de déformation de surface simultanément dans la zone totale de contact. La solution numérique du problème viscoplastique est basée sur la méthode itérative de Newton- Raphson présentée en détaille par Okamura, par contre le problème viscoélastique est basé sur la méthode des différences finies présentée en détaille par Hamrock. Ils ont conclu que la pression et l'épaisseur du film, diminuent avec l'augmentation du rapport glissement- roulement.

En 1992, G.W.Roberts et K.Walters, ont conduit, une étude numérique sur la lubrification hydrodynamique des paliers par des fluides viscoélastiques de type Maxwell. Ils ont utilisé la série de Chebyshev modifiée dans la direction radiale et la série de Fourier dans les deux directions axiale et circonférentielle pour résoudre les équations constitutives et quantité de mouvement. Ils ont étudié l'effet du temps de relaxation ainsi que l'excentricité sur la force hydrodynamique. Ils ont montré que la composante F_x de la force hydrodynamique est importante de telle façon à être comparable avec la composante F_y quand l'excentricité ε se rapproche vers 1.

En 1993, M.M.Khonsari et D.Y.Hua ont présenté une méthodologie générale de formulation et de solution qui traite un problème de la lubrification élasto- hydrodynamique avec un fluide non Newtonien, y compris des modèles de Bair- Winer ou de Ree- Eyring. En effet, les équations appropriées qui peuvent prévoir exactement le comportement de la force de traction dans le lubrifiant élasto- hydrodynamique régie par divers modèles rhéologiques, selon les conditions de fonctionnement. Dans la formulation des équations, M.M.Khonsari et D.Y. Hua s'abstiendront de changer la forme fonctionnelle de l'équation constitutive et ils ont évité les prétentions et les approximations restrictives provoquées par des analyses de perturbations. Ils ont proposé une méthode numérique pour déterminer la viscosité équivalente et le taux de cisaillement. La méthode proposée peut traiter l'équation constitutive d'un fluide non Newtonien.

En 1994, A.R.Davies et X.K.Li ont présenté une étude numérique sur les effets de la température et de la pression en écoulement viscoélastique entre deux cylindres en rotation excentrées. Ils ont étudié le cas pour des excentricités élevées. Le modèle constitutif utilisé est un fluide de White- Metzner ainsi que la méthode employée est celle de pseudo-spectral avec transformation bipolaire pour discrétiser les équations régissant le problème étudié. Ils ont montré que le couplage entre la condition de Dirichlet pour la température sur le cylindre intérieur avec une condition de Biot (ou Robins) sur le cylindre externe, mènent à équilibré le champ de température où elle est maximale dans la partie convergente (petit espace), comme prévu dans la lubrification du coussinet. Ils constatent aussi que les mêmes effets sont réalisés avec des conditions de Biot sur les deux cylindres et ils suggèrent qu'aux excentricités élevées, la pression domine le comportement visqueux plutôt que le cisaillement ou la température. Ils ont obtenu que le temps de relaxation soit proportionnel à la viscosité, ceci peut augmenter les efforts normaux par au moins deux ordres de grandeur, en comparaison avec un modèle de viscosité constante, ayant pour résultat des augmentations de 20% et plus élevé dans la charge de capacité de roulement.

En 1997, J.Seabra, A.Sottomayor et A.Campos ont évalué le coefficient de frottement dans le cas des contacts élasto- hydrodynamique dans les roulements. Pour un comportement non Newtonien du lubrifiant, le contact élasto- hydrodynamique est simulé par un contact hertzien sec pour simplifier l'analyse, dont les surfaces sont séparées par un film mince de lubrifiant. L'épaisseur de film est corrigée par un facteur thermique qui tient compte du chauffage de cisaillement visqueux. Le comportement de lubrifiant à l'intérieur du contact EHD est décrit par les deux modèles rhéologiques, respectivement visqueux et viscoélastiques, tous les deux avec un fluide de Ree- Eyring. Ils ont développé dans cette étude les expressions analytiques de ces deux modèles. Ils ont conclu que les valeurs globales des coefficients de frottements calculées sont similaires aux résultats obtenus expérimentalement. Le caractère onduleux des surfaces de contact ne modifie pas de manière significative la distribution tangentielle des efforts de cisaillement.

J.A.Tichy a présenté en 1996 un travail théorique où il a posé les équations régissant le problème de la lubrification hydrodynamique par un lubrifiant viscoélastique (modèle de Maxwell généralisé UCM). Le palier étudié est un palier développé, ainsi que la méthode numérique utilisée dans cette étude est la méthode de perturbation. Les résultats obtenus montrent l'importance des effets viscoélastiques sur l'augmentation de la pression et que le

gradient de la pression à l'entrée est négatif par contre il est positif à la sortie. L'auteur a conclu que les contraintes normales ainsi que les contraintes de cisaillement doivent être considérés dans les équations de mouvement.

Dans la même année (1996), X.Huang, N.Phan-Thien et R.I.Tanner, ont proposé un algorithme numérique pour résoudre le problème d'écoulement d'un fluide viscoélastique de type de Maxwell généralisé (UCM) entre deux cylindres excentriques. Le cylindre extérieur est fixe alors que le cylindre intérieur tourne. Ils ont montré que, pour une faible excentricité, les résultats numériques sont comparables avec le calcul analytique pour le cas de deux cylindres concentriques. Ils ont montré aussi que pour des valeurs importantes de Deborah, l'angle de calage tend vers zéro. Pour $De=100$ et pour un cas d'excentricité faible, ils ont abouti à une valeur de -1.5° par la méthode UCV (Unstructured Control Volume) alors que la valeur obtenue par la méthode de SEFM (Spectral Element Finite Method) est égale à -12° . Ils ont constaté que cette différence est due au problème d'instabilité de la méthode numérique pour des grandes valeurs de Deborah.

En 1999, A. Wachs et J. R. Clermont ont étudié numériquement les écoulements viscoélastiques non- isothermes dans une contraction brusque axisymétrique pour des nombres élevés de Weissenberg. La simulation numérique a été effectuée par un modèle UCM. Ils ont étudié les différentes conditions thermiques qui peuvent être liées aux opérations de refroidissement externes, en particulier en présence des singularités géométriques. Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, d'énergie et constitutives sont discrétisées par la méthode des volumes finis. Un cadre thermodynamique général a été employé pour décrire le mécanisme de conversion d'énergie se produisant avec les fluides viscoélastiques. Ils ont conclu que:

- La convergence de l'algorithme itératif utilisé est toujours vérifiée.
- Les calculs, course sur micro-ordinateur Pentium II 333MHz, ont été arrêtés à un nombre de Weissenberg de 10.
- Le procédé numérique converge même pour de grands pas de la température aux frontières, fournissant des solutions stables.
- De bonnes réponses au problème capital de la convergence.
- L'étude de la structure d'écoulement près de la singularité confirme l'existence d'une solution de similitude. Les résultats numériques indiquent un comportement d'écoulement proche des résultats obtenus par Hinch pour un fluide newtonien.

En 2001, H.Al Moatassem et C.Jouron ont présenté une nouvelle approche pour la simulation numérique des fluides viscoélastiques (Oldroyd B et Thein Tanner). Des équations régissant les écoulements ont été discrétisées par la méthode des différences finies sur un système de grille non uniforme. La méthode multi grille fait appel à un algorithme permet d'atteindre des mailles plus fines dans un temps raisonnable des calculateurs numériques. L'utilisation du modèle d'Oldroyd B ne donne aucune convergence de la solution avec l'amélioration de la maille. Ce résultat a été confirmé sur des mailles plus fines, ainsi que l'effort maximal près de la singularité se développe énormément. Un nombre critique de Weissenberg a été trouvé quand le modèle d'Oldroyd B a été employé avec une diminution de ce nombre et

amélioration des mailles. Ils ont conclu que la méthode développée dans ce travail donne des résultats satisfaisants, comparables avec d'autres algorithmes dans la littérature.

En 2002, Jerzy Petera a conçu un nouveau schéma numérique pour la simulation des écoulements de fluide viscoélastique, se servant des algorithmes des éléments finis considérés comme avantageux pour aborder le problème. Ceci inclut l'approche lagrangienne pour la solution de l'équation constitutive viscoélastique en utilisant la structure co-déformation de la référence avec une possibilité de résoudre analytiquement l'équation le long de la trajectoire de particules. La pleine ellipticité de l'équation de conservation de quantité de mouvement est utilisée grâce à la possibilité de déterminer le tenseur d'effort indépendamment du champ de vitesse à l'étape courante du calcul.

En 2005, D.Grecov et J.R.Clermont ont appliqué une approche originale pour simuler numériquement des écoulements complexes bidimensionnels entre deux cylindres excentriques ainsi que l'étude de l'influence des propriétés rhéologiques sur les caractéristiques d'écoulement. Ils ont utilisé la décomposition de domaine et les fonctions locales de transformation. Cette analyse a permis de calculer les caractéristiques principales d'écoulement aux vitesses angulaires significatives près des situations de lubrification des paliers aussi bien que des écoulements à inertie avec un large espace entre les cylindres. Les résultats obtenus indiquent que pour un fluide de UCM, il y a une bonne concordance avec des résultats de la littérature. L'étude des écoulements des fluides non élastique et viscoélastique dans les paliers a conduit à des différences significatives dans les prévisions pour la cinématique, les efforts et les vitesses angulaires calculées. Les résultats maintiennent l'influence des propriétés élastiques sur les caractéristiques d'écoulement, par rapport aux effets de cisaillement.

En 2008, A.Ouibrahim et M.Allouche ont présenté une étude théorique sur la lubrification hydrodynamique par des fluides viscoélastiques dans un palier. Ils ont utilisé deux modèles : le premier est celui, d'Oldroyd B et le deuxième un modèle thermodynamique. Ils ont utilisé une analyse phénoménologique où les ordres de grandeurs sont appréciés au travers les nombres caractéristiques mis en évidence que sont les nombres de Reynolds, de Deborah, de Weissenberg. Ils ont conclu que : le champ de pression ne dépend que des nombres de Reynolds et de Deborah pour le fluide B d'Oldroyd alors que pour la suspension de particules déformables, il dépend du nombre de Weissenberg et un autre paramètre B qui représente les propriétés élastiques spécifiques de la suspension. Ils ont remarqué concernant l'effet de la viscoélasticité pour les deux modèles, que les propriétés élastiques influent sur le champ de pression et incidemment sur la charge exercée par le fluide viscoélastique sur l'arbre. Ils ont remarqué aussi que les effets élastiques contribuent à donner l'existence à une composante des efforts, exercés par le fluide sur l'arbre, dans la direction de la ligne des centres, ce qui est le contraire dans le cas du fluide Newtonien où ils ont trouvé que cette composante est nulle.

Relativement à l'étude analytique, M.Allouche et A.Ouibrahim ont présenté une étude numérique des équations complètes dans leur ensemble. Ils ont utilisé la méthode numérique des volumes finis pour développer un code de calcul sous Fluent. Ils ont comparé les résultats obtenus pour un fluide viscoélastique avec un fluide newtonien et ils ont conclu que dans le cas d'un fluide viscoélastique, la composante de la portance W_1 n'est pas nulle, l'angle de calage différent de 90° et n'est plus constant, le couple de frottement sur le coussinet et sur l'arbre est

plus important. Ils ont obtenu un gain substantiel en portance hydrodynamique dans un palier lubrifié par un fluide viscoélastique.

K.P.Gertzos et al ont proposé en 2008 une étude sur la lubrification des paliers hydrodynamiques avec des fluides électro- rhéologiques (ERFs) et les fluides magnéto- rhéologiques (MRFs), ces deux fluides se comportent comme des fluides de Bingham. Ils ont utilisé le code CFD pour déterminer les caractéristiques et l'équilibre hydrodynamique des paliers lubrifiés avec des fluides de Bingham et des fluides Newtoniens en trois dimensions. Le logiciel utilisé dans cette étude est Fluent ainsi que le type de maillage est le maillage dynamique. Des caractéristiques de réalisation du palier étudié, telles que l'excentricité relative, l'angle d'attitude, la distribution de la pression, le coefficient de frottement et le débit de lubrifiant, sont déterminées et présentées pour plusieurs valeurs du rapport longueur/diamètre (L/D) et du taux de cisaillement. Les résultats obtenus à partir du modèle à trois dimensions développé de CFD s'avèrent dans la concordance très bonne avec des données expérimentales et analytiques.

Dans la même période (2008), D.RH.Gwynllyw et TN.Phillips ont étudié l'influence de la viscoélasticité sur les performances des paliers hydrodynamiques. Ils ont utilisé la méthode numérique des éléments spectraux pour modéliser le problème de la lubrification des paliers hydrodynamiques par les deux fluides viscoélastiques de types Oldroyd-B et PTT. Ils ont montré que la charge portante augmente avec le temps de relaxation pour le premier modèle rhéologique (Oldroyd-B) et diminuée pour le deuxième modèle de PTT.

Kai lui et Dana Grecov en 2011, ont proposé une étude purement numérique sous le logiciel POLYFLOW sur l'écoulement des fluides non-Newtonien entre deux cylindres excentriques (application sur les paliers lisses). Le fluide utilisé est un fluide viscoélastique de type UCM et le nombre de Weissenberg été important dans cette étude. Les résultats mettent en évidence l'influence des propriétés non Newtoniennes des fluides sur les écoulements annulaires entre deux cylindres excentriques ainsi que dans des cas particuliers de paliers, notamment le rôle de l'élasticité.

M. Guemmadi et A. Ouibrahim ont publié en 2011 un travail qui considère l'étude de la lubrification hydrodynamique d'un palier en utilisant un lubrifiant ayant des propriétés viscoélastiques décrites par le modèle de Maxwell généralisé UCM. La complexité des équations (quantité de mouvement et constitutive) couplées associés au problème étudié dans une telle géométrie nécessite des outils numériques. Ils ont utilisé le logiciel FLUENT avec un code de calcul développé en C++, pour déterminer la distribution de la pression, le profil de vitesse de l'écoulement et le champ de contraintes dans l'entrefer et de calculer la portance et l'angle de calage. Les résultats montrent que l'effet de la viscoélasticité est marqué par l'existence de la différence de la contrainte normale.

4. Conclusion

L'étude bibliographique présentée ici, nous a permis de suivre l'évolution de l'analyse du phénomène de lubrification dans les paliers et nous a montré que ce chapitre de la tribologie a été abordé depuis très longtemps. Au début, des expériences ont été réalisées pour mettre en évidence l'effet hydrodynamique dans les paliers. Ensuite, les recherches sont consacrées à la

formulation analytique du problème en se basant sur des hypothèses simplificatrices afin d'éviter la confrontation avec des problèmes incontournables à cette époque. Mais avec le temps, la plupart de ces problèmes trouve solution.

Après le développement de la théorie générale qui gouverne le phénomène thermique dans les paliers hydrodynamiques, plusieurs études ont été effectuées pour caractériser ce dernier. Dans ce contexte, et en parallèle avec le progrès très remarquable des outils de calcul, plusieurs modèles numériques ont été proposés pour donner une solution approximative du problème réel.

Les travaux présentés ont montré que les effets de la viscoélasticité sur les caractéristiques de la lubrification a récemment pris une importance accrue avec le passage à des lubrifiants encore moins visqueux pour une meilleure efficacité énergétique. Tout facteur influençant la capacité portante et de l'usure est manifestement d'une importance renouvelée, et il y a donc de bonnes raisons pratiques d'étudier la question générale des effets viscoélastiques sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses.

Beaucoup de fluides d'importance industrielle sont de type non Newtonien. À la différence des fluides Newtoniens, les fluides non Newtoniens présentent des effets qui ne peuvent pas être décrits par les équations de Navier- Stokes. Ces fluides non-Newtoniens sont caractérisés par diverses propriétés, non newtoniens mais purement visqueux tel que, la viscosité dépendant du taux de cisaillement, ou encore plus complexe ; par des fluides viscoélastiques (résistance élevée de la déformation élongationnelle, présence des contraintes normales en écoulement viscosimétriques, voire, des effets de mémoire inhérents à leurs propriétés élastiques).

Ces dans une telle perspective que nous inscrivons par ailleurs le travail effectué dans cette thèse. Nous proposons ainsi dans cette thèse, d'étudier un fluide viscoélastique relatif au modèle de Maxwell généralisé (UCM) en lubrification hydrodynamique des paliers lisses avec transfert de chaleur par convection forcée dans le film fluide et les transferts de chaleur dans le Coussinet, en tenant compte par ailleurs, de la variation des paramètres physiques en fonction de la température.

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE DES PALIERS LISSES

Chapitre II - Généralités sur la Lubrification Hydrodynamique des Paliers Lisses

1. Introduction

Les contacts dans les roulements sont généralement lubrifiés avec une huile ou une graisse. Ce lubrifiant (comme l'ont montré Ertel et Grubin en 1939) crée un film entre les surfaces des éléments roulants et les bagues. Son premier rôle est d'adapter les vitesses entre les éléments roulants et les bagues. En effet, les vitesses tangentielles des surfaces des corps roulants et des bagues ne sont pas identiques. Il existe donc un glissement à l'interface entre ces deux solides. Le glissement (fonction de la cinématique du roulement) génère des forces de frottement. Le film, lorsqu'il est cisailé, engendre des forces de frottement beaucoup plus faibles que celles développées par un contact non lubrifié (dit « sec » ou « hertzien »). Si un roulement opère en absence de lubrification, les forces de frottement sont élevées, car elles sont créées par le cisaillement (dû au glissement) de la couche d'oxydes présente sur les surfaces. Elles entraînent un échauffement à sa rupture en fatigue. Lorsque la lubrification est assurée par un débit conséquent, le second rôle du lubrifiant est d'évacuer la chaleur dissipée par frottement [A. Dadouche].

Lorsque le volume compris entre les bagues et les éléments roulants est rempli de lubrifiant, le contact fonctionne en conditions « sur- alimentées ». Ces conditions ont été étudiées depuis 1939 [Ertel A.M] et les épaisseurs de film correspondantes ont été modélisées physiquement grâce aux travaux d'Hertz, Reynolds [Reynolds O] et Barus [Barus C].

2. La lubrification

Il résulte de tout ce qui précède concernant les lois du frottement sec et les inconvénients du frottement entre les corps mobiles d'une machine, qu'il s'avère très nécessaire de substituer au cisaillement de la matière solide superficielle, le cisaillement d'un fluide visqueux que l'on introduit dans l'interface séparant les deux solides, c'est à dire l'interposition d'une couche fluide entre les surfaces frottantes permet de diminuer considérablement la résistance au glissement donc de protéger contre l'usure adhésive les pièces en contact. Donc la lubrification est la solution pour protéger les pièces frottantes contre l'usure.

En plus, il est nécessaire que le milieu résistant inter-facial possède une épaisseur suffisante pour éviter tout contact entre les aspérités des surfaces frottantes quelles que soient les valeurs des charges appliquées. Dans ce cas lorsque la vitesse relative des surfaces est faible et que la viscosité du fluide inter-facial est insuffisante, il faut, pour éviter tout contact désastreux que :

- les déformations subies par les surfaces en regard sous l'effet de la charge appliquées sont aussi faibles que possible,
- la rugosité des surfaces en regard soit aussi faible que possible,

Le lubrifiant doit remplir certaines conditions telles que :

- la température d'ébullition soit assez élevée,
- la température de solidification soit relativement basse,
- la faible affinité pour l'oxygène de l'air,
- être passif vis à vis des surfaces frottantes de façon à assurer un long usage sans modification notable des propriétés,
- adhérer aux surfaces de frottements (pouvoir mouillant).

Pratiquement, seules les huiles et graisses d'origine minérale remplissent suffisamment ces conditions pour pouvoir être utilisées comme lubrifiants.

3. Modes d'action d'un lubrifiant

On distingue essentiellement deux régimes de lubrifiant :

a. Le régime onctueux

Dans ce cas, l'épaisseur de la couche lubrifiante est inférieure à la hauteur des aspérités des surfaces frottantes. Les surfaces restent en contact par leurs aspérités auxquelles adhère une faible couche de lubrifiant offrant une résistance mécanique non-négligeable à l'écrasement et l'arrachement et c'est cette résistance qui définit l'onctuosité du lubrifiant ou le pouvoir graissant en couche mince (l'onctuosité ne se chiffre pas). La couche du lubrifiant est discontinue et le coefficient de frottement f est de l'ordre de 0,008 à 0,12.

b. Le régime hydrodynamique

Le régime hydrodynamique apparaît lorsque le déplacement relatif d'une surface par rapport à l'huile engendre, au sein de cette huile inter-faciale, une contraction telle que la pression induite équilibre la charge exercée entre les deux surfaces.

Dans ce cas, la couche d'huile est suffisamment grande pour que les aspérités de pièces ne puissent venir en contact, l'épaisseur du film d'huile est alors 1000 fois plus élevée que dans le régime onctueux et la résistance de glissement est très faible.

Le coefficient de frottement et l'épaisseur du film d'huile varient :

- avec la viscosité μ du fluide,
- avec la vitesse U du glissement relatif des surfaces.
- et en raison inverse de la pression moyenne P équilibrant la charge.

En régime hydrodynamique, l'énergie de frottement est développée au sein même de l'huile est évacuée grâce à la circulation d'huile. La lubrification peut être aussi hydrostatique, c'est à dire, effectuée par une source de pression extérieure au mécanisme.

Quel que soit le phénomène mis en jeu, l'épaisseur minimale du film doit être plus grande que la hauteur des aspérités des surfaces, sinon on est en présence de lubrification hydrodynamique où le film d'huile a une épaisseur relativement importante (6 à 8 μm lorsque les surfaces sont rectifiées).

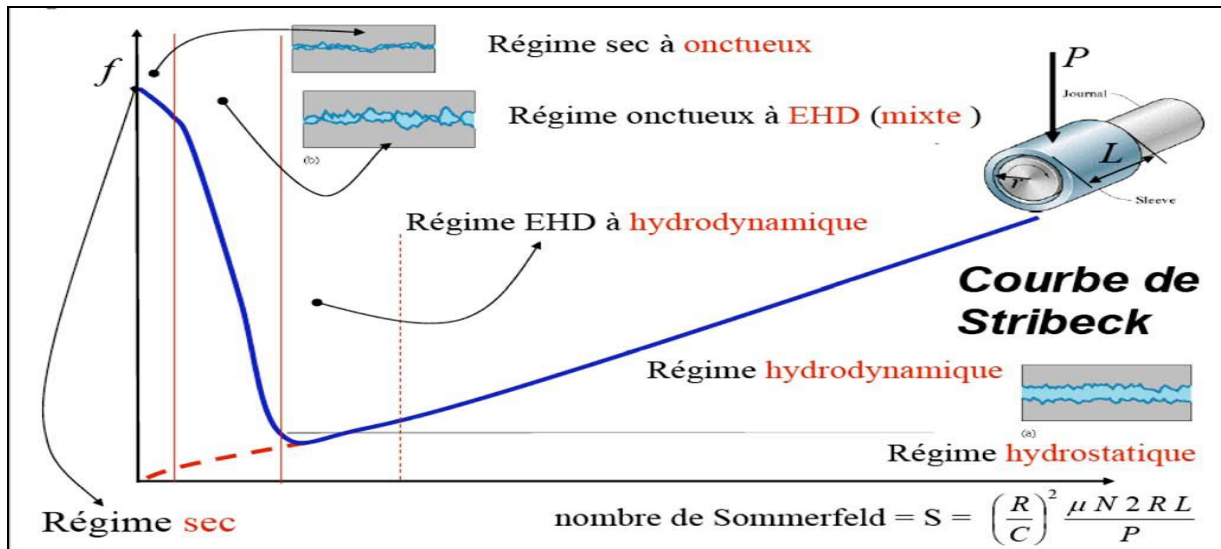


Figure (II.1) : Courbe de Stribeck

4. Caractéristiques d'un lubrifiant

4.1 La viscosité

De toutes les propriétés physiques et chimiques à considérer en lubrification, la viscosité est l'une des plus importantes. Dans les paliers, les engrenages et les systèmes hydrauliques où le régime de fonctionnement est hydrodynamique, c'est la viscosité qui détermine les pertes par frottement, la capacité de charge et l'épaisseur du film d'huile. La viscosité est véritablement une mesure de l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification par film complet sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température.

Selon la norme N.F. T 60- 100 de novembre 1959 : « La viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'opposent ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans son sein ». Ainsi la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à tout glissement interne de ses molécules les unes sur les autres.

Cette force de résistance peut être calculée par la formule de Newton relative à l'écoulement laminaire d'un fluide entre une surface mobile animée d'une vitesse $\vec{V}$ et une surface fixe (Fig. II.2). Entre ces deux surfaces les différentes « pellicules » de fluide vont également se déplacer à des vitesses v différentes variant de 0 à V .

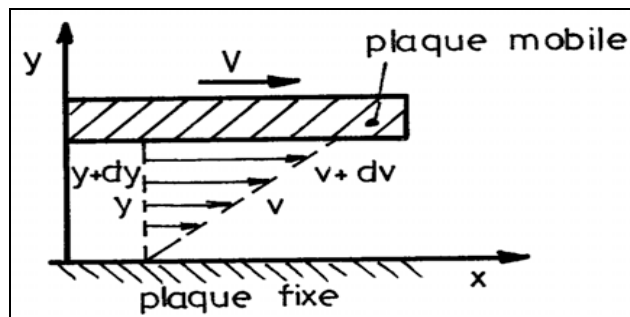


Figure (II.2) : Ecoulement de Couette

Si à une distance y de la surface fixe, la vitesse de la pellicule de fluide est v et devient $v+dv$ à la distance $y+dy$ alors la contrainte tangentielle σ_{xy} appelée fréquemment contrainte de cisaillement, et notée τ , est donnée par :

$$\tau = \sigma_{xy} = \mu \frac{dv}{dy} \quad (\text{II.1})$$

Où μ est un coefficient caractéristique du fluide appelé viscosité dynamique.

L'hypothèse selon laquelle il existe un coefficient de proportionnalité, appelé viscosité dynamique, entre la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse est justifié par l'expérience pour un grand nombre de fluides, dits fluides newtoniens. Parmi ceux-ci, on trouve l'eau et de nombreuses huiles lubrifiantes. La présence de macromolécules, ou des conditions sévères d'utilisation, font que la relation de proportionnalité n'existe pas toujours : le fluide est alors non newtonien.

Dans le cas général, pour un fluide newtonien, la relation qui lie le tenseur des contraintes σ_{ij} au tenseur des taux de déformation ε_{ij} s'écrit [J. F. Agassant] :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{II.2})$$

Avec $\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

Dans cette relation, p est la pression, θ le taux de dilatation cubique, δ_{ij} le symbole de Kronecker et μ et λ deux coefficients de viscosité.

Pour un fluide incompressible $\theta = 0$: le second coefficient de viscosité λ n'intervient plus.

Le tableau ci-dessous donne la classification des huiles industrielles en fonction de leur viscosité.

Classe ISO de viscosité	Viscosité cinématique cSt à 40° c	Limites de la viscosité cinématique à 40° c	
		Min	Max
ISO VG 2	2,2	1,98	2,42
ISO VG 3	3,2	2,88	3,52
ISO VG 5	4,6	4,14	5,06
ISO VG 7	6,8	6,12	7,48
ISO VG 10	10	9,00	11,00
ISO VG 15	15	13,50	16,50
ISO VG 22	22	19,80	24,20
ISO VG 32	32	28,80	35,20
ISO VG 46	46	41,40	50,6
ISO VG 68	68	61,20	74,8
ISO VG 100	100	90	110
ISO VG 150	150	135	165
ISO VG 220	220	198	242

ISO VG 320	320	288	352
ISO VG 460	460	414	506
ISO VG 680	680	612	748
ISO VG 1000	1000	900	1100
ISO VG 1500	1500	1350	1650

Tableau (II.1) : *Classification des huiles industrielles en fonction de leur viscosité*

Dans cette classification, la viscosité cinématique médiane de chaque classe doit être environ 50% plus élevée que celle de la classe précédente.

4.2 Propriétés de transfert thermique

4.2.1 Conductivité thermique :

Les conductivités thermiques des huiles minérales sont 4 à 5 fois plus faibles que celle de l'eau. Elles décroissent linéairement avec la température de $k=0.14 \text{ w/m.}^\circ\text{C}$ à 0°C à $0.11 \text{ w/m.}^\circ\text{C}$ à 100°C . Aux températures usuelles (20 à 60°C), la valeur moyenne est de $0.13 \text{ w/m.}^\circ\text{C}$. Il est possible de les calculer à partir de la relation suivante [J. Frêne]:

$$k = \frac{0.101}{d}(51 - 0.00054T) \text{ Avec :}$$

k : est la conductivité thermique exprimée en $\text{Kcal/m.h}^\circ\text{C}$

d : est la densité mesurée à une température en $^\circ\text{C}$.

T : est la température du fluide en $^\circ\text{C}$.

4.2.2 Capacité thermique massique :

La capacité thermique massique des huiles minérales est, en moyenne, 2 fois plus faible que celle de l'eau. Elle augmente linéairement avec la température de 1800 J/kg.K environs à 0°C jusqu'à 2150 J/kg.K environs à 100°C . Pour des calculs simplifiés, la valeur moyenne aux températures usuelles des bains d'huile (50°C à 80°C) se situe vers 2000 J/kg.K .

On peut déterminer la valeur de la chaleur spécifique par la relation suivante

$$[60]: C_p = (d)^{-1/2}(0.402 + 0.00081T)$$

C_p est la chaleur spécifique exprimée en $\text{Kcal/kg}^\circ\text{C}$,

d : la densité à une température en $^\circ\text{C}$.

4.2.3 Masse volumique :

La masse volumique diminue assez sensiblement lorsque la température s'élève. Elle varie selon la relation suivante, si T_0 est la température de référence :

$$\rho = \rho_{T_0} - a(T - T_0)$$

Si ρ_{T_0} est la masse volumique de l'huile à la température de référence T_0 (en kg/dm^3), le coefficient de dilatation volumique ' a ' varie de $0.0006 \text{ kg/dm}^3/^\circ\text{C}$ pour les huiles visqueuses jusqu'à 0.0007 pour les huiles minérales les plus fluides. Pour un calcul approché, on prendra : $a=0.00065 \text{ kg/dm}^3/^\circ\text{C}$.

4.2.4 Viscosité dynamique :

La viscosité des huiles minérales décroît de façon quasi-exponentielle avec la température. On peut approcher localement la variation de la viscosité dynamique par une relation de la forme :

$$\mu = \mu_0 e^{-E(T-T_0)}$$

Avec μ_0 est la viscosité dynamique à une température T_0 donnée.

4.3 L'onctuosité

Elle exprime la possibilité, pour un lubrifiant, d'adhérer aux surfaces frottantes et de former une couche permanente entre ces surfaces. Donc c'est la résistance qu'oppose le lubrifiant à son arrachement de la surface frottante sur laquelle il est établi. L'onctuosité varie dans le même sens que la viscosité et elle ne se chiffre pas.

4.4 L'oxydabilité

Elle caractérise la résistance d'une huile à une éventuelle oxydation. Une huile qui s'oxyde se détériore.

4.5 La corrosivité

Certaines huiles contiennent des additifs ou minéraux qui ont un caractère acide, pouvant attaquer les surfaces des pièces par le phénomène de corrosion. Donc la corrosivité est la détérioration des pièces par les acides.

4.6 L'inflammabilité

Elle est mesurée par le point d'éclair qui est la température pour laquelle les vapeurs émises s'enflamment au contact d'une flamme.

4.7 La résistance au froid

Une huile figée ou gelée peut empêcher toute lubrification.

4.8 Caractéristiques diverses

Couleur, volatilité, solubilité, point de fusion, point d'ébullition, acidité, tension superficielle etc.

5. Formation du film d'huile

On considère le cas de déplacement de deux surfaces cylindriques par exemple l'arbre et le coussinet. L'apparition d'une pression interne exige simplement la création d'une contraction géométrique entre l'entrée et la sortie de la veine d'huile, se traduisant par une vitesse moyenne de sortie supérieure à la vitesse moyenne d'entrée. L'obtention de cette contraction exige que :

- a. Le diamètre de l'arbre et le diamètre du coussinet soient différents, ce qui se traduit par un jeu diamétral. Ce jeu donne lieu à un coin d'huile déterminant la formation d'un film continu.
- b. Les centres des sections droites circulaires de l'arbre et du logement soient distincts ; la mise en position de l'arbre au sein du coussinet s'effectue sans contrainte, pouvant tourner librement autour d'un axe.

Une zone de détente fait suite à une zone de contraction, et inversement par la suite, la limite entre les zones étant sur la ligne des centres des cercles.

A l'arrêt ou au repos (Fig. II.3.a), l'arbre A repose sur le coussinet par sa génératrice inférieure et l'épaisseur de la couche d'huile est négligeable au point de contact.

Au départ ou début du mouvement rotationnel (Fig. II.3.b), l'arbre remonte dans le coussinet (comme sur une crémaillère) provoquant une contraction par unité de temps proportionnelle à la vitesse de rotation. On a un graissage onctueux.

A partir d'une certaine vitesse de rotation (Fig. II.3.c) l'arbre, tournant peut flotter librement dans le logement, supporté par un coin d'huile qui s'est formé, sous l'effet de la rotation de l'arbre, grâce à la différence des courbures de l'arbre et du coussinet et de la non concordance de leurs centres.

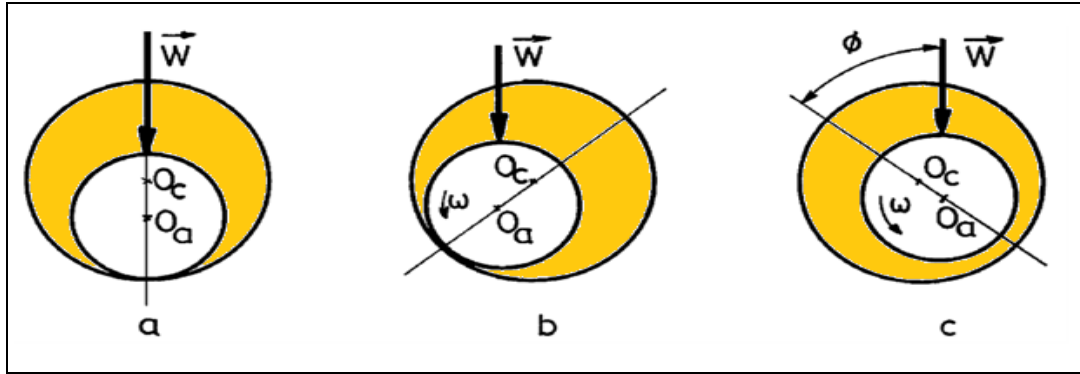


Figure (II.3) : Schématisation d'un palier lisse

6. Répartition des pressions au sein du film d'huile

Les pressions existantes entre différents points du film d'huile se répartissent selon la Figure (II.4) par exemple le cas d'un palier lisse qui est constitué généralement d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet complet. Ces deux éléments sont totalement séparés par un film de lubrifiant. Si l'on applique une charge à l'arbre, les axes de l'arbre et du coussinet ne coïncident plus.

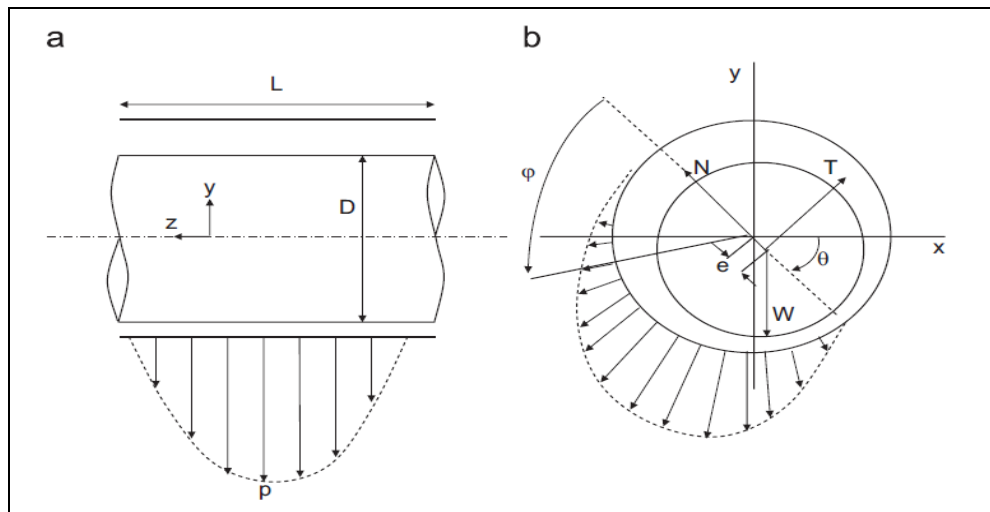


Figure (II.4) : (a) : distribution de la pression, (b) : distribution de la pression et de la force hydrodynamique

Cette géométrie entraîne la création d'un espace convergent-divergent qui compte tenu d'une part de l'adhérence du fluide de l'arbre et d'autre part de la vitesse de rotation de celui-ci, crée un champ de pression qui s'oppose à la charge extérieure. L'existence d'un espace

divergent entraîne la rupture du film pour une zone située légèrement en aval de la zone d'épaisseur minimale du film.

On distingue donc la zone où la pression est positive et le film est complet et une région ou zone de dépression où la pression est négatives et enfin une région inactive à pression nulle dans laquelle peut apparaître la cavitation. Pour que le film d'huile s'amorce et soit continu, il faut que la vitesse de l'arbre soit suffisante, la viscosité de l'huile soit suffisante et que l'alimentation soit abondante et qu'elle s'effectue dans une zone de pression faible ou nulle.

Une alimentation abondante peut être obtenue sous pression en permanence en exécutant une rainure d'alimentation qui a pour but de répartir l'huile sur toute la largeur du palier et de faciliter la formation du film d'huile et en particulier de mouiller la zone inactive du film, on évite ainsi le phénomène de cavitation et d'augmenter le débit afin de limiter l'échauffement du fluide.

7. Lubrification hydrodynamique par un fluide Newtonien

La lubrification hydrodynamique est un chapitre de la tribologie qui concerne les contacts pour lesquels un fluide visqueux est intercalé entre les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide, pratiquement incompressible, tel que de l'huile, de l'eau ou même un métal fondu : c'est le cas des paliers et des butées hydrodynamiques. Ce fluide peut aussi être un gaz compressible, le plus souvent de l'air.

En lubrification hydrodynamique, le film de fluide sépare totalement les surfaces en présence, ce qui suppose que les aspérités et les défauts de forme des surfaces aient des dimensions inférieures à l'épaisseur du film. Dans le cas contraire, il y aura contact en différents points des deux surfaces ; on parlera alors soit de lubrification mixte, soit de lubrification limite.

La formation et le maintien d'un film de fluide imposent l'existence d'une pression dans ce film afin d'équilibrer la charge appliquée entre les deux surfaces du mécanisme. Cette pression, qui, en lubrification hydrostatique, est engendrée par un système extérieur au contact (pompe ou compresseur) est, dans le cas hydrodynamique, créée par le déplacement relatif des surfaces. Le calcul de cette pression permet de déterminer la charge que peut supporter le contact, le couple ou la force de frottement et le débit de fluide dans le mécanisme. Ainsi, pour déterminer les caractéristiques de fonctionnement d'un palier, il faudra tout d'abord calculer la pression dans le film. Cette pression est obtenue par la résolution de l'équation de Reynolds qui, sous une forme simplifiée, a été démontrée par ce dernier en 1886.

7.1 Équations de Reynolds

L'équation de Reynolds en lubrification peut être déduite des équations de la mécanique des milieux continus et de la loi de comportement des fluides newtoniens, en tenant compte de la forme particulière du film lubrifiant pour lequel l'épaisseur est très faible devant la largeur et la longueur du contact. Il existe différentes formes ; de cette équation qui permettent de tenir compte de l'effet thermique et de la rugosité des surfaces. La démonstration de ces équations a été effectuée par plusieurs travaux.

Nous présenterons ici les hypothèses effectuées et l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible en régime isotherme dans le cas d'un système d'axes en coordonnées cartésiennes.

Hypothèses

- Le milieu est continu : l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.

- Le fluide est newtonien : les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux taux de cisaillement.
- L'écoulement est laminaire.
- Les forces massiques extérieures dans le fluide sont négligeables, ce qui est très généralement vérifié sauf en magnétohydrodynamique.
- Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression ; cela est vérifié dans le cas des films minces tant que l'écoulement est laminaire.
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois (condition d'adhérence).
- La courbure générale du film est négligée. On peut démontrer qu'en film mince, dans un palier par exemple, l'effet de courbure est du second ordre.
- La vitesse d'une des parois du contact est toujours tangente à cette paroi, ce qui permet de placer le système d'axes sur la paroi. Cette hypothèse exclut l'emploi de l'équation de Reynolds pour l'étude des contacts rugueux ou comportant des défauts de forme. L'étude de ce type de contact peut être cependant effectuée à partir d'une équation plus générale dite équation de la mécanique des films minces visqueux.
- La viscosité du fluide ne varie pas selon l'épaisseur du contact
- La masse volumique du fluide est constante, ce qui, en lubrification hydrodynamique, est pratiquement le cas pour tous les liquides.
- L'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact ; le rapport entre ces grandeurs doit être de l'ordre de 10^{-3} . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, l'équation de Reynolds ne peut s'appliquer.

7.2 Equation de Reynolds en coordonnées cartésiennes

L'équation de Reynolds traduit la loi de conservation du débit dans le contact.

En coordonnées cartésiennes (figure II.5), où l'épaisseur du film h est mesurée selon Y , les conditions aux limites sur les vitesses du fluide sont :

sur la paroi 1, pour $y = 0$: $u = U_1$; $v = 0$; $w = W_1$;

sur la paroi 2, pour $y = h$: $u = U_2$; $v = V_2$; $w = W_2$.

Dans ces relations, u , v et w sont respectivement les vitesses du fluide dans les directions X , Y , Z et U_1 , U_2 , V_2 , W_1 et W_2 sont respectivement les vitesses des surfaces 1 et 2 dans les directions X , Y et Z .

La vitesse V_1 de la surface 1 dans la direction Y est nulle d'après les hypothèses retenues.

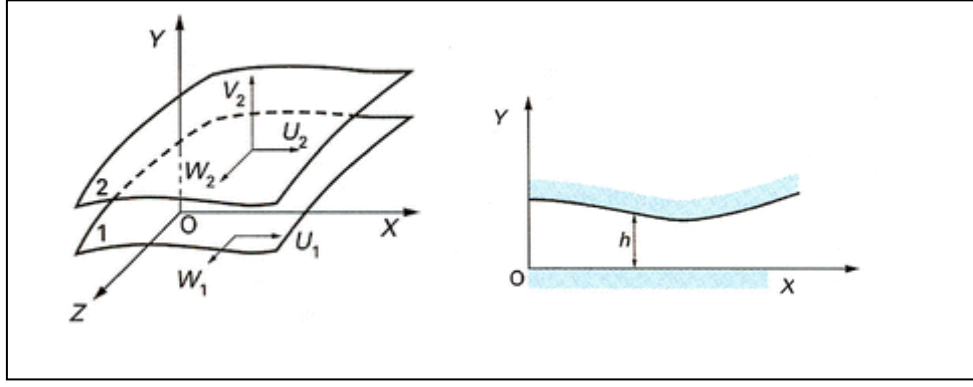


Figure (II.5) : Système d'axes en coordonnées cartésiennes

Si P est la pression dans le film et μ la viscosité dynamique du fluide, l'équation de Reynolds s'écrit [60]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + 6h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (W_1 + W_2) + 12V_2 \quad (\text{II.3})$$

Les composantes de la vitesse du fluide u et w respectivement dans les directions X et Z sont [60]:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2 \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

De ces relations, on déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide [60] :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) + (W_2 - W_1) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas, sauf dans quelques cas simples, de solutions analytiques.

L'inconnue principale est la pression, sa valeur dans le film dépend non seulement de la géométrie du contact et de sa cinématique, mais aussi des conditions aux limites sur la pression retenue lors de la résolution de l'équation de Reynolds. Deux types de conditions sont généralement employés :

On connaît la frontière du domaine d'intégration et, sur cette frontière, la valeur de la pression est connue en tous points. Ces conditions sont utilisées dans le cas des butées hydrodynamiques où il existe généralement un film complet ;

On ne connaît qu'une partie de la frontière du domaine d'intégration et, sur cette partie de la frontière, la valeur de la pression est connue en tous points. Le reste de la frontière, qui limite souvent le domaine où le film est rompu, sera déterminé par une condition supplémentaire sur la pression.

Pour un palier hydrodynamique en fonctionnement stationnaire, trois types de conditions aux limites ont été successivement définis.

7.3 Conditions de Sommerfeld

En 1904 Sommerfeld, suppose que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ces conditions, la distribution de pression est antisymétrique par rapport au point $\theta=\pi$ et le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet est une droite normale à la direction de charge (Figure II.6). Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers fonctionnant à des très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées, car sinon des pressions négatives apparaissent dans le film, ce qui est physiquement inacceptable [J. Frêne].

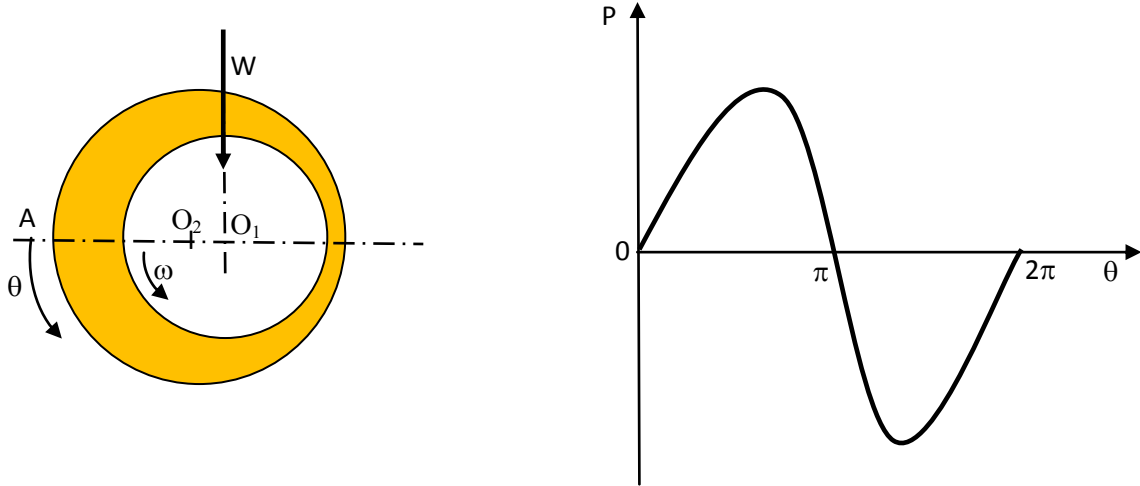


Figure (II.6) : Conditions de Sommerfeld

7.4 Conditions de Gumbel

En 1921 Gumbel, à la suite des travaux de Sommerfeld, propose comme conditions aux limites :

$$p(\theta=0, z)=0$$

$$p(\theta=\pi, z)=0$$

$$p(\theta, z)=0 \text{ si } \pi < \theta < 2\pi$$

Cela revient à négliger, dans la solution de Sommerfeld les pressions négatives. Ces conditions impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta=\pi$; elles ne sont pas acceptables physiquement, mais sont utilisées dans le cas de l'approximation du palier court [60].

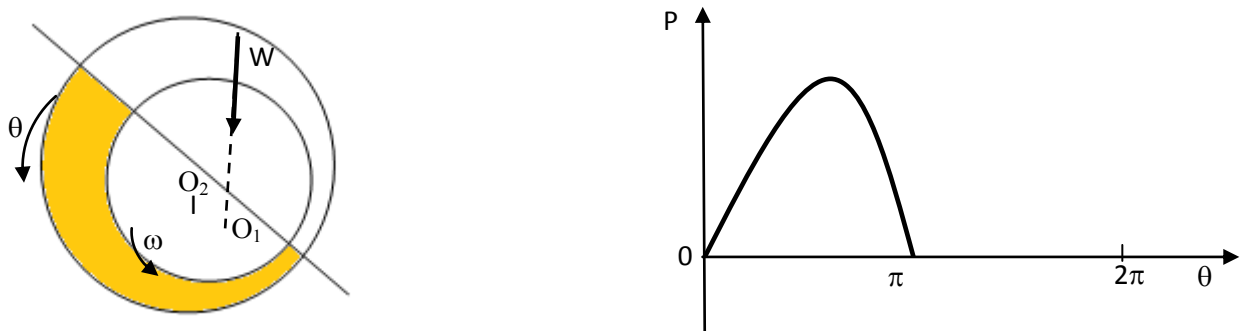


Figure (II.7) : Conditions de Gumbel

7.5 Conditions dites de Reynolds

Ces conditions, proposées indépendamment par Swift en 1932, et par Steiber en 1933, respectent la continuité du débit et supposent que pour une abscisse inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent :

$$p(\theta=0, z)=0$$

$$p(\theta=\theta_s, z)=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta=\theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta=\theta_s, z) = 0$$

$$p(\theta, z)=0 \text{ si } \theta_s < \theta < 2\pi$$

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de θ comprises entre 0 et θ_s et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour $\theta_s < \theta < 2\pi$. Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes ; elles ont été vérifiées dans de nombreuses études expérimentales [J. Frêne].

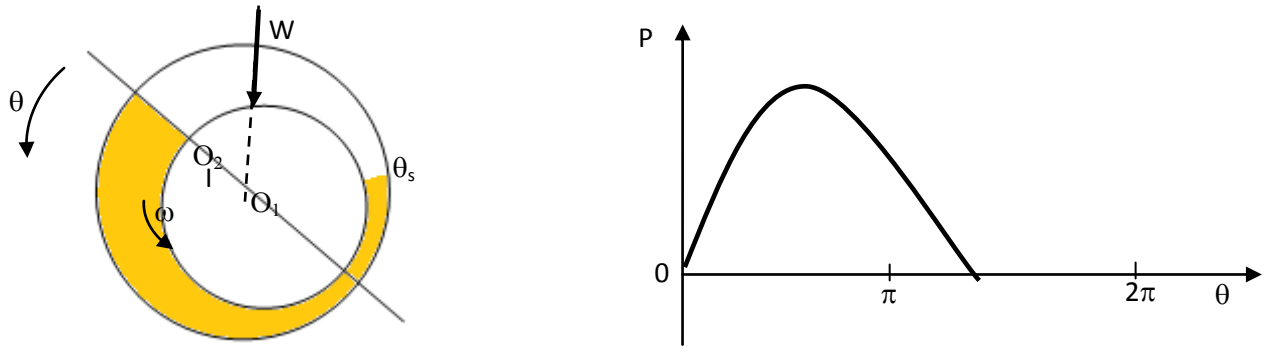


Figure (II.8) : Conditions de Reynolds ou de Swift et Stieber

8. Résolution de l'équation de Reynolds – solution de Sommerfeld- Palier infiniment long

Sommerfeld a résolu cette équation dans le cadre d'un problème plan ($\partial/\partial z = 0$) en négligeant l'écoulement axial, (hypothèse du palier long).

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est grand on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que $(L/D) > 4$. Si seul l'arbre est animé d'un mouvement de rotation uniforme $\omega_a = \omega$ et $\omega_c = 0$, l'équation de Reynolds (II.3) se réduit à [J. Frêne]:

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu R \omega \frac{dh}{dx} \quad (\text{II.6})$$

En utilisant la coordonnée angulaire $\theta = \frac{x}{R}$:

$$\frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dp}{d\theta} \right) = 6\mu R^2 \omega \frac{dh}{d\theta} \quad (\text{II.7})$$

8.1 Calcul de la Pression

Si le palier est alimenté à la pression $p=p_a$ par l'intermédiaire d'une rainure axiale de largeur nulle (infiniment mince), les conditions de Sommerfeld s'écrivent :

$$p(\theta=0)=p(\theta=2\pi)=p_a$$

Une première intégration de l'équation de Reynolds donne :

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\mu R^2 \omega \frac{h-h^*}{h^3} \quad (\text{II.8})$$

h^* étant l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nulle. En intégrant et en remplaçant h par sa valeur, on obtient [60]:

$$p = 6\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2 \left\{ \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right\} + k \quad (\text{II.9})$$

Où k est une constante d'intégration.

En utilisant le changement de variable de Sommerfeld défini par :

$$1+\varepsilon\cos\theta = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\Psi} \quad (\text{II.10})$$

Soit

$$\cos\theta = \frac{\cos\Psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\Psi} \quad (\text{II.11})$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\Psi}{1-\varepsilon\cos\Psi} \quad (\text{II.12})$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}d\Psi}{1-\varepsilon\cos\Psi} \quad (\text{II.13})$$

Dans ce cas, la pression s'écrit [60]:

$$p = \frac{6\mu\omega(R/C)^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \Psi - \varepsilon\sin\Psi - \frac{h^*2\Psi - 4\varepsilon\sin\Psi + \varepsilon^2\Psi + \varepsilon^2\sin\Psi\cos\Psi}{2C(1-\varepsilon^2)} \right\} + k \quad (\text{II.14})$$

Les deux constantes h^* et k sont déterminées à partir des conditions aux limites sur la pression. Il résulte :

$$k = p_a \text{ et } \frac{h^*}{C} = \frac{2(1-\varepsilon^2)}{2+\varepsilon^2} \quad (\text{II.15})$$

Soit :

$$p = \frac{6\mu\omega(R/C)^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \Psi - \varepsilon\sin\Psi - \frac{2\Psi - 4\varepsilon\sin\Psi + \varepsilon^2\Psi + \varepsilon^2\sin\Psi\cos\Psi}{2+\varepsilon^2} \right\} + p_a \quad (\text{II.16})$$

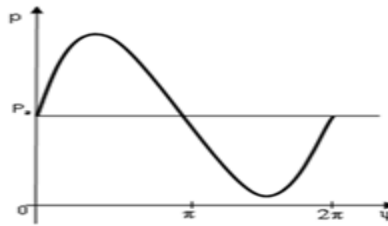


Figure (II.9) : Allure de la pression

8.2 Calcul des efforts

Pour calculer la charge portante W et l'angle de calage ϕ , il faut intégrer le champ de pression sur la surface de l'arbre. Pour cela, on projette les forces de pression selon deux directions orthogonales $\vec{k}$ et $\vec{l}$ dont l'une est colinéaire à la ligne des centres (figure II.10) [J. Frêne].

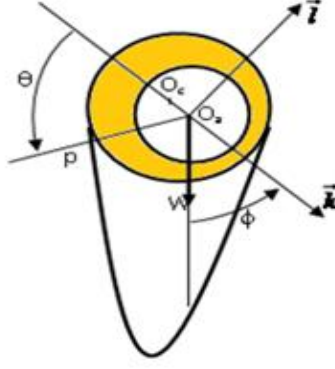


Figure (II.10) : Section droite du palier

Le tenseur des contraintes visqueux est donné par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

La normale à l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\vec{n} = \begin{cases} n_k = \cos \theta \\ n_l = \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

D'où :

$$\vec{T} = \begin{cases} (-p + \tau_{xx}) \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + (-p + \tau_{yy}) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Si on néglige les contributions des contraintes normales et tangentiellles. Les équations d'équilibres de l'arbre (Figure II.10) s'écrivent [J. Frêne]:

$$W \cos \phi + L \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$-W \sin \phi + L \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta = 0 \quad (\text{II.21})$$

En intégrant par partie :

$$W \cos \phi = LR \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \sin \theta d\theta \quad (\text{II.22})$$

$$W \sin \phi = LR \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \cos \theta d\theta \quad (\text{II.23})$$

Après intégration on aboutit à :

$$W \cos \phi = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$W \sin \phi = \frac{12\mu R^3 \omega L \pi \varepsilon}{C^2 (2 + \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\text{II.25})$$

D'où

$$W = \frac{12\mu R^3 \omega L \pi \varepsilon}{C^2 (2 + \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\text{II.26})$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.27})$$

La charge W , est par conséquent indépendante de la pression d'alimentation P_a , car celle-ci, intervenant comme une constante dans la valeur de la pression, admet une résultante nulle après intégration autour de l'arbre. La figure (II.11.a) représente les variations de la charge sans dimension $\bar{W}$ en fonction de l'excentricité relative ε . L'angle de calage ϕ est toujours égal à $\pi/2$. Cela signifie que le centre de l'arbre se déplace selon une direction normale à la ligne de charge. On peut montrer qu'un tel palier est toujours dynamiquement instable.

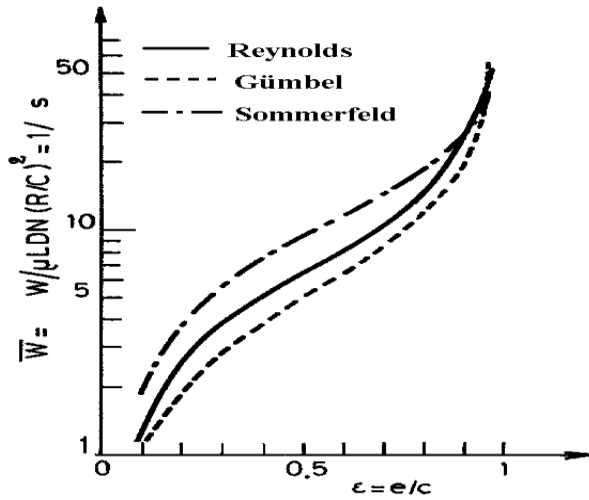


Figure (II.11.a) : Variation de la charge sans dimension W en fonction de l'excentricité relative ε [J. Frêne]

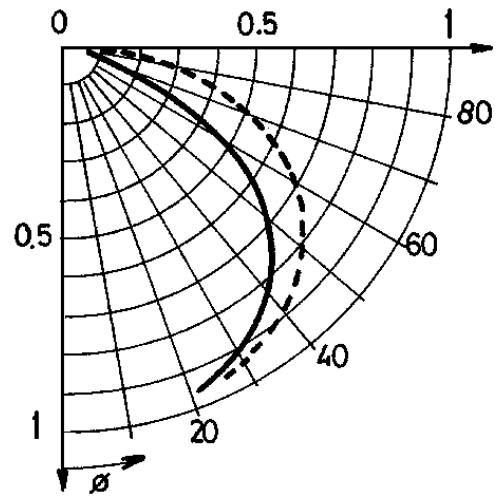


Figure (II.11.b) : Variation de l'angle de calage f en fonction de l'excentricité relative ε [J. Frêne]

9. Conclusion

Le modèle Newtonien présenté précédemment pour décrire le comportement rhéologique des fluides lubrifiants caractérise généralement de façon satisfaisante leur comportement. Cependant ce modèle n'est qu'approché et on constate que sous des sollicitations sévères de nombreux lubrifiants ne sont plus Newtoniens. Ainsi des essais réalisés sur un viscosimètre de type Couette et pouvant atteindre des taux de cisaillement supérieurs à 10^6 s^{-1} montrant que la viscosité du fluide diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. Cet effet, généralement réversible est caractéristique des huiles qui comportent des additifs améliorant l'indice de viscosité. Dans ce cas, on dit que le fluide est pseudo-plastique. Cet effet peut aussi être permanent, il correspond alors à une dégradation du lubrifiant par rupture de certaines chaînes moléculaires et plus particulièrement de l'additif polymère. Ce type de comportement encore mal connu n'est généralement pas pris en compte dans la théorie de la lubrification. Les huiles de lubrifications peuvent également avoir un comportement viscoélastique ou viscoplastique sous l'effet de la pression.

CHAPITRE III

MODÈLES RHÉOLOGIQUES VARIÉS DE FLUIDES COMPLEXES

Chapitre III - Modèles Rhéologiques Variés de Fluides Complexes

1. Introduction

Les lubrifiants naturels d'origine végétale et animale sont utilisés depuis la plus haute antiquité (mésopotamie, égypte ancienne, ...), et de nos jours, malgré leurs inconvénients, ils entrent encore dans la composition de certaines préparations de lubrifiants en tant qu'additifs. En effet, ce sont d'excellents agents d'onctuosité et de bons lubrifiants limites, c'est-à-dire lorsque les contacts inévitables entre les surfaces frottantes ne sont pas trop importants.

Les lubrifiants d'origine pétrolière ou minérale sont aujourd'hui de loin les plus utilisés à cause de leurs bonnes caractéristiques chimiques (stabilité thermique, résistance à l'oxydation) et de leurs prix qui sont beaucoup plus faible que ceux des lubrifiants naturels.

Le progrès de la chimie a fait apparaître une autre catégorie de lubrifiants dénommés les huiles synthétiques qui sont employées dans les situations où les bases minérales ne présentent pas de performances suffisantes à cause de leurs limitations intrinsèques.

Dans la plupart des applications modernes, des produits chimiques de synthèse, appelés additifs (ou adjuvants ou dopes), sont donc mélangés à l'huile de base pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue. Un lubrifiant complètement formulé comprend une base lubrifiante, un ensemble d'additifs et, dans le cas d'une huile multigrade, un améliorant d'indice de viscosité. Le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit (par exemple, les graisses).

Les huiles lubrifiantes sont donc composées d'un constituant principal appelé " base de lubrifiant", qui peut être soit d'origine : naturelle (végétale, animale), minérale (issue de la distillation et du raffinage du pétrole brut), ou d'origine synthétique (transformation de composants organiques provenant du pétrole) à laquelle des additifs sont ajoutés pour en ajuster les propriétés.

Lorsque le lubrifiant fonctionne en régime hydrodynamique, le film d'huile est stable et il n'y a pas réellement de problème d'usure. En conditions plus sévères, si les pièces se rapprochent, si le film se rompt, le frottement peut provoquer de l'arrachement de métal. En conditions extrêmes, l'échauffement peut conduire à la soudure des pièces (grippage).

2. Modèles rhéologiques

Un modèle rhéologique est un modèle utilisé pour modéliser le comportement d'un matériau, c'est-à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique.

L'utilisation des fluides (huiles, etc.) en lubrification, nécessite des études sur leurs lois de comportement rhéologique dans des conditions réelles de fonctionnement de plus en plus sévères.

2.1 Equations constitutives

Le terme de loi de comportement des fluides est couramment utilisé pour énoncer la relation descriptive du tenseur des contraintes en liaison avec celui des taux de déformation représenté dans le milieu du fluide en écoulement. Les caractères des fluides Newtoniens et non Newtoniens sont alors associés à des paramètres dont dépendent ces relations.

Par cette démarche, plusieurs lois de comportement ont pu être proposées, donnant une meilleure simulation de l'écoulement des fluides de différents types.

2.2 Fluide Newtonien

Pour un fluide Newtonien et compressible, la relation qui lie le tenseur des contraintes τ_{ij} au tenseur des taux de déformation D_{ij} est de la forme : $\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$.

Où P est la pression dans le fluide, θ le taux de dilatation cubique, δ_{ij} le symbole de Kronecker, μ et λ deux coefficients de viscosité appelés constantes de Navier.

Pour un fluide incompressible (iso-volume) $\theta = 0$, le second coefficient de viscosité λ n'intervient plus.

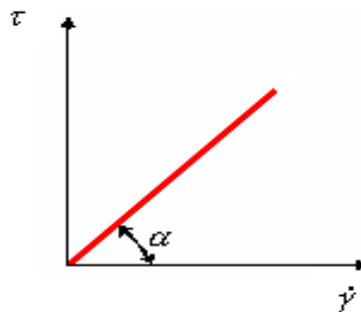


Figure (III-1): *Rhéogramme d'un fluide Newtonien* ($\mu = \tan \alpha$) [J.F. Agassant]

Ce fluide, composé d'une seule phase liquide, est aussi appelé fluide visqueux linéaire. Il est de plus incompressible, homogène et isotrope. La majorité des fluides utilisés en lubrification suivent, en première approximation, cette loi de comportement qui est représentée graphiquement en Figure (III.1). Par rapport aux lois de comportement des fluides visqueux non-linéaires, elle permet de simplifier considérablement les études théoriques sur les caractéristiques des mécanismes lubrifiés.

2.3 Fluides non Newtoniens

Dans ce cas, la viscosité n'est pas constante. A chaque valeur du couple taux de cisaillement- contrainte de cisaillement ($\dot{\gamma}$ et τ) correspond une valeur de la viscosité μ . Dès lors, on parle de viscosité apparente. Les lois de comportement des fluides non Newtoniens sont

caractérisées par la composition du milieu (fluides multi-phases et fluides composés de différentes substances liquides ou solides). Chacune des phases (substances) fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité, plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif, etc. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non-linéaires des fluides non Newtoniens.

2.3.1 Fluides non Newtonien au comportement indépendant du temps

Il existe quatre catégories principales de fluides indépendants du temps.

Les fluides à contrainte critique :

- Les fluides plastiques de type BINGHAM
- Les fluides plastiques de type HERSCHEL-BULKLEY

Les fluides sans contrainte critique de type OSTWALD-DE WAELE:

- Les fluides pseudo-plastiques ou rhéo- fluidifiants
- Les fluides dilatants ou rhéo- épaississants

2.3.1.1 Lois de comportement à une dimension

a. Loi-puissance

La loi la plus simple est la loi-puissance de viscosité ou d'Ostwald-De Waele (Ostwald, 1923 ; De Waele, 1923). Elle s'écrit : $\mu = K|\dot{\gamma}|^{m-1}$

Où K est la consistance du matériau (en Pa.s^m) et m est l'indice de pseudoplasticité.

(m=1 pour un fluide newtonien ; m=0 pour un corps rigide plastique).

On observe que cette loi rend bien compte du comportement des polymères à taux de cisaillement élevé. Elle offre l'avantage d'autoriser des calculs analytiques dans des géométries simples. Elle présente en revanche l'inconvénient de ne pas présenter de plateau newtonien et même de conduire à une viscosité infinie à taux de cisaillement nul [J.F. Agassant].

b. Loi de Cross

Elle s'écrit :

$$\mu - \mu_{\infty} = \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m} \quad (\text{III.1})$$

Où λ est un temps caractéristique, μ_0 la viscosité du fluide Newtonien à faible taux de cisaillement et μ_{∞} sa viscosité à taux de cisaillements très élevés. Ce cas de figure a été observé pour les polymères en solution mais pas pour les polymères à l'état fondu.

c. Loi de Carreau

Elle est donnée par l'expression :

$$\mu - \mu_{\infty} = (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{(m-1)/2} \quad (\text{III.2})$$

Où λ , μ_0 et μ_∞ ont la même signification que précédemment. En pratique, pour les polymères fondus, on choisit $\mu_\infty = 0$. Cette loi offre l'avantage de bien dégénérer vers la loi d'Ostwald-De Waele à taux de cisaillement élevé.

Une amélioration importante a été apportée à la loi de Carreau par Yassuda et al. En 1981 sous la forme :

$$\mu = \mu_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(m-1)/a} \quad (\text{III.3})$$

Le choix de la valeur du paramètre a permet d'ajuster la transition plus ou moins rapide entre le plateau newtonien et la partie en loi-puissance.

Hieber et Chiang (1989) ont proposé une revue très complète de ces différentes lois et de leurs applications au cas des principaux polymères. D'autres types de lois ont été proposés dans la littérature. Plus le nombre de paramètres à ajuster est important et plus ces lois permettant de décrire précisément l'évolution de la viscosité avec le taux de cisaillement. Il faut cependant remarquer que, hormis la loi-puissance, leur utilisation nécessite des calculs numériques, même dans des géométries d'écoulements simples [J.F. Agassant].

2.3.1.2 Lois de comportement à trois dimensions

Le comportement visqueux proprement dit se définit comme suit. Le tenseur des contraintes σ ne dépend que du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$. Les principes généraux sur les lois de comportement exigent que σ soit en fonction isotrope de $\dot{\epsilon}$, ce qui implique :

$$\sigma = A(J_1, J_2, J_3)I + B(J_1, J_2, J_3)\dot{\epsilon} + C(J_1, J_2, J_3)\dot{\epsilon}^2 \quad [\text{J.F. Agassant}]$$

Où J_1, J_2, J_3 sont les invariants de $\dot{\epsilon}$; A, B, C sont des fonctions quelconques.

Dans le cas de l'incompressibilité $J_1 = 0$ et la loi de comportement s'écrit avec σ' , défini à une pression arbitraire.

$$\sigma' = B(J_2, J_3)\dot{\epsilon} + C(J_2, J_3)\dot{\epsilon}^2$$

LE LIQUIDE NEWTONIEN

$$B = 2\mu, \quad C = 0$$

$$\sigma' = 2\mu\dot{\epsilon}$$

LE LIQUIDE DE RIVLIN

$$B = \alpha, \quad C = \beta$$

$$\sigma' = \alpha\dot{\epsilon} + \beta\dot{\epsilon}^2$$

Dans un cisaillement simple d'intensité $\dot{\gamma}$:

$$[\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\dot{\epsilon}]^2 = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où le tenseur σ' , qui n'est effectivement pas de trace nulle :

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \beta \frac{\dot{\gamma}^2}{4} & \alpha \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \alpha \frac{\dot{\gamma}}{2} & \beta \frac{\dot{\gamma}^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le terme α apparaît bien comme une viscosité. L'existence du terme β rend différentes les contraintes normales :

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \beta \frac{\dot{\gamma}^2}{4}$$

Il se trouve que ces différences de contraintes normales ne correspondent pas à celles observées expérimentalement. Seule l'élasticité permet de définir une loi de comportement satisfaisante du point de vue des contraintes normales. De ce fait, le comportement de Rivlin est intéressant sur le plan théorique, mais peu utile en pratique.

LE LIQUIDE PSEUDO- PLASTIQUE (LOI-PUISSANCE) [J.F. Agassant]

On introduit un taux de cisaillement généralisé :

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{J_2(\dot{\epsilon})} = \sqrt{2\sum_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^2}.$$

$$B = 2K\dot{\gamma}^{m-1}, \quad C = 0$$

$$\sigma' = 2K\dot{\gamma}^{m-1}\dot{\epsilon} = s$$

Si l'on s'intéresse au cas du cisaillement simple :

$$\left. \begin{array}{l} u(y) = \dot{\gamma}y \\ v = 0 \\ w = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma} = |\dot{\gamma}|$$

Et par conséquent :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma} & 0 \\ K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

On retrouve bien l'expression de la contrainte de cisaillement : $\tau = K|\dot{\gamma}|^m$, si $\dot{\gamma} > 0$. On constate par ailleurs que, comme la loi newtonienne, la loi pseudo- plastique ne donne aucune différence de contraintes normales en cisaillement simple [G. Couarraze].

Modèles	Loi rhéologiques	Pour $\tau \geq \tau_c$ $\dot{\gamma} = 0$ si $\tau < \tau_c$	Paramètres	Remarques
Plastique de BINGHAM	$\tau - \tau_c = \mu_p \dot{\gamma}$		τ_c, μ_p	-Conduites cylindriques et annulaires agitation transfert thermique
HERSCHEL-BULKLEY	$\tau - \tau_c = (k\dot{\gamma})^n$		τ_c, k, n	-Utilisée expérimentalement
CASSON	$\tau^{1/2} = k_c \dot{\gamma}^{1/2} + \tau_c^{1/2}$		k_c, τ_c	-Suspensions de floes
SKELLAND	$\tau - \tau_c = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + C(\tau - \tau_c)^m}$		τ_c, μ_0, m, C	
CROWLEY-KITZES	$\tau = \mu_L \left\{ \frac{1,2 + \alpha \left[(C_1 \tau)^{-0.2} + 1 \right]^3}{1,2 - 2\alpha \left[(C_1 \tau)^{-0.2} + 1 \right]^3} \right\} \dot{\gamma}$		C_1	-Utilisée pour les suspensions de ThO2 dans l'eau lourde. α est la fraction volumique de ThO2 et μ_L la viscosité de l'eau lourde

Tableau (III.1) : Lois rhéologiques des fluides indépendants du temps présentant une contrainte critique.

Modèle	Loi rhéologique	Paramètres
Ostwald DE WAELE	$\tau = k\dot{\gamma}^n$	K,n

ELLIS	$\tau = \left[\frac{\mu_0}{1 + (\tau / \tau_{1/2})^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \tau_{1/2}, \alpha$
PRANDTL-EYRING	$\tau = \tau_0 sh^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	τ_0, t_0
POWELL-EYRING	$\tau = \mu_1 \dot{\gamma} + \frac{\mu_0}{t_0} sh^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	μ_0, μ_1, t_0
SISKO	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + k \dot{\gamma}^n$	μ_0, k, n
REINER PHILLIPOFF	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau / \tau_s)^2} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \tau_s$
LOI PUISSANCE TRONQUEE DE SPRIGGS	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma}^n$ $\tau = \mu_0 (\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0)^{n-1} \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$	$\mu_0, \dot{\gamma}_0, n$
METER	$\tau = \mu_0 \left[\frac{1 + (\tau / \tau_m)^{\alpha-1} (\mu_\infty / \mu_0)}{1 + (\tau / \tau_m)^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	μ_0, τ_m, α
CROSS	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\dot{\gamma} t_1)^p} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, t_1, p$
WILLIAMS	$\tau = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{[1 + 2t_1^2 \dot{\gamma}_1^2]^p}$	$\mu_0, \mu_\infty, t_1, p$
CARREAU	$\tau = \left[\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, n$
HAMERSMA	$\tau = \mu_\infty \dot{\gamma} + \tau_0 (1 - e^{-a\tau})$	$\mu_\infty, \tau_0, a = \frac{1}{\tau_0} \left[1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right]$

Tableau (III.2) : *Lois rhéologiques des fluides indépendants du temps ne présentant pas de contrainte critique* [G. Couarraze]

3. Comportement viscoélastique

3.1 Définition de la viscoélasticité

Un fluide viscoélastique est un fluide qui possède à la fois des propriétés de viscosité et d'élasticité. La viscoélasticité stabilise l'étirage ou le bi étirage des polymères fondus. C'est elle qui facilite le filage des polymères à forte vitesse de déformation, le soufflage et le thermoformage en homogénéisant l'épaisseur des pièces obtenues.

En revanche, les écoulements de cisaillement sont limités en débit par l'apparition d'instabilités viscoélastiques qui se traduisent par des défauts : rupture d'extrudat, peau de requin en extrusion, instabilités d'interface en coextrusion.

Enfin, la viscoélasticité est responsable du gonflement à la sortie des filières, qui complique singulièrement la conception de ces outillages.

Les lois de comportement viscoélastiques disponibles dans la littérature sont très nombreuses. La raison en est qu'il est très difficile de trouver une loi de comportement qui permet à la fois d'exprimer les résultats des mesures sur divers systèmes d'écoulements simples (écoulements de cisaillement simple, écoulements de cisaillement alternatif, écoulements élongationnels, écoulements transitoires) et d'effectuer des calculs numériques dans des géométries complexes.

3.1.1 Loi de comportement à une dimension

3.1.1.1 Généralités sur les modèles viscoélastiques linéaires

Le formalisme de la viscoélasticité linéaire est développé dans plusieurs ouvrages (par exemple Mandel, 1966 ; Tanner, 1985 ; Dealy et Wissbrun, 1990). Il s'appuie sur l'analogie entre le comportement des milieux viscoélastiques et celui de modèles composés de diverses combinaisons de ressorts et d'amortisseurs en série ou en parallèle.

Le ressort de module G représente un milieu parfaitement élastique.

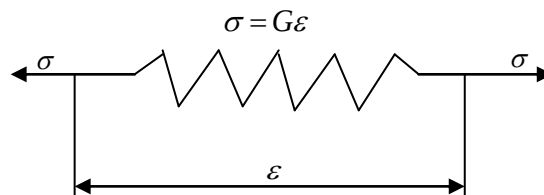


Figure (III.2) : Schématisation du corps élastique

L'amortisseur de viscosité μ représente un milieu parfaitement visqueux (et, de plus, newtonien) :

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (III.4)$$

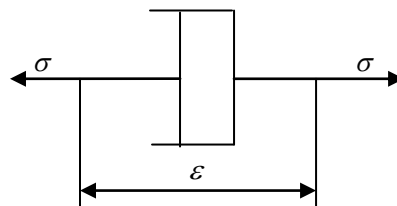


Figure (III.3) : Schématisation du corps visqueux

Un milieu viscoélastique complexe peut être représenté par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs placés en série ou en parallèle. Si les extrémités sont reliées par une série de ressorts, le modèle représente un solide viscoélastique ; si cela n'est pas le cas, le modèle représente un liquide viscoélastique.

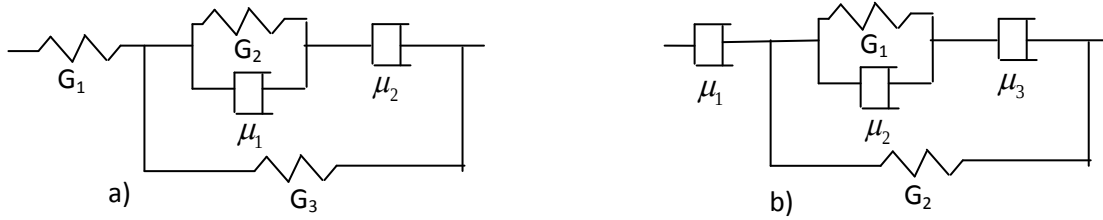


Figure (III.4) : Schématisation de corps viscoélastiques : a) exemple de solide, b) exemple de liquide.

Ainsi, les solides viscoélastiques les plus simple sont constitués d'un ressort et d'un amortisseur respectivement en parallèle et en série.

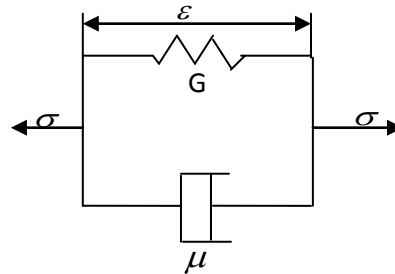


Figure (III.5) : Solide (élément de Kelvin-Voigt)

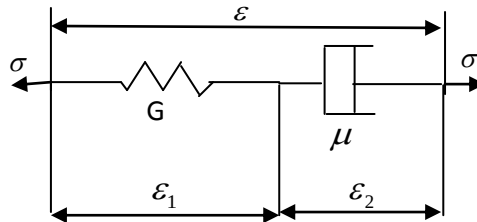


Figure (III.6) : Liquide (élément de Maxwell)

a. Le comportement d'un élément de Maxwell

L'élément se compose d'un ressort de module G et d'un amortisseur de viscosité μ en série. Sa déformation totale ε est la somme de celles du ressort ε_1 et de l'amortisseur ε_2 .

Comportement du ressort :

$$\sigma = G\varepsilon_1 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = G \frac{d\varepsilon_1}{dt}$$

Comportement de l'amortisseur :

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

D'où :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{\mu} \sigma + \frac{1}{G} \frac{d\sigma}{dt}$$

Soit, en posant :

$$\lambda = \frac{\mu}{G}$$

$$\sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{III.5})$$

λ est le temps de relaxation.

b. Interprétation qualitative des phénomènes dépendant du temps

Cette loi, permet de retrouver qualitativement les phénomènes de dépendance du comportement par rapport au temps de relaxation.

Relaxation de la contrainte après annulation de la vitesse de déformation ($t > \Delta t$)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 = \sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt}$$

Donc :

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left[- \left(\frac{t - \Delta t}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{III.6})$$

D'où une décroissance exponentielle de la contrainte, de temps caractéristique λ .

Retard à l'établissement de la contrainte :

La vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_0$ est établie à partir de l'instant 0, la contrainte étant nulle à cet instant ; pour $t > 0$, la contrainte est obtenue comme suit :

$$\sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = \mu \dot{\varepsilon}_0$$

$$\text{Donc : } \sigma = \mu \dot{\varepsilon}_0 \left[1 - e^{-t/\lambda} \right] \quad (\text{III.7})$$

Ici aussi, l'établissement est exponentiel, avec le même temps caractéristique λ .

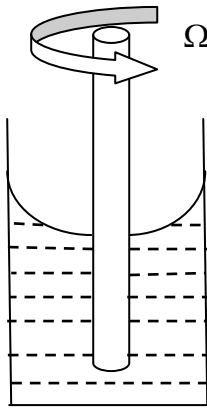
On remarque que :

Si $t \ll \lambda$ $\sigma \approx \mu \dot{\varepsilon}_0 \frac{t}{\lambda} = G \varepsilon$ comportement élastique.

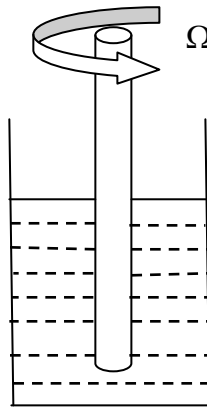
Si $t \gg \lambda$ $\sigma \approx \mu \dot{\epsilon}_0$ comportement visqueux.

3.2 Effet de Weissenberg

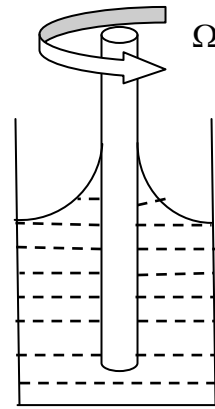
C'est la tendance qu'ont les liquides polymères à s'écouler d'une façon différente des fluides newtoniens dans des appareillages comportant une partie en rotation et une partie fixe. Il se manifeste, soit par une modification de la surface libre dans le cas de l'écoulement de Couette entre cylindres coaxiaux, soit par l'apparition d'une force d'écartement due à un « dôme » de pression, dans le cas d'un cisaillement entre deux plateaux, ou entre cône et plan.



Liquide newtonien (faible viscosité) Effet inertiel



Liquide newtonien (forte viscosité)



Liquide polymère

Figure (III.7) : Ecoulement de Couette

3.3 Le modèle de Maxwell Sur-convecté

Dans le modèle de Maxwell linéaire, apparaît une dérivée de la contrainte. La généralisation de ce modèle à trois dimensions nécessite la dérivation par rapport au temps du tenseur des extra-contraintes σ' .

3.4 Dérivation particulière et dérivation convective

La dérivation du tenseur des extra-contraintes qui vient naturellement à l'esprit est la dérivation particulière. Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, elle s'écrit indépendamment pour chacun des termes du tenseur des extra-contraintes [J.F Agassant]:

$$\frac{d\sigma'_{ij}}{dt} = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial y} + w \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial z}$$

La dérivation particulière n'est pas objective dans le cas d'une fonction tensorielle, c'est-à-dire qu'elle n'est pas invariante quand on change de référentiel. La dérivation particulière n'est donc pas utilisable dans une loi de comportement.

Mathématiquement, on peut définir une dérivation d'un tenseur par rapport à un repère, dit convectif, qui se déforme en même temps que la matière. Cette dérivation a bien un sens physique, car elle ne tient compte que des variations des grandeurs réellement « ressenties » par la matière.

On considère un domaine (Ω) pourvu d'un « maillage » et d'un référentiel (λ, μ) dont les axes à $t=0$ sont parallèles au repère fixe (x, y). Au temps t , le domaine Ω a été déformé, ce qui est bien révélé par la déformation du « maillage » et du référentiel (λ, μ) qui lui est attaché.

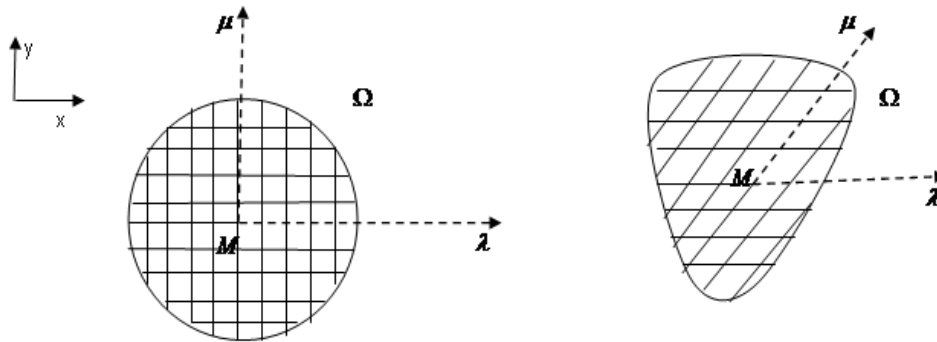


Figure (III.8) : Dérivation convective et repère convectif

Considérons sur ce domaine (Ω) un champ tensoriel $b(x, y, t)$ défini par rapport au repère fixe. La démarche à adopter pour obtenir une expression de sa dérivée qui ait un sens physique est la suivante :

- Le champ tensoriel $b(x, y, t)$ est exprimé dans le repère convectif, dans lequel il s'écrit $\beta(\lambda, \mu, t)$.
- Le tenseur $\beta(\lambda, \mu, t)$ est dérivé par rapport au temps. Par définition du repère convectif dont l'origine est située en un point matériel, la dérivée par rapport au temps est équivalente à la dérivée particulaire :

$$\frac{\partial \beta(\lambda, \mu, t)}{\partial t} = \frac{d\beta(\lambda, \mu, t)}{dt}.$$

- Le champ tensoriel $\frac{\partial \beta(\lambda, \mu, t)}{\partial t}$ est alors exprimé dans le repère fixe. Le champ tensoriel obtenu, noté $\frac{\Delta b(x, y, t)}{\Delta t}$, est la dérivée convective du champ tensoriel $b(x, y, t)$. Ceci est schématisé dans le tableau ci-dessous :

Repère fixe	Repère convectif
$b(x, y, t)$	$\beta(\lambda, \mu, t)$
dérivation convective	Dérivation particulaire ou partielle par rapport à t
$\frac{\Delta b(x, y, t)}{\Delta t}$	$\frac{\partial \beta(\lambda, \mu, t)}{\partial t}$

Si on s'intéresse à un tenseur d'ordre 2 comme le tenseur des extra-contraintes σ' , on montre que plusieurs dérivations convectives sont utilisable :

- La dérivation d'Oldroyd (appelée aussi doublement contra-variante) est la plus utilisée :

$$\frac{\delta\sigma'}{\delta t} = \frac{d\sigma'}{dt} - \nabla u \sigma' - \sigma' \nabla u^t \quad (\text{III.8})$$

∇u : est le tenseur gradient de vitesse.

∇u^t : est la transposé de ∇u .

- La dérivation de Rivlin (appelée aussi doublement covariante) :

$$\frac{D\sigma'}{Dt} = \frac{d\sigma'}{dt} + \sigma' \nabla u + \nabla u^t \sigma' \quad (\text{III.9})$$

- La dérivée de Jauman qui est la combinaison linéaire des deux dérivations précédentes :

$$\frac{D\sigma'}{Dt} = \frac{d\sigma'}{dt} - \Omega \sigma' + \sigma' \Omega \quad (\text{III.10})$$

Où Ω est le tenseur de rotation, défini par : $\Omega = \frac{1}{2} [\nabla u - \nabla u^t]$

La généralisation de la loi de comportement à une dimension (III.5) s'écrit en utilisant la dérivation convective d'Oldroyd (III.8) :

$$\sigma' + \lambda \frac{\delta\sigma'}{\delta t} = 2\mu \dot{\epsilon}$$

Où σ' est le tenseur des contraintes défini à une pression p' arbitraire près : $\sigma = \sigma' - p'I$

La loi de Maxwell fait apparaître une première différence de contrainte normale positive et une deuxième différence de contraintes normales nulle en cisaillement simple plan.

$$\tau(\dot{\gamma}) = \sigma_{12} = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{III.11})$$

$$N_1(\dot{\gamma}) = \sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\mu\lambda\dot{\gamma}^2 \quad (\text{III.12})$$

$$N_2(\dot{\gamma}) = \sigma_{22} - \sigma_{33} = 0 \quad (\text{III.13})$$

3.5 Nombre sans dimension viscoélastiques

3.5.1 Nombre de Weissenberg

Le nombre de Weissenberg (White, 1964), caractérise, en cisaillement simple, le rapport entre les forces d'élasticité et les forces de viscosité :

$$We = \frac{N_1}{2\tau} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \quad (\text{III.14})$$

Dans le cas du comportement de Maxwell, le nombre de Weissenberg s'écrit, compte tenu de (III.12) :

$$We = \lambda \dot{\gamma} \quad (III.15)$$

Ceci montre que le temps de relaxation et les différences de contraintes normales sont des phénomènes physiques liés entre eux. C'est le formalisme de la dérivation convective qui permet de mettre en évidence cette liaison.

3.5.2 Nombre de Deborah

Le nombre de Deborah (Reiner, 1964) est égal au rapport entre le temps de relaxation du liquide et le temps propre de l'écoulement.

$$De = \frac{\lambda}{t} \quad (III.16)$$

- Si $De \gg 1$, le comportement du polymère est pratiquement élastique
- Si $De \ll 1$, le comportement est visqueux et les contraintes en régime permanent, dues à la fois à l'élasticité et à la viscosité, sont établies pratiquement tout le long de l'écoulement.

We et De sont nuls pour des fluides purement visqueux.

4. Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence la diversité et le degré de complexité du comportement rhéologique des fluides non Newtoniens. Ceci est confirmé par les nombreux modèles proposés dans la littérature dont certains ont été rappelés dans ce chapitre. Ces modèles dépendent éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement (taux de cisaillement ou gradients de vitesse élevés) du système lubrifié par ce fluide. Le calcul correct des performances d'un contact lubrifié nécessite donc le choix d'un modèle qui décrit convenablement le comportement d'une huile lubrifiante surtout lorsque celle-ci contient des additifs.

Par des expériences avec des contacts très chargés et à faible glissement relatif des surfaces, plusieurs auteurs ont montré que la viscosité apparente de quelques produits lubrifiants est une fonction de la vitesse d'entraînement. Ce phénomène sous-entend un comportement qui dépend d'un facteur de temps de passage du lubrifiant dans la zone de contact. Ceci le conduit à envisager un comportement viscoélastique des fluides.

En ce qui concerne notre étude, on a choisi le modèle du fluide de Maxwell généralisé UCM, ce modèle viscoélastique permet de décrire convenablement le comportement rhéologique des huiles lubrifiantes.

CHAPITRE IV

LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE ET TRANSFERT THERMIQUE EN FLUIDES VISCOÉLASTIQUES DE MAXWELL - DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATION ASSOCIÉES

Chapitre IV - Lubrification Hydrodynamique et Transfert Thermique en Fluides Viscoélastiques de Maxwell – Développement des Equations Associées

1. Caractéristiques d'un palier lisse et épaisseur du film lubrifiant

Le modèle physique est un palier lisse, constitué essentiellement d'un coussinet lisse, en bronze ou en acier de rayon intérieur R_c , à l'intérieur duquel tourne l'arbre de rayon R_a , qui est généralement en acier figure (IV.1). Un palier lisse peut être schématisé par deux cercles excentriques (Figure VI.2) et caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial $C=R_c-R_a$, le jeu relatif R/C et le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier. Considérons une section du palier, un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par les coordonnées cylindriques. Les points O_a et O_c représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet. Deux paramètres sont nécessaires pour positionner O_a par rapport à O_c . On utilise habituellement la distance $\|O_c O_a\|$ appelée excentricité e et l'angle que fait la direction de la charge $\vec{W}$ avec la ligne des centres $\overline{O_c O_a}$ appelé angle de charge ϕ [J. Frêne].



Figure (IV.1) : Palier lisse

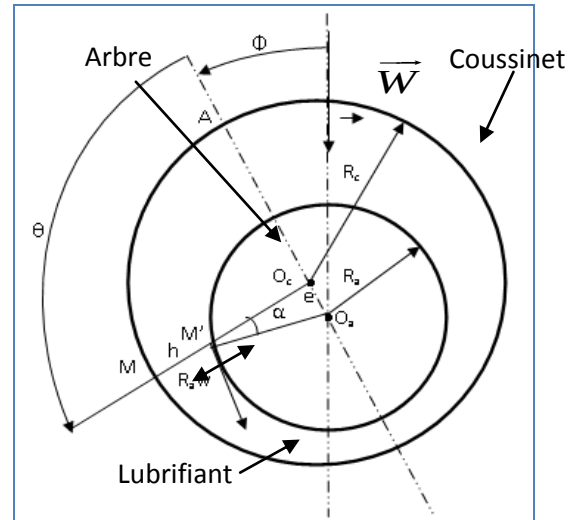


Figure (VI.2) : Section droite du palier

Soit le point A appartenant à la surface du coussinet et situé sur la ligne $\overline{O_c O_a}$.

L'angle θ est donnée par : $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$

L'épaisseur du film d'huile est donnée par :

$$h = O_c M - O_c M'$$

$$h = R_c - O_c M'$$

Tenant compte de l'expression du jeu radial C on abouti à :

$$h = C + R_a - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_c M' O_a$ on obtient :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} - e \cos \theta$$

La quantité e/R_a est très petite devant l'unité on peut donc écrire que $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 \ll 1$

Il vient alors

$$O_c M' = R_a - e \cos \theta$$

$$O_c M' = R_c - C \left(1 + \frac{e}{C} \cos \theta \right)$$

D'où :

$$h = C \left(1 + \frac{e}{C} \cos \theta \right)$$

Soit l'excentricité relative $\varepsilon = \frac{e}{C}$

Donc on peut écrire l'épaisseur du film lubrifiant sous la forme suivante :

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{IV.1})$$

Avec ε variant de 0 à 1.

2. Equations générales de la mécanique des films minces

Les équations générales de la mécanique des films minces permettent, compte tenu de conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide non Newtonien et qui peuvent s'écrire sous les formes suivantes (IV.2), (IV.5), (IV.9) et (IV.10):

2.1. Loi de comportement

Le fluide viscoélastique considéré est un fluide de Maxwell, sa loi de comportement est donnée par :

$$\overline{\overline{\tau}} + \lambda \frac{D_{\alpha} \overline{\overline{\tau}}}{Dt} = 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (\text{IV.2})$$

Où :

τ_{ij} : est le tenseur de contraintes.

λ : est le temps de relaxation.

$\overline{\overline{D}}$: est le tenseur de déformation.

$\frac{D_{\alpha} \overline{\overline{\tau}}}{Dt}$ est la dérivée convective du tenseur des contraintes, donnée par l'expression suivante :

$$\frac{D_{\alpha} \overline{\overline{\tau}}}{Dt} = \frac{D \overline{\overline{\tau}}}{Dt} - \frac{\alpha - 1}{2} \left[\left(\overline{\overline{\nabla V}} \right)^T \overline{\overline{\tau}} + \overline{\overline{\tau}} \left(\overline{\overline{\nabla V}} \right) \right] - \frac{\alpha + 1}{2} \left[\left(\overline{\overline{\nabla V}} \right) \overline{\overline{\tau}} + \overline{\overline{\tau}} \left(\overline{\overline{\nabla V}} \right)^T \right] \quad (\text{IV.3})$$

Pour $\alpha = 1$, la dérivée est dite surconvecté, d'où :

$$\frac{D_{\alpha} \bar{\tau}}{Dt} = \frac{D\bar{\tau}}{Dt} - \left[\left(\bar{\nabla} \bar{V} \right) \bar{\tau} + \bar{\tau} \left(\bar{\nabla} \bar{V} \right)^T \right] \quad (\text{IV.4})$$

2.2. Equation de continuité

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \rho \bar{V} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

2.3. Equation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = \text{div} \bar{\sigma} + \bar{f} \quad (\text{IV.6})$$

avec $\bar{\sigma}$: le tenseur des contraintes est donné par l'expression suivante :

$$\bar{\sigma} = -pI + \bar{\tau} \quad (\text{IV.7})$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses est donné par l'expression suivante

$$\bar{\tau} = 2\mu \bar{D} \quad (\text{IV.8})$$

Dans le cas d'un fluide non Newtonien de type de Maxwell, l'expression de tenseur des contraintes est donnée par la formule (VI.2) :

On peut écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -\bar{\nabla} p + \left(\bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \right) + \rho \bar{g} \quad (\text{IV.9})$$

2.4. Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie s'écrit sous la forme :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \left(\bar{\nabla} \cdot k \bar{\nabla} T \right) + \left(\bar{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} \right) \quad (\text{IV.10})$$

3. Développement des équations

Réécrivons les équations (IV.2), (IV.5), (IV.9) et (IV.10) dans un espace annulaire compris entre deux cylindres excentriques en utilisant les coordonnées cartésiennes (Fig IV.3).

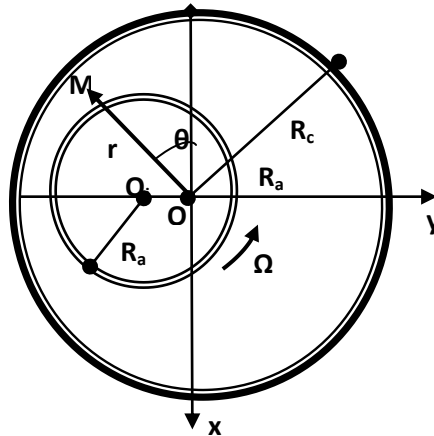


Figure (IV.3) : Schéma de l'écoulement d'un fluide

3.1. Hypothèses

Les hypothèses considérées dans ce cas sont :

- Le milieu est continu ;
- Le fluide est non newtonien ;
- L'écoulement est laminaire ;
- Le régime d'écoulement est permanent ;
- Le fluide est incompressible ;
- Les forces massiques extérieures sont négligeables ;
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact ;
- L'épaisseur de film est très faible devant les autres dimensions du contact ;
- Le palier est infiniment long, (cette hypothèse permet de négliger l'effet axial de pression, l'écoulement devient alors purement circonférentiel et bidimensionnel).

Tenant compte des hypothèses citées précédemment et après projection dans le système d'axes (x,y), les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent aux formes ci-dessous.

3.2. Équation de continuité :

La projection de l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

3.3. Equations constitutives :

La loi de comportement est donnée par l'expression suivante

$$\bar{\tau} + \lambda \left[\frac{D\bar{\tau}}{Dt} - (\bar{\nabla} \bar{V}) \bar{\tau} - \bar{\tau} (\bar{\nabla} \bar{V}) \right] = 2\mu \bar{D} \quad (\text{IV.12})$$

Avec :

$(\bar{\nabla} \bar{V}) \bar{\tau}$ et $\bar{\tau} (\bar{\nabla} \bar{V})$: données respectivement par les deux expressions suivantes

$$(\bar{\nabla} \bar{V}) \bar{\tau} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$\bar{\tau} (\bar{\nabla} \bar{V}) = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

(IV.14)

$$\text{Avec } \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Ou encore

$$(\bar{\nabla} \bar{V}) \bar{\tau} = \begin{bmatrix} L_{xx}\tau_{xx} + L_{xy}\tau_{xy} & L_{xx}\tau_{xy} + L_{xy}\tau_{yy} \\ L_{yx}\tau_{xx} + L_{yy}\tau_{xy} & L_{yx}\tau_{xy} + L_{yy}\tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

$$\bar{\tau} (\bar{\nabla} \bar{V}) = \begin{bmatrix} L_{xx}\tau_{xx} + L_{xy}\tau_{xy} & L_{yx}\tau_{xx} + L_{yy}\tau_{xy} \\ L_{xx}\tau_{xy} + L_{xy}\tau_{yy} & L_{yx}\tau_{xy} + L_{yy}\tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Le tenseur des taux de déformation est donné par l'expression suivante :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left[(\overline{\nabla \vec{v}}) + (\overline{\nabla \vec{v}})^T \right] \quad (\text{IV.18})$$

En développant cette dernière expression on obtient :

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Donc les équations constitutives sont les suivantes :

$$\tau_{xx} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right) - 2 \left(L_{xx} \tau_{xx} + L_{xy} \tau_{xy} \right) \right\} = 2\mu D_{xx} \quad (\text{IV.20})$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - 2 \left(L_{yx} \tau_{xy} + L_{yy} \tau_{yy} \right) \right\} = 2\mu D_{yy} \quad (\text{IV.21})$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \left(L_{xx} \tau_{xy} + L_{xy} \tau_{yy} \right) - \left(L_{yx} \tau_{xx} + L_{yy} \tau_{xy} \right) \right\} = 2\mu D_{xy} \quad (\text{IV.22})$$

En remplaçant les composantes du tenseur des taux de déformation par leurs expressions on obtient :

$$\tau_{xx} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) \right\} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV.23})$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} \right) \right\} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{IV.24})$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{xy} \right) \right\} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.25})$$

L'écoulement étant permanent et le fluide est incompressible donc :

$$\tau_{xx} + \lambda \left(u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right) - 2\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV.26})$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left(u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - 2\lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} \right) = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{IV.27})$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left(u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.28})$$

3.4. Equations de quantité de mouvement :

L'écoulement étant bidimensionnel, permanent, incompressible et les forces massiques f_i négligeables, on obtient à partir de l'équation (IV.10).

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (\text{IV.29})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (\text{IV.30})$$

3.5. Equation de l'énergie :

A partir de l'équation (IV.11) et tenant compte des hypothèses citées précédemment, l'équation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) + \left(\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (IV.31)$$

La conductivité thermique k varie seulement en fonction de la température, donc on peut réécrire les équations sous la forme suivante :

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (IV.32)$$

4. Equations adimensionnelles

Pour mieux cerner le problème, on cherche à mettre les équations dans une forme adimensionnelle, et pour ce, nous utilisons les changements de variables suivantes :

4.1. Variables adimensionnelles

On choisit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\bar{x} = x / R \quad \bar{y} = y / C \quad \bar{u} = u / U \quad \bar{v} = v / V \quad \varepsilon = \frac{C}{R} \quad V = \varepsilon U$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_o + \Delta p} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_o + \Delta T} \quad \bar{\tau}_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{\sum_{i,j}}$$

$$\bar{\mu} = \mu / \mu_o \quad \bar{\rho} = \rho / \rho_o \quad \bar{C}_p = C_p / C_{p_o} \quad \bar{k} = k / k_o$$

4.2. Equation de continuité adimensionnelle

L'équation de continuité devient donc :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (IV.33)$$

Le principe de moindre dégénérescence impose :

$$V = \varepsilon U$$

4.3. Equations constitutives adimensionnelles

En utilisant les variables adimensionnelles citées précédemment, les équations constitutives s'écrivent comme suit :

$$\sum_{xx} \left\{ \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon \frac{\lambda U}{C} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{\tau}_{xx} \right] \right\} - 2 \frac{\lambda U}{C} \sum_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \bar{\tau}_{xy} = \frac{2 \mu_o \bar{\mu} \varepsilon U}{C} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (IV.34)$$

$$\sum_{yy} \left\{ \bar{\tau}_{yy} + \varepsilon \frac{\lambda U}{C} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \bar{\tau}_{yy} \right] \right\} - 2 \varepsilon^2 \frac{\lambda U}{C} \sum_{xy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \bar{\tau}_{xy} = \frac{2 \mu_o \bar{\mu} \varepsilon U}{C} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (IV.35)$$

$$\sum_{xy} \left\{ \bar{\tau}_{xy} + \varepsilon \frac{\lambda U}{C} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right] \right\} - \varepsilon^2 \frac{\lambda U}{C} \sum_{xx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \bar{\tau}_{xx} - \frac{\lambda U}{C} \sum_{yy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \bar{\tau}_{yy} = \frac{\mu_o \bar{\mu} U}{C} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right] \quad (IV.36)$$

On a le nombre de Deborah donner par : $De = \frac{\lambda U}{C}$

En remplaçant De par leur expression dans les équations (IV.34), (IV.35) et (IV.36) on aboutit à :

$$\sum_{xx} \left\{ \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] \right\} - 2De \sum_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = \frac{2\mu_0 \bar{\mu} \varepsilon U}{C} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (IV.37)$$

$$\sum_{yy} \left\{ \bar{\tau}_{yy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] \right\} - 2\varepsilon^2 De \sum_{xy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = \frac{2\mu_0 \bar{\mu} \varepsilon U}{C} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (IV.38)$$

$$\sum_{xy} \left\{ \bar{\tau}_{xy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] \right\} - \varepsilon^2 De \sum_{xx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - De \sum_{yy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \frac{\mu_0 \bar{\mu} U}{C} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \quad (IV.39)$$

Ensuite on cherche à déterminer les échelles des contraintes $\sum_{xx}$ $\sum_{yy}$ $\sum_{xy}$

Le système précédent est un système d'équations avec trois inconnus $\sum_{xx}$ $\sum_{yy}$ $\sum_{xy}$

On peut approcher le système d'équations précédent par le système suivant

$$\begin{cases} \varphi \sum_{xx} + 0 \sum_{yy} + De \sum_{xy} \approx \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} (1) \\ 0 \sum_{xx} + \varphi \sum_{yy} + \varepsilon^2 De \sum_{xy} \approx \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} (1) \\ \varepsilon^2 De \sum_{xx} + De \sum_{yy} + \varphi \sum_{xy} \approx \frac{\mu_0 U}{C} (1) \end{cases} \quad \text{D'où} \quad (IV.40)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi & 0 & De \\ 0 & \varphi & \varepsilon^2 De \\ \varepsilon^2 De & De & \varphi \end{vmatrix} = \varphi^3 - 2\varphi(\varepsilon De)^2 \quad (IV.41)$$

$$\Delta_{xx} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon \mu_0 U}{C} & 0 & De \\ \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} & \varphi & \varepsilon^2 De \\ \frac{\mu_0 U}{C} & De & \varphi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 U}{C} \{ -\varphi De + \varepsilon \varphi^2 + \varepsilon De^2 - \varepsilon^3 De^2 \} \quad (IV.42)$$

$$\Delta_{yy} = \begin{vmatrix} \varphi & \frac{\varepsilon \mu_0 U}{C} & De \\ 0 & \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} & \varepsilon^2 De \\ \varepsilon^2 De & \frac{\mu_0 U}{C} & \varphi \end{vmatrix} = \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} \{ \varphi^2 - (\varepsilon De)^2 - \varepsilon \varphi De + \varepsilon^4 De^2 \} \quad (IV.43)$$

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} \varphi & 0 & \frac{\varepsilon \mu_0 U}{C} \\ 0 & \varphi & \varepsilon \frac{\mu_0 U}{C} \\ \varepsilon^2 De & De & \frac{\mu_0 U}{C} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 U}{C} \{ \varphi^2 - \varepsilon De \varphi - \varepsilon^3 De \varphi \} \quad (IV.44)$$

Avec $\varphi = (1, \varepsilon De)$,

On aura alors deux cas à traiter.

1^{er} cas :

$$\varphi \approx 1 \Rightarrow \Delta \approx 1 \begin{cases} \varepsilon De \ll 1 \\ \sum_{xx} \approx \mu_0 \frac{U}{C} De \quad \sum_{yy} \approx \mu_0 \varepsilon \frac{U}{C} \quad \sum_{xy} \approx \mu_0 \frac{U}{C} \\ \varepsilon De \approx 1 \\ \sum_{xx} \approx \mu_0 \frac{U}{C} De \quad \sum_{yy} \approx \mu_0 \varepsilon \frac{U}{C} \quad \sum_{xy} \approx \mu_0 \frac{U}{C} \end{cases} \quad (IV.45)$$

2^{ème} cas :

$$\varphi \approx \varepsilon De \Rightarrow \Delta \approx (\varepsilon De)^3 \begin{cases} \varepsilon De \gg 1 \\ \sum_{xx} \approx \mu_0 \frac{U}{C} \frac{1}{\varepsilon^2 De} \quad \sum_{yy} \approx \mu_0 \frac{U}{C} \frac{1}{De} \quad \sum_{xy} \approx \mu_0 \frac{U}{C} \frac{1}{\varepsilon De} \end{cases}$$

Remarques :

1. Le premier cas dont $De \approx \frac{1}{\varepsilon}$ représente un cas de fortes déformations puisque ($\varepsilon \ll 1$)
2. Le deuxième cas correspond à des situations de très fortes déformations.

Dans cette étude on se limite au cas de ($\varepsilon De \ll 1$) alors

$$\sum_{xx} \approx \mu_0 \frac{U}{C} De \quad \sum_{yy} \approx \mu_0 \varepsilon \frac{U}{C} \quad \sum_{xy} \approx \mu_0 \frac{U}{C}$$

En remplaçant les expressions des échelles des contraintes dans le système des équations constitutives on aboutit à :

$$De \left\{ \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] \right\} - 2De \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = 2\varepsilon \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (IV.46)$$

$$\bar{\tau}_{yy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] - 2\varepsilon De \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (IV.47)$$

$$\bar{\tau}_{xy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] - (\varepsilon De)^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - \varepsilon De \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \quad (IV.48)$$

Avec l'expression ($\varepsilon De \ll 1$) on peut aboutir à : $\frac{\varepsilon}{De} \ll \frac{1}{De^2}$

avec $De \gg 1$ donc $\frac{\varepsilon}{De} \rightarrow 0$

On peut donc mettre les équations précédentes sous la forme suivante :

$$\bar{\tau}_{xx} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = 0 \quad (IV.49)$$

$$\bar{\tau}_{yy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] - 2\varepsilon De \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (IV.50)$$

$$\bar{\tau}_{xy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] - (\varepsilon De)^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - \varepsilon De \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \quad (IV.51)$$

Concernant l'équation de quantité de mouvement adimensionnelle, il suffit d'utiliser les changements de variables et les échelles des contraintes, on aboutit à :

$$\frac{\rho_0 \bar{\rho} \varepsilon U^2}{C} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p}{C} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\varepsilon \sum_{xx}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\sum_{xy}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.52})$$

$$\frac{\rho_0 \bar{\rho} \varepsilon^2 U^2}{C} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p}{C} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\varepsilon \sum_{xy}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\sum_{yy}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.53})$$

Avec $\sum_{xx} \approx \mu_0 \frac{U}{C} De$ $\sum_{yy} \approx \mu_0 \varepsilon \frac{U}{C}$ $\sum_{xy} \approx \mu_0 \frac{U}{C}$

$$\frac{\rho_0 \bar{\rho} \varepsilon U^2}{C} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p}{C} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\varepsilon \mu_0 \frac{U}{C} De}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_0 \frac{U}{C}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.54})$$

$$\frac{\rho_0 \bar{\rho} \varepsilon^2 U^2}{C} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p}{C} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\varepsilon \mu_0 \frac{U}{C}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_0 \varepsilon \frac{U}{C}}{C} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.55})$$

Ou encore

$$\varepsilon \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_0}{\rho_0 U C} \varepsilon De \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_0}{\rho_0 U C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.56})$$

$$\varepsilon^2 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_0}{\rho_0 U C} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \frac{\mu_0}{\rho_0 U C} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.57})$$

Le terme $\frac{\mu_0}{\rho_0 U C}$ représente l'inverse du nombre de Reynolds donc

$$\varepsilon \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}_0} \varepsilon De \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.58})$$

$$\varepsilon^2 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.59})$$

Ou encore

$$\varepsilon \text{Re}_0 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p \text{Re}_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon De \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.60})$$

$$\varepsilon^2 \text{Re}_0 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p \text{Re}_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.61})$$

Donc le système d'équations de quantité de mouvement devient :

$$\varepsilon \text{Re}_0 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p \text{Re}_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon De \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.62})$$

$$\varepsilon^3 \text{Re}_0 \bar{\rho} \left(\bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\varepsilon \Delta p \text{Re}_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV.63})$$

Par ailleurs, l'équation d'énergie donnée par la relation (VI-10) sous sa forme développée s'exprime par :

$$\rho C_p \left(\mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\tau_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)$$

En utilisant les changements de variables cités précédemment, cette équation s'écrit sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \rho_0 \bar{\rho} C_p U \Delta T}{C} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) &= \frac{k \Delta T}{C^2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &+ \frac{\varepsilon U}{C} \left(\mu_0 \frac{U}{C} De \bar{\tau}_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \mu_0 \frac{U}{C} \bar{\tau}_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{U}{C} \mu_0 \frac{U}{C} \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (IV.64)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 C_p U C^2}{k C / \varepsilon} \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) &= \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &+ \frac{\varepsilon \mu_0 U^2}{C^2} \frac{C^2}{k \Delta T} \left(De \bar{\tau}_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \bar{\tau}_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\mu_0 U^2}{C^2} \frac{C^2}{k \Delta T} \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (IV.65)$$

Avec

$$Pe = \frac{\rho_0 C_p U C^2}{k R} \quad \text{Le nombre de Peclet}$$

$$Nd = \frac{\mu_0 U^2}{k \Delta T} \quad \text{le nombre de Birkmann}$$

Donc l'équation de l'énergie se réduit à la forme suivante :

$$Pe \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \varepsilon Nd De \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon^2 Nd \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \bar{\tau}_{yy} + Nd \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (IV.66)$$

5. Système final d'équations adimensionnelles:

Le système final s'écrit donc comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = 0 \\ \bar{\tau}_{yy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] - 2 \varepsilon De \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \bar{\tau}_{xy} + \varepsilon De \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] - (\varepsilon De)^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - \varepsilon De \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \\ \varepsilon Re_0 \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\varepsilon \Delta p Re_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \varepsilon De \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \\ \varepsilon^3 Re_0 \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = - \frac{\varepsilon \Delta p Re_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} \\ Pe \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) + \varepsilon N_d De \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon^2 N_d \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} + N_d \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \bar{\rho} = 1 - \frac{a \Delta T}{\rho_0} \bar{T} \\ \bar{\mu} = e^{-E \Delta T \bar{T}} \end{array} \right. \quad (IV.67)$$

Pour $N_d = \frac{\mu_0 U^2}{k \Delta T} \approx 1$ on a $\Delta T = \frac{\mu_0 U^2}{k}$.

On pose $\varepsilon De = De^*$, le nombre de Deborah rapporté au rayon R

Le système d'équations devient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\
 \bar{\tau}_{xx} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = 0 \\
 \bar{\tau}_{yy} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] - 2 De^* \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = 2 \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\
 \bar{\tau}_{xy} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] - (De^*)^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - De^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \\
 \varepsilon Re_0 \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\varepsilon \Delta p Re_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + De^* \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \\
 \varepsilon^3 Re_0 \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = - \frac{\varepsilon \Delta p Re_0}{\rho_0 U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} \\
 Pe \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) + N_d De^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon^2 N_d \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} + N_d \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\
 \bar{\rho} = 1 - \frac{a \Delta T}{\rho_0} \bar{T} \\
 \bar{\mu} = e^{-E \Delta T \bar{T}}
 \end{array} \right. \quad (IV.68)$$

Tenant compte de l'hypothèse de la lubrification et les considérations géométriques, le système d'équations se simplifié à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\
 \bar{\tau}_{xx} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} \right] - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = 0 \\
 \bar{\tau}_{yy} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} \right] - 2 De^* \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} = 2 \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\
 \bar{\tau}_{xy} + De^* \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right] - (De^*)^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} - De^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} = \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\
 0 = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + De^* \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \\
 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \\
 Pe \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) + N_d De^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + N_d \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\
 \bar{\rho} = 1 - \frac{a \Delta T}{\rho_0} \bar{T} \\
 \bar{\mu} = e^{-E \Delta T \bar{T}}
 \end{array} \right. \quad (IV.69)$$

Où

$$Pe = \frac{\rho_0 C_p U C^2}{kR}, \quad Re = \frac{\rho_0 U C}{\mu_0}, \quad De^* = \frac{\lambda U}{R}, \quad N_d = \frac{\mu_0 U^2}{k\Delta T}$$

6. Conditions aux limites

6.1. Conditions aux limites sur la vitesse :

- Dans le domaine fluide :

$$R_a \leq r \leq R_a + h \text{ pour un } h = C(1 + \varepsilon \cos \theta)$$

$$v_r(r, \theta) = v_r(r, \theta + 2\pi n)$$

$$v_\theta(r, \theta) = v_\theta(r, \theta + 2\pi n)$$

- Conditions aux limites sur l'arbre :

$$v_r(R_a, \theta) = 0$$

$$v_\theta(R_a, \theta) = U$$

- Conditions aux limites sur le coussinet :

$$v_r(R_a + h, \theta) = 0$$

$$v_\theta(R_a + h, \theta) = 0$$

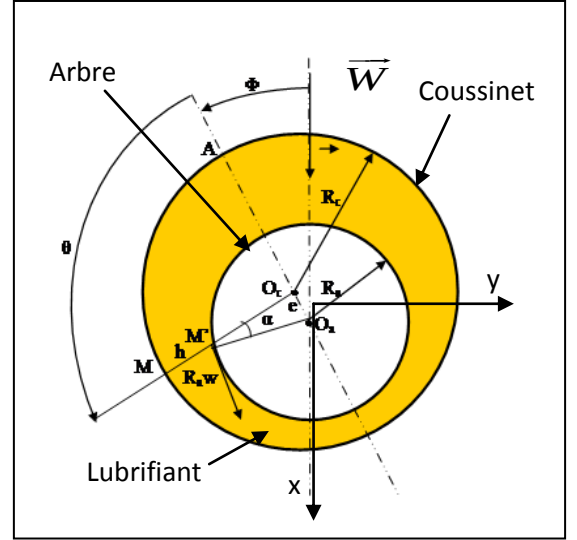


Figure (IV.4) : Schéma représentatif d'un palier lisse

6.2. Conditions aux limites sur la pression p et les contraintes τ_{ij} :

$$p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi n)$$

$$\tau_{ij}(r, \theta) = \tau_{ij}(r, \theta + 2\pi m)$$

Conditions aux limites adimensionnelles :

On a : $r = R_a$ donc $\bar{r} = 1$

Pour $r = R_a + h$ on a $\bar{r} = 1 + \frac{h}{R_a}$ ou $\bar{r} = 1 + \frac{C}{R_a}(1 + \varepsilon \cos \theta)$

- Conditions adimensionnelles sur la vitesse :

- Les Conditions aux limites sur l'arbre

$$\begin{cases} \bar{v}_r(1, \theta) = 0 \\ \bar{v}_\theta(1, \theta) = 1 \end{cases} \quad (IV.70)$$

- Les Conditions aux limites sur le coussinet :

$$\begin{cases} \bar{v}_r\left(1 + \frac{h}{R_a}, \theta\right) = 0 \\ \bar{v}_\theta\left(1 + \frac{h}{R_a}, \theta\right) = 0 \end{cases} ; \quad \bar{r} = 1 + \frac{h}{R_a}$$

et aussi

$$\begin{cases} \bar{v}_r(\bar{r}, \theta) = \bar{v}_r(\bar{r}, \theta + 2\pi n) \\ \bar{v}_\theta(\bar{r}, \theta) = \bar{v}_\theta(\bar{r}, \theta + 2\pi n) \end{cases}; \quad \forall \theta \quad \text{et} \quad 1 < \bar{r} < 1 + \frac{h}{R_a} \quad (\text{IV.71})$$

- **Conditions adimensionnelles sur la pression p et les contraintes τ_{ij} :**

$$\begin{cases} \bar{p}_r(\bar{r}, \theta) = \bar{p}_r(\bar{r}, \theta + 2\pi n) \\ \bar{\tau}_{ij}(\bar{r}, \theta) = \bar{\tau}_{ij}(\bar{r}, \theta + 2\pi n) \end{cases}; \quad \forall \theta \quad \text{et} \quad 1 < \bar{r} < 1 + \frac{h}{R_a} \quad (\text{IV.72})$$

6.3. Conditions aux limites sur la température :

6.3.1. Champ de température dans le coussinet :

Le bilan thermique effectué sur un élément de volume du coussinet est le suivant :

$$\Delta T_c = \frac{\rho_c C_{pc}}{\sigma_c} \frac{dT_c}{dt} = a_c \frac{dT_c}{dt} \quad (\text{IV.73})$$

Avec :

T_c : Champ de température dans le coussinet

ρ_c : Masse volumique du coussinet

C_{pc} : Chaleur spécifique du coussinet

σ_c : Conductivité thermique du coussinet

$1/a_c$: Diffusivité thermique du coussinet

Δ : Laplacien

En remplaçant dans l'équation (IV.73) la dérivée $\frac{dT_c}{dt}$ par son expression, on obtient :

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{\partial T_c}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} T_c \quad (\text{IV.74})$$

Le régime est supposé permanent et le coussinet est supposé fixe, cette dernière équation devient :

$$\frac{dT_c}{dt} = 0 \quad (\text{IV.75})$$

Et par conséquent l'équation (IV.73) se réduit à la forme suivante :

$$\Delta T_c = 0 \quad (\text{IV.76})$$

Tenant compte de l'hypothèse d'un palier infiniment long, cette dernière expression s'écrit en coordonnées polaires comme suit :

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{IV.77})$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui nécessite quatre conditions aux limites pour la résoudre. Deux conditions aux limites résultent de la géométrie du coussinet, qui impose au champ de température une répartition périodique suivant la variable angulaire. Les deux autres conditions aux limites résultent de l'égalité des flux de chaleur aux interfaces coussinet- milieux ambiant et lubrifiant- coussinet, ceci s'écrit successivement :

$$T_c(r, \theta) = T_c(r, \theta + 2\pi) \quad (\text{IV.78})$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial T_c}{\partial \theta}(r, \theta + 2\pi) \quad (\text{IV.79})$$

$$-\sigma \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R_{ec}} = h(T_c(r = R_{ec}, \theta) - T_\infty) \quad (\text{IV.80})$$

$$-\sigma \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R_{ic}} = q_1 \quad (\text{IV.81})$$

Avec :

h : Coefficient convectif relatif à la surface extérieur du coussinet.

q_1 : Flux de chaleur échangée à l'interface coussinet- lubrifiant.

R_{ec} : Rayon extérieur du coussinet.

R_{ic} : Rayon intérieur du coussinet.

T_∞ : Température du milieu ambiant loin de la paroi externe du coussinet.

La résolution analytique ou numérique de l'équation (IV.77) permet de définir le champ de température dans le coussinet.

6.3.2. Champ de température sur l'arbre :

Le bilan thermique effectué sur un élément de volume du système permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$\Delta T_a = \frac{\rho_a C_{pa}}{\sigma_a} \frac{dT_a}{dt} = a_a \frac{dT_a}{dt} \quad (\text{IV.82})$$

avec :

T_a : Champ de température dans l'arbre

ρ_a : Masse volumique de l'arbre

C_{pa} : Chaleur spécifique de l'arbre

σ_a : Conductivité thermique de l'arbre

$1/a_a$: Diffusivité thermique de l'arbre

Δ : Laplacien

La dérivée particulaire $\frac{dT_a}{dt}$ se développe comme suit :

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{\partial T_a}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} T_a \quad (\text{IV.83})$$

Le régime est laminaire et le cylindre étant en rotation, la dérivée particulaire s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{dT_a}{dt} = \Omega \frac{\partial T_a}{\partial \theta} \quad (\text{IV.84})$$

où :

Ω : vitesse de rotation de l'arbre

L'expression (IV.82) s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_a}{\partial \theta^2} = a_a \Omega \frac{\partial T_a}{\partial \theta} \quad (\text{IV.85})$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui nécessite quatre conditions aux limites pour la résoudre. Deux conditions aux limites résultent de la géométrie de l'arbre, laquelle impose au champ de température une répartition périodique suivant la variable angulaire. Les deux autres conditions aux limites résultent de l'égalité des flux de chaleur à l'interface lubrifiant- arbre et la nécessité d'avoir une valeur finie pour la température en $r=0$, elles s'écrivent successivement comme suit:

$$T_a(r, \theta) = T_a(r, \theta + 2\pi) \quad (IV.86)$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial T_a}{\partial \theta}(r, \theta + 2\pi) \quad (IV.87)$$

$$-\sigma_a \frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = q_2 \quad (IV.88)$$

$$\begin{aligned} T_a(r, \theta) &\rightarrow \text{finie} \\ r &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (IV.89)$$

Avec :

q_2 : Flux de chaleur échangé à l'interface arbre- lubrifiant

σ_a : Conductivité thermique de l'arbre

La résolution analytique ou numérique de l'équation (IV.85) permet de définir le champ de température dans l'arbre.

7. Conclusion

La résolution analytique des systèmes d'équations trouvés ci-dessous est fort que possible compte tenue de la complexité des équations. Ceci nous mène alors à la nécessité d'utiliser la résolution numérique pour de tels systèmes.

Plusieurs travaux sont effectués pour traiter le problème de la lubrification hydrodynamique par des fluides Newtonien et par des fluides complexes [D. Grecov, G. W. Roberts, J. A. Tichy, K. P. Gertzog, M. Allouche]. La résolution est généralement analytique pour les fluides Newtoniens [A. Dadouche, A. Ouibrahim, Barus. C] et numérique pour les fluides non Newtoniens par l'utilisation des méthodes numériques telles que les méthodes des différences finies, volumes finis ou élément finis [D. RH. Gwynllwy, N. Mori, M. Guemmadi].

Durant les dernières années, l'utilisation des logiciels commercialisés occupent une place importante dans le domaine de la lubrification des paliers hydrodynamique par des fluides complexes, parmi eux, on peut citer: POLYFLOU, CFX et FLUENT. Ceci constitue l'objectif du chapitre suivant où Fluent est le logiciel que nous utiliserons, complété par des sous-programmes développés en C++ et intégrés sous Fluent sous forme des UDFs et UDSs.

CHAPITRE V

RÉSOLUTION ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE D'ÉCOULEMENT DE COUETTE EN FLUIDE VISCOÉLASTIQUE DE MAXWELL

Chapitre V- Résolution Analytique et Numérique d'Ecoulement de Couette en Fluide Viscoélastique de Maxwell

5. Introduction

Le développement récent de la rhéologie théorique et expérimentale, couplé aux performances toujours croissantes des ordinateurs, permet aujourd'hui d'avoir une approche différente et d'envisager des prédictions numériques sur des géométries complexes. Malheureusement, avec les modèles actuels de type différentiel, les simulations de fluides viscoélastiques dans des géométries complexes se heurtent encore aux limites en ressources mémoires et à des temps de calculs prohibitifs.

Ce chapitre est consacré premièrement à des études analytique et numérique de l'écoulement de Couette entre deux plaques planes parallèles et entre deux cylindres concentriques. Deuxièmement des comparaisons entre les résultats obtenus numériquement avec ceux obtenus analytiquement. Le fluide utilisé dans ces études est un fluide viscoélastique de Maxwell. On utilise le logiciel Fluent auquel on intègre un code de calcul en C⁺⁺.

Le but principal de ces études est de valider le code de calcul afin de l'utiliser dans le domaine de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses par des fluides viscoélastiques obéissant au modèle de Maxwell.

6. Calculs analytiques

6.1 Etude analytique de l'écoulement plan/plan

En premier temps, on étudie analytiquement le cisaillement simple d'un fluide de Maxwell.

Les deux plans étant parallèles, l'écoulement est suivant la direction x. On peut admettre qu'il n'y a pas de composante de la vitesse selon y donc : $\vec{v}(u,0) = 0$.

L'équation de continuité est comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (V.1)$$

Donc : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, u n'est donc une fonction que de y.

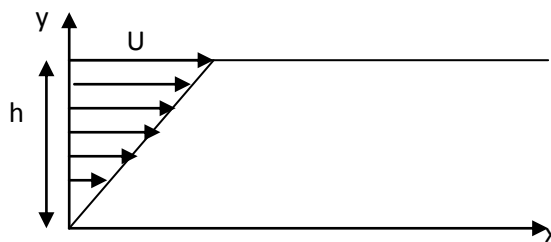


Figure (V.1) : Ecoulement de cisaillement simple entre deux plans parallèles

Le modèle de Maxwell est donné par la loi de comportement suivante :

$$\overline{\tau} + \lambda \frac{D\overline{\tau}}{Dt} = 2\mu \overline{D} \quad (V.2)$$

Où

$$\frac{D\overline{\tau}}{Dt} = \frac{d\overline{\tau}}{dt} - \left((\overline{\nabla} \overline{\tau}) \cdot \overline{\tau} + \overline{\tau} \cdot (\overline{\nabla} \overline{\tau})^T \right) \quad (V.3)$$

Et

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = u \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial x} + v \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial y} \quad (V.4)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{xx}}{dt} &= u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{d\tau_{xy}}{dt} &= u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{d\tau_{yy}}{dt} &= u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (V.5)$$

Le tenseur vitesse de déformation est donné par :

$$\overline{D} = [\dot{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.6)$$

Le tenseur gradient de vitesse est donné par :

$$[\nabla u] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [u \nabla] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.7)$$

$$[\nabla u][\tau_{i,j}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.8)$$

$$\text{Donc : } [\nabla u][\tau_{i,j}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

Ainsi que :

$$[\tau_{i,j}][u\nabla] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.10)$$

$$\text{Donc : } [\tau_{i,j}][u\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.11)$$

Alors :

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.12)$$

$$\text{Donc on aboutit à : } \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & -\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.13)$$

La loi de comportement du fluide de Maxwell nous permet d'écrire :

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} & -\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.14)$$

Donc :

$$\begin{cases} \tau_{xx} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne : } \begin{cases} \tau_{xx} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \\ \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad (V.15)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -2\lambda\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad (V.16)$$

La projection des équations de quantité de mouvement, régissant l'écoulement de cisaillement d'un fluide de Maxwell entre deux plans parallèles est le suivant :

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{cases} \quad (V.17)$$

Le champ de vitesse s'écrit : $\vec{v} = (u(y), 0)$.

L'écoulement est permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ et uniforme $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0 \right)$.

Après simplification on aboutit à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \tau_{xx} = -2\lambda\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad (V.18)$$

L'intégration de la quantité $\left(\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \right)$ donne : $p(x, y) = C_x(x)$

En remplaçant $p(x, y)$ par $C_x(x)$ et la contrainte de cisaillement τ_{xy} par leur expression dans la 1^{ère} équation du système d'équations précédent, on obtient :

$$-\frac{\partial C_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (V.19)$$

Comme la pression est égale à la pression atmosphérique aux deux extrémités de la plaque. Donc

$$\frac{\partial C_x(x)}{\partial x} = 0$$

L'équation (V.19) devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (V.20)$$

L'intégration de l'équation (V.20) conduit à : $u(y) = C_1 y + C_2$.

Tenant compte des conditions aux limites : $u(0)=0$ et $u(h)=U$.

On aboutit à : $u(y) = U \frac{y}{h}$.

Les expressions des contraintes sont comme suit :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -2\lambda\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{y}{h} \right) \right)^2 \\ \tau_{xy} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{y}{h} \right) \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad (V.21)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -2\lambda\mu \left(\frac{U}{h} \right)^2 \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{U}{h} \right) \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases} \quad (V.22)$$

6.2 Etude analytique de l'écoulement de Couette

Le fluide est compris entre le cylindre intérieur de rayon R_1 , tournant à la vitesse Ω_0 , et le cylindre extérieur de rayon R_2 est fixe, Le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(r, \theta, z)$: $u = 0, v(r), w = 0$

En système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les équations de l'équilibre dynamique, tenseur de déformation, tenseur gradient de vitesse et tenseur des contraintes sont donnés comme suit:

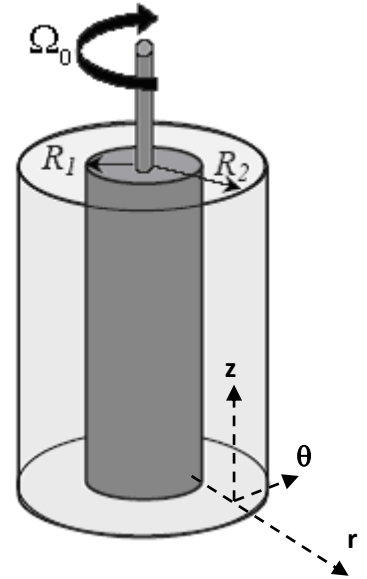


Figure (V.2) : Ecoulement de Couette

1. Equilibre dynamique :

Soit le système d'équilibre dynamique dans le cas général comme suit [J. F Agassant]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r - \rho \gamma_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + F_\theta - \rho \gamma_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z - \rho \gamma_z = 0 \end{cases}$$

2. Tenseur vitesse de déformation :

$$\overline{D} = [\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

3. Tenseur gradient de vitesse :

$$[\nabla u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

4. Tenseur des contraintes :

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

5. Dérivation particulaire d'un tenseur :

$$\frac{d[\tau_{ij}]}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\tau_{rr}}{dt} - \frac{2v}{r} \tau_{r\theta} & \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} + \frac{v}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & \frac{d\tau_{rz}}{dt} - \frac{v}{r} \tau_{\theta z} \\ \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} + \frac{v}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & \frac{d\tau_{\theta\theta}}{dt} + \frac{2v}{r} \tau_{r\theta} & \frac{d\tau_{\theta z}}{dt} + \frac{v}{r} \tau_{rz} \\ \frac{d\tau_{rz}}{dt} - \frac{v}{r} \tau_{\theta z} & \frac{d\tau_{\theta z}}{dt} + \frac{v}{r} \tau_{rz} & \frac{d\tau_{zz}}{dt} \end{bmatrix}$$

6. Dérivée particulaire:

La dérivée particulaire de chaque paramètre se développe comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tau_{rr}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial z} \\
 \frac{d\tau_{\theta\theta}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial z} \\
 \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} \\
 \frac{d\tau_{zz}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\
 \frac{d\tau_{rz}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \\
 \frac{d\tau_{\theta z}}{dt} &= \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

7. Hypothèses simplificatrices :

- L'écoulement est permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$.
- Par raison de symétrie par rapport à θ on a : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.
- Pas d'écoulement suivant la direction z , donc : $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

Tenant compte des hypothèses simplificatrices, les tenseurs de vitesse de déformation et gradient de vitesse, ainsi que la dérivation particulaire d'un tenseur et la dérivée particulaire devient de la forme :

$$\overline{D} = [\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.23)$$

$$[\nabla u] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\tau_{rr}}{dt} = \frac{d\tau_{\theta\theta}}{dt} = \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} = \frac{d\tau_{zz}}{dt} = \frac{d\tau_{rz}}{dt} = \frac{d\tau_{\theta z}}{dt} = 0 \quad (V.24)$$

$$\frac{d[\tau_{ij}]}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{2v}{r} \tau_{r\theta} & \frac{v}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & -\frac{v}{r} \tau_{\theta z} \\ \frac{v}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & \frac{2v}{r} \tau_{r\theta} & \frac{v}{r} \tau_{rz} \\ -\frac{v}{r} \tau_{\theta z} & \frac{v}{r} \tau_{rz} & 0 \end{bmatrix} \quad (V.25)$$

En appliquant la loi de comportement de fluide de Maxwell (équation V.2):

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{2v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{v}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & -\frac{v}{r}\tau_{\theta z} \\ \frac{v}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & \frac{2v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{v}{r}\tau_{rz} \\ -\frac{v}{r}\tau_{\theta z} & \frac{v}{r}\tau_{rz} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & \frac{-v}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \\ - \lambda \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ \frac{-v}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{2v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{v}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & -\frac{v}{r}\tau_{\theta z} \\ \frac{v}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) & \frac{2v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{v}{r}\tau_{rz} \\ -\frac{v}{r}\tau_{\theta z} & \frac{v}{r}\tau_{rz} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -\frac{v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{-v}{r}\tau_{\theta\theta} & \frac{-v}{r}\tau_{\theta z} \\ \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{rr} & \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{r\theta} & \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \lambda \begin{bmatrix} \frac{v}{r}\tau_{r\theta} & \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{rr} & 0 \\ \frac{-v}{r}\tau_{\theta\theta} & \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{r\theta} & 0 \\ \frac{-v}{r}\tau_{\theta z} & \frac{\partial v}{\partial r}\tau_{rz} & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)\tau_{rr} & 0 \\ \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)\tau_{rr} & 2\left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)\tau_{r\theta} & \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)\tau_{rz} \\ 0 & \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)\tau_{rz} & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement on aboutit aux expressions suivantes :

$$\tau_{rr} = 0 \tag{V.26}$$

$$\tau_{r\theta} + \lambda \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr} \right) \tau_{rr} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \tag{V.27}$$

$$\tau_{\theta\theta} + 2\lambda \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr} \right) \tau_{r\theta} = 0 \tag{V.28}$$

$$\tau_{rz} = 0 \tag{V.29}$$

$$\tau_{\theta z} + \lambda \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr} \right) \tau_{rz} = 0 \tag{V.30}$$

$$\tau_{zz} = 0 \tag{V.31}$$

Donc :

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \quad (V.32)$$

$$\tau_{\theta\theta} + 2\mu\lambda \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr} \right) \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (V.33)$$

Ou encore :

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{zz} = 0 \text{ et } \tau_{rz} = 0 \quad (V.34)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \quad (V.35)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu\lambda \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 \quad (V.36)$$

A partir du système d'équilibre dynamique, on aboutit après simplification à la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{-\sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho\gamma_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \rho\gamma_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho\gamma_z = 0 \end{cases} \quad (V.37)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \frac{-\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g_z \end{cases} \quad (V.38)$$

A partir de l'expression (V.27) on peut écrire que:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) + \mu \frac{2}{r} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (V.39)$$

Donc :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = -\frac{2}{r} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \quad (V.40)$$

D'où, par intégration, en tenant compte des conditions aux limites $v(R_1) = \Omega_0 R_1$ et $v(R_2) = 0$

$$v(r) = \frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right). \quad (V.41)$$

Pour déterminer le champ de la pression on utilise l'équation suivante :

$$\frac{-\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r} \quad (V.42)$$

ou encore :

$$-\frac{2\mu\lambda}{r} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 - \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r} \quad (V.43)$$

Donc :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r} + \frac{2\mu\lambda}{r} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 \quad (V.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right) \right)^2 - \frac{8\mu\lambda}{r} \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \frac{R_2^4}{r^4} \quad (V.45)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[\frac{\rho}{r} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right)^2 - 8\mu\lambda \frac{R_2^4}{r^5} \right] \quad (V.46)$$

$$p(r, z) = \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[\int \frac{\rho}{r} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right)^2 dr - 8\mu\lambda \int \frac{R_2^4}{r^5} dr \right] \quad (V.47)$$

$$p(r, z) = \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[\rho \left(-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \ln(r) + \frac{r^2}{2} \right) + \frac{2\mu\lambda R_2^4}{r^4} \right] + C_z(z) \quad (V.48)$$

$$p(r, z) = \rho \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \ln(r) + \frac{r^2}{2} \right] + \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[\frac{2\mu\lambda R_2^4}{r^4} \right] + C_z(z) \quad (V.49)$$

On calcule la pression à partir de l'équation suivante :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g_z$$

On a : $g_z = -g$

D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (V.50)$$

Donc :

$$p(r, z) = -\rho g z + C_r(r) \quad (V.51)$$

$$\text{et } \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dC_z}{dz}$$

$$(V.52)$$

Donc :

$$\frac{dC_z}{dz} = -\rho g \quad (V.53)$$

ou encore

$$C_z(z) = -\rho g z + Cte \quad (V.54)$$

D'où :

$$p(r, z) = \rho \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \ln(r) + \frac{r^2}{2} \right] + \left[\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]^2 \left[\frac{2\mu\lambda R_2^4}{r^4} \right] - \rho g z + Cst \quad (V.55)$$

Remplaçant la vitesse par son expression dans l'équation (V.35) on aboutit à :

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\mu\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right) - \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2\mu\Omega_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (V.56)$$

On procède de la même manière pour déterminer l'expression de $\tau_{\theta\theta}$.

$$\text{On a : } \tau_{\theta\theta} = 2\mu\lambda \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 \quad (V.57)$$

$$\text{D'où : } \tau_{\theta\theta} = 2\mu\lambda \left(\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)^2 \left(-2 \frac{R_2^2}{r^2} \right)^2 \quad (V.58)$$

$$\text{Donc : } \tau_{\theta\theta} = \frac{8\mu\lambda\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \frac{1}{r^4} \quad (\text{V.59})$$

7. Procédure numérique

La forme conservatrice pour toutes les équations de transport de l'écoulement peut s'écrire :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\vec{u}) = \text{div}(\Gamma\overrightarrow{\text{grad}\phi}) + S_\phi \quad [\text{H. K. Versteeg}]$$

Soit : $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$: Taux d'augmentation de ϕ dans l'élément fluide.

$\text{div}(\rho\phi\vec{u})$: Taux net de ϕ en sortie de l'élément fluide.

$\text{div}(\Gamma\overrightarrow{\text{grad}\phi})$: Taux d'augmentation de ϕ dû à la diffusion.

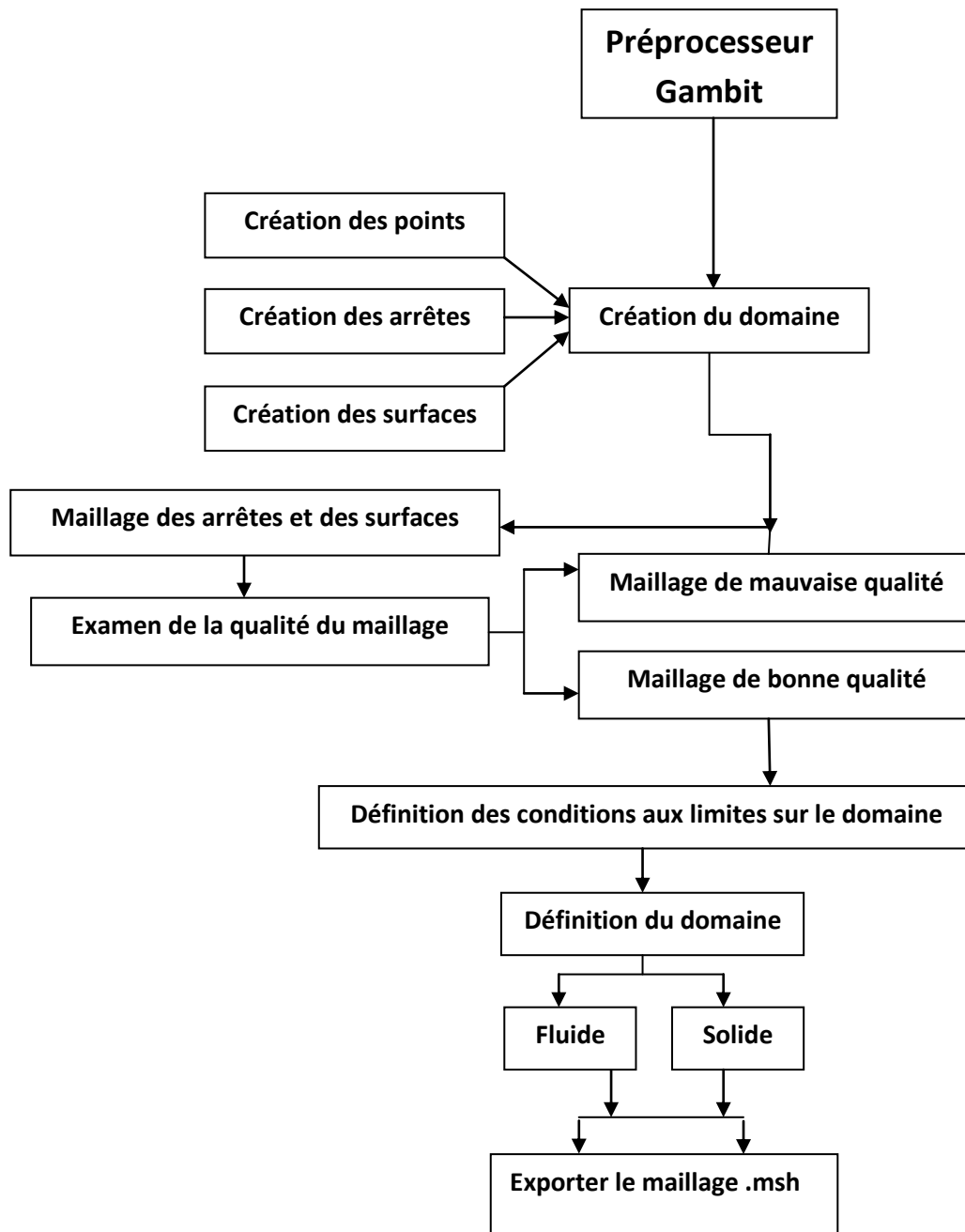
S_ϕ : Taux d'augmentation de ϕ dû à la source.

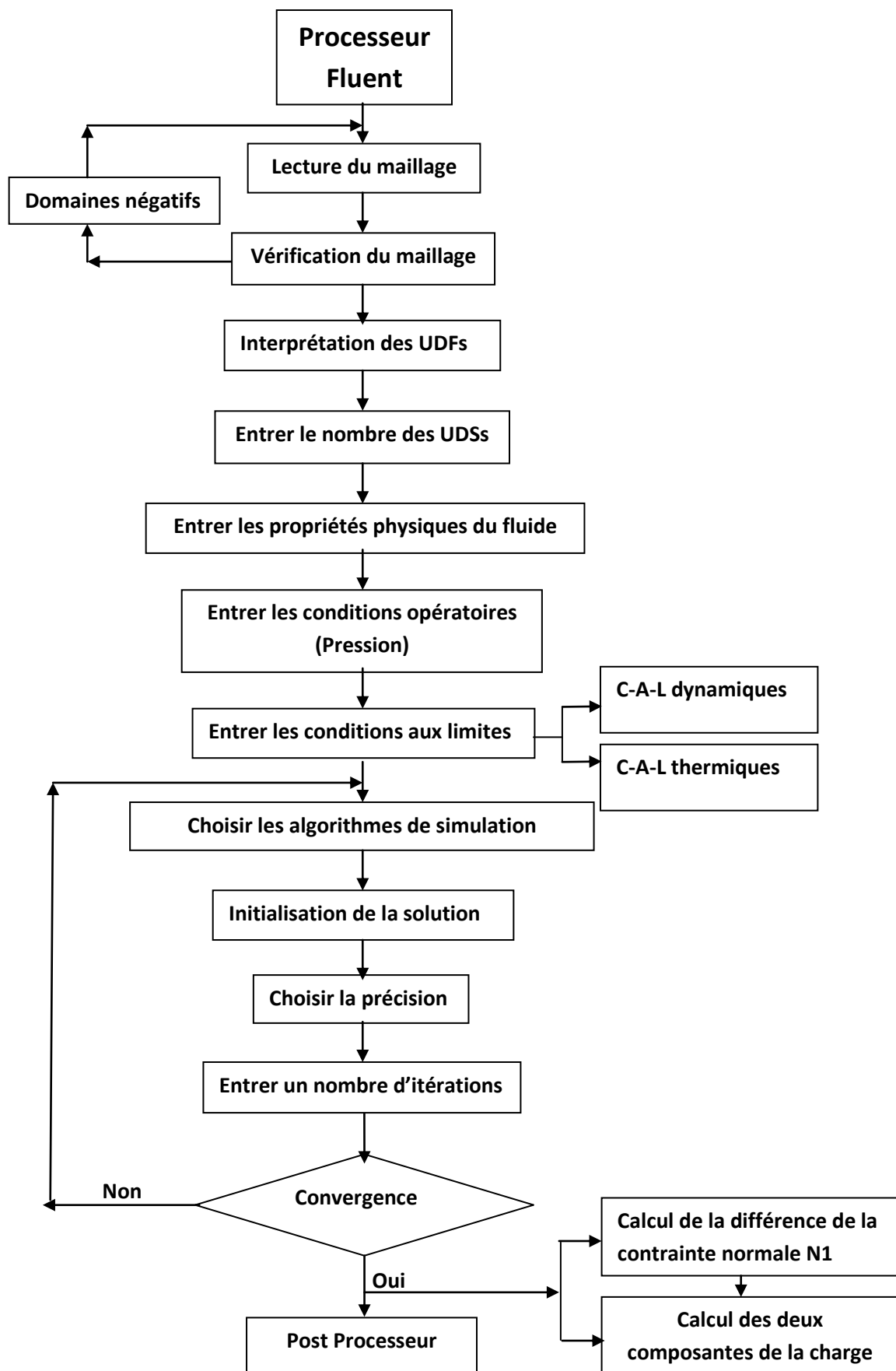
Le tableau suivant représente les différents termes de l'équation de continuité, équation de quantité de mouvement, loi de comportement et l'équation de l'énergie.

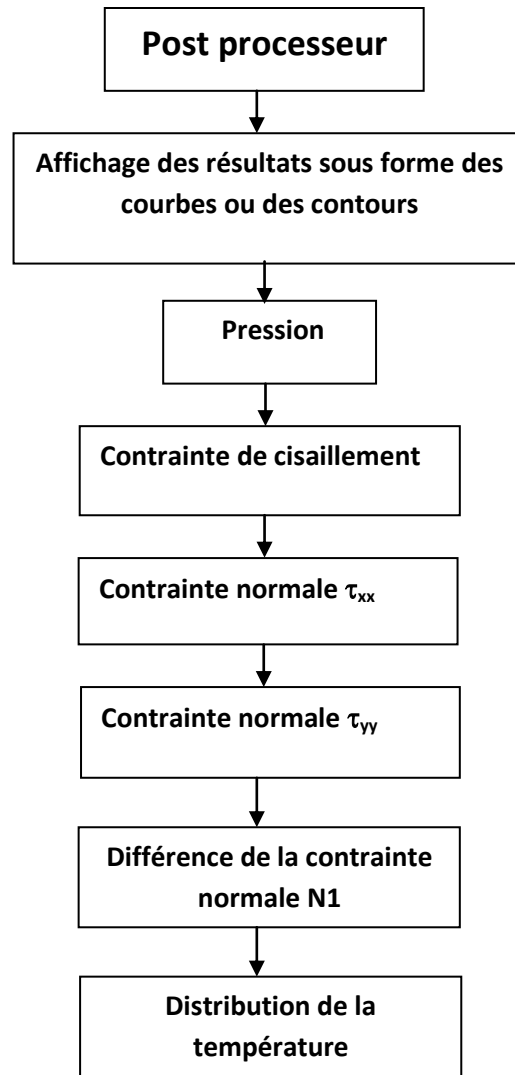
Equations de Continuité	$\text{div}(\vec{u}) = S_M$	$S_M = 0$
Equation de Quantité de mouvement suivant x	$\text{div}(\rho u \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \overrightarrow{\text{grad}u}) + S_{Mx}$ $\mu = 0$	$S_{Mx} = \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right]$
Equation de Quantité de mouvement suivant y	$\text{div}(\rho v \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \overrightarrow{\text{grad}v}) + S_{My}$ $\mu = 0$	$S_{My} = \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right]$
Contrainte τ_{xx}	$\text{div}(\rho \tau_{xx} \vec{u}) = \text{div}(\Gamma \overrightarrow{\text{grad}\tau_{xx}}) + S_{\tau_{xx}}$ $\Gamma = 0$	$S_{\tau_{xx}} = \rho \left(\frac{-1}{\lambda} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau_{xx} + \rho \left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \right) + \rho \left(\frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ $\mu = \mu_p$
Contrainte τ_{yy}	$\text{div}(\rho \tau_{yy} \vec{u}) = \text{div}(\Gamma \overrightarrow{\text{grad}\tau_{yy}}) + S_{\tau_{yy}}$ $\Gamma = 0$	$S_{\tau_{yy}} = \rho \left(\frac{-1}{\lambda} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{yy} + \rho \left(2 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} \right) + \rho \left(\frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ $\mu = \mu_p$
Contrainte τ_{xy}	$\text{div}(\rho \tau_{xy} \vec{u}) = \text{div}(\Gamma \overrightarrow{\text{grad}\tau_{xy}}) + S_{\tau_{xy}}$ $\Gamma = 0$	$S_{\tau_{xy}} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yy} \right) + \rho \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\rho}{\lambda} \tau_{xy}$ $\mu = \mu_p$

Equation de l'énergie	$\text{div}(\rho C_p T \vec{u}) = \text{div}(\Gamma \overrightarrow{\text{grad} T}) + S_T$ $\Gamma = k$	$S_T = \left(\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
-----------------------	---	---

Les organigrammes suivants récapitulent les différentes étapes effectuées dans les logiciels Gambit et Fluent.







3.1. Simulation numérique de l'écoulement de Couette plan par Fluent

L'écoulement bidimensionnel entre deux plaques infinies selon z est modélisé par Fluent. La distance D entre les plaques est égale à 0.05 m et le domaine considéré est de longueur L tel que $L=5D$. La plaque supérieure se déplace à une vitesse V_0 qui est égale à 10^{-3} m/s et la vitesse à l'entrée est prise à $V_0/2$.

La simulation concerne un écoulement de fluide non Newtonien (modèle de Maxwell) de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\mu_p = 0.3 \text{ Pa.s}$.

Le maillage est constitué de 100x21 points. La précision sur la convergence est prise 10^{-6} et le coefficient de sous relaxation sur la quantité de mouvement est égale à 0.7.

Au regard de la forme des vecteurs vitesses représentés sur la figure (V.4). On remarque que la vitesse est nulle au niveau de la plaque inférieure, et elle est maximale au niveau de la plaque supérieur. Les figures (V.5) à (V.7) représentent une comparaison entre la solution numérique et analytique de l'évolution des contraintes normales τ_{xx} , τ_{yy} et la contrainte de cisaillement τ_{xy} en fonction de y .

On constate que les résultats de l'étude analytique est on bon accord avec ceux obtenus par l'étude numérique.

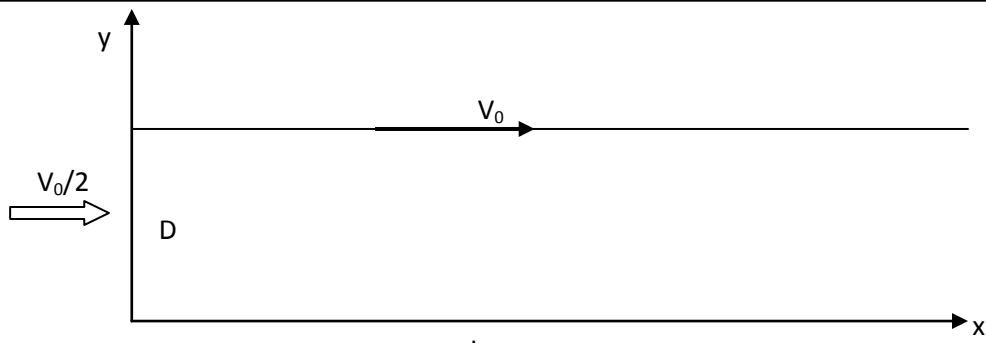


Figure (V.3) : Schématisation du problème étudié

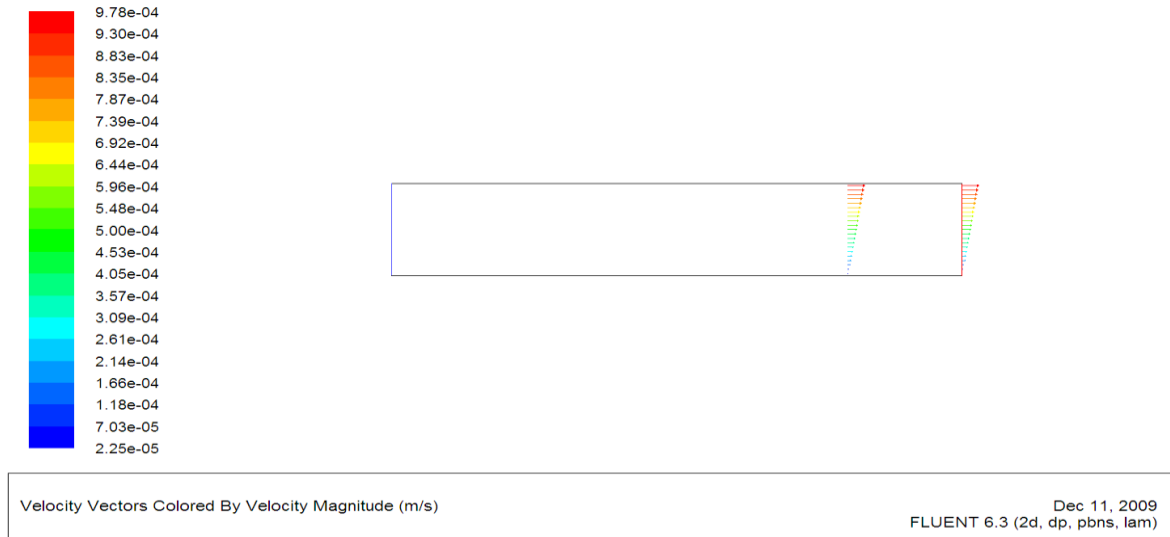


Figure (V.4) : Vecteurs vitesses

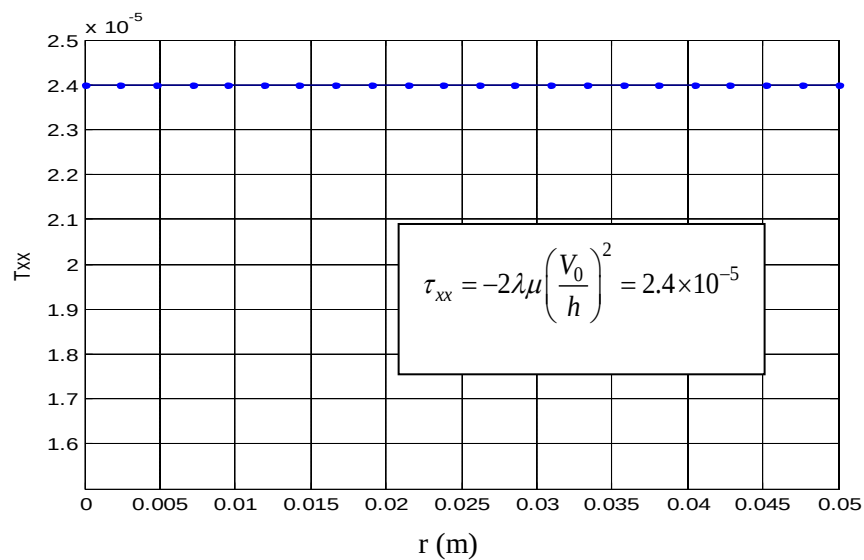


Figure (V.5) : Evolution de la contrainte normale τ_{xx}

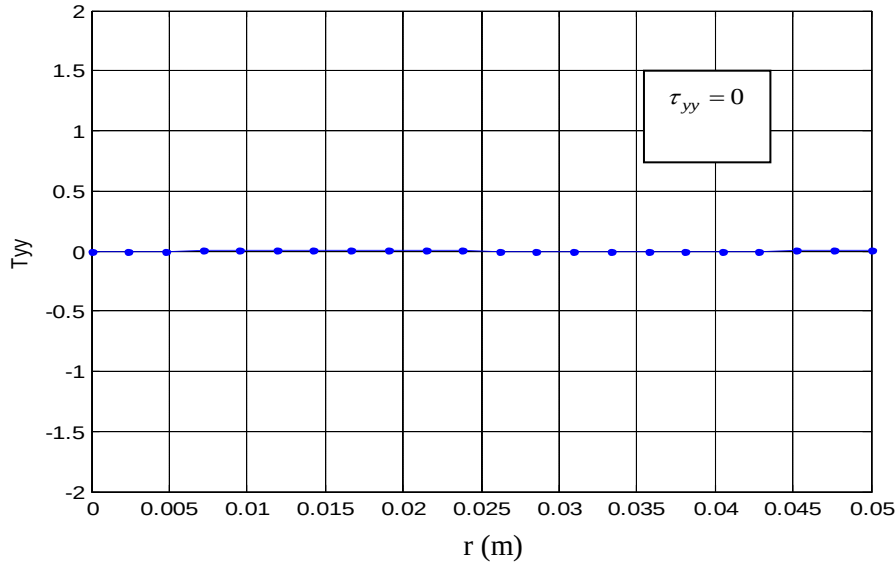


Figure (V.6) : Evolution de la contrainte normale τ_{yy}

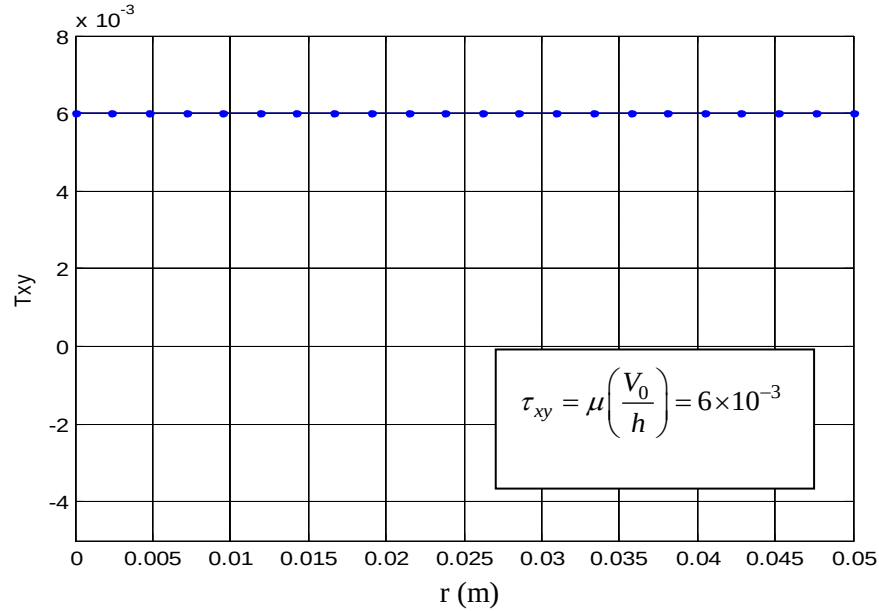


Figure (V.7) : Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy}

3.2. Simulation numérique de l'écoulement de Couette par Fluent

L'écoulement 3D entre deux cylindres coaxiaux est modélisé par Fluent. La distance C ($R_2 - R_1$) entre les cylindres est égale à 0.05 m et le domaine considéré est de longueur L tel que $L = 5C$. Le cylindre intérieur tourne avec une vitesse de rotation $\omega_0 = 3\pi \text{ rad/min}$.

La simulation concerne un écoulement de fluide viscoélastique (modèle de Maxwell) de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\mu_p = 0.3 \text{ Pa.s}$.

Le maillage est constitué de $100 \times 21 \times 50$ points. La précision sur la convergence est prise 10^{-7} et le coefficient de sous relaxation sur la quantité de mouvement est 0.5.

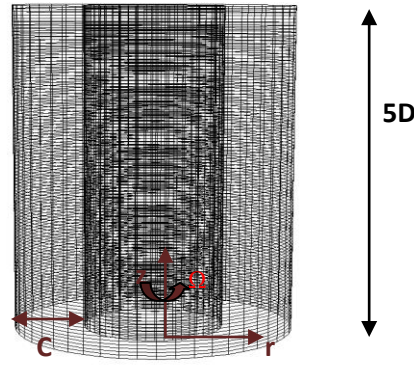


Figure (V.8) : *Maillage*

3.3. Résultats et discussion

La figure (V.9) représente l'évolution de la vitesse du fluide dans la direction radiale, obtenue par calculs analytique et numérique sous Fluent. On remarque que la vitesse est maximale au niveau du cylindre intérieur (C-L) et elle diminue jusqu'au zéro au niveau du cylindre extérieur fixe.

La figure (V.10) représente l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de r . On remarque que la variation est non linéaire ce qui est confirmé par la solution analytique obtenue à partir de l'équation (V.56)

La figure (V.11) représente l'évolution de la contrainte normale calculée analytiquement et numériquement en fonction de r . On remarque que la contrainte normale varie non linéairement suivant r et elle diminue en fonction du rayon du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur.

Les résultats illustrés sur les figures (V.9), (V.10), (V.11) montrent une conformité entre la solution analytique et la solution numérique obtenue par le logiciel Fluent.

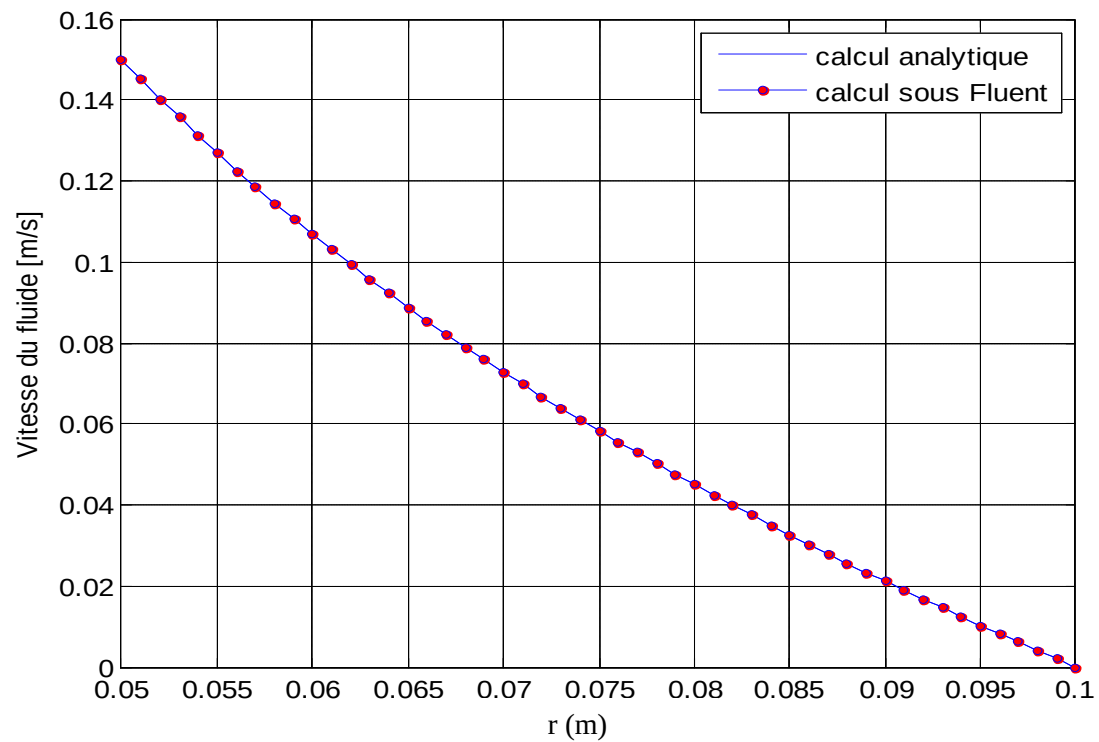


Figure (V.9) : Comparaison de l'évolution de la vitesse en fonction du rayon r obtenue analytiquement et numériquement

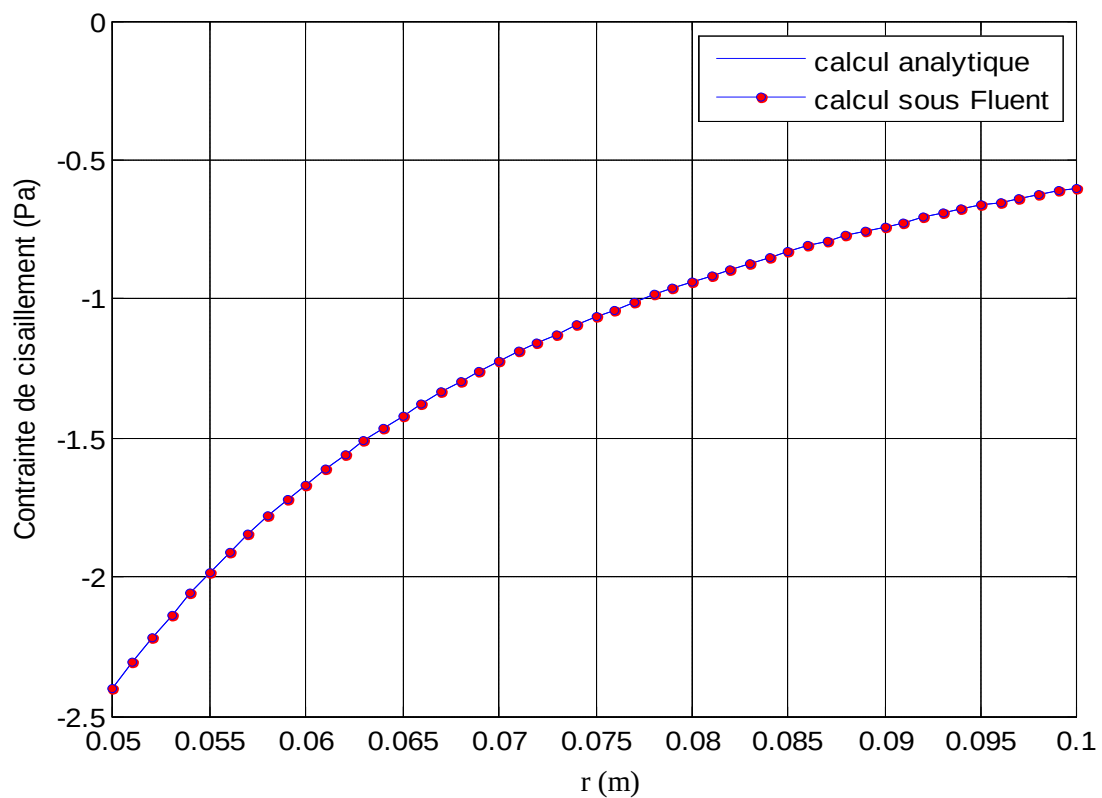


Figure (V.10) : Comparaison de l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du rayon r obtenue analytiquement et numériquement

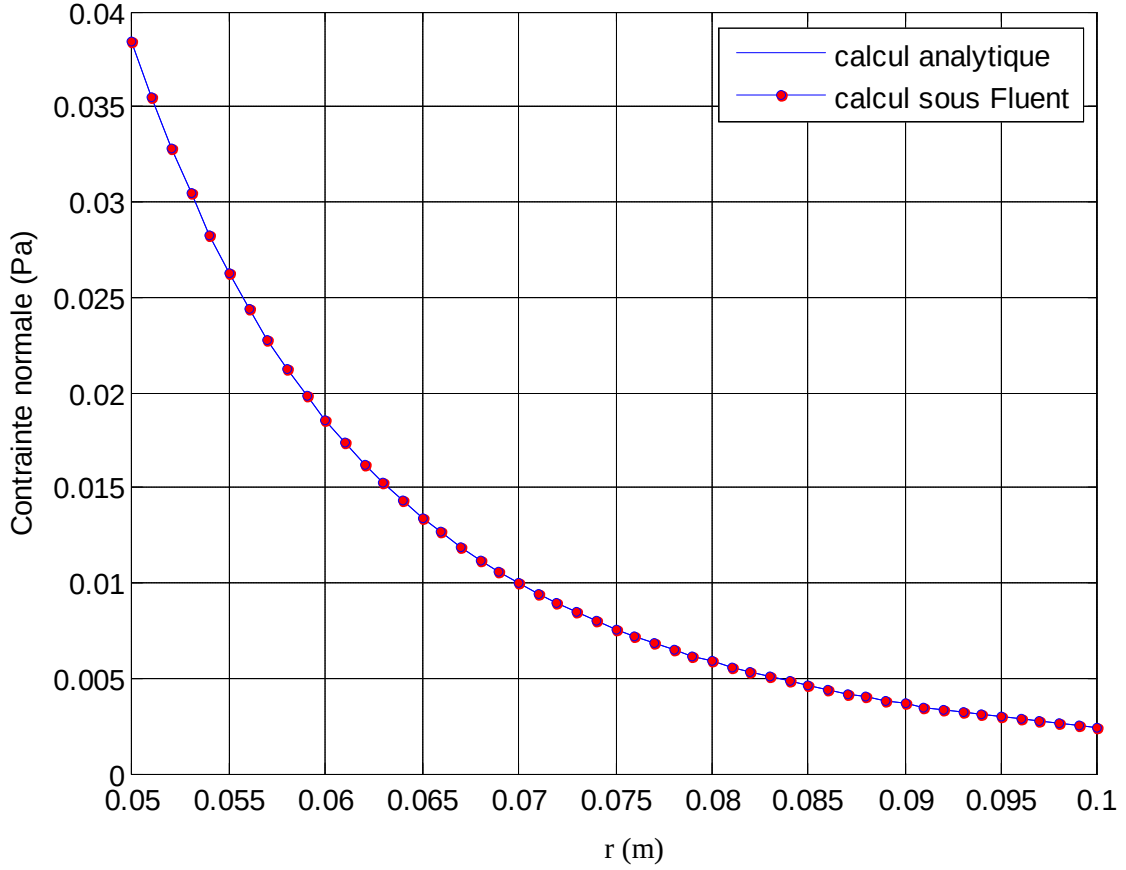


Figure (V.11) : Comparaison de l'évolution de la contrainte normale en fonction du rayon r obtenue analytiquement et numériquement

8. Etude de l'écoulement de Couette avec transfert de chaleur

Suite aux résultats obtenus par l'étude isotherme de l'écoulement de Couette pour un fluide de Maxwell, on présente dans ce qui suit, l'étude analytique et numérique de l'écoulement de Couette avec transfert de chaleur.

8.1 Calculs Analytique

Dans le cas général, l'équation de l'énergie en coordonnées cylindriques s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \\ & - \left[\tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ & - \left[\tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \tau_{rz} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] + \tau_{\theta z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \right] \end{aligned} \quad (V.60)$$

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (V.61)$$

Tenant compte des hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$.

2. Par raison de symétrie par rapport à θ on a : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

3. Ecoulement établi $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

L'équation (V.60) se réduit à :

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q_r)\right) - \tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) = 0 \quad (\text{V.62})$$

Tenant compte de l'équation (V.61) on aboutit à :

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r(-k \frac{\partial T}{\partial r}))\right) - \tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) = 0 \quad (\text{V.63})$$

$$\left(\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial T}{\partial r}) \right) - \tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) = 0 \quad (\text{V.64})$$

$$\left(\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial T}{\partial r}) \right) = \tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) \quad (\text{V.65})$$

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = r^2 \tau_{r\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{V.66})$$

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = r^2 \tau_{r\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{V.67})$$

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = r^2 \tau_{r\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{v(r)}{r} \right) \quad (\text{V.68})$$

Tenant compte des expressions (V-41 et V-56), on aboutit à :

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = r^2 \left(\frac{-2\mu\Omega_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right) \right) \right) \quad (\text{V.69})$$

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \left(\frac{-2\mu\Omega_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \left(\frac{\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r^2} \right) \quad (\text{V.70})$$

Donc :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \left(\frac{-2\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^2}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r^2} \right) \quad (\text{V.71})$$

Ou bien :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \left(\frac{4\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \right) \left(\frac{1}{r^3} \right) \quad (\text{V.72})$$

Après intégration on aboutit à :

$$r \frac{dT}{dr} = \frac{4\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(-\frac{1}{2r^2} \right) + C_1 \quad (V.73)$$

Ou bien :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-2\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{C_1}{r} \quad (V.74)$$

Après une deuxième intégration on aboutit à :

$$T(r) = \frac{-2\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(-\frac{1}{2r^2} \right) + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (V.75)$$

D'où l'expression de la température en fonction de r est comme suit :

$$T(r) = \frac{\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (V.76)$$

Soit les conditions aux limites suivantes :

$$T(R_1) = T_a \quad (V.77)$$

$$T(R_2) = T_c \quad (V.78)$$

Les constantes d'intégrations sont calculées à partir des conditions aux limites (V.77) et (V.78), alors on aboutit à :

$$C_1 = \left((T_a - T_c) - \frac{\mu\Omega_0^2 R_1^2 R_2^2}{k(R_2^2 - R_1^2)} \right) / \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \quad (V.79)$$

$$C_2 = T_a - \frac{\mu\Omega_0^2 R_1^4 R_2^4}{k(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{1}{R_1^2} \right) - C_1 \ln(R_1) \quad (V.80)$$

L'expression finale de la température en fonction du rayon r montre que cette dernière ne dépend pas du temps de relaxation, elle varie en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre, de rayon r et la température de l'arbre (T_a) et du coussinet (T_c).

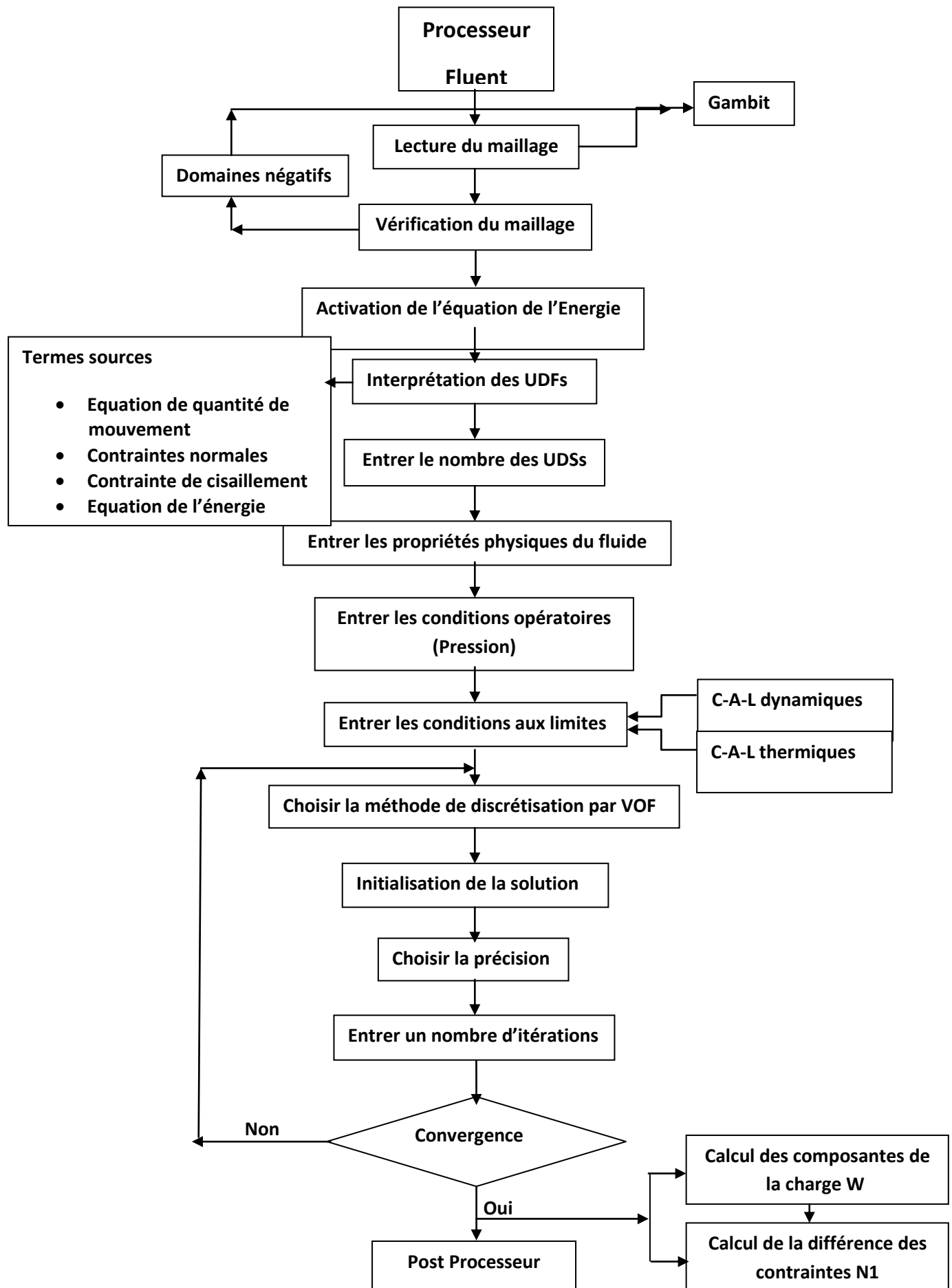
8.2 Calcul Numérique sous Fluent

8.2.1 Procédure numérique

Les dimensions de la géométrie utilisées dans cette étude sont : $R_a=5\text{cm}$, $R_c=5.3\text{ cm}$ [D. RH. Gwynllyw]. Les étapes à suivre sous le logiciel Fluent sont illustrées dans l'organigramme ci-dessous.

Nous tenons compte des conditions aux limites utilisées dans l'étude de CHANG Wang et MURALI Damodaran. Où ils ont considéré que la température de cylindre intérieur et du cylindre extérieur successivement comme suit :

$$\begin{aligned} T(R_1) &= 127^\circ\text{C} \\ T(R_2) &= 27^\circ\text{C} \end{aligned}$$



8.2.2 Résultats et discussion

Dans le calcul suivant, la conductivité thermique du fluide $k=0.13$ w/m.k, la chaleur spécifique $C_p=1750$ j/kg.k, la masse volumique $\rho=820$ kg/m³ et la viscosité $\mu=0.3$ Pa.s.

8.2.2.1 Champs de vitesse et de température

La distribution de la température dans l'espace annulaire est illustrée sur la figure (V-12) et la figure (V-14). On remarque que la température diminue de 127°C (la température du cylindre intérieur) jusqu'à la température du cylindre extérieur.

La figure (V-13) montre les vecteurs vitesses dans l'espace annulaire. On remarque sur cette figure que la vitesse est maximale sur le cylindre intérieur et elle est nulle sur le cylindre extérieur.

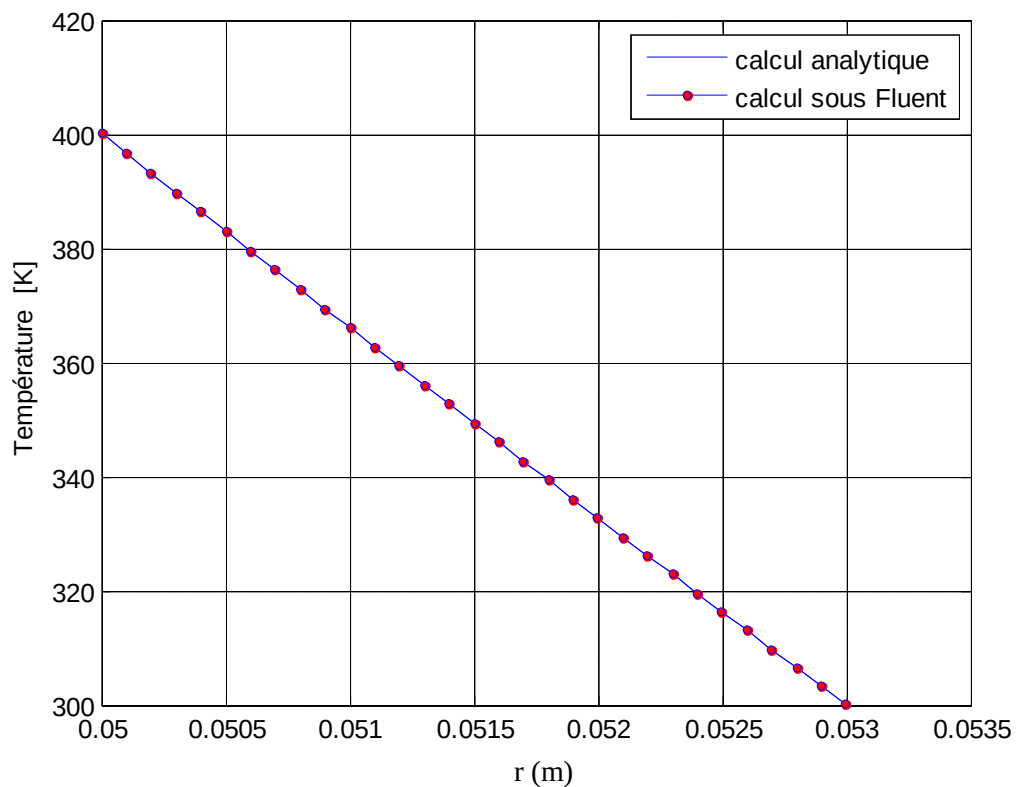


Figure (V.12) : Evolution de la température dans l'espace annulaire en fonction du rayon r obtenue par le calcul analytique et numérique

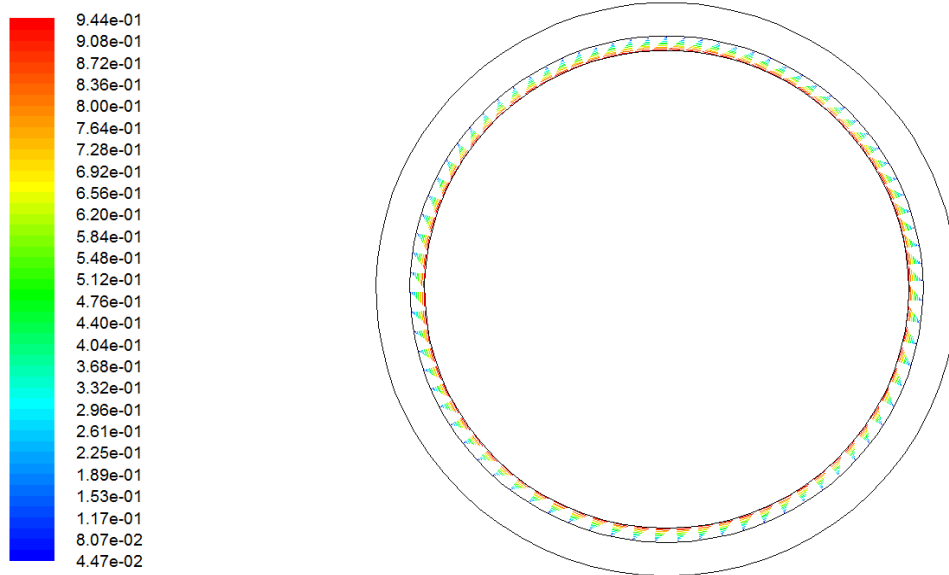


Figure (V.13) : *Vecteurs vitesse dans l'espace annulaire*

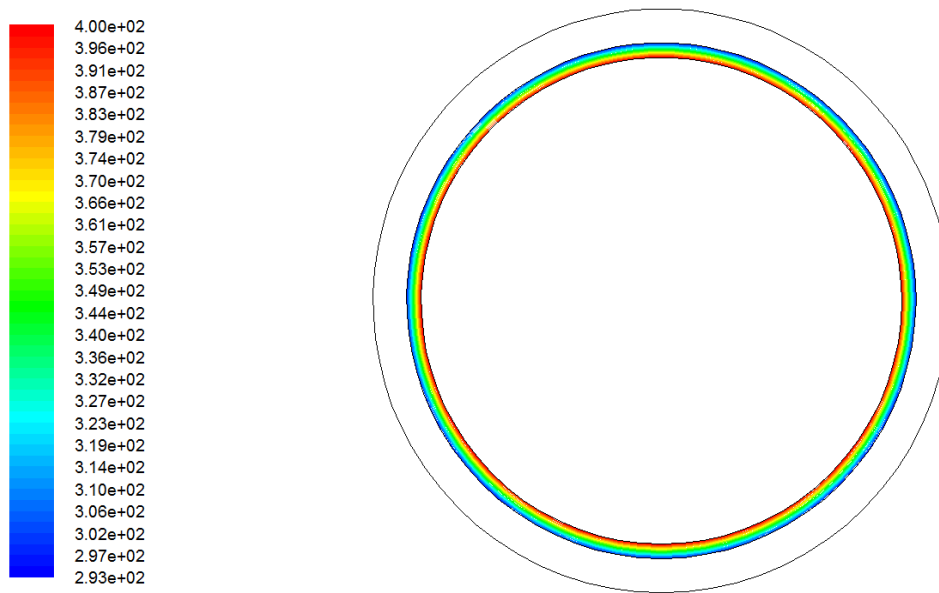


Figure (V.14) : *Contours de la température statique du fluide*

8.2.2.2 Effet du temps de relaxation λ sur la température et la contrainte normale

Le calcul analytique montre à travers l'expression (V.78) que la température ne dépend pas du temps de relaxation λ or que la contrainte normale $\tau_{\theta\theta}$ varie en fonction de λ . Les résultats numériques illustrés sur les figures (V.15) et (V. 16) sont confirmés par les résultats analytiques. Les résultats analytiques et numériques montrent que le fluide viscoélastique étudié ne joue pas un grand rôle ; en ce qui concerne ; la dissipation de la chaleur de ce fluide qui s'écoule entre deux cylindres concentriques, dont on remarque que la température varie en fonction de la viscosité, la vitesse de rotation du cylindre intérieur ainsi que le rayon r . La conformité entre les résultats obtenus numériquement et analytiquement montre bien l'efficacité du code développé en C++.

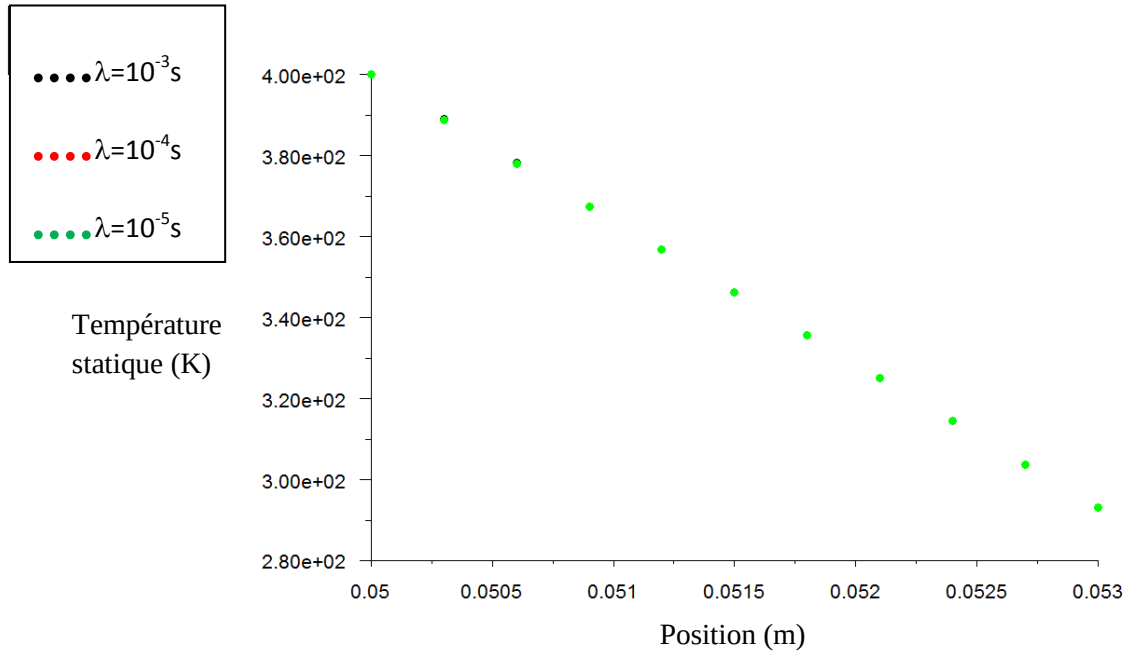


Figure (V.15) : Evolution de la température en fonction de r à $\theta=0$ pour différentes valeurs de λ

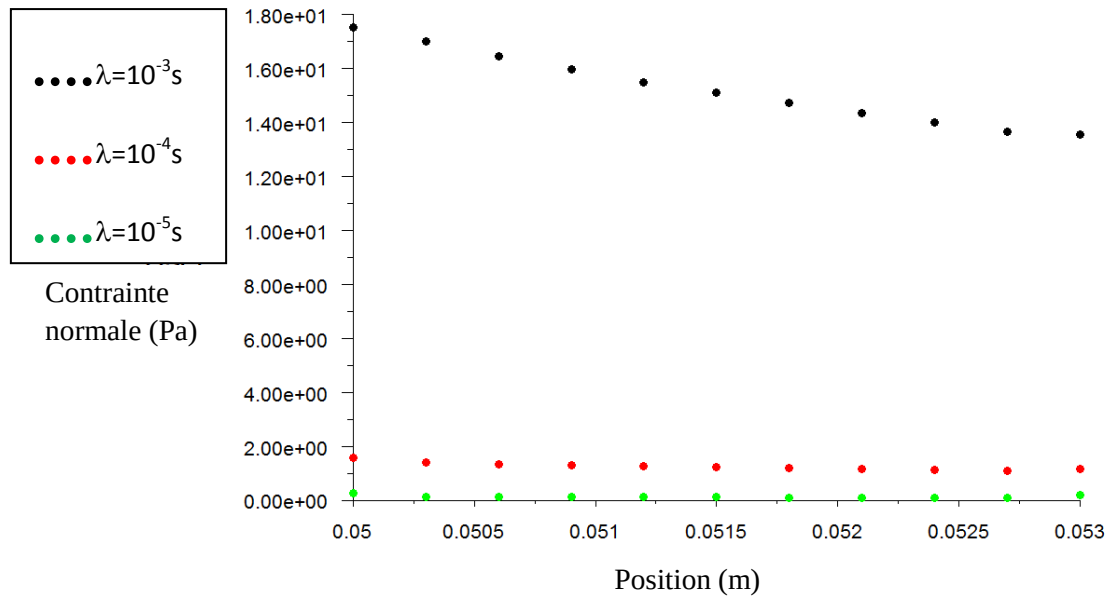


Figure (V.16) : Evolution de $\tau_{\theta\theta}$ en fonction de r à $\theta=0$ pour différentes valeurs de λ

9. Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre a pour but d'adapter Fluent avec un fluide viscoélastique de modèle de Maxwell qui n'est pas intégré dans la base de données de ce logiciel.

Pour vérifier la validité du code développé en C⁺⁺ et l'intégré sous Fluent, on a calculé le champ de vitesse, le champ de pression, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement dans le cas de l'écoulement de fluide viscoélastique entre deux plaques planes parallèles et l'écoulement entre deux cylindres concentriques et on a comparé les résultats obtenus sous Fluent avec ceux calculés analytiquement.

En suite, on a étudié l'effet thermique par l'intégration de l'équation de l'énergie pendant la simulation numérique, et on a constaté que les résultats obtenus montrent l'efficacité du code de calcul développé en C⁺⁺. On a constaté aussi, que dans le cas concentrique, le temps de relaxation n'a aucun effet sur la température du fluide.

CHAPITRE VI

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE EN FLUIDE VISCOÉLASTIQUE DE MAXWELL

**- ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA
CINÉMATIQUE ET DES PROPRIÉTÉS
RHÉOLOGIQUES SUR LES CHAMPS DE
CONTRAINTES ET DE TEMPÉRATURE**

Chapitre VI- Simulation numérique de la lubrification hydrodynamique en fluide Viscoélastique de Maxwell

-Etude de l'influence de la cinématique et des propriétés rhéologiques sur les champs de contraintes et de température

1. Introduction

Durant les dernières années, la rapidité des calculateurs a été multipliée par plus de 10^4 . La vitesse d'exécution des opérations élémentaires se compte maintenant en dizaines de millions d'opérations à la seconde. Les capacités de stockage ont gagné 7 ordres de grandeur au moins. Aujourd'hui, toutes ces performances doublent tous les ans. Pour le monde scientifique, celui de la recherche fondamentale et de l'industrie, les calculateurs et le développement de techniques de programmation spécifiques (comme la programmation parallèle) sont devenus des outils incontournables à la connaissance et ouvrent de nouveaux horizons pour la modélisation et la compréhension des phénomènes complexes et la mise au point.

Ce chapitre présente alors une étude numérique comparative de la lubrification hydrodynamique par un fluide Newtonien et un fluide de Maxwell sur convecté à faible temps de relaxation, à la fois pour comparer et valider les codes de calcul développés en C++ dans le domaine de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses. Ensuite, on présente une étude de l'influence des propriétés rhéologiques (temps de relaxation, viscosité du fluide), des caractéristiques cinématiques (vitesse de rotation de l'arbre) et géométriques (excentricité du palier) sur les champs de pression, de contraintes et de température ainsi que la force hydrodynamique.

2. Procédure Numérique

Suite aux calculs effectués dans le chapitre précédent dans lequel on a validé le code de calcul développé en C++, par la comparaison entre calculs analytiques et numériques pour le modèle de Maxwell UCM, dans une géométrie concentrique, une étude associée au cas excentrique sera suffisamment développée dans ce chapitre. Le système d'équations et les conditions aux limites présentées dans le quatrième chapitre, pour des caractéristiques géométriques et cinématiques données de l'écoulement 2D entre deux cercles excentrés (cas d'un palier hydrodynamique) seront résolus numériquement ; dans le présent chapitre ; en utilisant le logiciel Fluent 6.3. Le pré- processeur utilisé pour générer le maillage est Gambit. La particularité du problème étudié (l'entrefer est de très petites dimensions comparées au diamètre du palier) nécessite la division du domaine en trois zones ; en utilisant le maillage bi-exponentiel pour un très petit gap (jeu radial) et un maillage exponentiel pour les deux autres zones.

Une étude de l'influence du nombre de points du maillage sur les résultats numériques a été effectuée. Le maillage est raffiné par étapes successives, dans le but d'obtenir une faible variation de la solution de la pression, pour une importante augmentation du nombre d'éléments de maillage.

2.1 Critères de convergence

Sous Fluent, le système d'équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et les équations constitutives sont discrétisées en volume finis. La résolution de ces équations aux dérivées partielles est accomplie à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel avec un coefficient de sur-relaxation. La comparaison des valeurs successives de chaque paramètre calculé (pression,) est le test de convergence.

Pour les calculs actuels, la limite de convergence pour le fluide UCM correspond à une vitesse angulaire de 1500 tr/min.

2.2 Schématisation du palier étudié

Considérons les caractéristiques géométriques du palier et propriétés physiques du fluide suivantes : Le rayon de l'arbre $R_j = 5\text{ cm}$, le jeu radial $C = 0.3\text{ cm}$ ainsi que l'excentricité relative $\varepsilon = 0.6$. La vitesse de rotation de l'arbre $\omega = 20\text{ rad/s}$. La viscosité du fluide $\mu = 0.3\text{ Pa.s}$, le temps de relaxation $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-6}\text{ s}$ et la masse volumique $\rho = 820\text{ kg/m}^3$.

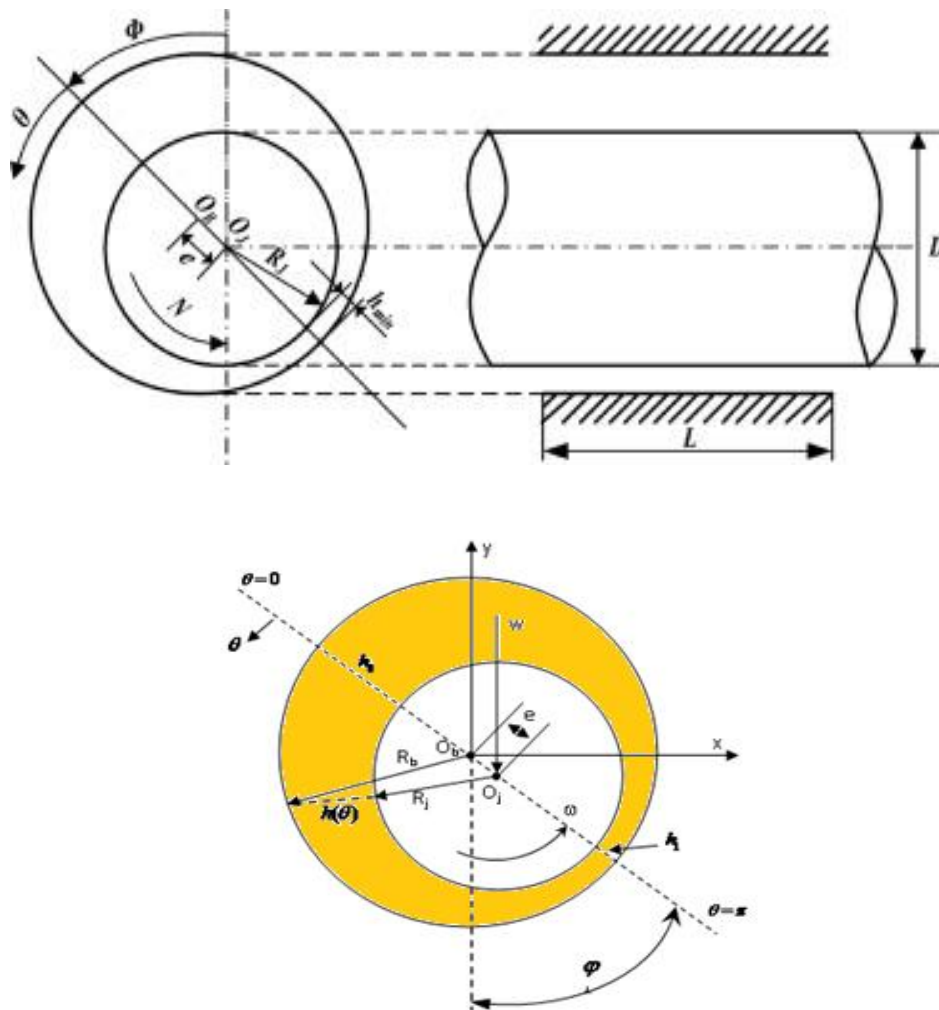


Figure (VI.1) : Schématisation du palier étudié

2.3 Vecteurs vitesse dans l'entrefer

Les deux figures (VI-2) et (VI-3) présentent les vecteurs vitesse dans l'entrefer, où on remarque que le profil de vitesse dans l'épaisseur minimale est parabolique par contre dans la partie divergente, on remarque l'existence d'une zone de recirculation de fluide lubrifiant. Au niveau de cette zone, le fluide ne contribue pas d'une façon considérable à l'évacuation de la dissipation visqueuse, elle est donc cumulée pour être évacuée par conduction et diffusion vers le coussinet et l'arbre.

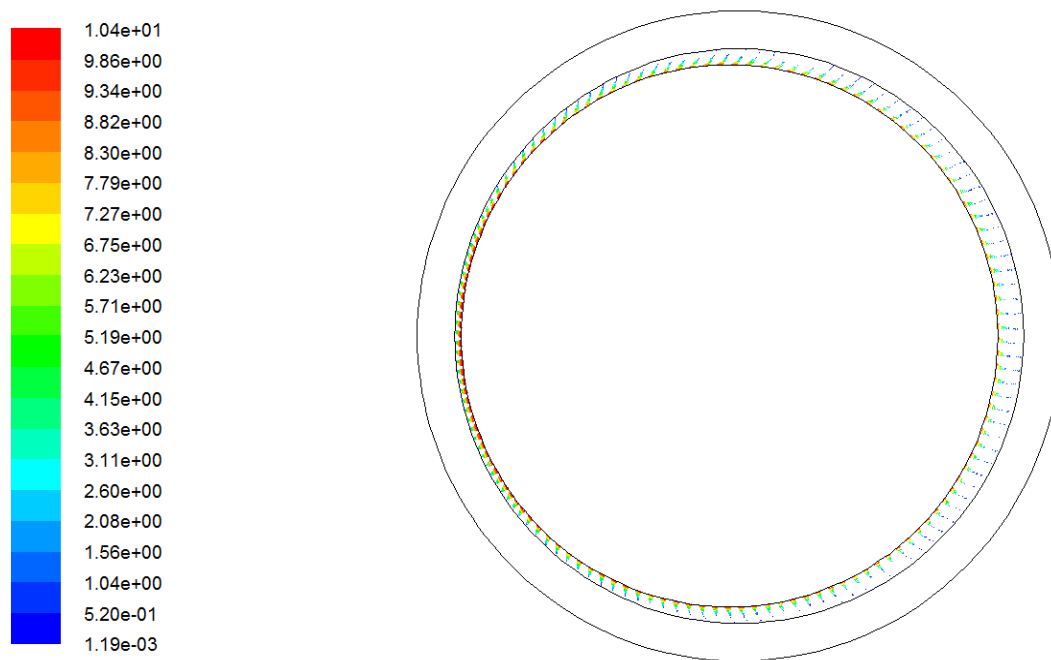


Figure (VI-2) : *Vecteurs vitesse dans l'entrefer*

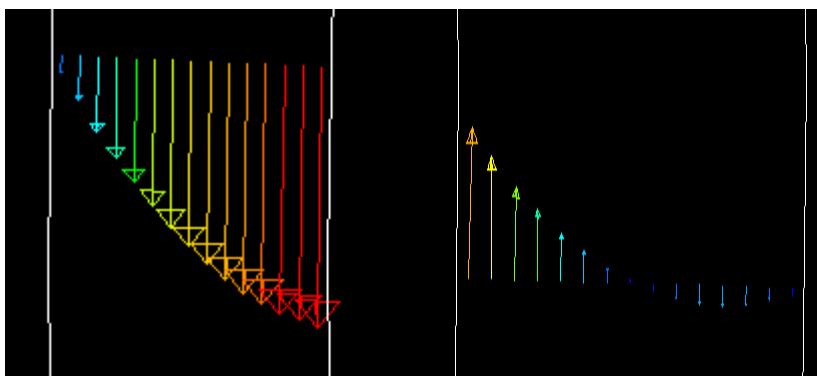


Figure (VI-3) : *Vecteurs vitesse dans les deux parties convergente et divergente successivement*

3. Comparaison du champ de pression et champ de contraintes entre un fluide Newtonien et un fluide de Maxwell

La figure (VI.4) présente une comparaison de la distribution de la pression pour les deux fluides considérés : fluide Newtonien ($\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$) et fluide de Maxwell ($\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu D_{ij}$).

On remarque une superposition de la distribution de la pression pour les deux fluides étudiés (fluide Newtonien à travers le calcul numérique et analytique et le fluide de Maxwell à travers le calcul numérique) qui semblent ainsi identiques. Ceci est une conséquence de la faible valeur du temps de relaxation $\lambda=1.2 \times 10^{-6}$ s qui favorise normalement la contribution élastique.

Le calcul numérique est comparable avec la solution analytique, ceux-ci justifient directement l'efficacité du code calcul développé en C++.

La figure (VI.5) fait apparaître la différence très nette entre le fluide newtonien et le fluide viscoélastique quand on considère la contrainte de cisaillement τ_{xy} . Comparativement aux résultats obtenus sur le champ de pression, ceci est tout à fait logique et est le résultat normalement attendu du fait que là il s'agit d'une part d'une contribution (purement) visqueuse pour le fluide newtonien à comparer à la contribution viscoélastique s'agissant du fluide de Maxwell.

La figure (VI.6) présente la variation de la pression maximale en fonction de la viscosité μ des deux fluides étudiés (considérée la même pour les deux fluides). On remarque que la variation de la pression maximale est importante par rapport à la viscosité.

La figure (VI.7), présente la variation de la contrainte de cisaillement maximale en fonction de la viscosité μ , on remarque que cette variation est linéaire par rapport à la viscosité du fluide pour ces deux modèles Newtonien et de Maxwell et que la contrainte de cisaillement maximale pour un fluide purement visqueux est supérieure à celle du fluide de Maxwell.

La figure (VI.8) montre que la première différence de la contrainte normale $N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy}$ est non nulle pour le fluide viscoélastique de Maxwell, alors qu'elle est égale à zéro pour un fluide Newtonien. Donc on constate que l'effet de la viscoélasticité est marqué par l'existence de la différence de la contrainte normale.

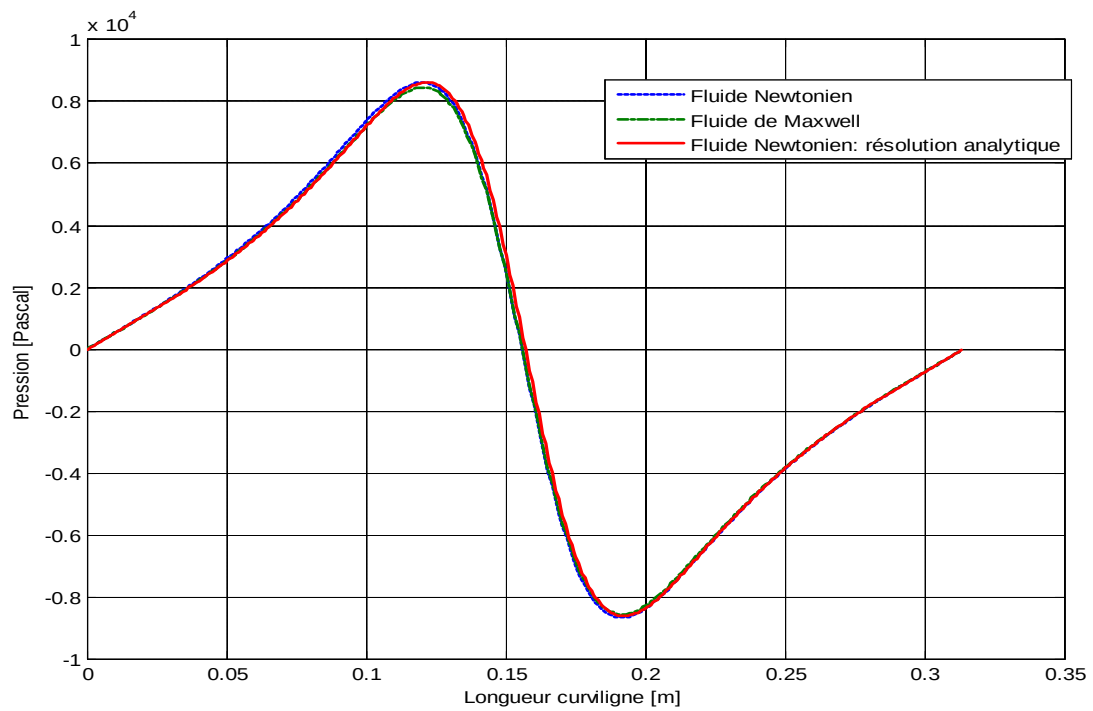


Figure (VI.4) : Comparaison de la distribution de la Pression le long de la surface de l'arbre entre un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell : ($\mu=0.3$ Pa.s, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20$ rad/s, $\lambda=1.2 \times 10^{-6}$ s)

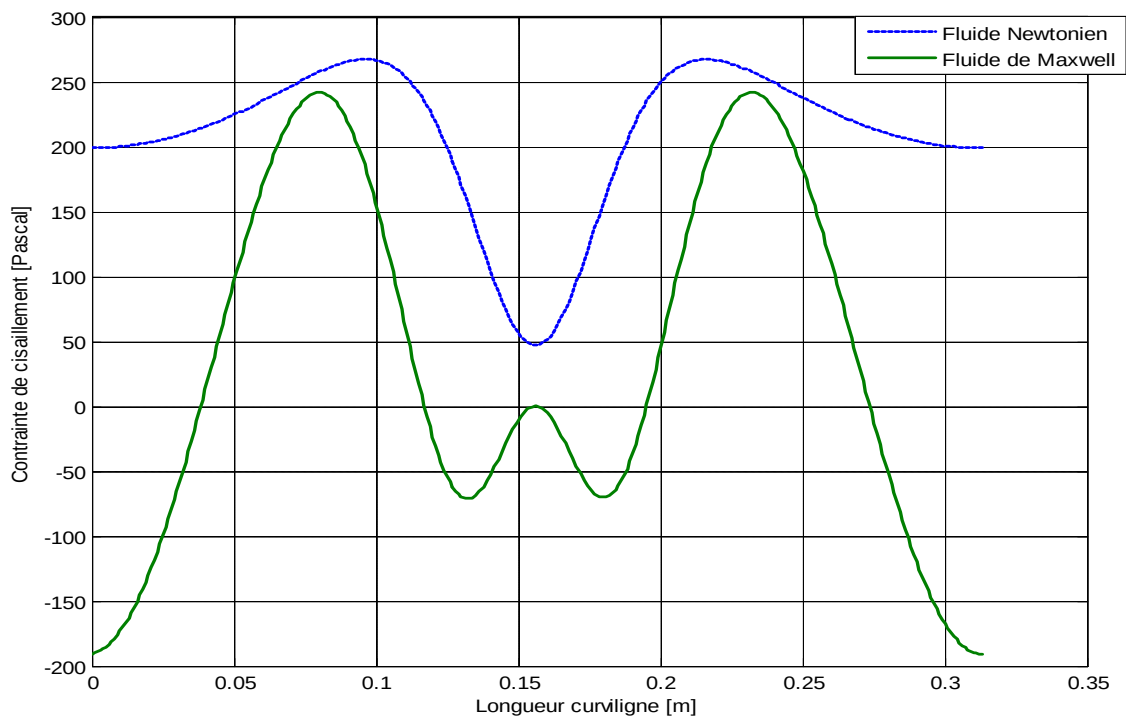


Figure (VI.5) : Comparaison de la distribution de la contrainte de cisaillement le long de la surface de l'arbre entre un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell :

$$(\mu=0.3 \text{ Pa.s, } \varepsilon=0.6, \omega=20 \text{ rad/s, } \lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s})$$

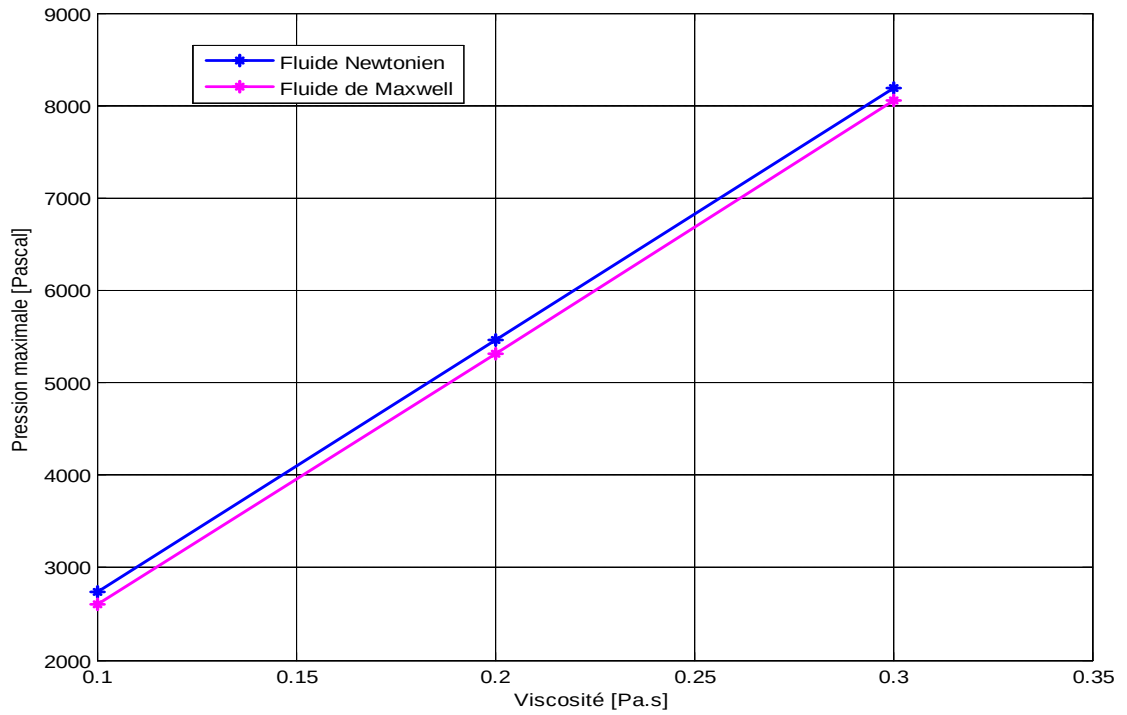


Figure (VI.6) : Variation de la Pression maximale d'un fluide Newtonien et d'un fluide de Maxwell en fonction de la viscosité μ : ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20$ rad/s, $\lambda=1.2 \times 10^{-6}$ s)

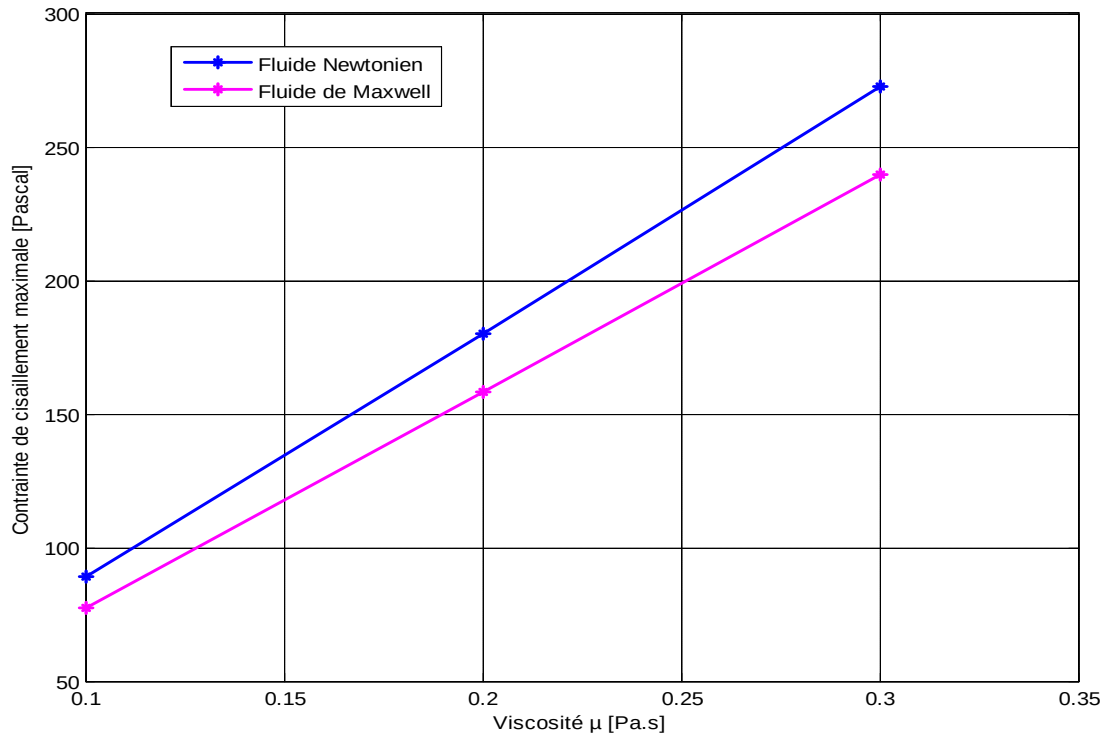


Figure (VI.7) : Variation de la contrainte de cisaillement maximale d'un fluide Newtonien et d'un fluide de Maxwell en fonction de la viscosité μ : ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20$ rad/s, $\lambda=1.2 \times 10^{-6}$ s)

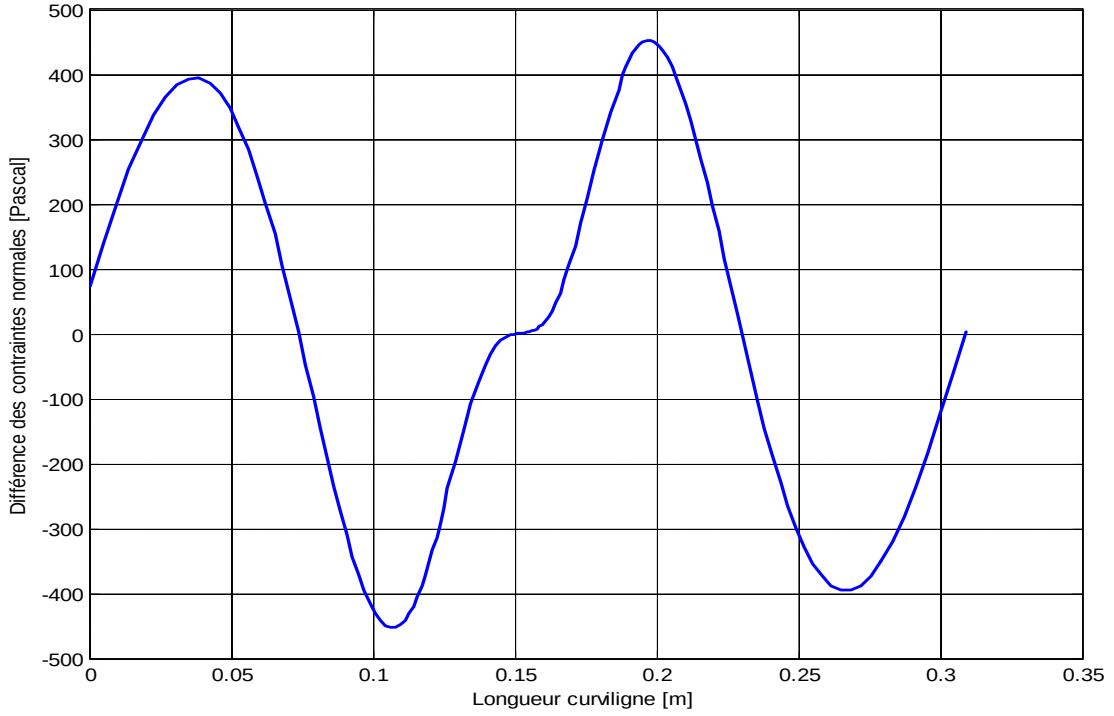


Figure (VI.8) : Evolution de la différence des contraintes normales $N1$ le long de la surface de l'arbre

$$(\mu=0.3 \text{ Pa.s}, \varepsilon=0.6, \omega=20 \text{ rad/s}, \lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s})$$

4. Charge hydrodynamique pour un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell

Le calcul de la charge pour un fluide Newtonien s'effectue par l'intégration numérique du champ de pression sur la surface de l'arbre. Par contre, dans notre cas qui considère que le fluide est décrit par le Modèle de Maxwell généralisé, le calcul des efforts s'effectue par l'intégrale numérique des deux composantes du tenseur $\bar{T}$ (chapitre II) sur la surface de l'arbre :

$$\bar{T} = \begin{Bmatrix} (-p + \tau_{xx}) \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + (-p + \tau_{yy}) \sin \theta \end{Bmatrix}$$

La composante F_x de la force hydrodynamique, est représentée sur la figure (VI-9) en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre et aussi pour deux excentricités (0.6 et 0.9), elle est différente de zéro pour le cas de fluide de Maxwell, contrairement au fluide Newtonien qui est nulle. On remarque que la variation de cette composante est non linéaire en fonction des deux paramètres cités précédemment et elle augmente fortement si ces deux paramètres augmentent.

Pour des valeurs de l'excentricité proches de 1, la composante de la force hydrodynamique F_x est comparable avec la deuxième composante de la force hydrodynamique F_y . Ce résultat est confirmé par G.W.Robert et K.Walters où ils ont montrés dans leurs études que pour une excentricité de $\varepsilon=0.99$ l'amplitude de F_x est de même ordre de grandeur de F_y .

La figure (VI.10) représente l'évolution de la force hydrodynamique F , calculée pour le modèle de Maxwell et le fluide Newtonien. On remarque que la force hydrodynamique est très importante pour le modèle de Maxwell et elle est bien supérieure à celle du fluide Newtonien. Cette différence des résultats (figure VI-10) est due à l'effet de la première différence des

contraintes normales $N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy}$. Ces résultats montrent un bon accord avec ceux obtenus par [49].

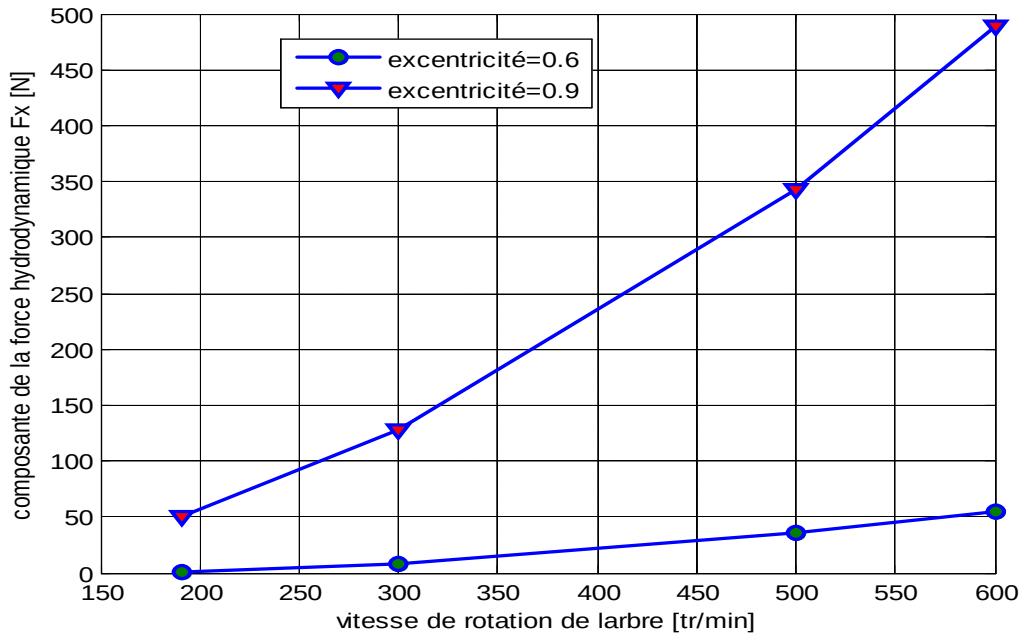


Figure (VI.9) : Evolution de la composante de la force hydrodynamique en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre pour deux valeurs de l'excentricité dans le cas d'un fluide de Maxwell ($\mu=0.3 \text{ Pa.s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-4} \text{ s}$)

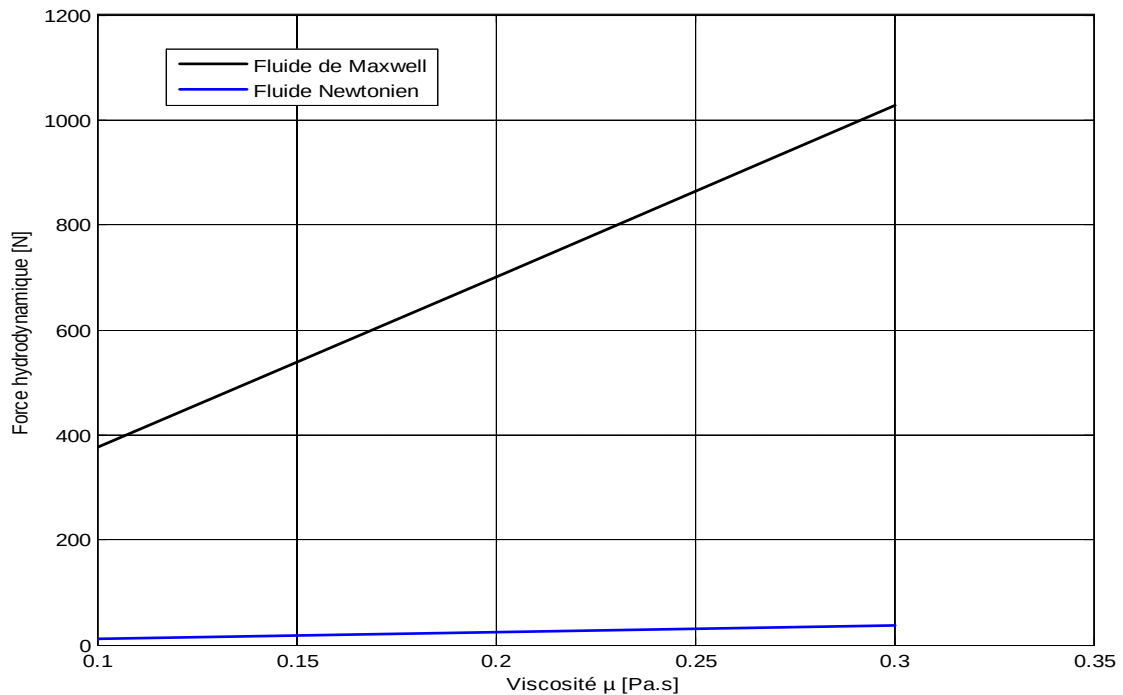


Figure (VI.10) : Evolution de la force hydrodynamique en fonction de la viscosité μ ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20 \text{ rad/s}$, $\lambda=1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$)

5. Influence de la cinématique et des propriétés rhéologiques du lubrifiant sur les champs de contraintes

Pour examiner l'effet des propriétés rhéologiques du fluide et de la cinématique sur la charge hydrodynamique, pour un système statique (excentricité fixe), on étudie cet effet ; premièrement ; sur les champs de pression, de la première différence des contraintes normales et de la contrainte de cisaillement le long de la surface de l'arbre.

Le palier étudié dans cette simulation est de caractéristiques géométriques comme suit : le rayon de l'arbre $R_a=5\text{cm}$, le rayon interne de coussinet $R_c=5.3\text{ cm}$ et le rayon externe du coussinet vaut 6cm . Les propriétés physiques de fluide de Maxwell sont : la masse volumique $\rho=850\text{ kg/m}^3$, la chaleur spécifique $C_p=1750\text{ kj/kg.K}$, la conductivité thermique $k=0.13\text{ w/m.K}$. La température de l'arbre est fixée à $T_a=52^\circ\text{C}$ ainsi que la température extérieure du coussinet $T_{be}=24^\circ\text{C}$ et le coefficient d'échange convectif $h=80\text{w/m}^2.\text{K}$ [A. R. Davies].

5.1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur les champs de contraintes

5.1. 1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ de pression

On fait varier la vitesse de rotation de l'arbre de 20 rad/s à 200 rad/s et on fixe la viscosité μ du fluide à 0.3 Pa.s ainsi que le temps de relaxation λ à $1.2 \times 10^{-4}\text{s}$ (Figures (VI- 11), (VI-12) et (VI-13)). Le champ de pression au sein du film d'huile est présenté selon la direction angulaire sur la figure (VI-11). Les figures (VI-12) et (VI-13) présentent l'évolution de la pression le long de la surface de l'arbre pour une excentricité $\varepsilon=0.6$, une viscosité de lubrifiant $\mu =0.3\text{Pa.s}$ et un temps de relaxation $\lambda=1.2 \times 10^{-4}\text{s}$ pour différentes vitesses de rotation de l'arbre ω . On remarque que la pression augmente avec la vitesse de rotation de l'arbre ω .

La figure (VI-14) représente l'effet de la vitesse de rotation de l'arbre sur la pression maximale où on remarque une évolution linéaire de cette pression en fonction de ω et que la variation de la pression maximale est très importante si ω croît, par exemple : l'augmentation de la pression d'une vitesse de 100 rad/s à une vitesse de 200 rad/s est de l'ordre de 2.1×10^4 pascal.

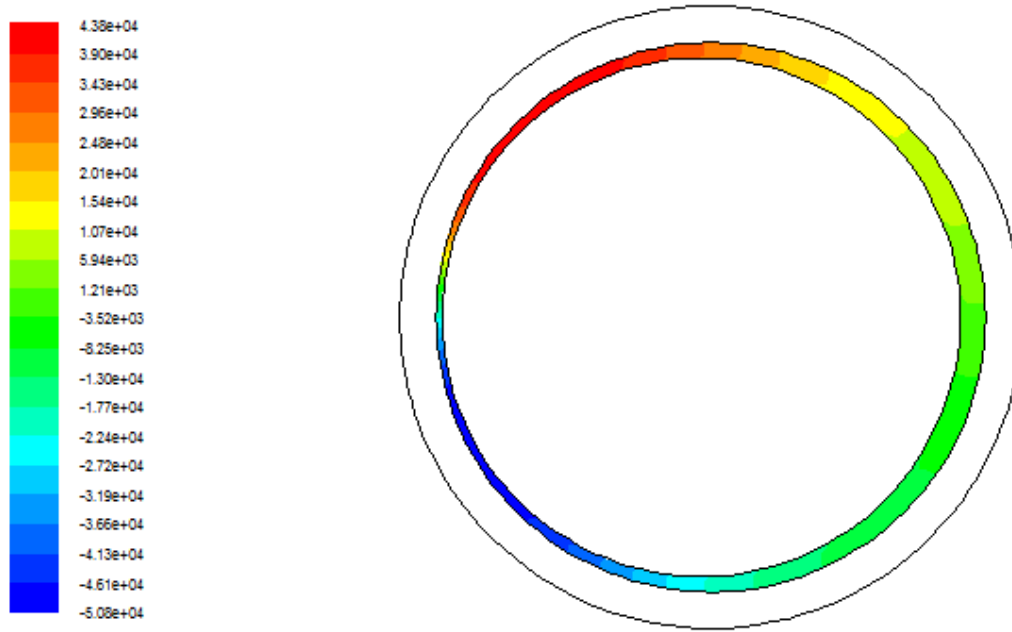


Figure (VI-11) : Contour de champs de pression dans l'entrefer

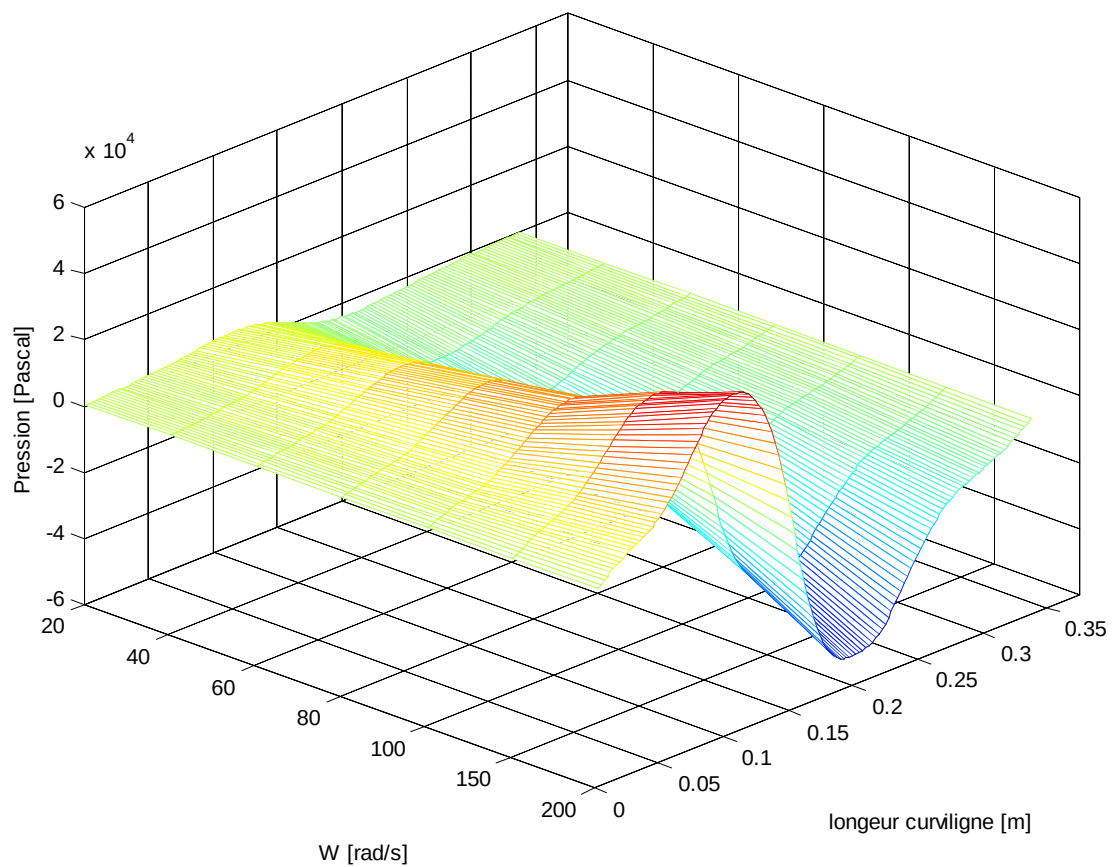


Figure (VI-12): Evolution de la pression le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4} \text{s}$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3 \text{Pa.s}$)

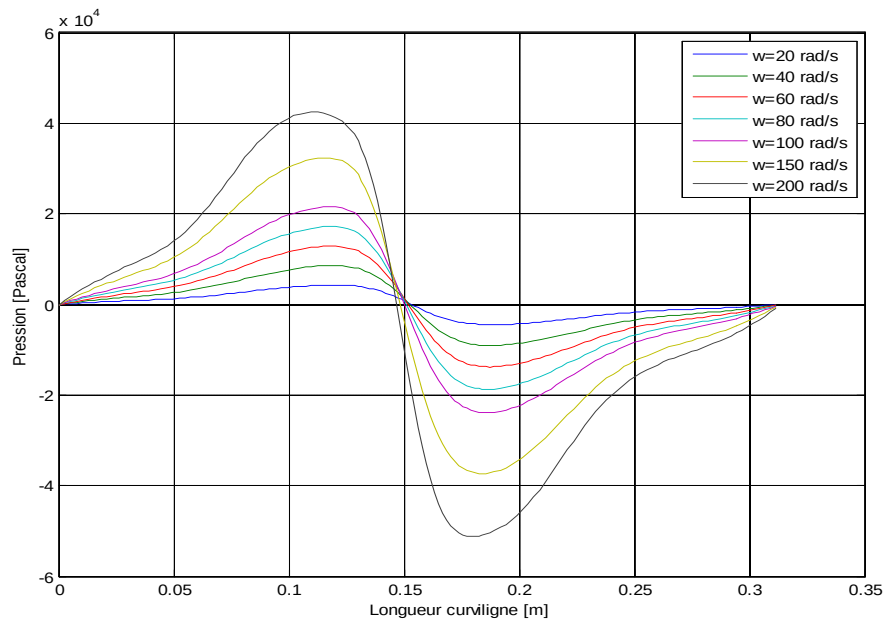


Figure (VI-13) : Evolution de la pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation $\omega(\lambda=1.2.10^{-4}s, \varepsilon=0.6, \mu=0.3Pa.s)$

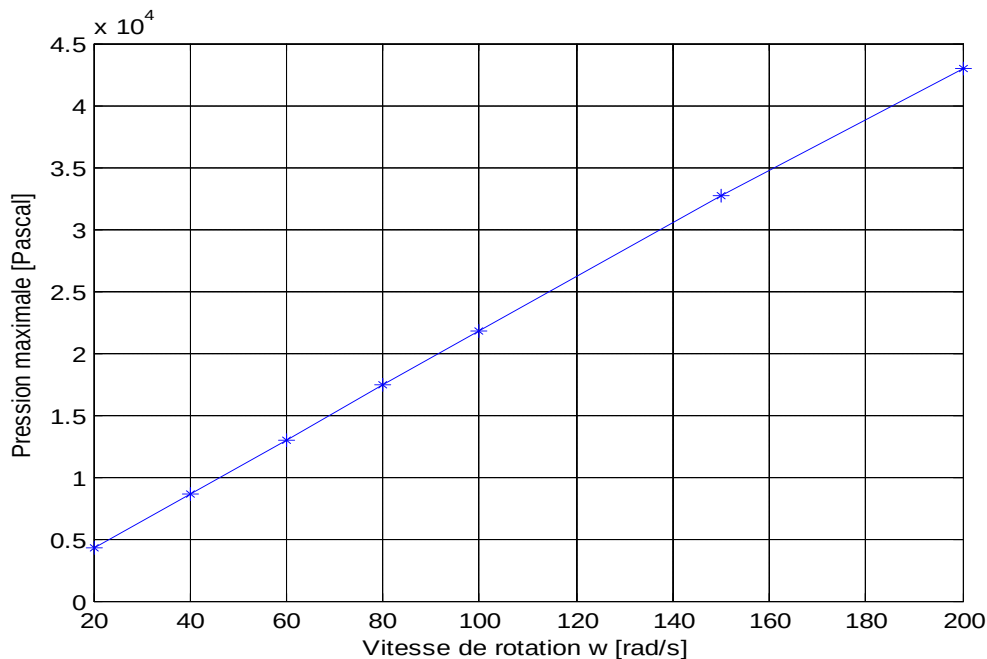


Figure (VI-14) : Evolution de la pression maximale en fonction de la vitesse de rotation $\omega(\lambda=1.2.10^{-4}s, \varepsilon=0.6, \mu=0.3Pa.s)$

5.1.2 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur la première différence des contraintes normales N_1

Les figures (VI-15), (VI-16) et (VI-17) présentent respectivement, le contour de champ de différence des contraintes normales dans l'entrefer ainsi que la variation de la différence des contraintes normales (N_1) le long de la surface de l'arbre pour différentes vitesses de rotation de ce dernier. On remarque que N_1 augmente fortement en fonction de ω . Ensuite, on remarque sur

la figure (VI-18) la variation de N_1 maximale en fonction de ω . Il apparaît clairement l'important effet de ω sur la variation de $N_{1\max}$ et on distingue aussi que cette variation est non linéaire.

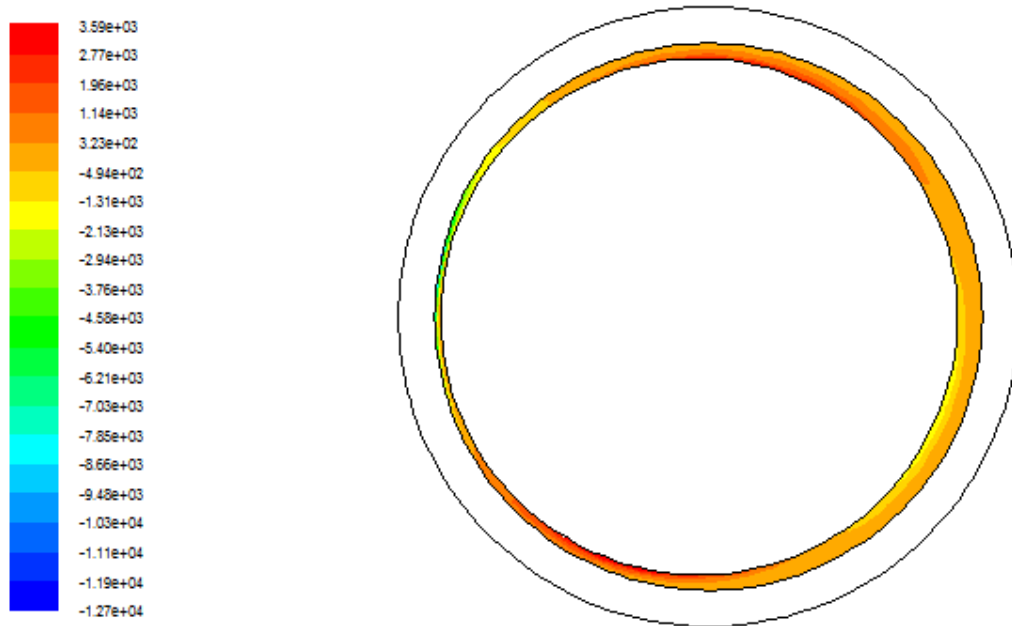


Figure (VI-15) : Contour de champs de la première différence des contraintes normales N_1 dans l'entrefer ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4} \text{s}$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3 \text{Pa.s}$)

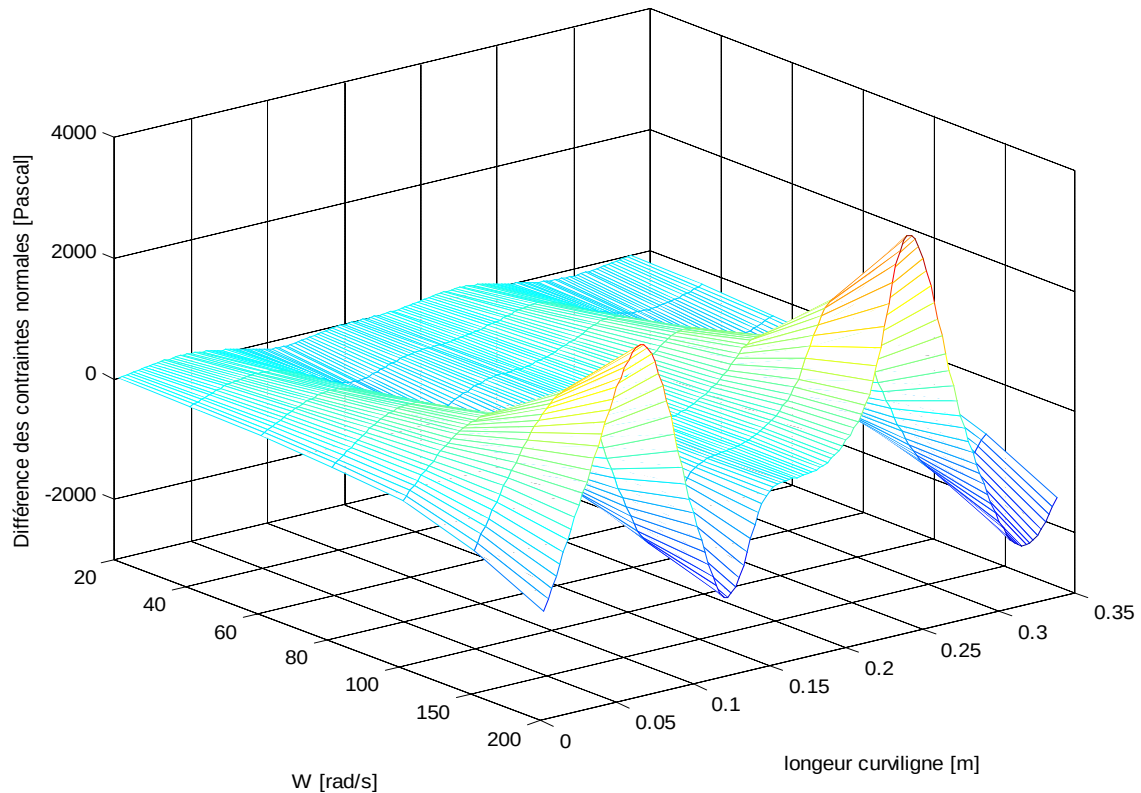


Figure (VI-16) : Evolution de la première différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4} \text{s}$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3 \text{Pa.s}$)

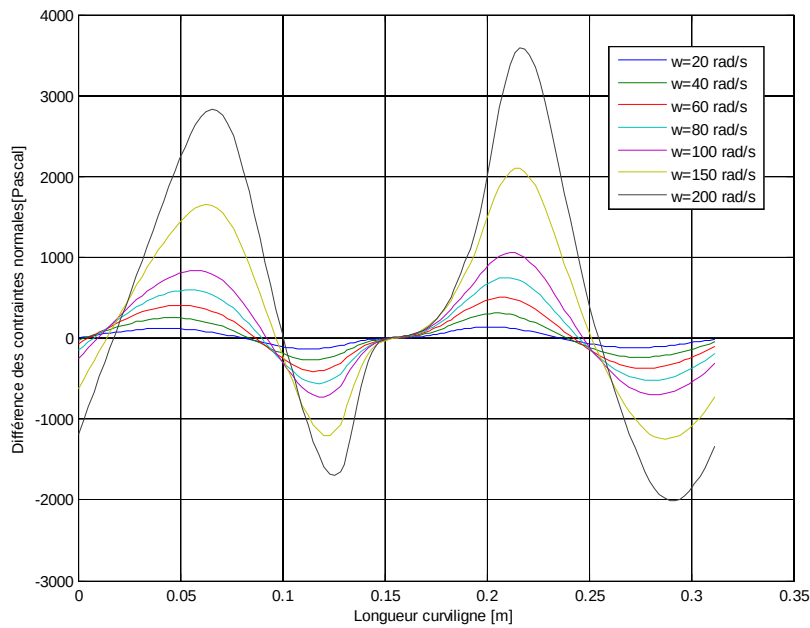


Figure (VI-17) : Evolution de la différence des contraintes normales N_1 le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

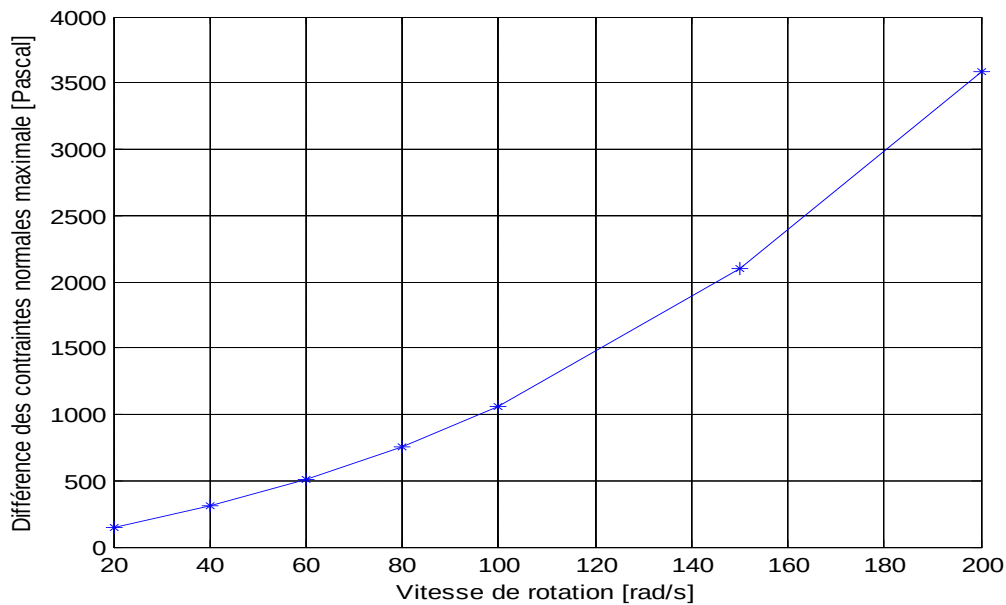


Figure (VI-18) : Evolution de la première différence des contraintes normales maximum en fonction de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

5.1.3 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ des contraintes de cisaillement τ_{xy}

L'évolution de champ de contrainte de cisaillement dans le film lubrifiant est représentée sur les figures (VI-19). Les figures (VI-20) et (VI-21) représentent la variation de la contrainte de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation. On remarque que le champ de contrainte de cisaillement est d'autant plus important que ω est grand.

La variation de la contrainte de cisaillement maximale en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre est illustrée sur la figure (VI-22), on remarque clairement que cette variation est linéaire.

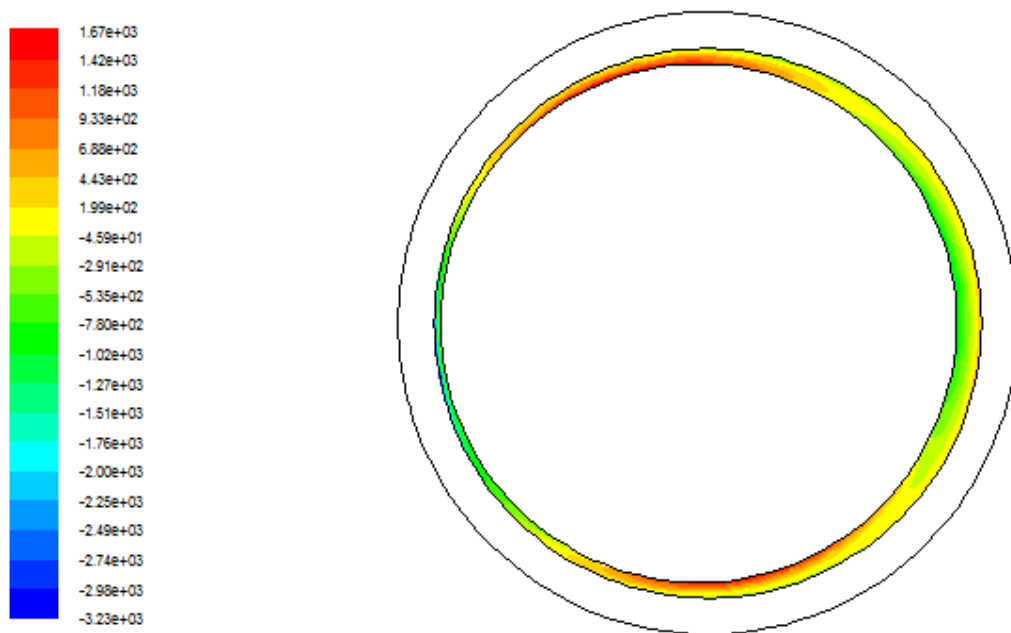


Figure (VI-19) : Contour de champs de contraintes de cisaillement τ_{xy} dans l'entrefer ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

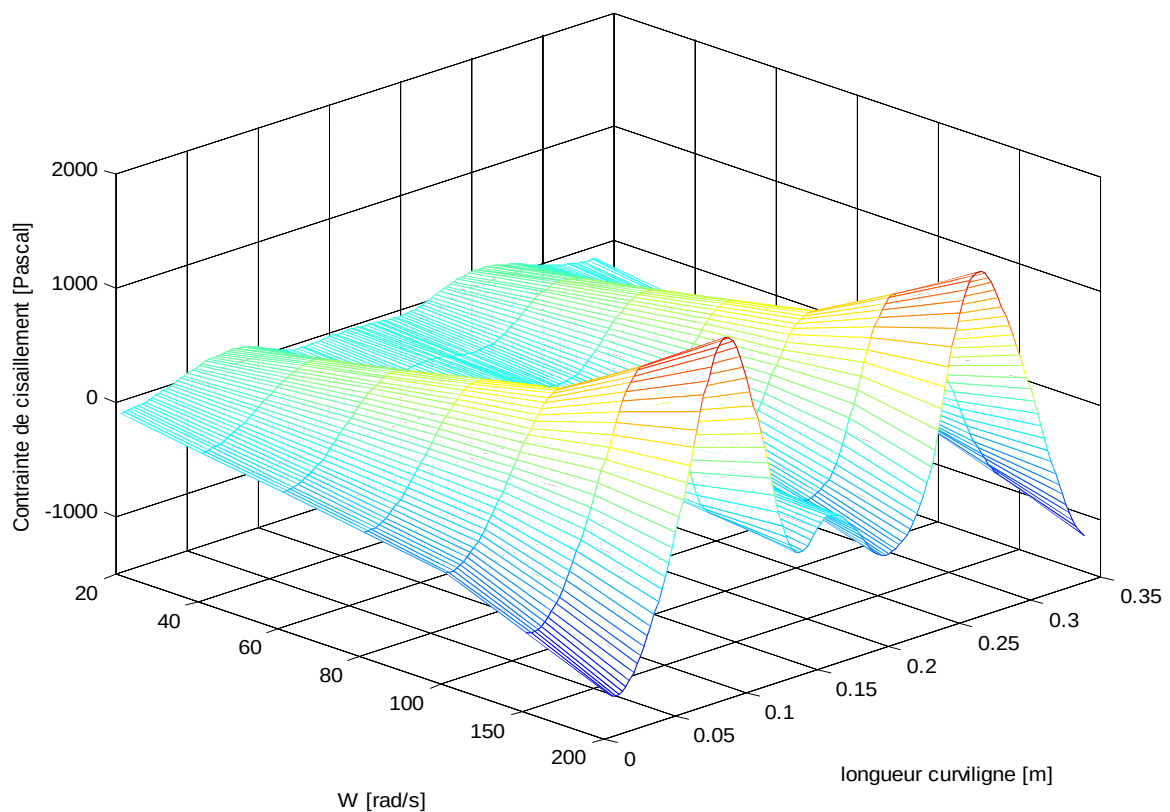


Figure (VI-20) : Evolution des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre en fonctions de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

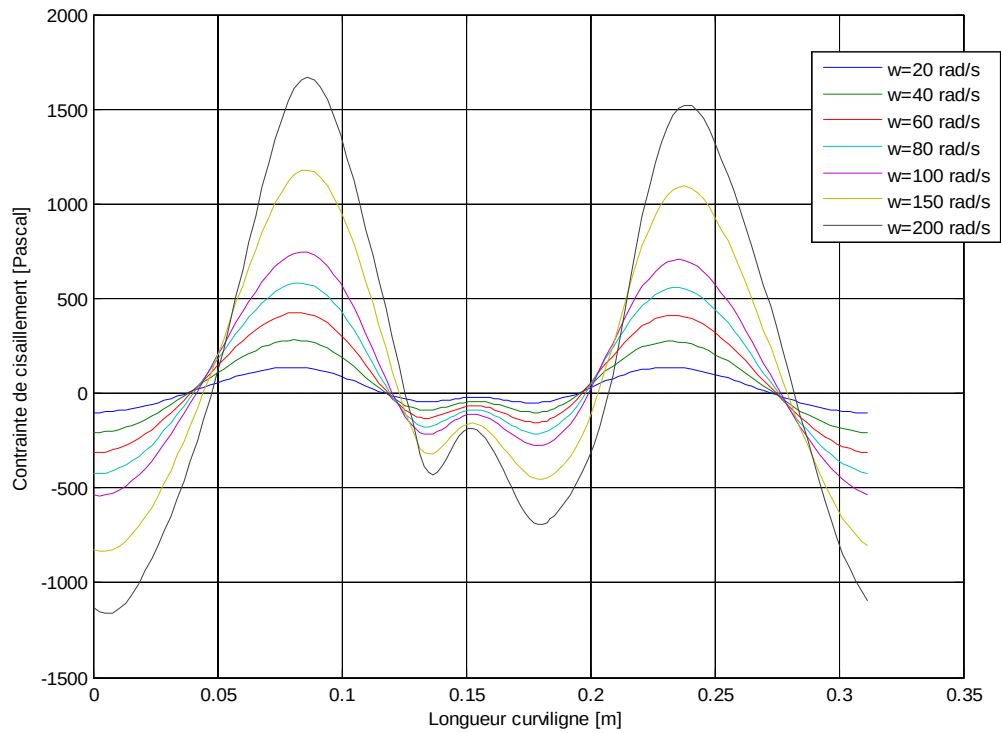


Figure (VI-21) : Evolution du champ de contrainte de cisaillement τ_{xy} le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

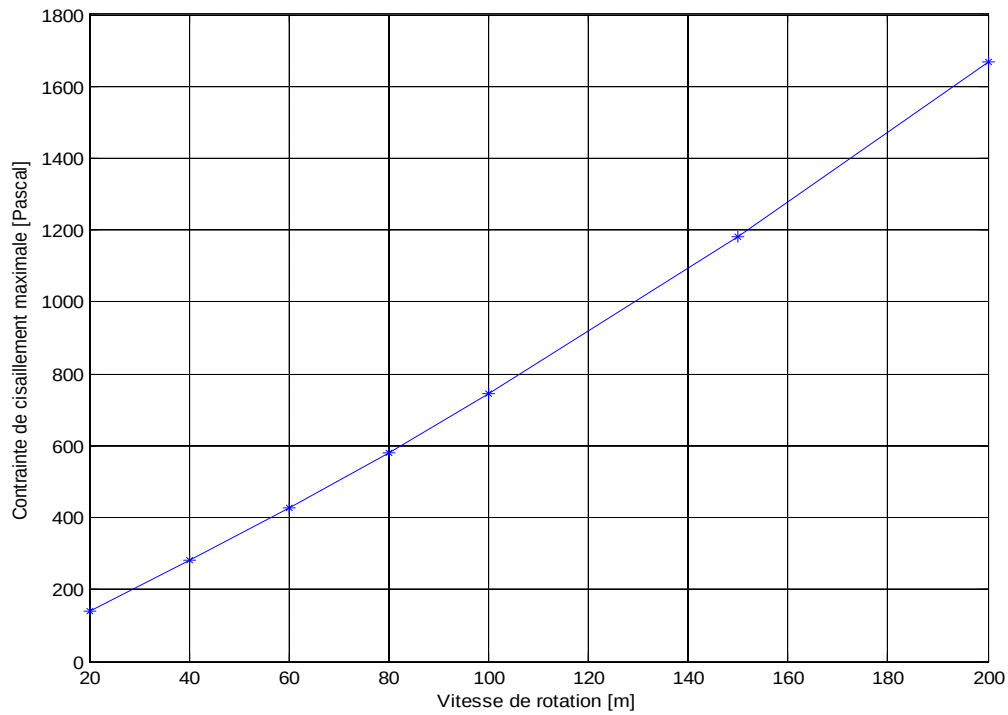


Figure (VI-22) : Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy} maximale en fonction de la vitesse de rotation ω ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

5.2 Effet de la viscosité μ du fluide viscoélastique sur les champs de contraintes

5.2.1 Effet de la viscosité μ du fluide viscoélastique sur le champ de pression

La figure (VI-23) présente l'évolution de la pression le long de la surface de l'arbre pour différentes viscosités μ . On remarque clairement l'effet de la viscosité μ sur la pression.

La figure (VI-24) présente l'effet des deux paramètres : la vitesse de rotation de l'arbre ω et la viscosité du fluide de Maxwell μ . On remarque que la pression augmente en fonction de ces deux paramètres. Pour une vitesse de rotation de l'arbre importante (150 rad/s), la variation de la pression en fonction de la viscosité est plus importante que pour de faibles vitesses de rotation de l'arbre (20rad/s et 40 rad/s).

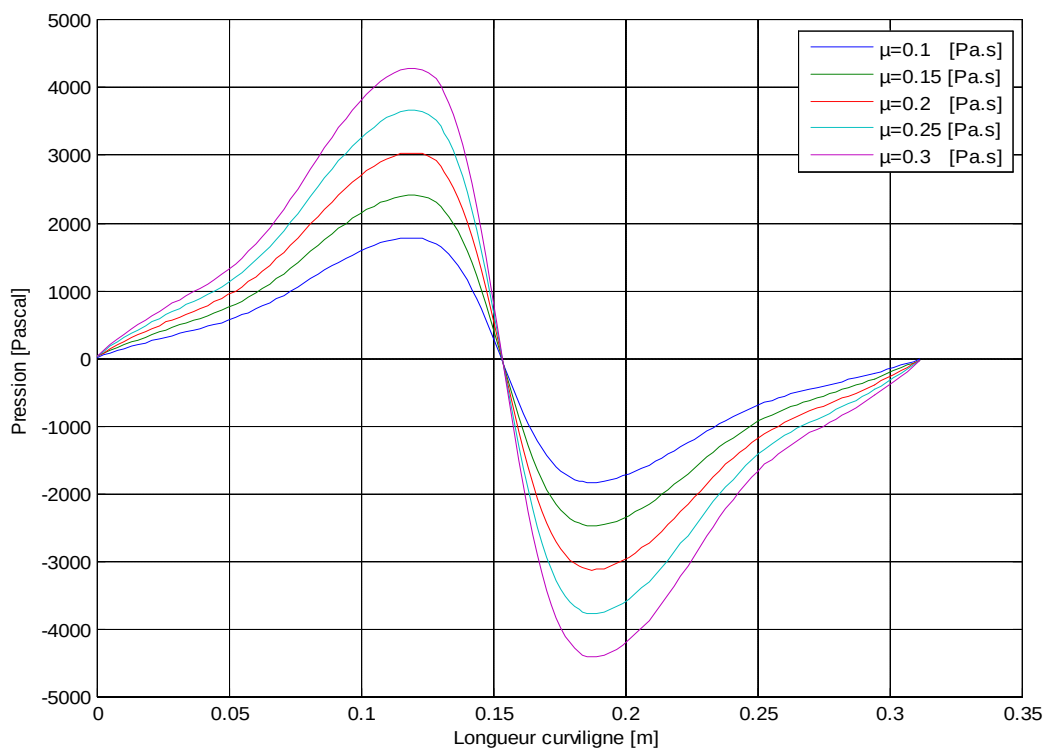


Figure (VI-23) : Evolution de champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

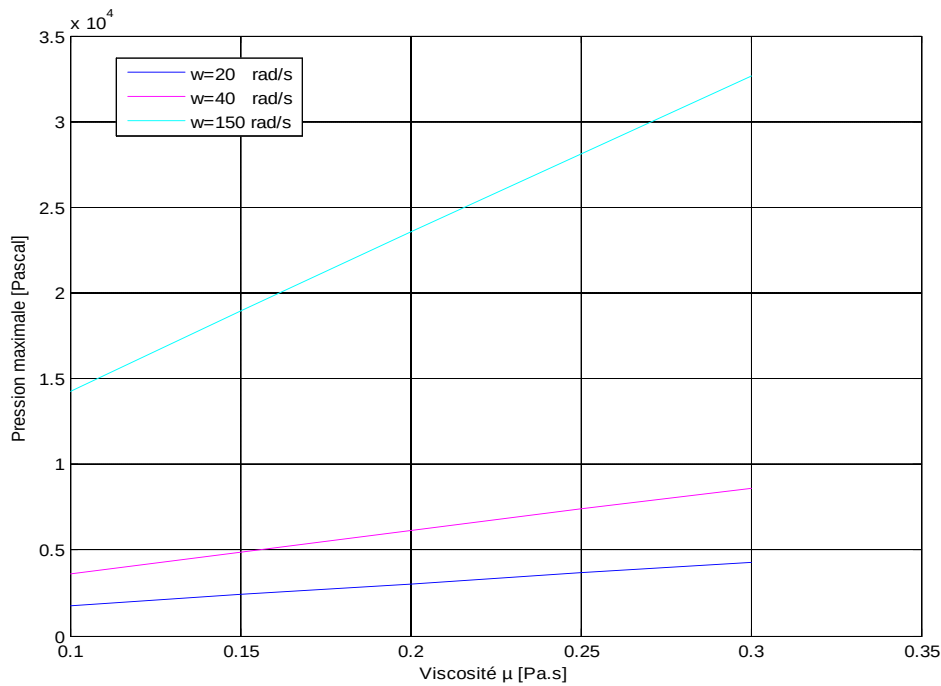


Figure (VI-24) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre ($\lambda=1.2.10^{-4}$ s, $\varepsilon=0.6$)

5.2.2 Effet de la viscosité μ du fluide viscoélastique sur la première différence des contraintes normales N_1

Sur la figure (VI-25) est présentée l'évolution de la première différence des contraintes normales N_1 le long de la surface de l'arbre pour différentes viscosités μ de fluide de Maxwell. On remarque une augmentation importante de N_1 en fonction de μ .

La figure (VI-26) présente l'effet de la vitesse de rotation ω et la viscosité du fluide μ sur les valeurs maximales de N_1 où on remarquera que la variation de cette dernière est très sensible par rapport à une vitesse de rotation de l'arbre importante (150 rad/s).

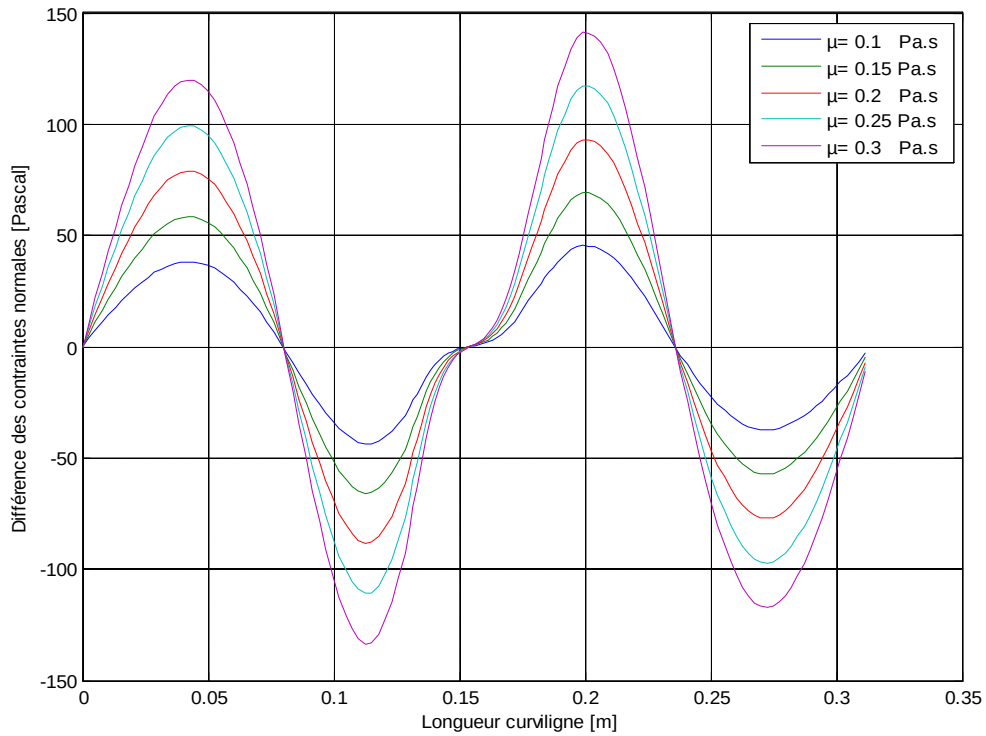


Figure (VI-25) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

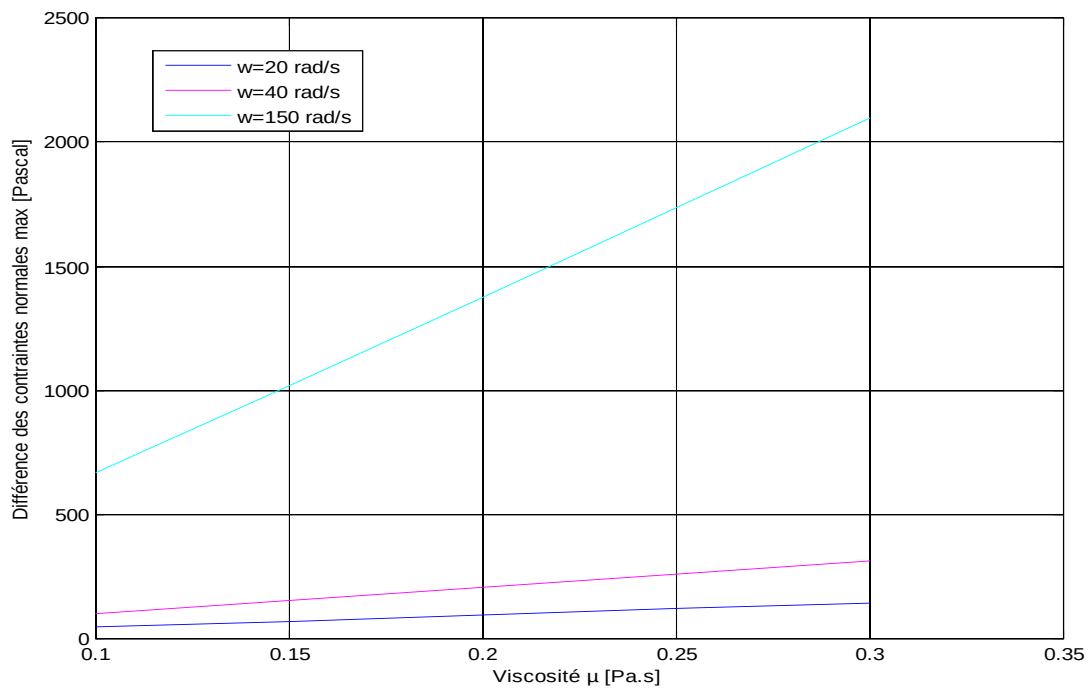


Figure (VI-26) : Evolution de la différence des contraintes normales maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre ($\lambda=1.2.10^{-4}s$, $\varepsilon=0.6$)

5.2.3 Effet de viscosité μ du fluide viscoélastique sur le champ de contraintes de cisaillement τ_{xy}

Les figures (VI-27) et (VI-28) montrent l'effet de la viscosité sur la contrainte de cisaillement. On remarque que la contrainte de cisaillement est influencée fortement par l'augmentation de la viscosité du lubrifiant.

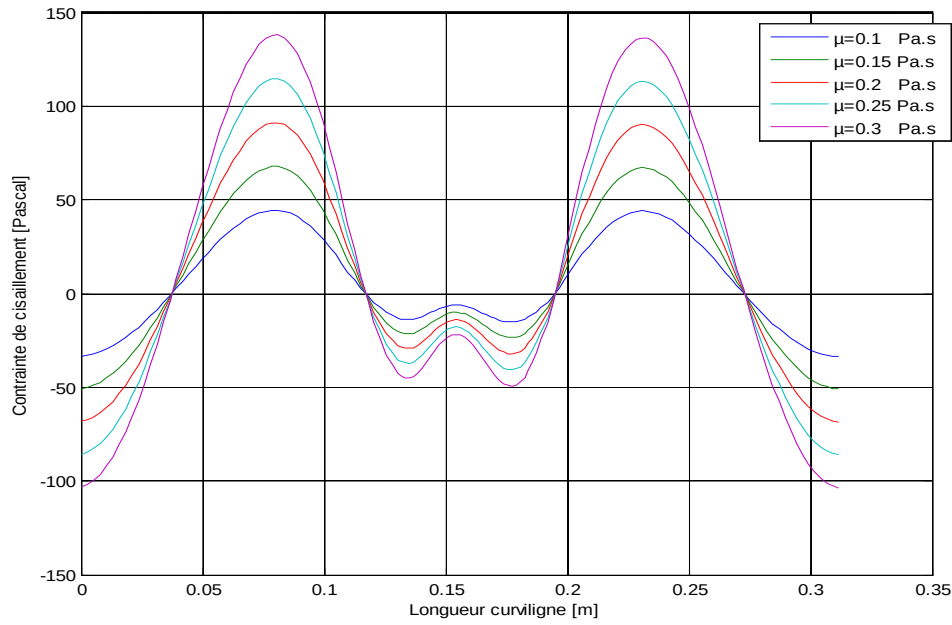


Figure (VI-27) : Evolution de champ de contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de la viscosité μ du fluide viscoélastique ($\lambda = 1.2 \cdot 10^{-4} s$, $\varepsilon = 0.6$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$)

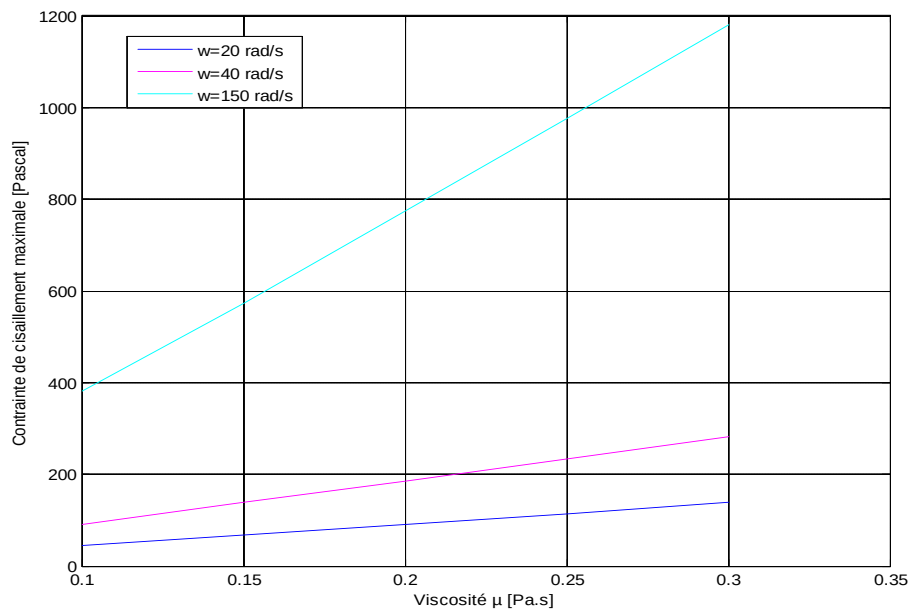


Figure (VI-28) : Evolution de la contrainte de cisaillement maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de la viscosité μ du fluide viscoélastique pour différentes valeurs de la vitesse de rotation ω de l'arbre ($\lambda = 1.2 \cdot 10^{-4} s$, $\varepsilon = 0.6$)

5.3 Effet du temps de relaxation sur les champs de contraintes

5.3.1 Effet du temps de relaxation sur le champ de pression

La figure (VI-29) présente l'effet du temps de relaxation sur le champ de pression. On remarque que la pression est influencée faiblement par le temps de relaxation. Concernant la figure (VI-30) on constate que l'effet de la viscosité du lubrifiant sur la pression maximale est très important comparable à l'effet du temps de relaxation. Donc on conclut que les effets élastiques sur la pression sont moins importants que les effets visqueux.

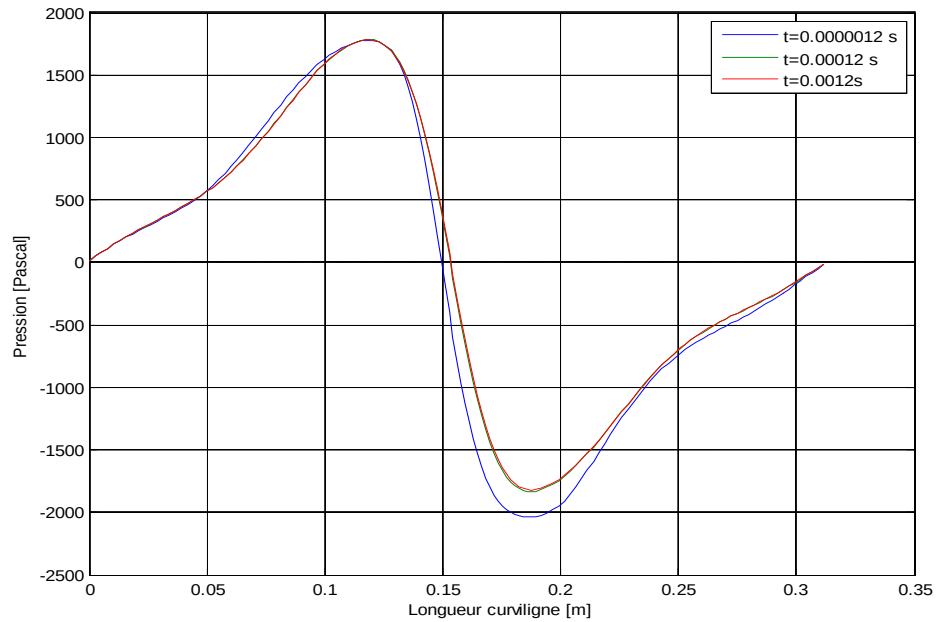


Figure (VI.29) : Evolution de champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

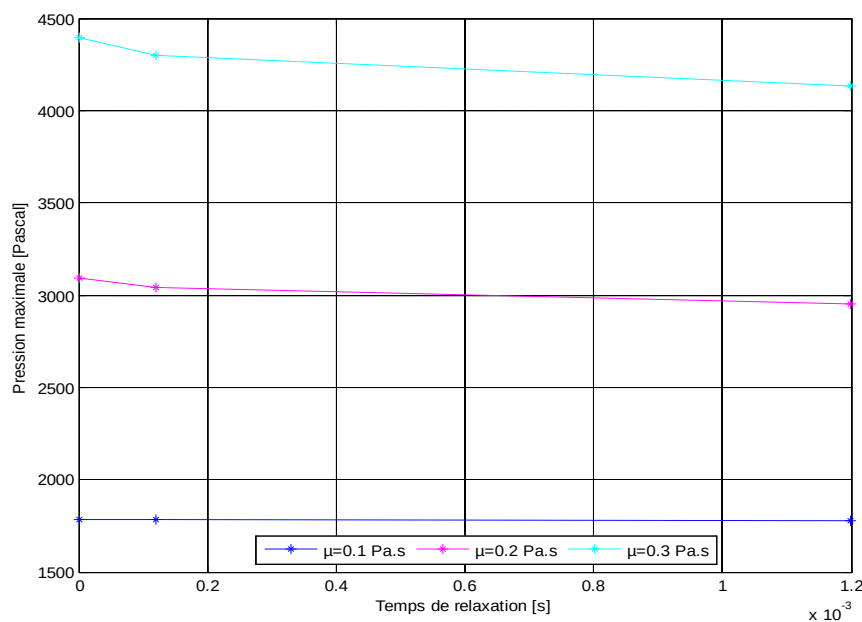


Figure (VI.30) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

5.3.2 Effet du temps de relaxation sur la différence des contraintes normales N_1

La figure (VI.31) présente les profils de la première différence des contraintes normales N_1 , le long de la surface de l'arbre pour différents temps de relaxation. On remarque que pour une faible valeur de temps de relaxation (1.2×10^{-6} s) N_1 est importante. Pour un temps de relaxation important (1.2×10^{-3} s), la valeur maximale de N_1 est de l'ordre de 125 Pas, cette valeur est doublée presque 2.25 fois de plus, par rapport au temps de relaxation précédent (1.2×10^{-6} s).

La première différence des contraintes normales montre un effet viscoélastique très important pour des valeurs importantes du temps de relaxation.

La figure (VI.32) montre que $N_{1\max}$ augmente en fonction de λ et de μ et que l'augmentation de N_1 par rapport à μ est très importante.

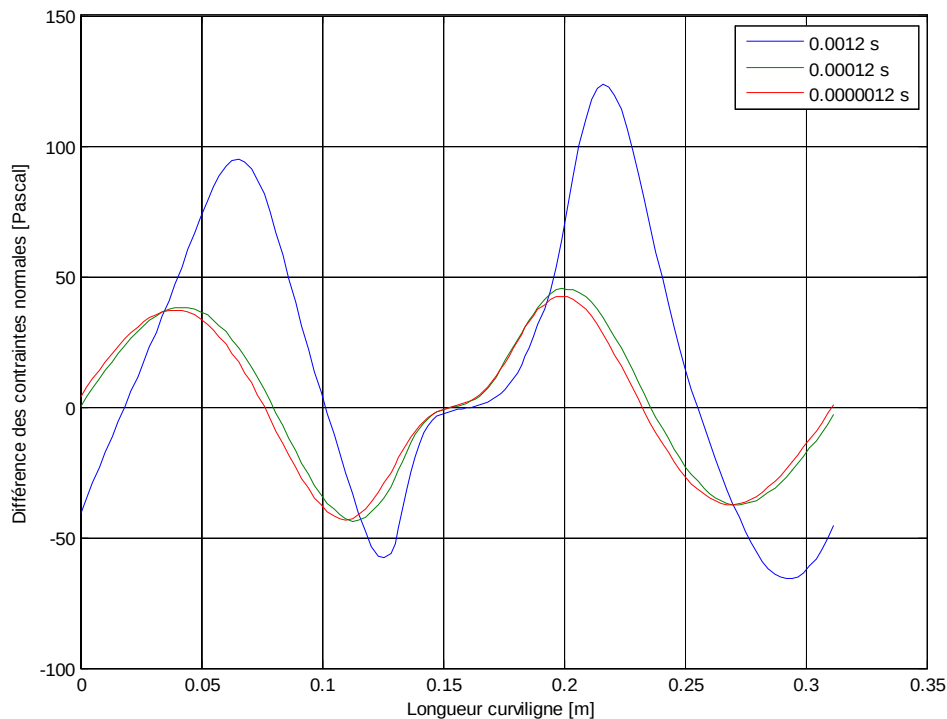


Figure (VI.31) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

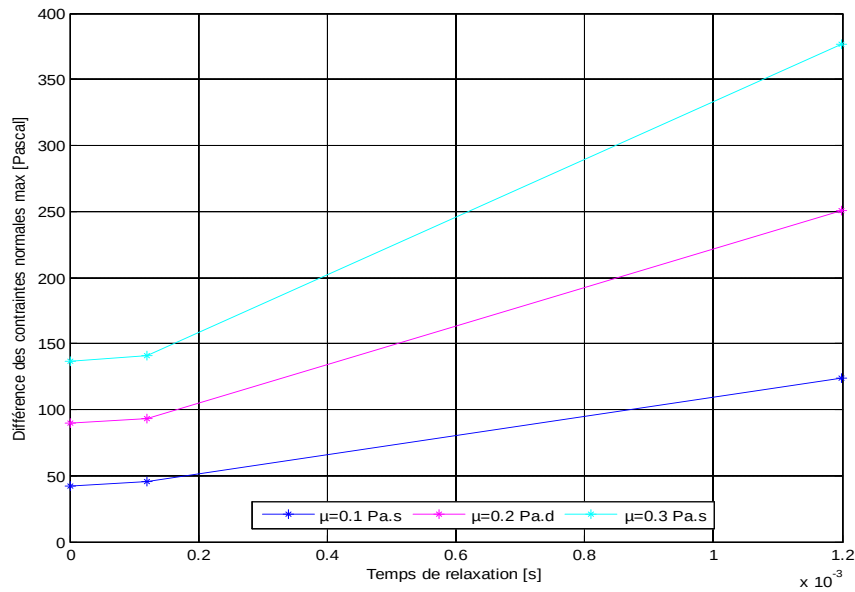


Figure (VI.32) : Evolution de la différence des contraintes normales maximales le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

5.3.3 Effet du temps de relaxation sur le champ de contraintes de cisaillement τ_{xy}

La figure (VI-33) et (VI-34), montre les effets de temps du relaxation sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} . Parallèlement à la pression, le temps de relaxation influe sur τ_{xy} à une viscosité du lubrifiant importante $\mu=0.3$ Pa.s

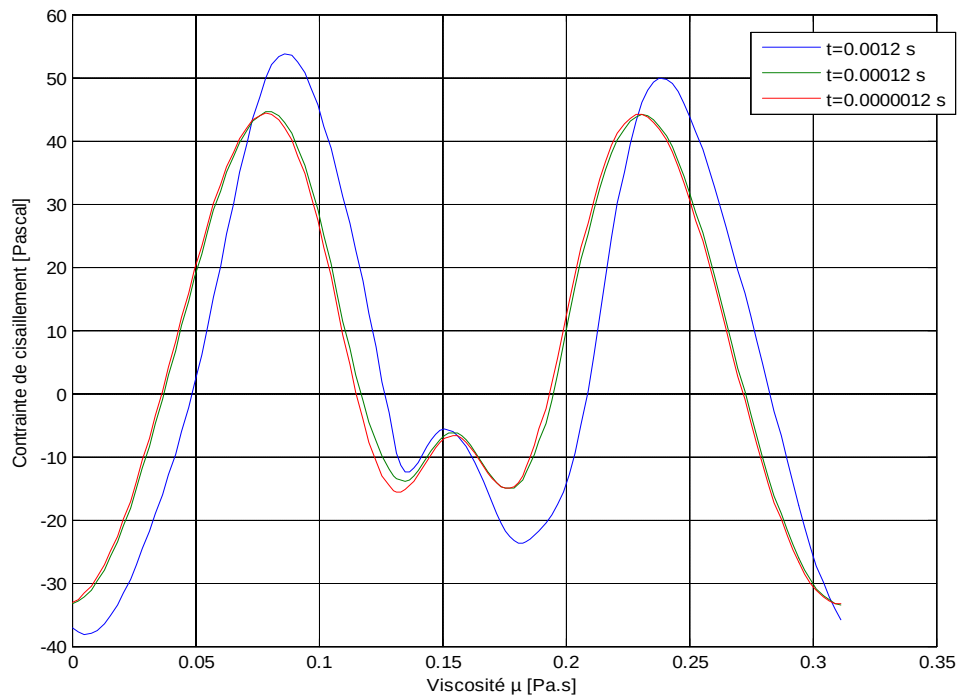


Figure (VI.33) : Evolution de champ des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs du temps de relaxation λ ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

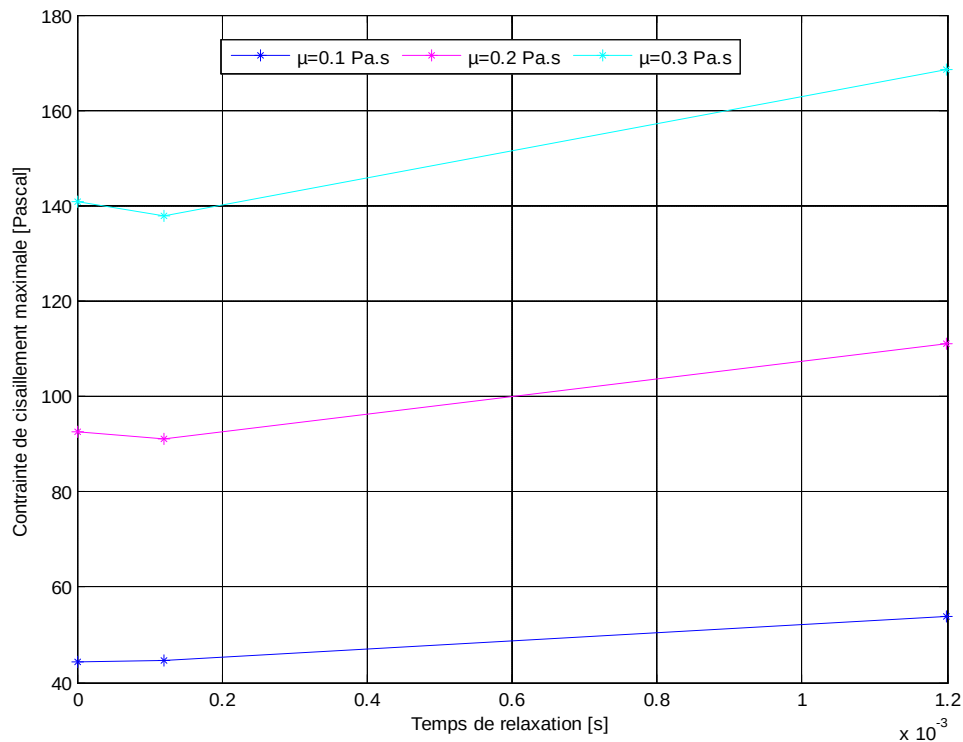


Figure (VI.34) : Evolution de champ des contraintes de cisaillement maximales le long de la surface de l'arbre en fonction du temps de relaxation λ pour différentes viscosités ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

5.4 Effet de l'excentricité sur les champs de contraintes

5.4.1 Effet de l'excentricité sur le champ de pression

La figure (VI.35) présente l'évolution de la pression le long de la surface de l'arbre pour différentes excentricités. On notera l'important effet de l'excentricité sur la pression quand ε ce tend vers 1.

La figure (VI.36) présente l'évolution de la pression maximale sur l'arbre en fonction de l'excentricité ε . On notera clairement que pour une excentricité très élevée, la pression est très importante.

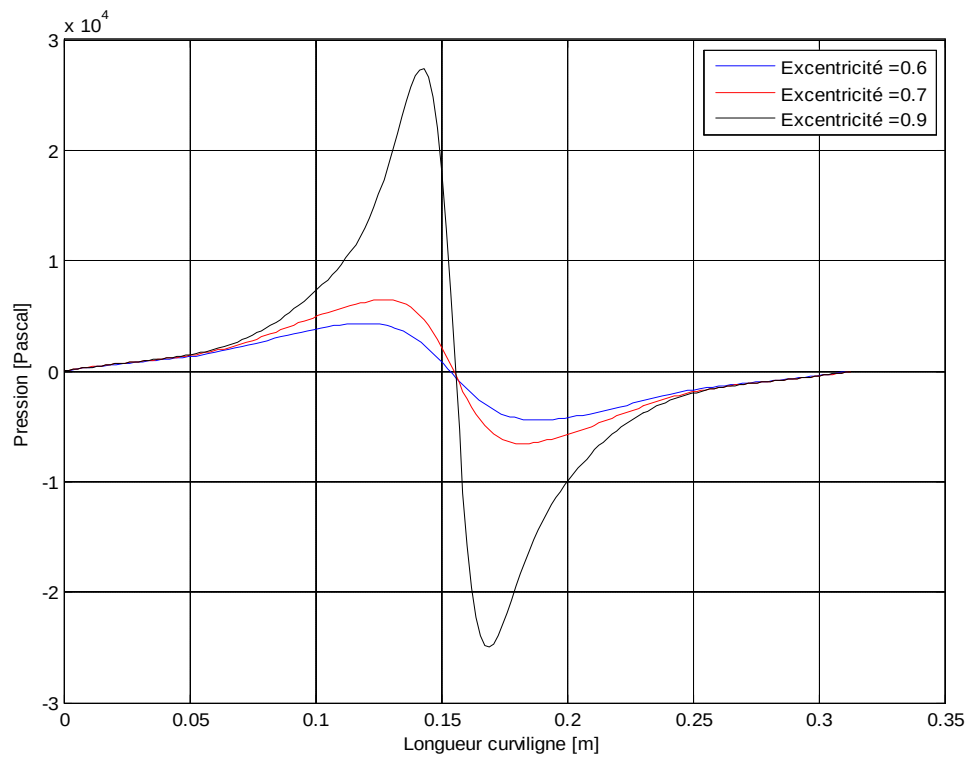


Figure (VI.35) : Evolution du champ de pression le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

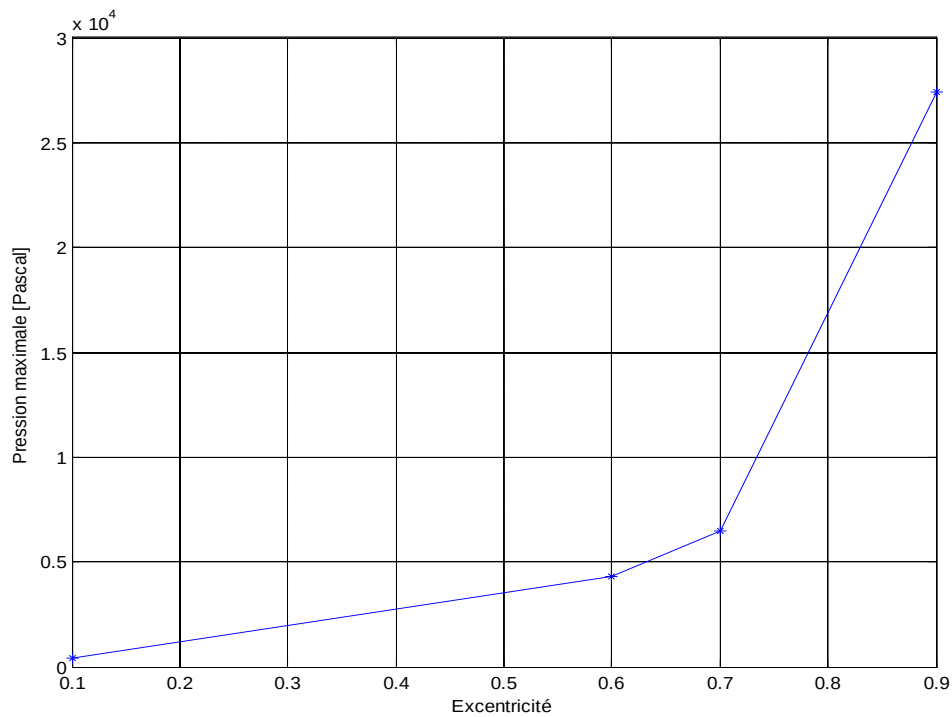


Figure (VI.36) : Evolution de la pression maximale le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

5.4.2 Effet de l'excentricité sur la différence des contraintes normales N_1

La figure (VI.37) présente la variation de la différence des contraintes normales en fonction de l'excentricité le long de la surface de l'arbre. On notera que l'excentricité ε influe fortement sur N_1 et N_{1max} (VI.38) où on remarque que pour $\varepsilon=0.7$ on a $N_1=200\text{Pa}$ par contre pour $\varepsilon=0.9$ $N_1=800\text{Pa}$. Ces effets importants influent directement sur l'élévation de la charge hydrodynamique.

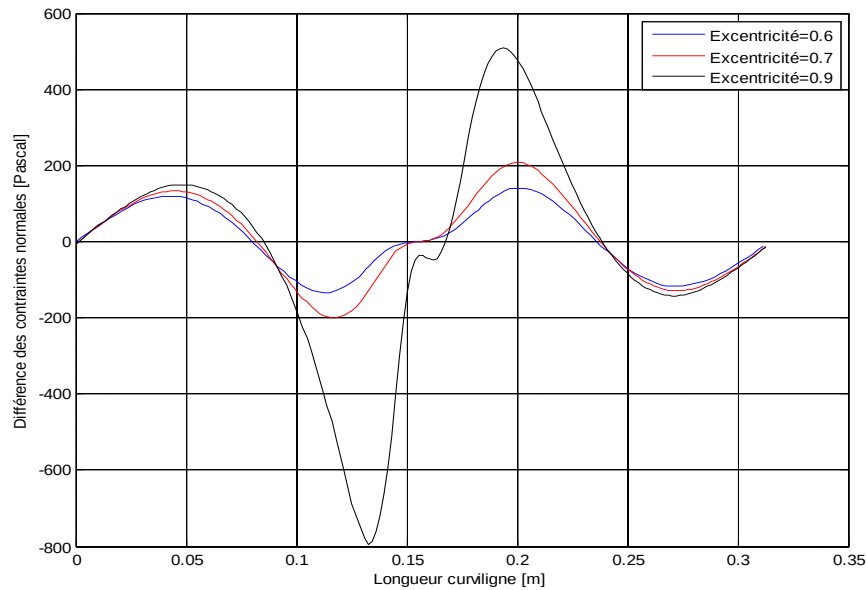


Figure (VI.37) : Evolution de la différence des contraintes normales le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

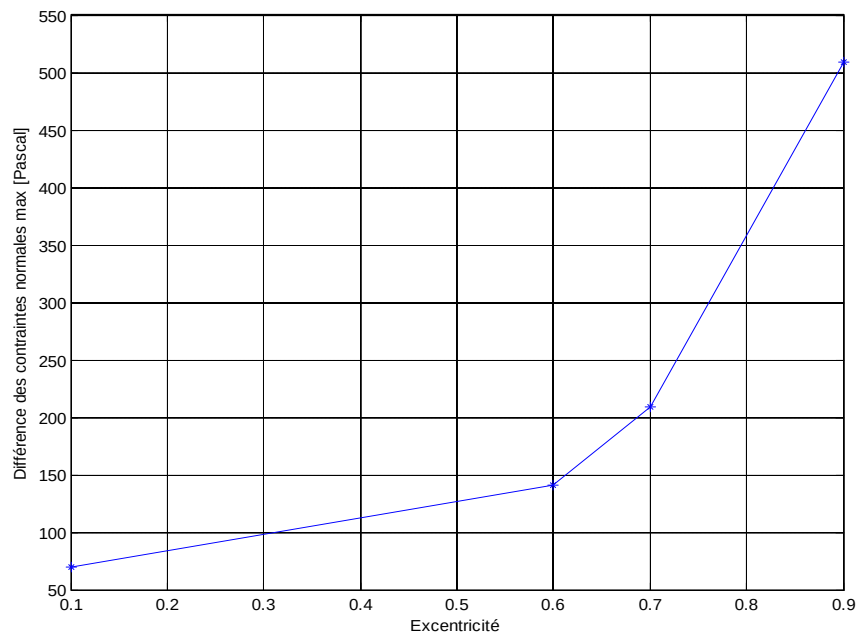


Figure (VI.38) : Evolution de la différence des contraintes normales maximales le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

5.4.3 Effet de l'excentricité sur le champ de contraintes de cisaillement τ_{xy}

Les figures (VI-39) et (VI-40), montrent que pour une excentricité élevée ($\varepsilon=0.9$), la contrainte de cisaillement est très élevée, ce qui provoque une élévation très importante de la température du film fluide (Figure (VI-49)). On constate aussi à travers les résultats obtenus que la contrainte de cisaillement maximale varie en fonction de l'excentricité de façon non-linéaire.

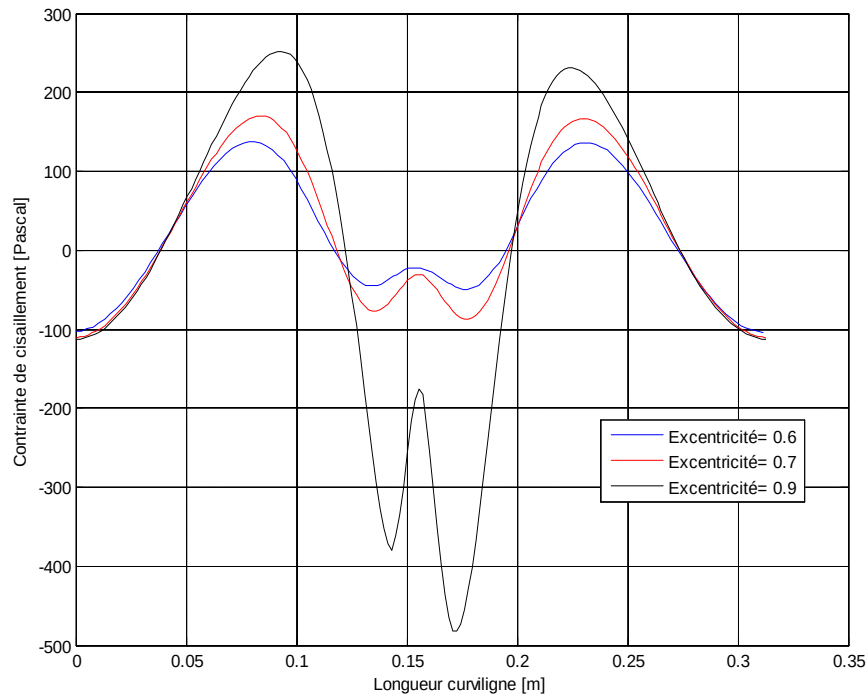


Figure (VI.39) : Evolution des contraintes de cisaillement le long de la surface de l'arbre pour différentes valeurs de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

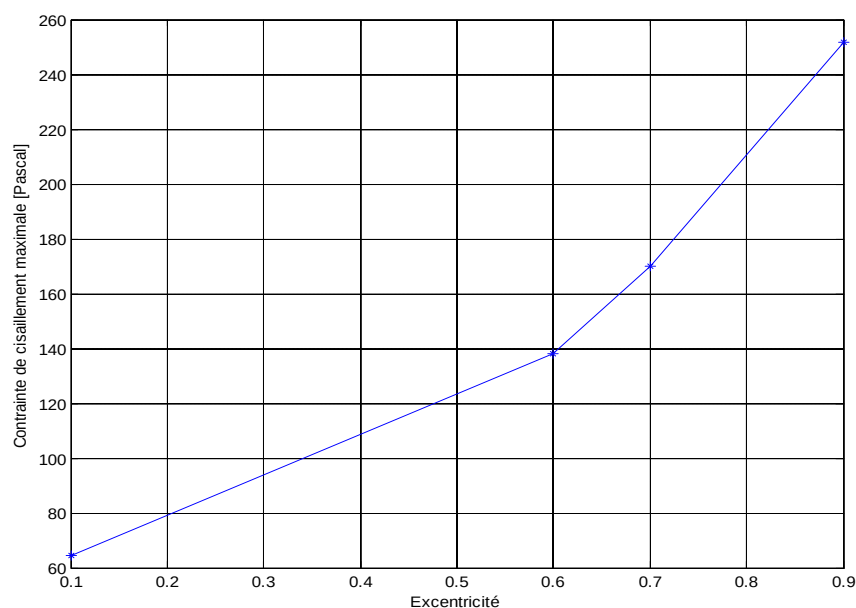


Figure (VI.40) : Evolution des contraintes de cisaillement maximales le long de la surface de l'arbre en fonction de l'excentricité ε ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$, $\omega=20\text{rad/s}$)

6 Influence de la cinématique et des propriétés rhéologiques du lubrifiant sur le champ de température

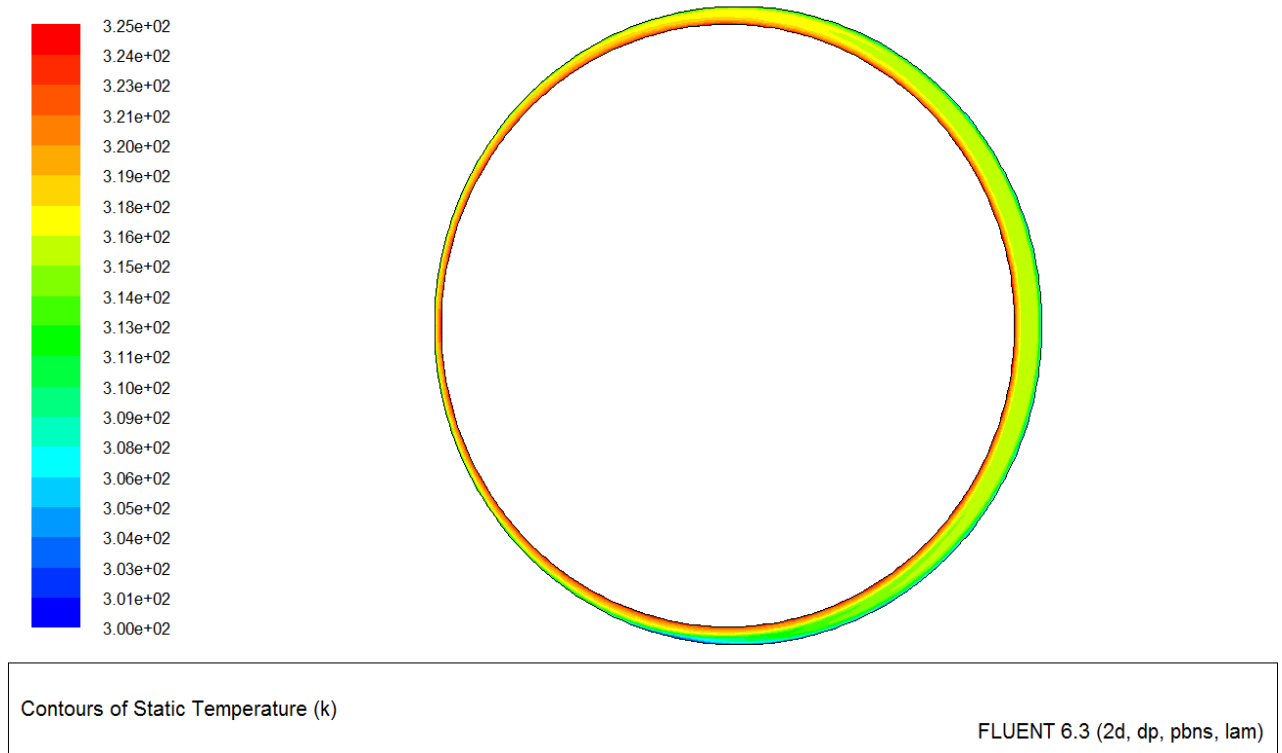
La théorie isotherme de la lubrification est largement utilisée pour le calcul des performances des paliers hydrodynamiques. Cependant, des exigences technologiques de plus en plus sévères, telles que l'accroissement des charges et des vitesses de rotation, conduisent à une augmentation de l'énergie dissipée dans le fluide qui peuvent être très élevées. Ainsi, la viscosité du lubrifiant et la portance hydrodynamique du palier diminuent d'une part et d'une autre par les caractéristiques mécaniques des matériaux réduisent. Il convient donc de prendre en compte les phénomènes thermiques et de prévoir leur influence sur le comportement des paliers. Dans ces conditions, la théorie isotherme est inapte à décrire le fonctionnement du palier.

Dans le but d'étudier l'effet de quelques paramètres sur le transfert de chaleur dans le lubrifiant viscoélastique de type UCM et la surface interne du coussinet, on propose une température de l'arbre constante est égale à 325K et une viscosité du lubrifiant variant selon la loi $\mu = \mu_0 e^{E(T-T_0)}$, avec $\mu_0 = 0.3$ Pa.s, $E = 0.037$ et $T_0 = 309.8$ K.

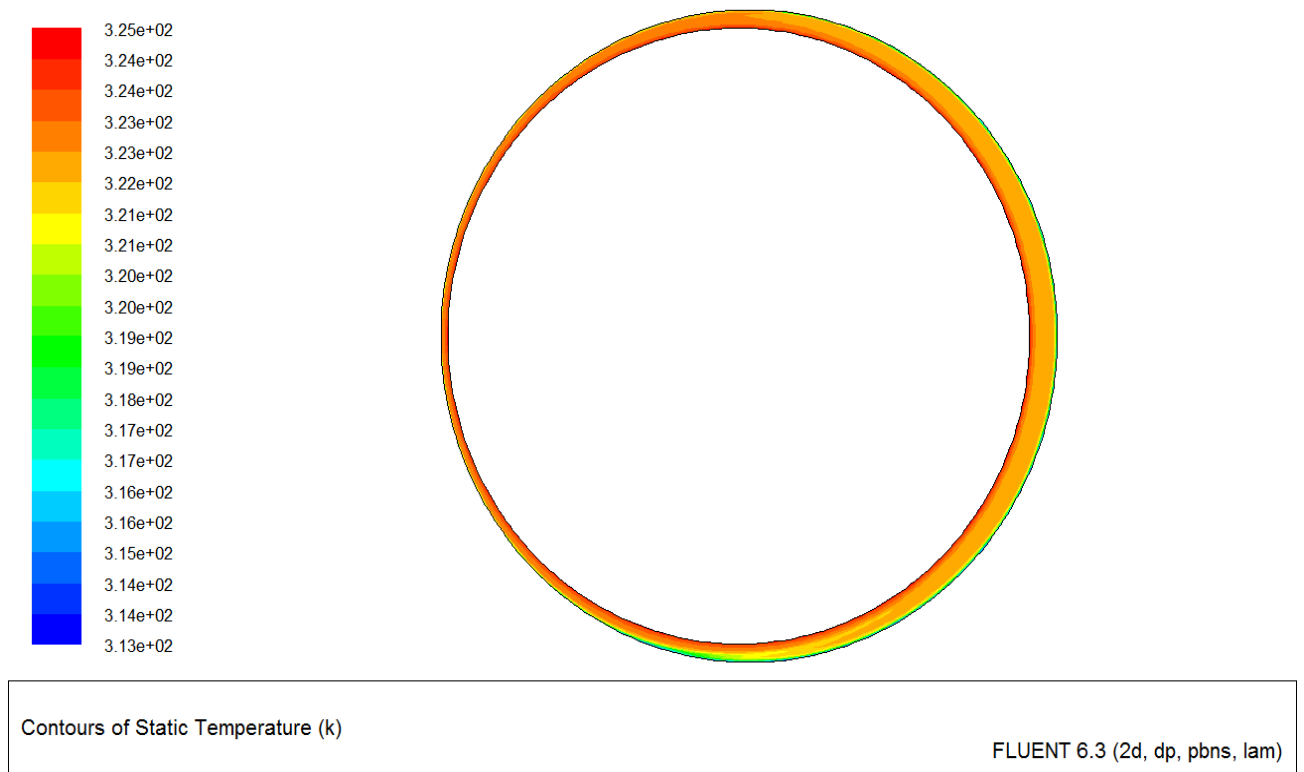
6.1 Effet de la vitesse de rotation ω de l'arbre sur le champ de température T

Le champ de température dans le film fluide est illustré sur les figures (VI-41), (VI-42) et (VI-43). On notera que l'augmentation de la vitesse de rotation de l'arbre provoque une augmentation importante de la température du lubrifiant viscoélastique.

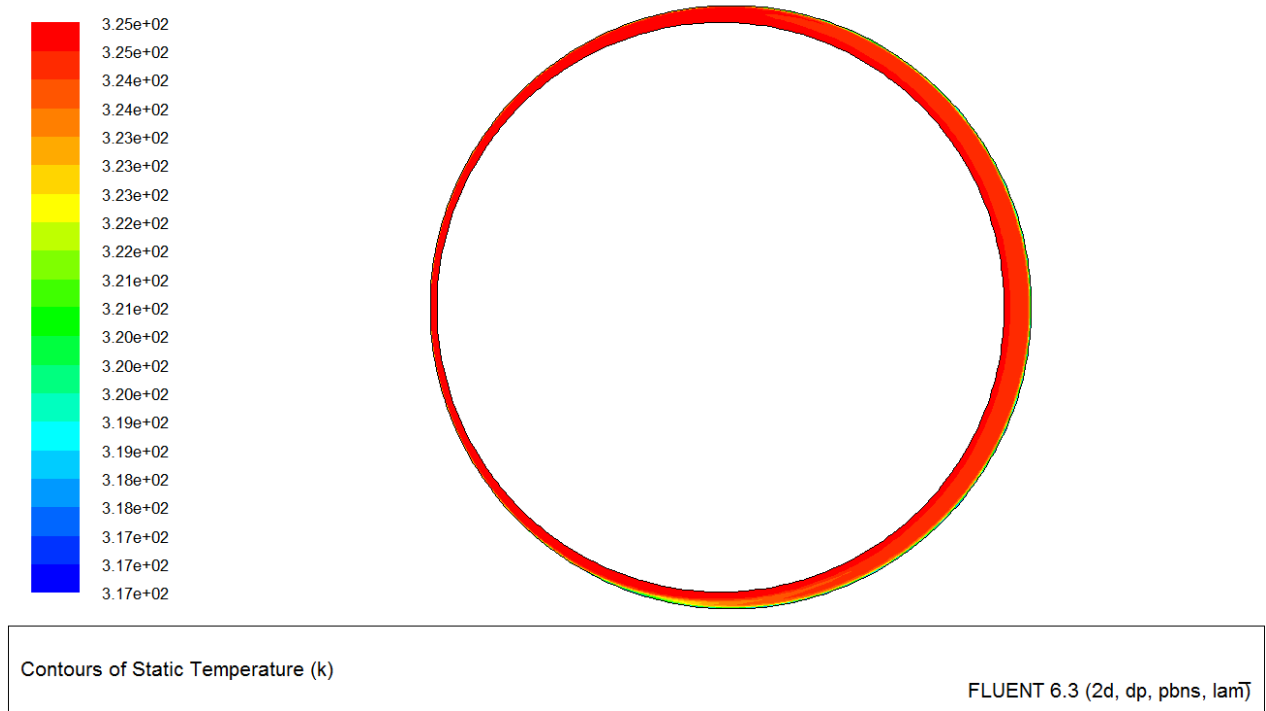
Sur la figure (VI-44), on remarque que la température moyenne du lubrifiant ainsi que la température moyenne de la surface interne du coussinet augmentent avec l'augmentation de la vitesse de rotation de l'arbre et atteignent des écarts suffisamment grands lorsque la vitesse varie entre 191 tr/min à 1500 tr/min. Cette augmentation de la température est due à l'augmentation de la chaleur fournie par dissipation visqueuse qui est générée par le taux de cisaillement du lubrifiant. Donc on peut dire qu'en présence d'un milieu confiné, la vitesse de rotation a une grande influence sur la température de différentes parties du palier, notamment le film fluide.



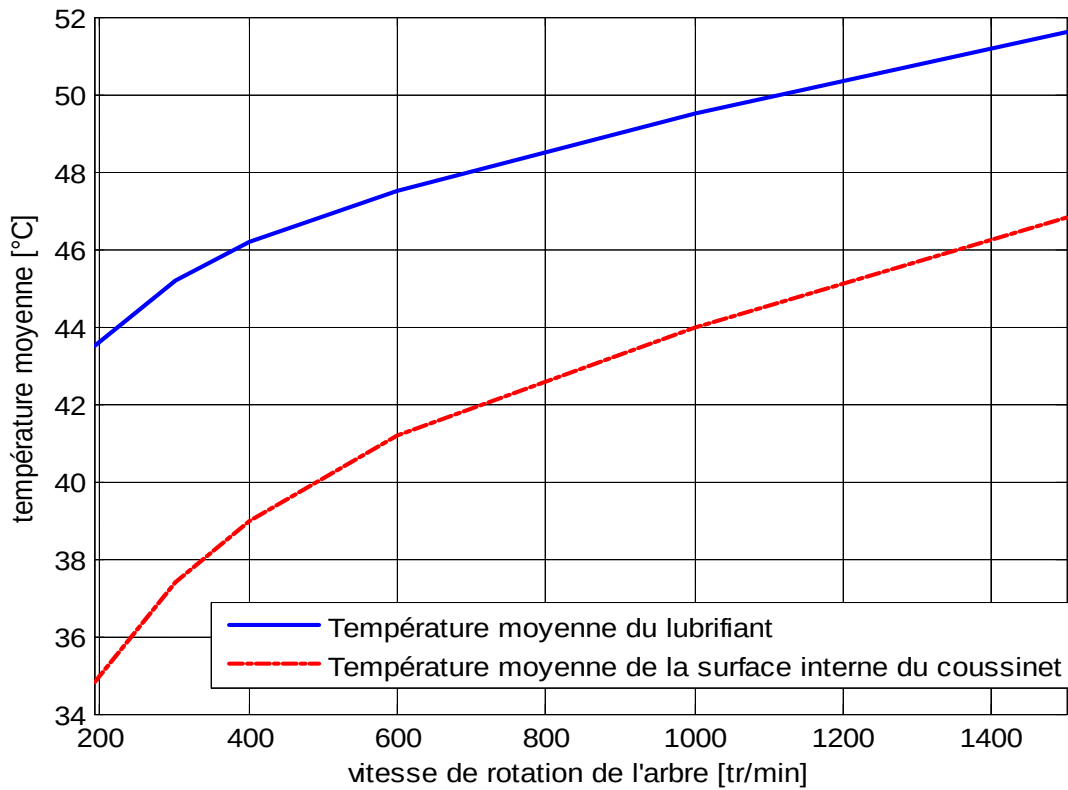
Figure(VI.41) : *Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $w=191$ tr/min($\varepsilon=0.6$, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)*



Figure(VI.42) : *Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $w=1000$ tr/min($\varepsilon=0.6$, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)*



Figure(VI.43) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une vitesse de l'arbre $w=1500$ tr/min ($\varepsilon=0.6$, $\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}$ s)



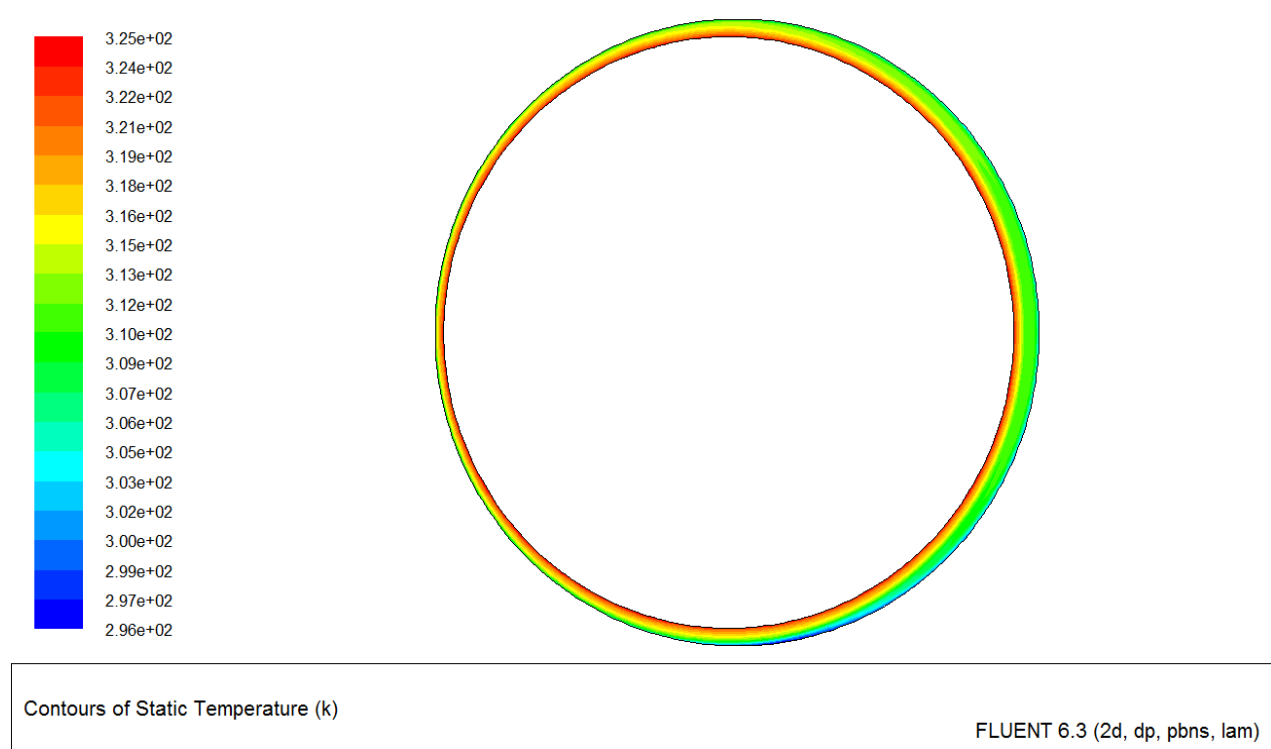
Figure(VI.44) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant et de la température moyenne de la surface interne du coussinet en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre ($\varepsilon=0.6$, $\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}$ s)

6.2 Effet de l'excentricité sur le champ de température T

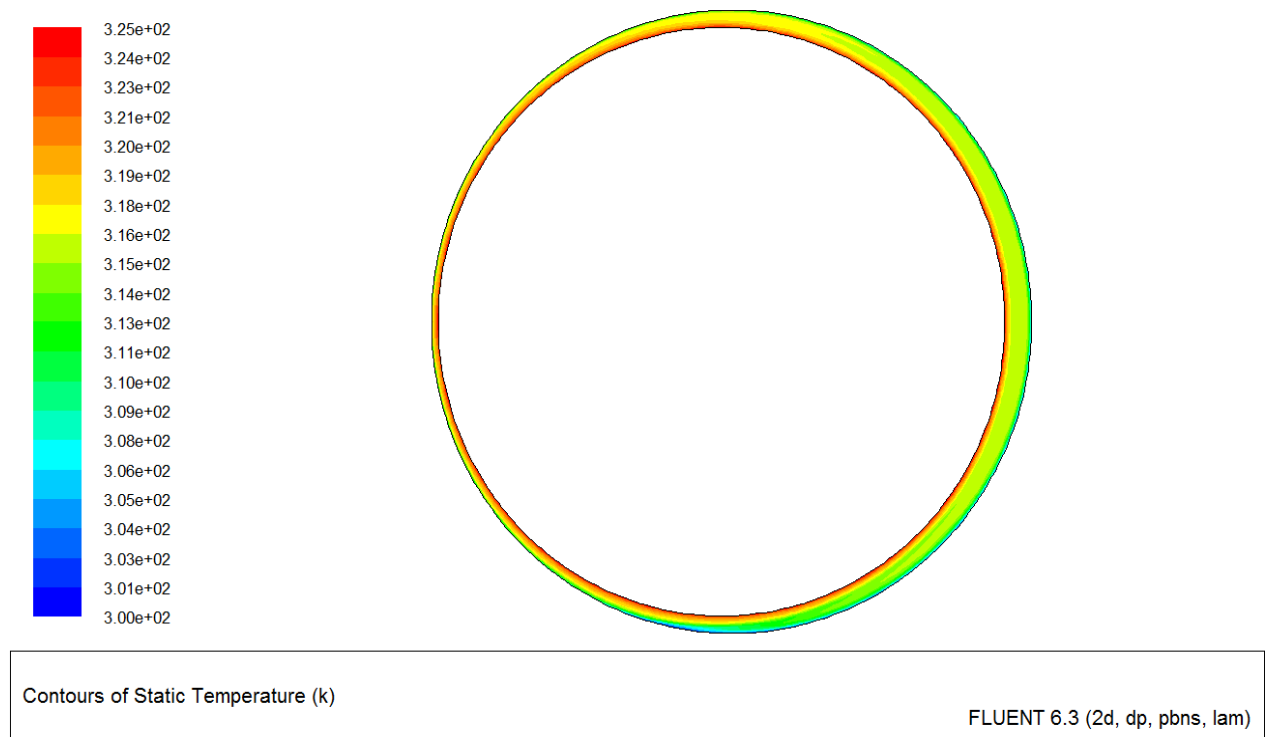
Concernant l'effet de l'excentricité relative sur le transfert de chaleur dans l'entrefer, les figures (VI-45) à (VI-48) montrent que la distribution de la température dans l'espace confiné est influencée fortement par l'excentricité.

La figure (VI-49) montre que la température moyenne du lubrifiant et celle de la surface interne du coussinet varient de façon non-linéaire en fonction de l'excentricité.

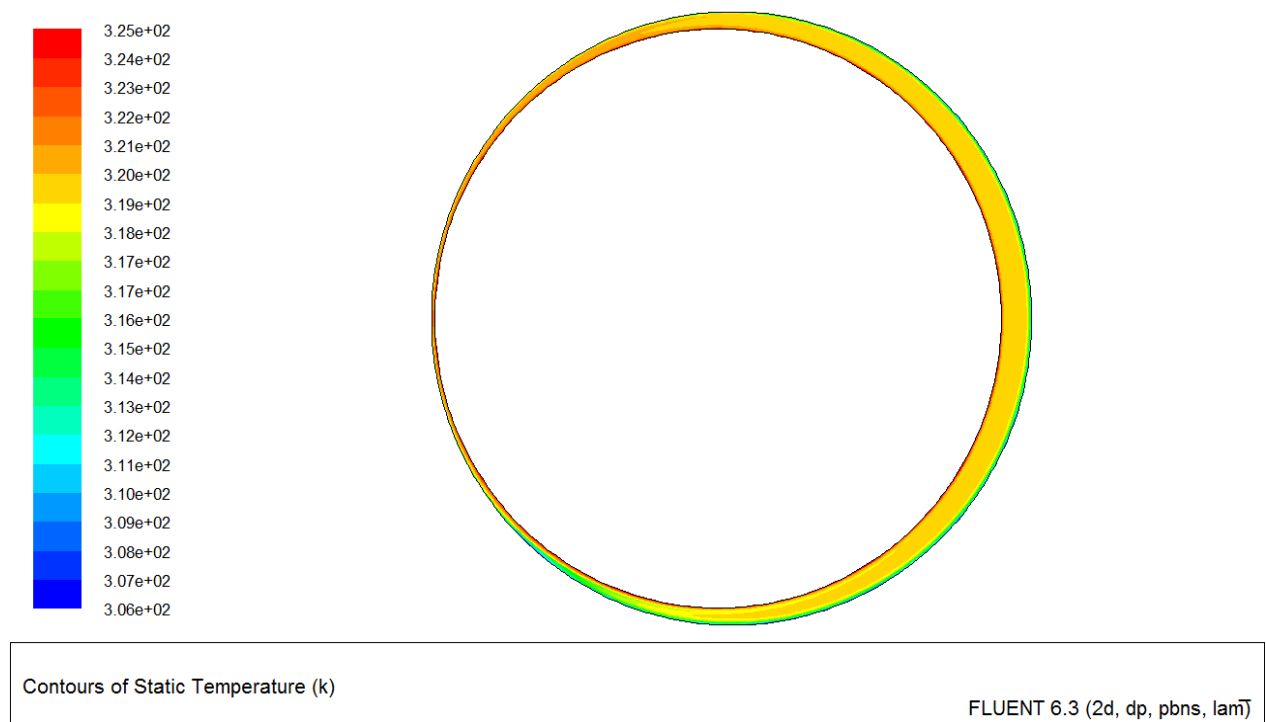
La figure (VI-50) montre l'effet des deux paramètres cinématiques (ω et ε) sur la température moyenne du lubrifiant. On remarque qu'une variation de l'excentricité de 0.5 à 0.6 et à une vitesse 1500 tr/min, provoquent une augmentation de température de 47.5°C à 51.5°C. de même pour une excentricité égale à 0.6 et une vitesse variée de 191 tr/min à 1500 tr/min, la température moyenne du lubrifiant varie de 43.5°C à 51.5°C. On constate donc l'importance de l'effet de ces deux paramètres sur la température du film fluide.



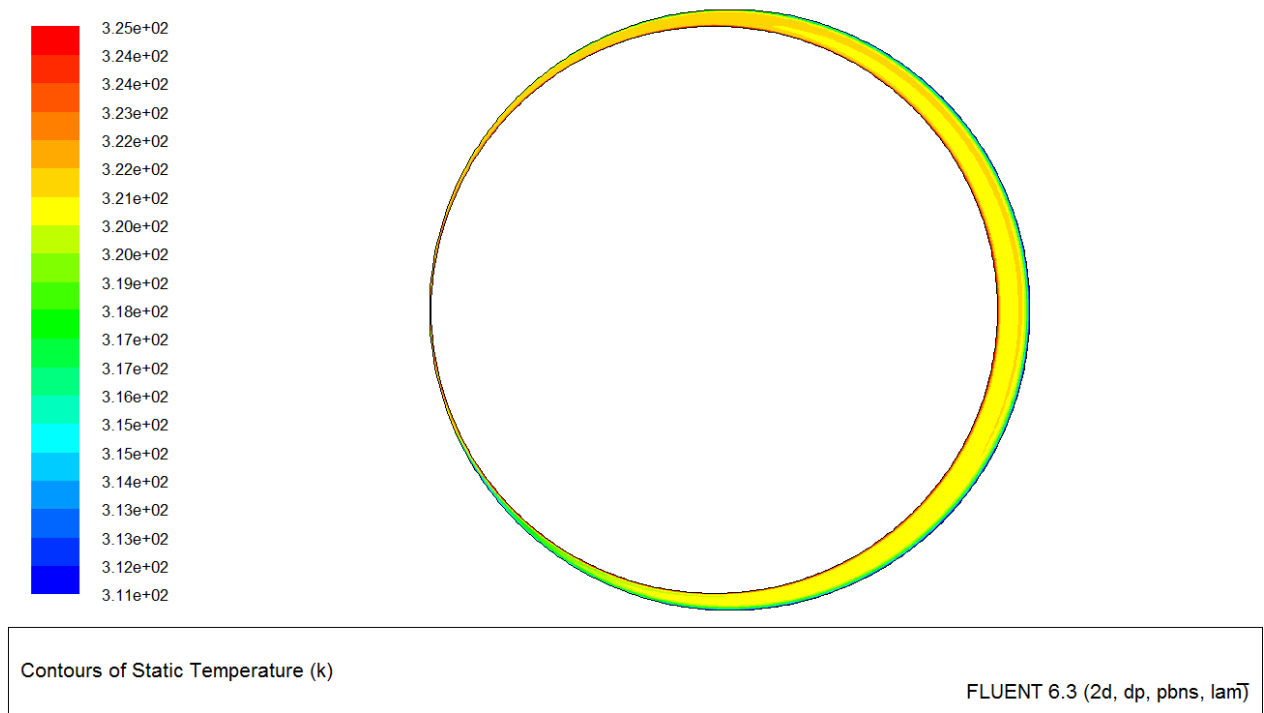
Figure(VI.45) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.5
($\omega=191$ tr/min, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)



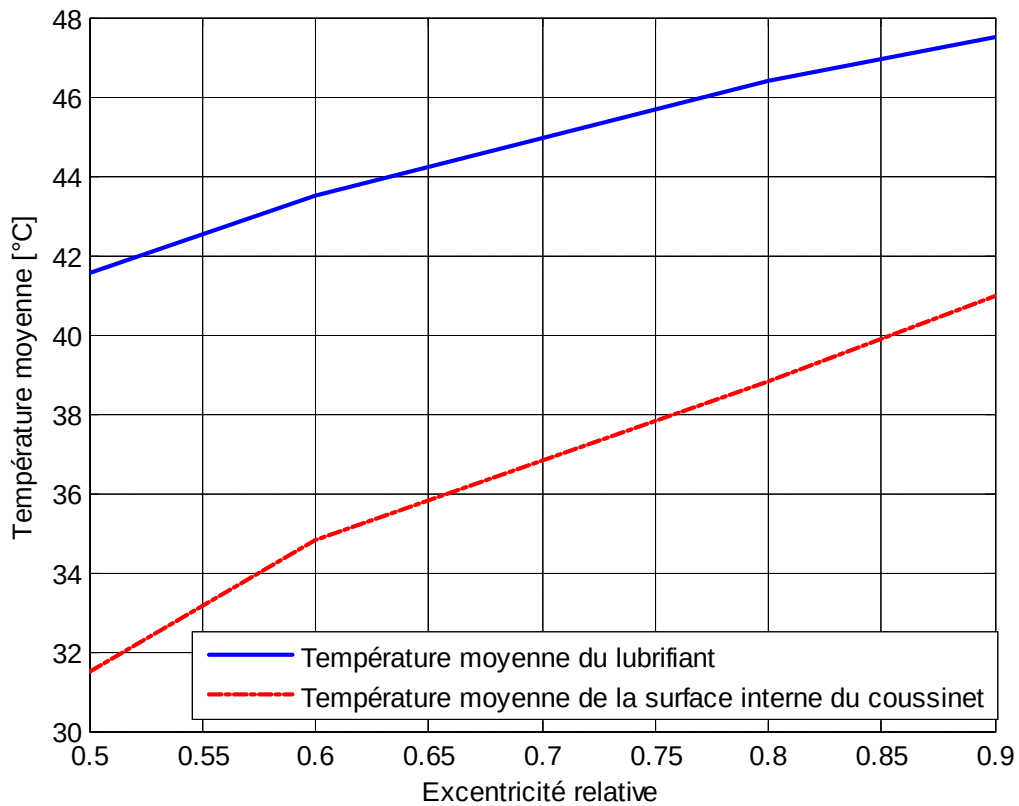
Figure(VI.46) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.6 ($\omega=191$ tr/min, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)



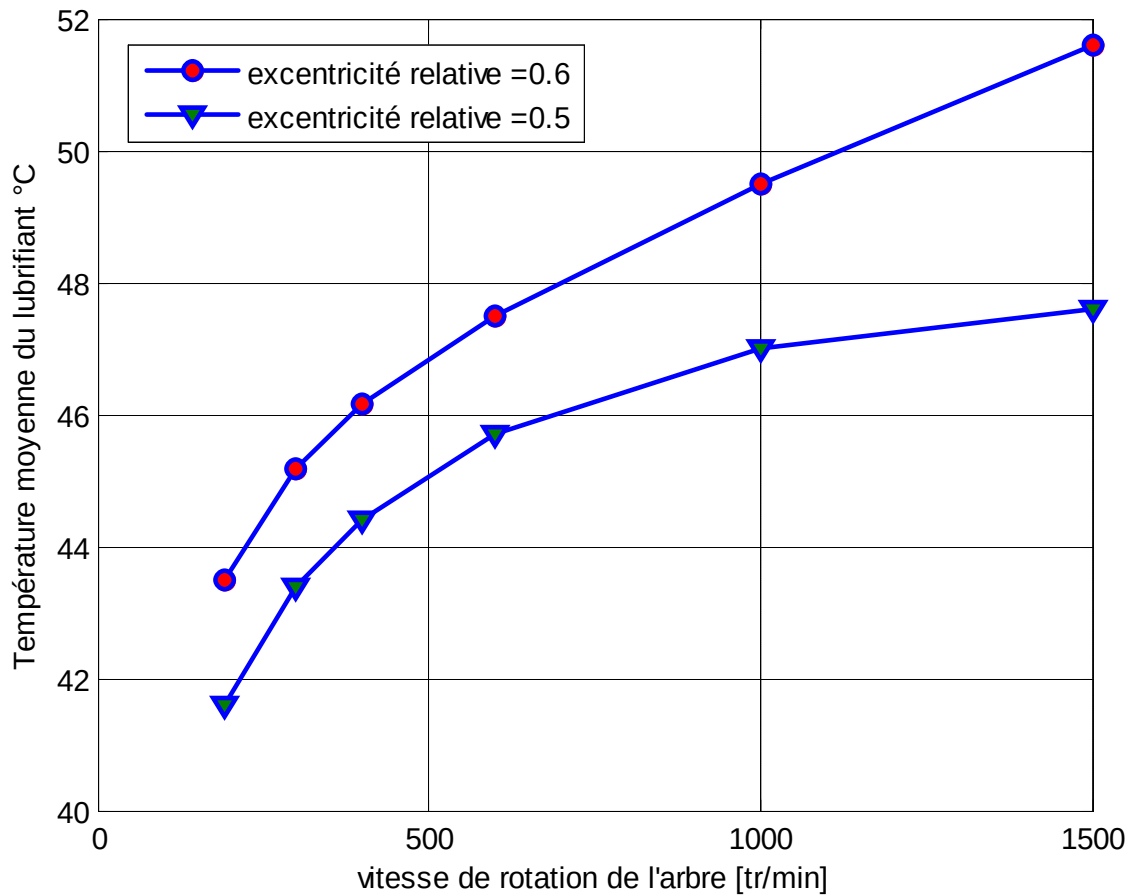
Figure(VI.47) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.8 ($\omega=191$ tr/min, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)



Figure(VI.48) : Distribution de la température T du lubrifiant dans l'entrefer pour une excentricité 0.9 ($\omega=191$ tr/min, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)



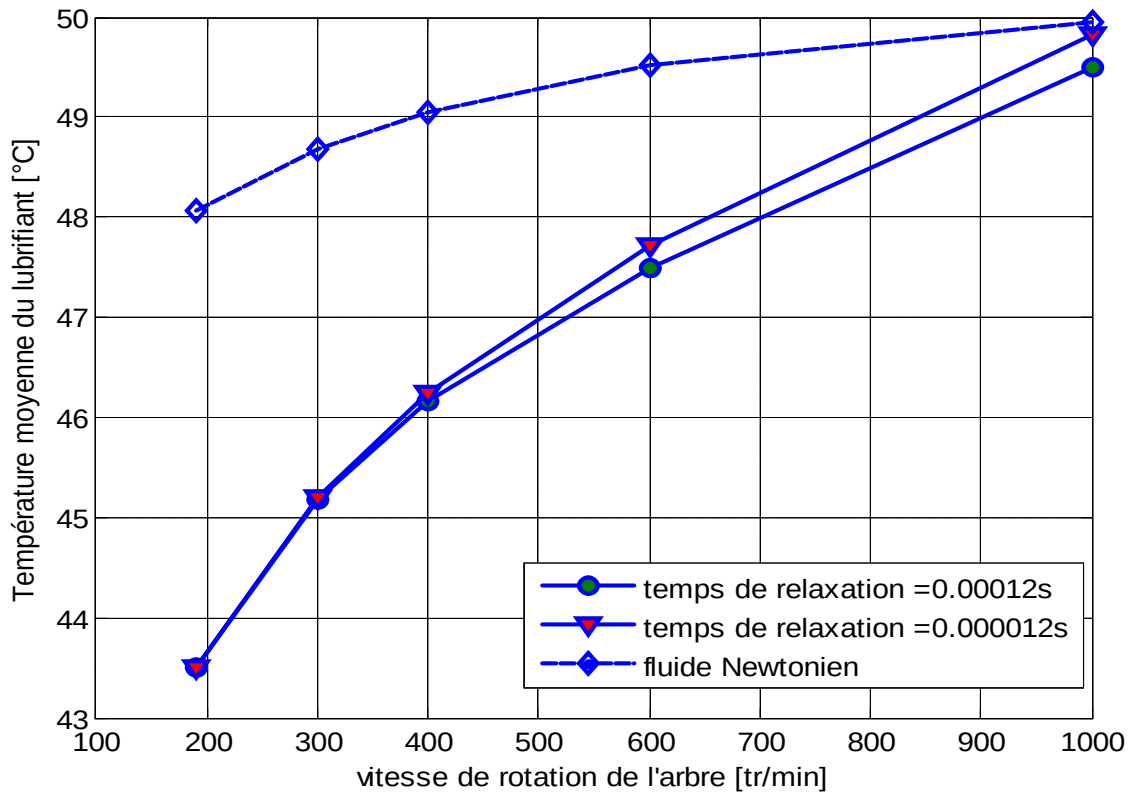
Figure(VI.49) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant et de la température moyenne de la surface interne du coussinet en fonction de l'excentricité ($\omega=191$ tr/min, $\lambda=1.2.10^{-4}$ s)



Figure(VI.50) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre pour deux valeurs de l'excentricité ($\lambda=1.2.10^{-4}s$)

6.3 Effet du temps de relaxation sur le champ de température T dans l'entrefer

Les résultats illustrés dans la figure (VI-51) montrent que l'effet du temps de relaxation sur la température du film fluide est presque nul pour des faibles valeurs de vitesse de rotation de l'arbre. L'effet du temps de relaxation apparaît quand la vitesse de rotation croît. On constate aussi que la température du lubrifiant augmente avec la diminution du temps de relaxation pour des vitesses de rotation élevées. Par conséquent, on peut noter que la température du lubrifiant de type Newtonien est plus élevée que celle d'un fluide viscoélastique de type Maxwell. Ce qui conduit au problème de diminution de la viscosité en fonction de cette dernière ; ou on peut donc conclure, comparativement entre ces deux fluides, qu'un lubrifiant viscoélastique est plus efficace.



Figure(VI.51) : Variation de la température moyenne T_{moy} du lubrifiant en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre ω pour un lubrifiant de modèle Newtonien et de modèle de Maxwell, ($\varepsilon=0.6$, $\mu=0.3Pa.s$)

7 Force hydrodynamique pour le fluide de Maxwell étudié

Dans le but d'étudier l'effet de quelques paramètres, tel que le temps de relaxation λ , la viscosité dynamique μ et la vitesse de rotation de l'arbre ω sur les composantes de la force hydrodynamique, on fait varier un des paramètres et on fixe les deux autres.

La figure (VI.52) présente l'effet du paramètre dynamique (la vitesse de rotation ω de l'arbre) sur la force hydrodynamique du palier. On remarque que cette force varie très fortement en fonction de ω où on observe que pour une vitesse de l'arbre ω variant entre 150 rad/s et 200 rad/s, la force hydrodynamique varie de 4000N à 5500N

La figure (VI.53) présente l'effet des propriétés rhéologiques (viscosité μ du fluide et temps de relaxation λ) sur la force hydrodynamique. On notera que cette dernière varie fortement en fonction de la viscosité μ du fluide ainsi que par rapport au temps de relaxation λ .

La figure (VI.54) présente la variation de la force hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative ε . Les courbes sont présentées pour deux vitesses de rotation de l'arbre (20 rad/s et 40 rad/s). On remarque que la force varie fortement en fonction de ε . Ainsi que si on augmente la vitesse de rotation de l'arbre, tout se passe comme si la courbe est translatée dans le sens inverse de l'excentricité.

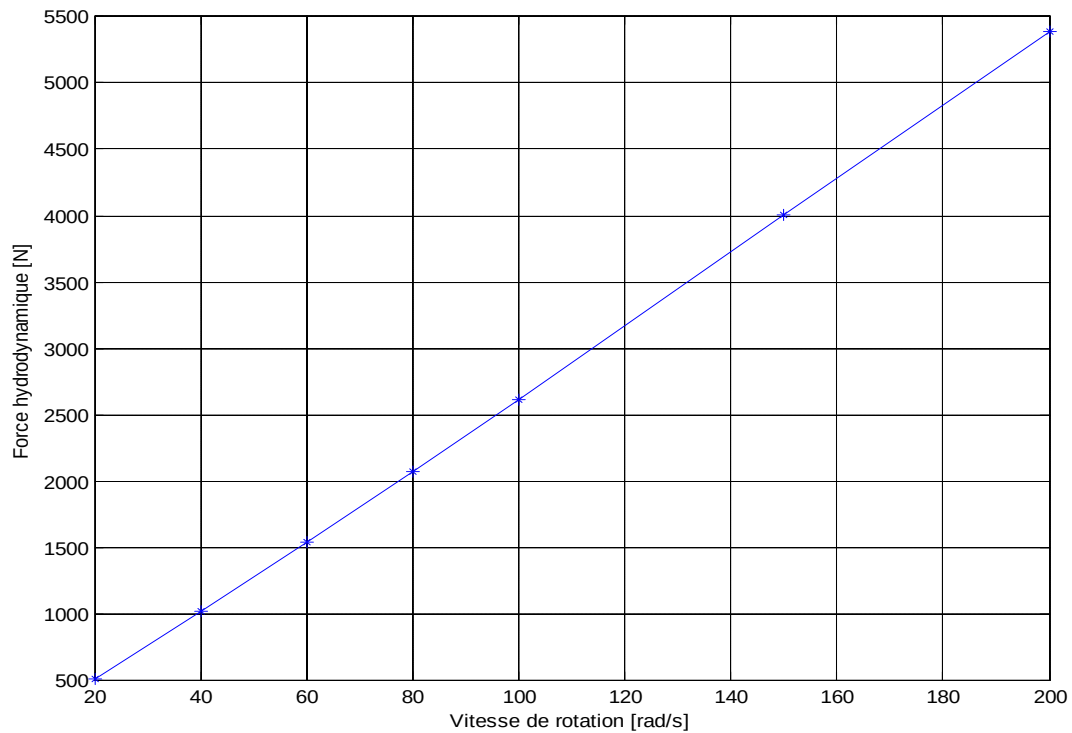


Figure (VI.52) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de la vitesse de rotation ω de l'arbre ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$)

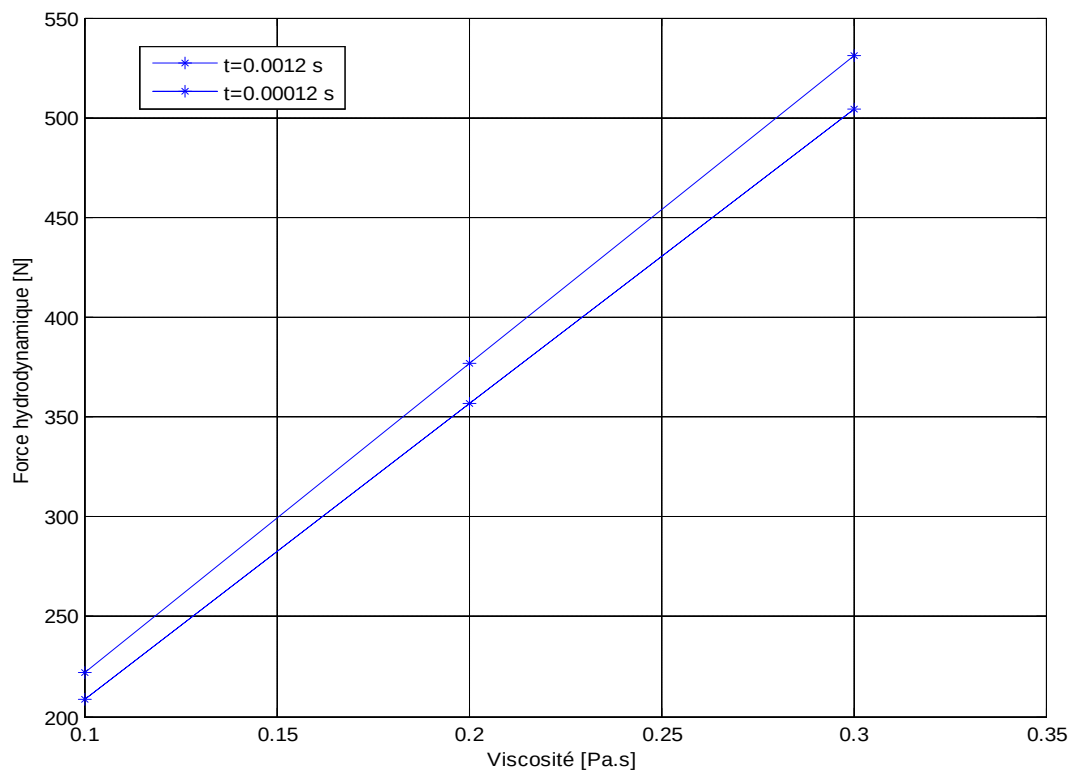


Figure (VI.53) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de la viscosité μ de fluide viscoélastique pour différents temps de relaxation λ ($\varepsilon=0.6$, $\omega=20\text{rad/s}$)

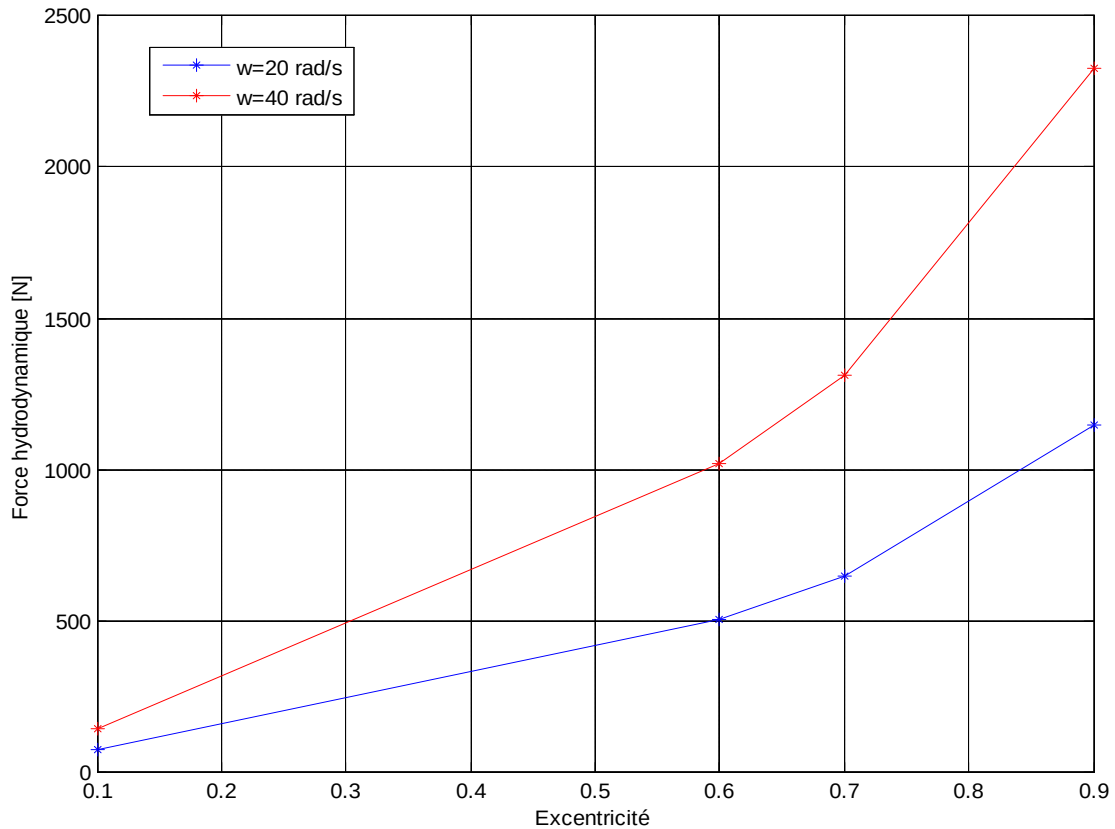


Figure (VI.54) : Variation de la force hydrodynamique en fonction de l'excentricité ϵ pour différentes vitesses de rotation de l'arbre ($\mu=0.3\text{Pa.s}$, $\lambda=1.2.10^{-4}\text{s}$)

8 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous nous sommes intéressés premièrement à l'analyse du comportement rhéologique d'un lubrifiant viscoélastique du type Maxwell généralisé. Nous avons utilisé des UDFs qui permettent de calculer les termes sources que nous avons intégrés au logiciel Fluent 6.3 afin de l'adapter au cas d'un lubrifiant non Newtonien viscoélastique [M. Guemmadi]. La validation du code de calcul s'est opérée sur une comparaison de la distribution de la pression le long de l'entrefer entre le fluide viscoélastique et un fluide Newtonien. Les résultats obtenus montrent l'efficacité du code de calcul [M. Guemmadi]. Par ailleurs, en considérant la contrainte de cisaillement, nous avons pu alors mettre en évidence la contribution viscoélastique par comparaison à la contribution purement visqueuse qui caractérise un fluide Newtonien. L'effet de la viscoélasticité a été par, ailleurs mise en évidence par l'existence de la première différence des contraintes normales. Cette dernière influe directement sur la force hydrodynamique où on a constaté que pour un fluide viscoélastique, la composante F_x de la force hydrodynamique est différente de zéro et que la force hydrodynamique pour un lubrifiant de modèle de Maxwell est très importante comparable à la force hydrodynamique obtenue pour un lubrifiant de type Newtonien [B. C. Madumdar].

L'étude des effets des propriétés rhéologiques ainsi que la cinématique sur les champs de contraintes et de température nous a conduits aux résultats suivants :

- la taille de la zone de recirculation augmente pour un fluide viscoélastique par rapport à un fluide Newtonien.
- Au niveau de cette zone, le fluide ne contribue pas d'une façon considérable à l'élévation de la dissipation visqueuse, elle est donc cumulée pour être évacuée par conduction et diffusion vers les parties solides.
- le changement des profils des contraintes dû au changement de temps de relaxation est clairement non-linéaire et affiche significativement l'effet viscoélastique.
- La composante F_x de la force hydrodynamique est différente de zéro pour le cas de fluide de Maxwell et elle augmente en fonction de temps de relaxation.
- Pour des valeurs de l'excentricité tendant vers 1, la composante de la force hydrodynamique F_x est comparable avec la deuxième composante de la force hydrodynamique F_y . Ce résultat est confirmé par G.W.Robert et K.Walters où dans leur étude ils ont montré que pour une excentricité de $\varepsilon=0.99$ l'amplitude de F_x est de même ordre de grandeur que F_y .
- La force hydrodynamique pour le fluide de Maxwell est très importante par rapport à un fluide Newtonien ; ce qui est confirmé par l'étude réalisée par Grecov et Clermont où ils ont montré le grand effet de la viscoélasticité sur l'amplitude de la force hydrodynamique à travers l'étude du fluide de Maxwell.
- L'excentricité et la vitesse de rotation jouent un rôle très important sur l'augmentation de la température du lubrifiant et par conséquent la diminution de l'effet de la viscosité.
- Pour des vitesses de rotation de l'arbre importantes, la température moyenne du lubrifiant Newtonien est plus élevée que celles d'un lubrifiant de modèle UCM. A cet effet, un lubrifiant viscoélastique de modèle de Maxwell sur-convecté est plus intéressant qu'un lubrifiant Newtonien, en particulier pour la diminution de la viscosité en fonction de la température.

Dans tous les mécanismes de contact lubrifié, l'énergie dissipée par cisaillement du fluide conduit à un échauffement, donc à une diminution de la viscosité du lubrifiant et de la portance du mécanisme. Ainsi, les effets thermiques jouent un rôle prépondérant dans le fonctionnement des paliers.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Conclusion Générale et Perspectives

Ce travail concerne une étude numérique sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses par des fluides ayant un comportement rhéologique décrit par le modèle de Maxwell sur-convecté (Upper convected Maxwell model UCM). On a développé un code de calcul en C++, puis on a interprété ce code de calcul sous le logiciel Fluent par des UDFs (User Defined Functions) permettant de calculer les termes sources des équations de quantité de mouvement et de l'énergie. On a créé aussi des UDSs (User Defined Scalars) permettant de calculer les contraintes normales et de cisaillement. Ces codes de calcul soutiendront à toute personne utilisant Fluent (réservé pratiquement aux fluides purement visqueux) d'ajouter le fluide viscoélastique (UCM) à la base de données de ce logiciel.

La validation des codes de calcul s'est opérée sur une comparaison entre la solution analytique et numérique des écoulements de fluide de Maxwell, dans des géométries simples. Une autre simulation numérique comparative, entre un fluide Newtonien et le fluide de Maxwell à faible temps de relaxation, est effectuée dans une géométrie définie par deux cylindres excentriques (le cas d'un palier hydrodynamique cylindrique).

La confirmation de ces codes de calcul nous a donné l'accès pour entamer une étude des effets des paramètres rhéologiques et cinématiques sur les champs de pression, de contraintes et de température ainsi que la force hydrodynamique.

L'effet de la viscoélasticité a été par ailleurs mis en évidence par l'existence de la première différence des contraintes normales. Cette dernière influe directement sur la force hydrodynamique.

Les résultats obtenus par simulation numérique montrent que :

- Pour un fluide viscoélastique de type UCM, la composante F_x de la force hydrodynamique est différente de zéro, ce qui implique que l'angle de calage est différent de 90° , donc on évite l'instabilité du palier par comparaison à un fluide Newtonien.
- La force hydrodynamique est plus importante dans le cas d'un lubrifiant de type UCM que celle d'un fluide Newtonien.

- La composante F_x de la force hydrodynamique du palier étudié devient du même ordre de grandeur que la composante F_y , pour une excentricité très élevée.
- Le transfert de chaleur dans le film fluide est important, comparable à celui dans le coussinet.
- Nous avons observé, à partir d'une simulation numérique, que le temps de relaxation n'influe pas sur la distribution de champ de pression le long de l'arbre, par contre ce paramètre influe fortement le champ de contraintes.
- La force hydrodynamique est influencée par le temps de relaxation et la viscosité du fluide.
- La température moyenne du lubrifiant de type Newtonien est plus élevée par rapport à un lubrifiant viscoélastique de modèle UCM. Il est donc plus intéressant d'utiliser un lubrifiant UCM qu'un lubrifiant Newtonien.
- Les influences de la viscosité du fluide, de la vitesse de rotation de l'arbre et de l'excentricité apparaissent clairement et explicitement sur les champs de pression, de contraintes, de température et aussi que sur la force hydrodynamique.

Les perspectives du travail présenté dans cette thèse sont nombreuses. L'une des perspectives les plus prometteuses à l'utilisation de notre simulation, c'est d'effectuer une étude numérique de transfert de chaleur dans l'arbre du palier.

Une autre piste d'amélioration intéressante consiste à utiliser un calculateur plus puissant permettant d'améliorer le maillage, dans le cas d'une excentricité relative élevée (0.99) aussi que la possibilité de faire varier la vitesse de l'arbre jusqu'aux valeurs importantes ; par exemple 4000 tr/min.

Cette étude numérique sera plus complète si elle est suivie par une étude expérimentale. Pour cela une recommandation pour réaliser une étude expérimentale permettant de valider ces résultats

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

1. Articles

M. Allouche et A. Ouibrahim, **Modélisation Numérique du comportement de Fluides d'Oldroyd B en Lubrification Hydrodynamique**, 3ème Colloque International de Rhéologie, Béjaïa, 12-14 Nov (2005).

M. Allouche et A. Ouibrahim, **Suspensions de Particules Déformables en Milieu Confiné**, 4ème Colloque International de Rhéologie, USTO, Oran 18-20 Nov (2006)

M. Allouche et A. Ouibrahim, **Milieux Viscoélastiques dans un Espace Confiné –Modèle B d'Oldroyd et Suspensions de Particules Déformables. (Partie 2 - Etude Numérique)**, 42^{ème} Colloque du Groupe Français de Rhéologie, Clermont Ferrand, France, Oct (2007)

M. Allouche and A. Ouibrahim, **Viscoelastic Fluid Oldroyd B Model in Journal Bearing Lubrication** : soumis pour publication au JNNFM (2009)

C. Barus, **Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity**. Am.J. of Science. 45(1893) p 87-96.

A. Berker, M.G. Bouldin, S.J.Kleis, W.E. VanArsdale, **Effect of polymer on flow in journal bearings**, J. Non Newtonian Fluid Mech. 56 (1995) 333-347.

R. Boncompain and J. Frêne, **Thermohydrodynamic of finite journal bearing- static and dynamic characteristics**, Proc. of the 6th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, pages 34–41, (1997)

S. S. Banwait, H.N. Chandrawat, and M. Adithan. **Thermohydrodynamic analysis of misaligned plain journal bearing**. Proc. Asiatrib'98, Beijing, China :35–40, (1998).

S. S. Banwait and H. N. Chandrawat. **Study of thermal boundary condition for a plain journal bearing**. Tribology International, 31(6) : 289-296, (1998).

J. Bouyer and M. Fillon, **Experimental study on thermal effects of a misaligned hydrodynamic journal bearing**, 7th Portuguese Conference on Tribology, Porto, Portugal :63–66, (2000).

Scott Bair, Jacek Jarzynski, Ward O. Winer, **The temperature, pressure and time dependence of lubricant viscosity**. J. Tribology. 34 (2001) 461-468.

J. Bouyer and M. Fillon, **An experimental analysis of the misalignment effects on hydrodynamic plain journal bearing performances**, ASME Journal of Tribology, 124 :313–319, (2002).

J. Bouyer and M. Fillon, **Improvement of the thermal performance of misaligned plain journal bearing**, ASME Journal of Tribology, 125 :334–342, (2003).

W.F. Cope, **The hydrodynamic theory of film lubrication**. Proc. Roy. Soc. A, 197 :201–217, (1949).

Cameron and W.L. Wood. **Parallel surface thrust bearing**. ASLE Transactions, 1(3) :254–258, (1958).

Camron A, Gohar R, **Theoretical studies of the oil film in lubricated point contact**. Proc. Roy. Soc. London, Series A. 291 (1966) p520 – 536.

- A.Campos, A. Sottomayor, J. Seabra, **Non-Newtonian thermal analysis of an EHD contact lubricated with MIL-L-23699 oil**, . J. Tribology. 39 (2006) 1732-1744.
- Amit Chauhan, **Circular bearing performance parameters with isothermal and thermohydrodynamic approach using CFD**, International Journal of Research in Advent Technology, vol 2, N07, E-ISSN:2321-9637,(2014).
- A. Dowson, **A generalized Reynolds equation for fluid film lubrication**, Int.J. Mech. Sc., 4 :159–170, (1962).
- Dowson and J.D. Hudson, **A thermohydrodynamic analysis of the infi-nite slider-bearing : Part i, the plane inclined slider-bearing**, Proc IMechE, Lubrication and Wear Convention :34–44, (1964).
- Dowson, J.D. Hudson, B. Hunter, and C.N. March, **A thermohydrodynamic analysis of the fluid film lubrication**, Int. J. Mech. Sc., 181(3B) :70–80,(1966)
- A. Dadouche, Michel Fillon, **Analyse théorique et expérimentale des effets thermiques dans les butées hydrodynamiques à géométrie fixe**. J. Mec. Ind. 1 (2000) 141-150.
- A.R. Davies et X.K. Li, **Numerical modeling of pressure and temperature effects in viscoelastic flow between eccentrically rotating cylinders**, J. Non Newtonian Fluid Mech. 54 (1994) 331-350.
- Dowson D, Higginson G R, **A numerical solution to the elastohydrodynamic problem**. J. Mechanical Engineering Science. 1 (1959) p 6-15.
- Ertel A.M, **Hydrodynamic lubrication based on new principles**. Akad.Nauk SSSR Pikadnaya Mathematica i Mekhanika. 3,2 (1939) p 41-52.
- M.P. Escudier, I.W. Gouldson, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, **Effects of inner cylinder rotation on laminar flow of a Newtonian fluid through an eccentric annulus**. J. Heat and fluid flow. 21 (2000) 92-103.
- Fogg A, **Fluid film lubrication of parallel thrust surfaces**, Proc IMechE,155 :49–53, (1946)
- M. Fillon and M. Khonsari. **Thermohydrodynamic design charts for tilting-pad journal bearings**. ASME Journal of Tribology, 118 :232–238, (1996).
- D.T. Gethin. **A finite element approach analysing thermohydrodynamic lubrication in journal bearings**.Tribology International, 21(2) :67–75, (1988)
- Dana Grecov, Jean-Robert Clermont, **Numerical simulations of non-Newtonian flows between eccentric cylinders by domain decomposition and stream-tube method**, J. Non Newtonian Fluid Mech. 126 (2005) 175-185.
- D.RH. Gwynllyw, T.N. Phillips, **The effect of viscoelasticity on the performance of journal bearings**. Springer. (2006) 176-186.
- K.P. Gertzog, P.G. Nikolakopoulos, C.A. Papadopoulos, **CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant**. J. Tribology (2008).
- D.Rh. Gwynllyw, T.N. Phillips, **The influence of Oldroyd-B and PTT lubricants on moving journal bearing systems**. J. Non-Newtonian fluid Mech. 150 (2008) 196-210.
- M. Guemmadi et A. Ouibrahim, **Generalized Maxwell Model as Viscoelastic Lubricant in Journal Bearing**, Journal of Key Engineering Materials vol 478 pp 64-69 (2011).

- M. Guemmadi et A. Ouibrahim, **La Lubrification Hydrodynamique en fluide viscoélastique. - Simulation Numérique**, 10^{ème} Congrès de Mécanique, Oujda – Maroc (2011)
- M. Ganapathi, S.Vijayakumar Varma, K.R.K.Prasad et V.Bharath Kumar **Viscosity Variation and Thermal Effects in Finite Journal Bearings** International Journal of Mathematics And its Applications. Volume 5, Issue 1{B (2017), 135{143. ISSN: 2347-15
- A.C. Hagg, **Heat effects in lubricating films**, Journal of Applied Mechanics, 11 :72–76, (1944).
- Markus Hartinger and all, **CFD modeling of thermal and shear-thinning elastohydrodynamic line contact**. J. Tribology. 130 (2008) 041503-1-16.
- X. Huang, N. Phan-Thien, R.I. Tanner, **Viscoelastic flow between eccentric rotating cylinders: unstructured control volume method**, J. Non Newtonian Fluid Mech. 64 (1996) 71-92.
- Chen Haosheng; Chen Darong , **Modified Reynolds Equation for Non-Newtonian Fluid With Rheological Model in Frequency Domain**, *J. Tribol.* (2005); 127(4):893-898
- Johnston G. J. Wayte R. et Spikes H. A, **The measurement and study of very thin lubricant films in concentrated contacts**. STLE, Tribology Transactions. 34 (1991) p187 – 194.
- J. Y. Jang, M.M. Khonsari, **On the thermohydrodynamic analysis of bingham fluid in slider bearings**. J Acta Mechanica. 148 (2001) 165-185.
- Juliana Javorova et Jordanka Angelova, **On the modified Reynolds equation for journal bearings in case of non-Newtonian rabinowitsch fluid model**, volume 145-(2018), NCTAM2017
- Kingsbury A, **Heat Effects in Lubricating Films**, Mechanical Engineering, vol.55, pp. 685-688, (1933)
- M.M. Khonsari, J.Y. Jang, and M. Fillon, **On the generalization of thermo-hydrodynamic analyses for journal bearings**, ASME Journal of Tribology, 118 :571–579, (1996).
- Kucinschi A and M. Fillon. **An experimental study of transient thermal effects in a plain journal bearing**. ASME Journal of Tribology, 121 :327–332, (1999).
- J.H. Kim, A.A. Seireg, **Thermohydrodynamic lubrication analysis incorporating Bingham rheological model**. J. Tribology. 122 (2000) 137-146.
- Xin Kai Li, **Non-Newtonian effects on lubricant thin-film flows**, J. Cent. South Univ. Technol , (2007) 68-72.
- Toshiharu Kazama **Improving the static characteristics of hydrodynamic bearings using the viscosity-temperature relations of lubricants** Bulletin of the JSME Mechanical Engineering Letters Vol.2, (2016).
- B.C. Majumdar and A.K. Saha, **Temperature distribution in oil journal bearings**. Wear, 28 :259–266, (1974).
- B.C. Madumdar, **The thermohydrodynamic solution of oil journal bearings**. J. Wear. 31 (1975) 287-294.
- J. Mitsui, Y. Hori, and M. Tanaka, **Thermohydrodynamic analysis of cooling effects of supply oil in circular journal bearing**, ASME Journal of Lubrication Technology, 105 :414–421, (1983)
- Noriyasu Mori, Mitsuhiro, **Pressure flow of non-Newtonian fluids between eccentric double cylinders with the inner cylinder rotating, part 1: Numerical calculation**. J. Textile Mecheinery Society of Japan. 38 (1985) 47-52.

- Noriyasu Mori, Mitsuhiro, **Pressure flow of non-Newtonian fluids between eccentric double cylinders with the inner cylinder rotating, part 2: Experiment.** J. Textile Mecheinery Society of Japan. 38 (1985) 37-45.
- Sheau-Ming Ju, Cheng-I Weng, **Thermohydrodynamic analysis of finite-width journal bearings with non-Newtonian lubricants.** J. Wear. 171 (1994) 41-49.
- H.Moreau, P. Maspeyrot, J. Frêne, **Mesurements of oil film thickness in automotive engine bearings,** 607-617 (2002)
- Sang Myung Chun, **Thermohydrodynamic lubrication analysis of high-speed journal bearing considering variable density and variable specific heat.** J. Tribology. 37 (2004) 405-413.
- V. Meruane, R. Pascual, **Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings,** J. Tribology International. 41 (2008) 743-754
- K. Mehala and all, **Numerical analysis of the Non-Newtonian flow performance and thermal effect on a bearing coated with a high tin content,** Tribology in Industry, Vol 38, N04, 575-584,(2016).
- D. Nicolas and J. Frêne, **Tilting torque permissible in plain bearings. theory,experimental results and application to machine design,** First EuropeanTribology Congress, (1973)
- A. Ouibrahim, D. H. Fruman et R. Gaudemer, **Cavitation dans des Espaces très Confinés, Colloques Ecoulements Propulsifs dans les Systèmes de Transport Spatial,** organisé par CNES, ONERA et CNRS, p 185, Bordeaux Septembre (1995).
- A. Ouibrahim, D. H. Fruman and R. Gaudemer, **Vapour Cavitation in Very Confined Spaces for Newtonian and Non Newtonian Fluids,** Physics of Fluids, Vol. 8, N°. 7, p.1964, (1996).
- A. Ouibrahim et R. Nebbali, **Analytical Description of Heat Transfer in Journal Bearings for Newtonian fluid,** to be further published in Int. J. of Heat Transf.(2009).
- R. S. Parangpe et T. Han. **A study of thermohydrodynamic performance of readly loaded journal bearings.** STLE Tribology Transactions, 37: 679-680, (1994)
- A. Pinarbasi, E. Toros, M. Imal, **Combined effect of variable fluid properties on nonisothermal flow of an inelastic fluid with viscous heating.** J. Heat and mass transfer. 36 (2009) 280-285.
- O. Reynolds, **On the theory of lubrication and its application.** Phil. Soc. Of London. 177 (1886) p 157-234.
- C. Rajalingham, B.S. Prabhu, **The influence of variation of viscosity with temperature on the steady state characteristics of journal bearings – simplified analysis.** J. Tribology. 20 (1987) 261-266.
- G.W. Roberts, K. Walters, **On viscoelastic effects in journal-bearing lubrication.** J. Rheologica Acta. 31 (1992) 55-62.
- H.W. Swift, **Theory and experiment applied to journal bearing design,** .Proc.IMEchE of the General Discussion on Lubrication and Lubricants, 1 :309–316, (1937).
- J.Seabra, A.Sottomayor et A.Campos , **Traction coefficient in a roller-inner ring EHD contact in a jet engine roller bearing,** (1997) Pages 274-283
- W.G. Sawyer, J.A. Tichy, **Non-Newtonian lubrication with the second-order fluid.** J. Tribology. 120 (1998) 622-628.

Mukesh Sahu, **Thermohydrodynamic analysis of journal bearing using CFD as a tools**, IJSRP, volume 2, ISSUE 9, ISSN 2250-3153 (2012).

Y.P. Ting, K.L. Peddicord, **Heat conduction in eccentric annuli**. J. Heat Mass Transfer. 26 (1982) 11-21.

J. A. Tichy, **Non-Newtonian lubrication with the Convected Maxwell model**, J. Tribology. 118 (1996) 344-348.

F. Talay Akyiliz, Hamid Bellout, **Viscoelastic lubrication with Phan-Thein-Tanner fluid (PTT)**, J. Tribology. 288 (2004) 288-291.

S.H. Wang, H.H. Zhang, D.Y. Hua, **The influence of the viscoplastic and viscoelastic character of a lubricant on elastohydrodynamic lubrication**. J. Wear. 118 (1987) 185-197.

Cheng Wang, Murali Damodaran, **Numerical modeling of the performance of lubricated journal bearing using Navier -Stokes equations**. IJCFD. 14 (2000) 75-96.

Rong Zhang, Xin Kai Li, **Non-Newtonian effects on lubricant thin-film flows**, J. Engineering Mathematics 51 (2005) 1-13.

Rong Zhang, Xinkai Li, **Perturbation solution of non-Newtonian lubrication with the Convected Maxwell model**, J. Tribology. 127 (2005) 302-305.

Talha Zia, Syed Adnan Qasim et Raja Amer Azim, **Modelling the viscoelastic effects in the hydrodynamic lubrication of journal bearing in high- Torque low speed diesel ingine**. Paper No FEDSM2017-69306, pp. V01AT03A024; 9 pages. (2017).

2. Livres

J.F. Agassant, P. Avenas, J.Ph. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent, **La mise en forme des matières plastiques**. 3^e édition, Technique et Documentation (1996).

Guy Couarraz, Jean- Louis Grossiord, **Initiation à la rhéologie**. 3^e edition, Technique et Documentation (2000).

Jean Frêne, Daniel Nicolas, Brnard Degueurce, Daniel Berthe, Maurice Godet, **Lubrification hydrodynamique – Paliers et Butées**. Edition RYROLLRS, PP49_90 (1990).

N. Midoux, **Mécanique et Rhéologie des fluides en génie chimique**. Technique et Documentation (1999).

Loan C. Popa, **Modélisation numérique du transfert thermique – Méthode des volumes finis**. Maison d'édition UNIVERSITARIA Craiova, (2002)

H.K. Versteeg, W. Malalasekera, **An introduction to computational fluid dynamics**. ISBN : 0-470-23515-2 Longman Scientific & Technical (1995).

3. Thèses

Allouche Moussa, **Fluides viscoélastiques dans les écoulements confinés. Influence sur la lubrification – Application aux paliers**. (2002). Mémoire de Magister, université de Tizi Ouzou.

J. Bouyer, **Etude des performances thermoélastohydrodynamiques de paliers soumis à des conditions sévères**. (2003). Thèse de doctorat, université de Poitiers

Dadouche A. **Etude des phénomènes thermiques dans les butées hydrody-namiques**. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, (1998)

Damiens Bruno, **Modélisation de la lubrification sous-alimentée dans les contacts élastohydrodynamiques elliptiques.** (2003). Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon.

Lionel Helin, **Développement de modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques.** (2006). Université de Lille.

Kai Liu, **Viscoelastic flows withing eccentric rotating cylinders –Journal bearings.** (2008). Mémoire de Master. Université de British Columbia (VANCOUVER)

D. Nicolas, **Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconque,** Thèse de Docteur Ingénieur, Lyon, (1972).

NEBBALI Rezki, **Propagation de la chaleur dans un arbre de palier en rotation en présence d'un écoulement laminaire confiné.** (2008). Mémoire de Magister, université de Tizi Ouzou.

ANNEXES

1. Copie Articles Publiés

Article publié dans Key Engineering Materials

2. UDFs et UDSs couplés à Fluent

2.1 UDFs

2.2 UDSs

Key Engineering Materials Vol. 478 (2011) pp 64-69
 Online available since 2011/Apr/19 at www.scientific.net
 © (2011) Trans Tech Publications, Switzerland
 doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.478.64

Generalized Maxwell Model as Viscoelastic Lubricant in Journal Bearing

M. Guemmadi^{1, 2, a} and A. Ouibrahim^{1, * b}

¹Laboratoire d'Energétique Mécanique et Matériaux, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Algeria.

²Département d'Energétique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M'hamed Bouguerra, Boumerdès, Algeria.

^ae-mail : guemmadi_samah@yahoo.fr , ^be-mail : ouibrahah@live.fr

*Corresponding author : ouibrahah@live.fr

Key words: Journal bearing, Lubrication, Maxwell model, Viscoelastic fluids, CFD.

Abstract

The hydrodynamic lubrication interest is still of great importance, so that more and more elaborated lubricants are considered. They, however, involve consequently more and more hydrodynamic complexity as a result of the rheological properties of the additives.

In our case, we consider lubricants having viscoelastic properties described by a generalized Maxwell model used in the case of journal bearing lubrication. The complexity of the coupled associated equations (momentum and constitutive) to describe the hydrodynamic prevailing in such a geometry requires numerical solutions. Using the commercial Finite Volume software Fluent 6.3 together with an appropriate developed computational code, via UDF (User Defined Functions), we determine the pressure distribution as well as the flow velocity profile and the stress field in the core, the load bearing capacity developed and the attitude angle; all together with the effects of the viscoelastic lubricant parameters (relaxation time and shear viscosity).

Introduction

The continuous development of brand new lubricants indicates that the hydrodynamic lubrication in journal bearing remains of great importance and interest in industrial applications as well as for theoretical research. Beginning with Newtonian film [1], then, several investigations have been performed using non Newtonian but purely viscous fluid [2]. Progressively, with the necessary evolution of brand new lubricants, assigned for different purposes such as performances improvement in the load bearing capacity [3 to 5], or enhancement of the cavitation initiation [6, 7], viscoelastic fluids have been then concerned.

Thus, different viscoelastic models have been involved such as Maxwell, PTT (Phan-Thien-Tanner) and Oldroyd B models [3-5, 8-10]. Moreover, the lubricant has been considered as suspensions of deformable particles [5]. Owing to the complexity of the associated hydrodynamic equations, numerical computation is widely used, involving different CFD (Computational Fluid Dynamic) analysis and programs [2, 4, 5, 8, 10, 11], compared to analytical approaches [12]. Besides the main interest in the hydrodynamic lubrication, heat transfer is also of great importance in journal bearing for Newtonian [13] and viscoelastic fluids [14].

As a whole investigation, we are studying the effect of viscoelastic lubricant in journal bearing, on lubrication, with generalized upper convected Maxwell model using the commercial Finite Volume software Fluent 6.3 together with an appropriate computational developed code by mean of User Defined Functions (UDF). As a first contribution, we determine here the pressure distribution, the shear stress field on the journal surface and the first normal stress difference all together with the effects of the viscoelastic lubricant parameters.

Rheological Model – Constitutive Equations

We consider here the generalized upper convected Maxwell model whose stress tensor components σ_{ij} are given by:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1)$$

where p is the hydrostatic pressure, while τ_{ij} (the deviatoric part of the stress tensor) is defined by:

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu_p D_{ij} \quad (2)$$

λ and μ_p are the relaxation time and the viscosity of the viscoelastic lubricant respectively, while $\frac{D}{Dt}$ is the upper-convected time derivative or Oldroyd derivative [4, 5].

In the case of a Newtonian fluid, $\lambda = 0$, we have then obviously $\mu_p = \mu_s$ and the relation (2) leads to a purely viscous stress tensor τ_{ij} :

$$\tau_{ij} = 2\mu_s D_{ij} \quad (3)$$

in which D_{ij} are the components of the deformation rate tensor.

Application - Journal bearing

Hydrodynamic Equations

As an application, we now consider the above constitutive equations as representing a rheological model of a viscoelastic lubricant in a journal bearing. A schematic sketch of the associated geometry is illustrated in figure 1.

Journal bearing radii: $R_j = 5$ cm and $R_b = 5.3$ cm.
 Clearance $C = R_b - R_j$.
 Relative eccentricity $\varepsilon = 0.9$
 Journal rotation: Ω (rad/s).
 $\vec{OM} = \vec{r}$: Fluid particle position in the core.

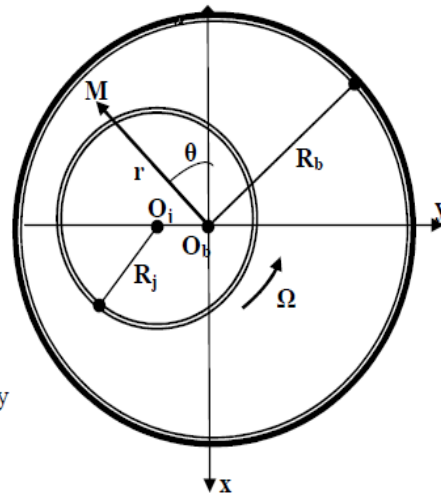


Fig. 1: Schematic of the flow geometry

With the above 2D flow dimensions, (Fig. 1), we consider the following conservative equations:

Continuity Equation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

where $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are the components of the flow velocity $\vec{V}(x, y)$

Momentum Equations: Assuming a stationary flow, we have then the following momentum equations:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5)$$

where ρ is the volumic mass of the lubricant.

The above system of equations (4) and (5) is completed for τ_{ij} by the constitutive equations (2).

Boundary Conditions: We use of course the usual well known boundary conditions [1, 4, 5]:

a) for the velocity field:

$$y = 0 \Rightarrow u(0) = \Omega R_j \text{ and } v(0) = 0, \text{ while for } y = h(\theta) \Rightarrow u(h(\theta)) = v(h(\theta)) = 0 \quad (6)$$

$h(\theta)$ corresponds to a given fluid particle position in the core and is given [1, 4, 5] by :

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (7)$$

$$b) \text{ for the pressure and the stress field: } p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi) \text{ and } \tau_{ij}(r, \theta) = \tau_{ij}(r, \theta + 2\pi) \quad (8)$$

Numerical Procedure

The above equations systems (2) to (5) together with (6) to (8) for given geometric and kinematic characteristics of this 2D flow, are numerically solved using the CFD package Fluent 6.3 completed by UDF. The pre-processor used for the grid generation is Gambit. The particularity of the problem examined here (the clearance size is very small compared to the journal diameter) requires to divide the area into three zones, using the bi-exponent mesh for the very small gaps and exponent mesh for the two other zones, while UDF has been defined [14] to compute the sources terms of the momentum equation and the three components of stress: τ_{xx} , τ_{yy} and τ_{xy} . The numerical procedure to handle the present numerical analysis is given in details in [14].

Numerical Results and Discussion

Newtonian Fluid

As a first step and a way to validate the use of the software Fluent, we test the generalized Maxwell model introduced in the software code via UDF and assign $\lambda = 0$ which corresponds then to a Newtonian fluid.

Pressure distribution

Figure 2 clearly indicates that the numerical pressure distribution along the core obtained is in quite good agreement with the analytical pressure distribution in the core for a Newtonian fluid. For this calculation, we have considered the following: a moderate value of the clearance $C=0.3$ cm, for journal radii $R_j=5$ and 5.3 cm, a relative eccentricity $\varepsilon=0.9$, a journal rotation $N=191$ rpm ($\Omega = 20$ rad/s), while the shear viscosity and the volumic mass of the lubricant are $\mu_s=0.02$ Pa.s and $\rho=820$ kg/m³ respectively.

In the case of a Newtonian fluid, the shear viscosity is the mean characteristic fluid parameter acting on the pressure magnitude as shown in figure 3. As a matter of fact, figure 3 shows an increase of the pressure magnitude with an increase of the shear viscosity μ_s .

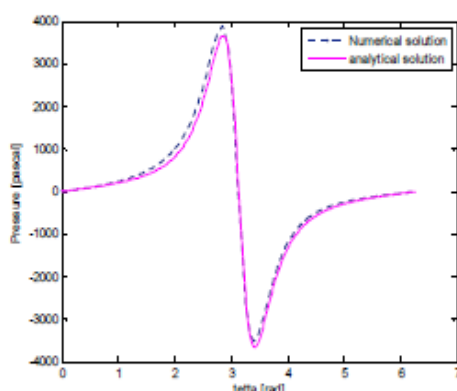


Fig. 2: Numerical and Analytical pressure distribution along the core for Newtonian Fluid.

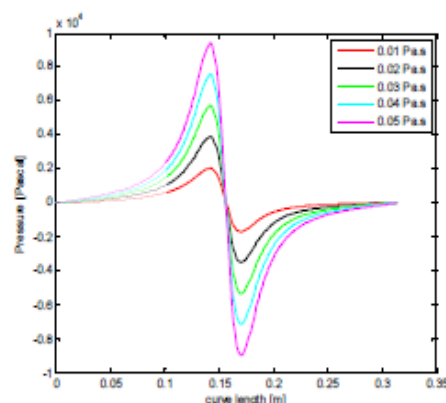


Fig. 3: Effect of the shear viscosity μ_s on the pressure distribution for Newtonian fluid.

Shear stress and First Normal Stress Difference

For comparison purpose with the viscoelastic lubricant, we have also determined the shear stress τ_{xy} distribution in the case of a Newtonian fluid. Figure 4 exhibits a well known distribution of the shear stress along the core of the journal bearing for a Newtonian fluid. It is also shown in figure 4 that the values of the shear viscosity μ_s strongly affect τ_{xy} .

Calculating the first normal stress difference $N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy}$, we have found that $N_1 = 0$. This results in quite agreement for a Newtonian fluid; since it is well known that such a fluid does not exhibit any normal stress difference for this flow situation.

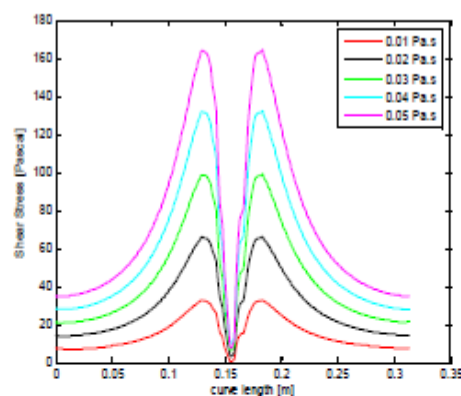


Fig. 4: Shear viscosity effect on the Shear Stress distribution along the core for Newtonian fluid.

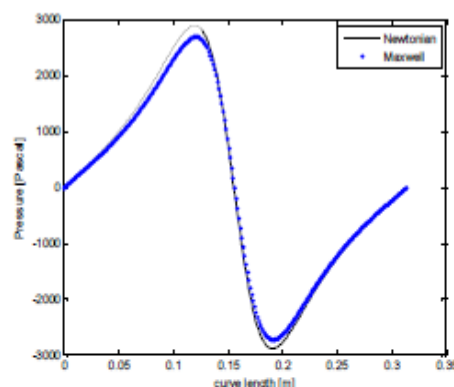


Fig. 5: Pressure distribution for Newtonian and Maxwell fluids ($\mu_s=0.1$ Pa.s; $\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}$ s)

Viscoelastic Fluid – Generalized Maxwell Model

Pressure distribution

We use the same value of the shear viscosity for the Newtonian as well as the Maxwell fluids, that is to say $\mu_s = \mu_p = 0.1$ Pa.s. It is very interesting to note in figure 5 that the pressure distributions for these two fluids are practically the same, with just a small difference occurring at the maximum pressure. That is to say, the contribution to the pressure distribution is mainly viscous.

This is not the case for the shear stress distribution as well as the first normal stress difference.

Shear stress and First Normal Stress Difference

As a matter of fact, in figure 6, it is clearly shown that the Newtonian and the Maxwell (viscoelastic) fluid do not at all exhibit the same shear stress distribution even having the same shear viscosity μ_s and μ_p . There is obviously a viscoelastic effect on the shear stress in the case of the Maxwell fluid. This result is substantiated by the existence of the normal stress difference as indicated in Fig.6.

While the Newtonian fluid does not exhibit any first normal stress difference, figure 7 clearly indicates, for the Maxwell fluid, a first normal stress distribution along the core of the journal bearing. The magnitude of this first normal stress distribution is seen to increase with the increase of the shear viscosity μ_p .

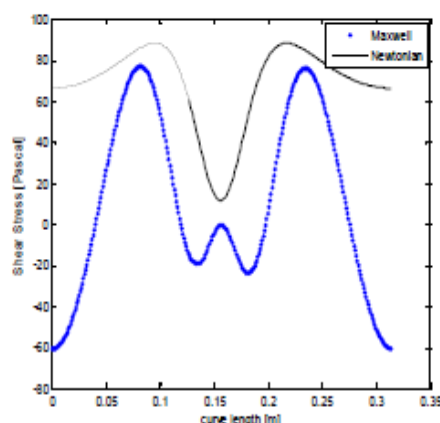


Fig. 6: Shear Stress distribution for Newtonian and Maxwell fluids ($\mu_s=\mu_p$ 0.1 Pa.s; $\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}$ s)

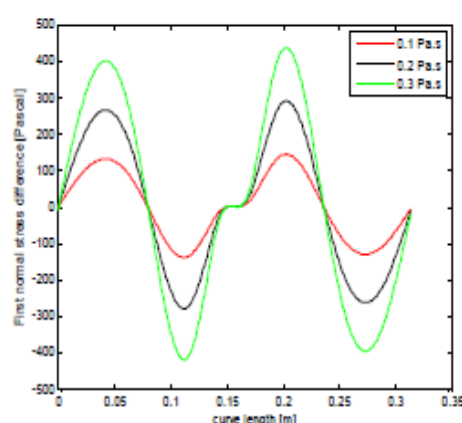


Fig. 7: First normal stress difference distribution for a Maxwell fluid for different values of μ_p ($\lambda=1.2 \cdot 10^{-4}$ s)

Effect of the relaxation time

In order to analyze and appreciate the contribution of the elastic part in such a flow, we consider the effect of the relaxation time λ on the different distributions presented above.

It is easily shown in figures 8 and 9 that the value of the relaxation time does affect the pressure distribution, but slightly, and significantly in the case of the first normal stress difference distribution. They increase with the increase of the relaxation time.

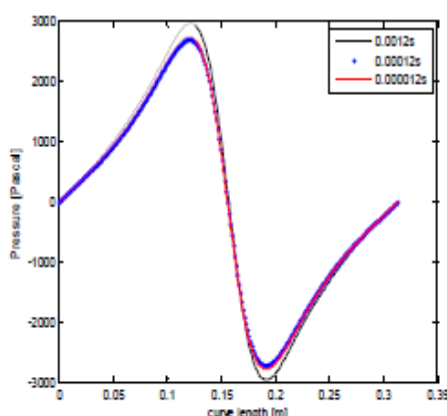


Fig. 8: Relaxation time effect on the pressure distribution for a Maxwell fluid ($\mu_p=0.1$ Pa.s)

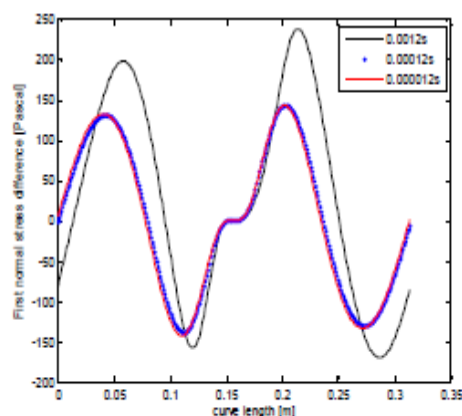


Fig. 9: Relaxation time effect on the first normal stress difference distribution for a Maxwell fluid ($\mu_p=0.1$ Pa.s).

The effects of the kinematic as well as geometric parameters have been also considered. They are described in details in a forthcoming publication. In the case of this contribution, we have mainly focused our attention on the viscoelasticity effects, phenomenologically and quantitatively, when we have to consider a viscoelastic lubricant instead of a Newtonian one.

Conclusion

The main challenge in this contribution is to analyze the effect of a viscoelastic fluid in journal bearing lubrication using a generalized upper convected Maxwell (UCM) model via commercial volume element software Fluent 6.3.

The first and main result is to have used (and adapted) for our calculations the Fluent software, not especially devoted for non Newtonian viscoelastic fluids.

Secondly, we have shown, by mean of this software, that viscoelasticity displays differences with a Newtonian fluid, especially for the shear stress and the exhibition of a first normal stress difference. It has been shown that the viscoelasticity enhances the magnitude of both the pressure and the stress fields on the journal surface. This means that viscoelastic lubricants affect the loading in the journal bearing system.

References

- [1] J. Frêne et al, *Lubrification Hydrodynamique, Paliers et Butées*, Edition Eyrolles (1990).
- [2] K. P. Gertzos, P.G. Nikolakopoulos, C. A. Papadopoulos, *CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant*, Tribology International, Vol. 41 pp. 1190-1204, (2008).
- [3] G. W. Roberts and K. Walters: *On Viscoelastic Effects in journal-bearing Lubrication*, Rheologica Acta, Vol. 31, pp. 55-62, (1992).
- [4] M. Allouche et A. Ouibrahim, *Modélisation Numérique du comportement de Fluides d'Oldroyd B en Lubrification Hydrodynamique*, 3ème Colloque International de Rhéologie, Béjaïa, 12-14 Nov. (2005).
- [5] M. Allouche et A. Ouibrahim, *Milieux Viscoélastiques dans un Espace Confiné –Modèle B d'Oldroyd et Suspensions de Particules Déformables. (Partie 2 - Etude Numérique)*, 42^{ème} Colloque du Groupe Français de Rhéologie, Clermont Ferrand, France, Oct. (2007)
- [6] A. Ouibrahim, D. H. Fruman et R. Gaudemer, *Cavitation dans des Espaces très Confinés*, Colloques Ecoulements Propulsifs dans les Systèmes de Transport Spatial, organisé par CNES, ONERA et CNRS, p 185, Bordeaux Septembre (1995).
- [7] A. Ouibrahim, D. H. Fruman and R. Gaudemer, *Vapour Cavitation in Very Confined Spaces for Newtonian and Non Newtonian Fluids*, Physics of Fluids, Vol. 8, N°. 7, p. 1964, (1996).
- [8] J. A. Tichy, "Non Newtonian Lubrication with the Convected Maxwell Model", Transactions of the ASME, Vol. 118 pp. 344-348, (1996).
- [9] D. Rh. Gwynllwy, T. N. Phillips, *The influence of Oldroyd-B and PTT lubricants on moving journal bearing systems*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 150, pp. 196-210, (2008).
- [10] F. Talay Akyildiz and H. Bellout: *Viscoelastic Lubrication with Phan-Thien-Tanner Fluid*, Transactions of the ASME, Vol.126, pp. 288-291, (2004).
- [11] D. Grecov and J. R. Clermont, *Numerical Simulations of non-Newtonian flow between eccentric cylinders by domain decomposition and stream tube method* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 126, pp. 175-158, (2005).
- [12] Rong Zhang, Xueming He, Simon X. Yang and Xinkai Li, *Perturbation solution of non-Newtonian lubrication with the convected Maxwell Model*, Transactions of the ASME, Vol. 127 pp. 302-305. (2005).
- [13] R. Nebbali, *Propagation de la Chaleur dans un Arbre de Palier en Rotation en Présence d'un Ecoulement Laminaire Confiné*, Thèse de Magister, Université de Tizi-Ouzou, Juin (2002).
- [14] M. Guemmadi, *Convection Forcée de Fluides Viscoélastiques en Milieu Confiné – Cas de la Lubrification Hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université de Boumerdès, (en cours).

Advanced Computational Engineering and Experimenting

doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.478

Generalized Maxwell Model as Viscoelastic Lubricant in Journal Bearing

doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.478.64



Terme source (UDFs) de l'équation de quantité de mouvement

```

DEFINE_SOURCE(U_Source_Term,c,t,ds,eqn)
{
  real Source;
  Source=C_UDSI_G(c,t,0)[0]+C_UDSI_G(c,t,2)[1];
  ds[eqn]=0.;
  return Source;
}

DEFINE_SOURCE(V_Source_Term,c,t,ds,eqn)
{
  real Source;
  Source=C_UDSI_G(c,t,1)[1]+C_UDSI_G(c,t,2)[0];
  ds[eqn]=0.;
  return Source;
}

```

Terme source (UDFs) de l'équation de l'énergie

```

DEFINE_SOURCE(Energy_source_Term,c,t,ds,eqn)
{
  real S1, S2, source;
  S1=(C_U_G(c,t)[1]+C_V_G(c,t)[0])*C_UDSI(c,t,2);
  S2=(C_U_G(c,t)[0]*C_UDSI(c,t,0))+(C_V_G(c,t)[1]*C_UDSI(c,t,1));
  source=S1+S2;
  ds[eqn]=0.;
  return source;
}

```

Terme source (UDSs) de la loi constitutive du modèle de Maxwell UCM

```
#define xlan 0.0001
#define muo 0.3
#define E 0.034
#define To 303

DEFINE_SOURCE(Toxx_Source_Term,c,t,ds,eqn)
{
    real Muv, S1, con, source;
    real Mup, Temp=C_T(c,t);

    Mup=muo*exp(-E*(C_T(c,t)-To));

    Muv=(2/xlan)*Mup;
    S1=(2*C_U_G(c,t)[1]*C_UDSI(c,t,2))+(Muv*C_U_G(c,t)[0]);
    con=(-1/xlan)+2*C_U_G(c,t)[0]);
    source=C_R(c,t)*(con*C_UDSI(c,t,0)+S1);
    ds[eqn]=C_R(c,t)*con;
    return source;
}

DEFINE_SOURCE(Toyy_Source_Term,c,t,ds,eqn)
{
    real Muv, S1, con, source;
    real Mup, Temp=C_T(c,t);

    Mup=muo*exp(-E*(C_T(c,t)-To));

    Muv=(2/xlan)*Mup;
    S1=(2*C_V_G(c,t)[0]*C_UDSI(c,t,2))+(Muv*C_V_G(c,t)[1]);
    con=(-1/xlan)+2*C_V_G(c,t)[1]);
    source=C_R(c,t)*(con*C_UDSI(c,t,1)+S1);
```



```

DEFINE_SOURCE(Toxy_Source_Term,c,t,ds,eqn)

real Muv, S1, S2, con, source;
real Mup, Temp=C_T(c,t);

Mup=muo*exp(-E*(C_T(c,t)-To));

Muv=(1/xlan)*Mup;
S1=Muv*(C_U_G(c,t)[1]+C_V_G(c,t)[0]);
S2=(C_V_G(c,t)[0]*C_UDSI(c,t,0))+(C_U_G(c,t)[1]*C_UDSI(c,t,1));
con = -1/xlan;
source =C_R(c,t)*((con*C_UDSI(c,t,2))+ S1+S2);
ds[eqn] = C_R(c,t)*con;
return source;

```