

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'Hamed Bougara Boumerdes



Faculté des sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master
En Mathématique financière

Sous le thème :

Les équations de la Variance des résidus en Finance

Présenté le 30 /06/2019

Par :

- *Ould ElHacen Ahmed Bezeid*

- *Sakhri Zakaria*

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Président Mme .F.Flici

Examinatrice Mme .M.Benmansour

Promotrice Mme. S.MEDDAHI

2018/2019

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	8
1.1 INTRODUCTION.....	11
1.2 INSTRUMENTS FINANCIERES.....	11
1.2.1 <i>Produit primaires</i>	11
1.2.2 <i>Produits dérivés</i>	12
1.3 MODELE BLACK-SCHOLES.....	4
1.4 LA VOLATILITE	6
1.4.1 <i>Définition</i>	6
1.4.2 <i>Types de la volatilité</i>	6
1.5 LES PROPRIETES DES SERIES FINANCIERES.....	11
1.5.1 <i>Sérialité temporelle</i>	11
1.5.2 <i>Propriétés des séries financières</i>	12
1.6 TESTES STATISTIQUES.....	14
1.6.1 <i>Test de normalité</i>	14
1.6.2 <i>Autocorrélation</i>	15
CHAPITRE 2 MODELISATION DE LA VARIANCE CONDITIONNELLE.....	16
2.1 INTRODUCTION.....	17
2.2 LE PRINCIPE GENERAL DU MODELE ARCH ET LEURS EXTENSIONS :.....	17
2.3 MODELE ARCH(P)	18
2.3.1 <i>Propriétés des modèles ARCH</i>	20
2.4 GARCH (P,Q).....	25
2.4.1 <i>Les Propriétés des processus GARCH</i>	26
2.4.2 <i>Modèle GARCH (1,1)</i>	27
2.5 ESTIMATION DES PARAMETRES ARCH ET GARCH.....	28
2.5.1 <i>L'estimation des paramètres ARCH</i>	28
2.5.2 <i>Estimation des paramètres GARCH</i>	28
2.6 MODELE IGARCH (P,Q)	29
2.7 MODEL GARCH-M	31
2.8 MODELES ARCH/GARCH ASYMETRIQUES.....	32
2.8.1 <i>Introduction</i>	32
2.8.2 <i>Modèle EGARCH:</i>	32
2.8.3 <i>Modèle Threshold GARCH (TGARCH)</i>	34
2.8.4 <i>Modèle APARCH</i>	34
2.9 ARBITRAGE ENTRE LA MODELISATION ARMA SANS EFFETS ARCH ET CELLE AVEC EFFETS ARCH	35
2.9.1 <i>L'analyse graphique</i>	36
2.9.2 <i>L'étude des statistiques descriptives</i>	36
2.9.3 <i>Le test de marche aléatoire</i>	36
2.9.4 <i>Choix du processus ARCH adéquat (optimal)</i>	37
PARTANT DE LA SPECIFICATION DES ERREURS DE LA FORME GARCH (P, Q) SUIVANTE :	37
CHAPITRE 3 APPLICATION EN FINANCE.....	38
3.1 INTRODUCTION :.....	39

3.2	METHODOLOGIE DE BOX ET JENKINS.....	39
3.3	ETUDE DE LA SERIE DES RENDEMENTS "DIESEL" PAR LA METHODE DE BOX-JENKINS	43
3.4	ETUDE DE LA VOLATILITE DE LA SERIE "PRIX DU DIESEL "	54
3.5	LES PREVISIONS	68
	CONCLUSION GENERALE	71

Remerciements

Nos sincères remerciements à dieux, le tout puissant, le miséricordieux qui nous a donné la force et le courage afin d'élaborer ce modeste travail.

Nos remerciements s'adressent tout naturellement à notre promotrice, Madame S.MEDDAHI, Pour sa patience, et surtout pour sa confiance et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Nous remercions vivement Madame (F.Flici) enseignante à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes et chef de département mathématiques pour l'intérêt qu'il a apporté à ce sujet en acceptant d'être le président du jury.

Nous remercions également Madame (M.Benmansour) enseignante à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes pour avoir accepté d'évaluer ce travail et participer à ce jury.

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants du département des mathématiques pour leur soutien inestimable et leur instruction

Enfin, on remercie nos familles et nos amis qui ont fait de notre réussite leur principale Préoccupation, et à tout ceux de près ou de loin, ont contribués à la réalisation de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mon cher père,

Ma très chère Mère,

Ma très chère sœur,

Mes trois frères,

Ma grande mère,

Mon grand-père,

Les étudiants de toute l'Algérie,

Mon binôme AHMED,

Tous mes très chers amis spécialement Smail.

SAKHRI ZAKARIA

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mon cher père,

Ma très chère Mère,

Mes très chères sœurs,

Mon grand frère,

Mes grandes mères,

Les étudiants de toute l'Algérie,

Mon binôme Zakaria,

Tous mes très chers amis.

Ould Elhacen Ahmed Bezeid

Introduction générale

Les modèles mathématiques constituent un pilier incontournable de la finance de marché moderne.

Avec le développement des marchés financiers, l'étude des actifs financiers devient un véritable enjeu et n'a pas cessé de prendre de l'importance au cours des dernières années.

L'observation empirique du cours des actifs financiers montre que ceux-ci ne sont pas déterminés de façon certaine par leur histoire. En effet, les nombreuses opérations d'achat ou de vente ne sont pas prévisibles, font souvent intervenir des éléments n'appartenant pas à l'histoire et modifiant la courbe de l'actif.

Pour bien comprendre ces modèles de plus en plus complexes, les spécialistes de la finance utilisent des outils mathématiques.

Le concept de la volatilité est probablement un des sujets qui soutient le plus des recherches dans le domaine de la finance mathématique, cet intérêt de la volatilité est de mesurer de l'instabilité du cours d'un actif financier, elle mesure l'amplitude des variations d'une action, d'un produit dérivé ou d'un marché, il s'agit d'un paramètre de quantification du risque de rendement et de prix.

Le prix juste d'une option est déterminé par un certain nombre de facteurs dont la volatilité de l'actif sous-jacent. Tous ces facteurs sont directement observables sur le marché mis à part la volatilité.

La théorie traditionnelle des séries temporelles n'est pas suffisante pour décrire les mouvements à court terme des prix d'un actif, car on peut constater des périodes de stabilité et des périodes de troubles en regardant la volatilité et les distributions non conditionnelles leptokurtiques, Mussa (1979) et Friedman et Vandersteel (1982). A cet effet, nous nous proposons, de modéliser la volatilité à l'aide d'un processus ARCH dont nous appliquons aux données des prix d'un actif.

Depuis leur introduction par Engle (1982), les modèles ARCH connaissent de plus en plus de développements et des applications, notamment dans l'économétrie de la finance Bollerslev (1986), Bollerslev et al (1992) et Kroner et al (1993).

En dehors des motivations probabilistes, la classe des modèles ARCH est parfaitement adaptée pour décrire ce type de comportement, tandis que les rendements présentaient certains degrés d'asymétrie dans leur variance conditionnelle, la nature même des prix d'un actif qui sont par définition bilatéraux rend de telles asymétries peu probables. L'analogie entre les modèles ARCH en temps discret et les modèles de diffusion en temps continu ont été établis par Nelson (1990). Cette analogie a permis en particulier le développement des modèles à volatilité stochastique. En effet, un des apports des modèles ARCH était de mieux s'ajuster aux données (en particulier aux données de prix d'un actif) que ne le faisant les modèles ARMA.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons, à la modélisation de la variance conditionnelle selon les modèles linéaires ARCH, GARCH et GARCH-M et les modèles non linéaire EGARCH, TGARCH et APARCH.

Dans le premier chapitre, au début nous rappelons les concepts de base de prix d'actif financier (instrument financiers) et après nous présentant le modèle de black Scholes, ensuite nous analysons les méthodes d'estimation de la volatilité dans le cas où elle est constante (volatilité historique et volatilité implicite), les principales propriétés des séries financières et les tests statistiques des séries de rendements (skewness, kurtosis et test de jarque-Bera).

Le deuxième chapitre est consacré aux modelés conditionnelle hétéroscédastique ainsi leur propriétés et l'estimation de leurs paramètres.

Au cours de troisième chapitre nous présentons une application numérique sur le rendement de prix de Diesel nous nous basons sur la méthode de Box-Jenkins pour modéliser la série, nous présentons les différentes équations de la variance conditionnelle de ce prix et on termine avec des prévisions

Chapitre1 : Volatilité et série financières

1.1 Introduction

Les actifs financiers sont gérés par des comportements aléatoires qui traduisent la complexité du monde économique et politique. L'évolution de ceux-ci est devenue un enjeu majeur pour les opérateurs des marchés financiers.

Ce chapitre comporte deux parties, nous allons présenter les définitions des instruments financiers ainsi la notion de la volatilité et ces propriétés.

1.2 Instruments financiers

Un actif ou instrument financier est un contrat entre deux parties, un créateur et un débiteur. Un actif financier est donc fondamentalement une convention entre deux agents économiques par les quelles s'échange, dans certaine proportion.

1.2.1 Produit primaires

Les principaux produits financiers sur le marché des capitaux :

Les actions : Une action est un titre sous la forme d'un certificat de participation dans les capitaux propres d'une entreprise. Un actionnaire est dès lors copropriétaire de l'entreprise pour le pourcentage d'actions qu'il détient. En échange, l'actionnaire a droit à une partie des bénéfices, aussi appelée dividende. A une action est habituellement attaché un droit de vote que l'on peut exercer pendant l'assemblée générale des actionnaires.

Obligation : les obligations sont des titres de créances à long terme représentatifs de dettes. Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. Les obligations peuvent être émises par les entreprises privés ou publiques, par l'état, ainsi que par les administrations publiques et les collectivités locales.

Coupon : Le coupon est le taux d'intérêt fixe payé régulièrement sur un investissement à taux fixe.

Obligation à Zéro Coupon : Une obligation à zéro coupon se définit comme étant une obligation sans versement d'intérêt durant toute la durée de vie de l'obligation. La rémunération des investisseurs est alors assurée par la différence entre la valeur d'émission et

la valeur de remboursement (cette dernière étant évidemment supérieure à la valeur d'émission). Une obligation à zéro coupon présente comme avantage pour l'émetteur de n'avoir à payer les intérêts qu'à la date de remboursement. Pour les investisseurs, l'avantage réside dans la connaissance dès l'acquisition de l'obligation à zéro coupon du taux de réinvestissement des coupons. En revanche, en cas de défaillance de l'émetteur, l'investisseur risque de perdre, et son capital, et les intérêts dus par l'émetteur.

Nominal de l'action : Notion assez formelle, juridique et comptable qui n'a pas beaucoup d'intérêt en finance. Elle n'a aucun rapport avec la valeur de l'action si ce n'est le jour de la création de l'entreprise où dans la plupart des cas les actions sont alors émises au nominal. Ultérieurement, la valeur de l'action évoluera en fonction des bénéfices réalisés et espérés et se déconnecte donc du nominal. Multiplié par le nombre d'actions, on obtient le capital social de l'entreprise.

Dividende : Un dividende est une distribution au comptant du bénéfice, versée par un fonds ou une entreprise à ses actionnaires.

1.2.2 Produits dérivés

Un produit dérivé est un contrat entre deux parties qui vont s'accorder sur le prix d'un actif. C'est donc un instrument financier sous-jacent d'un actif qui permet de fixer le prix de ce dernier pour une période donnée. La valeur d'un produit dérivé dépendra donc de la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps. Initialement ces produits avaient pour but de couvrir les entreprises contre des risques financiers tels qu'une augmentation du prix des matières premières ou un risque de change.

Un contrat à terme

Un contrat à terme est une opération négociée entre deux contreparties (l'acheteur et le vendeur) sur un marché organisé et réglementé appelé «marché à terme». Il constitue un engagement d'acheter (pour l'acheteur), de vendre (pour le vendeur) un actif sous-jacent à un prix fixé dès aujourd'hui mais pour une livraison et un règlement à une date future.

Les options : Une option est un titre qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (ou de vendre) un titre à un prix déterminé à l'avance (le prix d'exercice, Strike en anglais) pendant une certaine période de temps.

Options d'achat, options de vente : calls et puts

On appelle option d'achat européenne (european call) un contrat entre deux parties, l'acheteur et le vendeur du contrat, qui confère à l'acheteur le droit mais non l'obligation d'acheter, à une certaine date T (la maturité ou l'échéance) et à un certain prix (le Strike, ou prix d'exercice) fixés à l'avance, une certaine quantité d'un produit déterminé (le sous-jacent). La contrepartie (le vendeur, celui qui a écrit l'option) a l'obligation de procéder à la transaction si le détenteur de l'option en manifeste le désir. En raison du caractère irrégulier de ce contrat (option pour le détenteur, obligation pour le vendeur) et du risque lié aux fluctuations aléatoires du prix du sous-jacent, risque qui sera assumé par le vendeur, celui-ci réclamera une prime qui sera réglée lors de l'établissement du contrat, c'est à dire la date $t=0$. Pour détenir une option on doit l'acheter en versant la prime ou bien la racheter à quelqu'un qui veut s'en débarrasser. La prime et le prix de rachat sont déterminés par négociations sur les marchés de dérivés.

Le fait, pour le détenteur de l'option, de procéder à la transaction (pour un call, l'achat du sous-jacent) à la date T selon les termes du contrat contingent (l'option) qu'il a acheté s'appelle l'exercice.

A coté des options d'achat, on a vu qu'il existe les options de vente (puts), qui confèrent à leur détenteur le droit mais non l'obligation de vendre une quantité déterminée de sous-jacent, si l'option est exercée, l'émetteur de l'option (le vendeur) a l'obligation d'acheter la quantité de sous-jacent prévue. Ainsi, quatre cas de figure peuvent se présenter :

- Achat d'une option d'achat.
- Vente d'une option d'achat.
- Achat d'une option de vente.
- Vente d'une option de vente.

Certaines options confèrent à leur détenteur le droit d'exercer à n'importe quelle date durant la période de maturité : on parle alors d'option américaine (American option).

Les paramètres des options :

Le prix d'exercice (Strike) : le prix d'exercice (Strike) est le prix auquel le détenteur de l'option peut acheter ou vendre le sous-jacent. Ce prix est déterminé lors de la négociation initiale de l'option et n'est pas modifiable pendant la durée de vie du contrat (jusqu'à l'échéance). Le choix du prix d'exercice est dès lors très important puisqu'il représente les conditions de négoce du sous-jacent.

La prime : la prime est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Pour un contrat portant typiquement sur 100 actions support sur les marchés organisés, l'acheteur doit payer 100 fois la prime. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles particularités de marché.

L'échéance : l'échéance ou maturité de l'option qui limite sa durée d'exercice. Dans les marchés organisés, trois échéances sont cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois.

1.3 Modèle Black-Scholes

Le modèle Black-Scholes qui est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique à temps continue ; était que Le prix de l'option d'achat est indiqué implicitement si le sous-jacent est échangé sur les marchés. L'utilisation du modèle et de la formule de ce dernier est très répandue sur les marchés Financiers.

Présentation du modèle :

Considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_{t \geq 0}), P)$. Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle continu avec un Actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) est un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

L'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, S_0^0 = 1$$

De sorte que $S_t^0 = \exp(rt)$ pour $t \geq 0$, ou r le taux d'intérêt (connu et constant).

On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

On applique la formule d'Itô pour résoudre l'équation (1) :

$$df_t = \left(\frac{df}{ds} \mu S_t + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{df}{ds} \sigma S_t dW_t$$

On pose $Y_t = \log(S_t)$ d'ou $S_t = \exp^{(Y_t)}$

Appliquant la formule d'Itô à Y_t on obtient :

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\frac{1}{S_t} \mu S_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ &= \log S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ &= \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \end{aligned}$$

On déduit que :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right]$$

Ou ce processus est appelé un mouvement brownienne géométrique

1.4 La Volatilité

1.4.1 Définition

En finance, la volatilité est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financière.

Elle est calculée sur une période donnée et permet ainsi d'apprécier la régularité des performances d'un fonds d'investissement.

la volatilité est un écart-type qui mesure le risque de dispersion de la rentabilité par rapport à la moyenne des rentabilités

1.4.2 Types de la volatilité

1.4.2.1 Volatilité historique

On utilise la volatilité historique pour essayer de prévoir les cours futures a partir des cours passés, c'est à dire que l'on prend en général les cours passés pour essayer de retrouver une similitude avec les nouveaux et prévoir ainsi l'évolution de l'action

Estimation de la volatilité historique

Soit :

n : Nombre d'observation.

s_i : Le prix de l'action

Γ : Longueur de l'intervalle

r_i : Les Rendements

Avec $r_i = \log \left(\frac{s_i}{s_{i-1}} \right)$ pour $i = 1, \dots, n$

L'estimateur usuel S de la déviation standard des r_i est donnée par :

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2}$$

Où \bar{r} la moyenne de r_i .

Or d'après ce qui précèdent la déviation standard des r_i est $\sqrt{\tau}$. Donc la variable S estime $\sigma\sqrt{\Gamma}$. D'où on peut estimer σ par $\hat{\sigma}$ tel que :

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\tau}}$$

On peut facilement montrer que l'erreur standard de cette estimation est approximativement $\frac{\hat{\sigma}}{2n}$.

Le choix de la valeur n est cependant pas facile mais plus le nombre de données est grand, meilleur sera l'approximation cependant on sait maintenant que σ change au cours du temps et de nouvelles données pouvant ne pas être caractéristique de la tendance future de la volatilité.

Cependant si on cherche à estimer la volatilité afin de calculer le prix d'exercice d'une option sur deux ans, il faut prendre en considération les données des deux dernières années.

1.4.2.2 Volatilité implicite

La volatilité implicite est le résultat d'une équation liant le prix au marché d'une option à ses déterminants dans le cadre d'un modèle d'évaluation donné, elle peut s'interpréter comme étant l'estimation contemporaine de la variabilité moyenne future de l'actif sous-jacent par le marché au cours de la vie de l'option. La volatilité implicite sera donc une estimation actuelle ayant un contenu prospectif. En utilisant les prix observés des options C_t et en niveau de la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre σ . En général on n'a pas une seule valeur de σ , mais une courbe qui dépend du Strike k . C'est le phénomène du « **smile de volatilité** »

Estimation de la volatilité implicite

Il existe plusieurs façons d'estimer la volatilité implicite. Cela pose un problème car il devrait exister une seule mesure de la variabilité par actif financier sous-jacent à l'option. Pour résoudre le problème de la structure de la volatilité implicite, plusieurs auteurs ont suggéré différentes méthodes de calcul afin de trouver un seul chiffre pouvant caractériser un

actif financier. En particulier **mayhew** (1995) expose trois façon d'estimer cette mesurée la variabilité unique.

La première est de calculer la volatilité implicite (σ_{impl}) pour tout les options d'une même classe et de calcule une simple moyenne arithmétique de σ_{impl} comme ceci :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{impl}$$

La deuxième formule en utilisant la formule de Black-Scholes est :

$$\tilde{\sigma}_{impl} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N v_i} \sqrt{\sum_{i=1}^N v_i^2 \sigma_{impl}^2}$$

Ou v est la Véga de l'option calculer avec la formule de Black- Scholes. Le coefficient Véga mesure la sensibilité du prix d'une option a la variation de la volatilité du titre sous-jacente ce calculer comme suit :

$$V = p_s \sqrt{\tau} \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\tau}}$$

Avec :

p_s : Le prix de l'actif sous-jacent.

τ : La maturité.

$$d_1 = \frac{\ln \frac{n}{k} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Cette technique possède l'avantage de pondérer les options selon leur degré de sensibilités a la volatilité.

D'autre auteurs en utilise une troisième formule qui est une autre forme pondérer afin de réduire le décalage causée par l'écart entre le prix prévu par le modèle et le prix réelle l'option :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \sum_{i=1}^N v_i [C_i - BS_i(\hat{\sigma})]^2$$

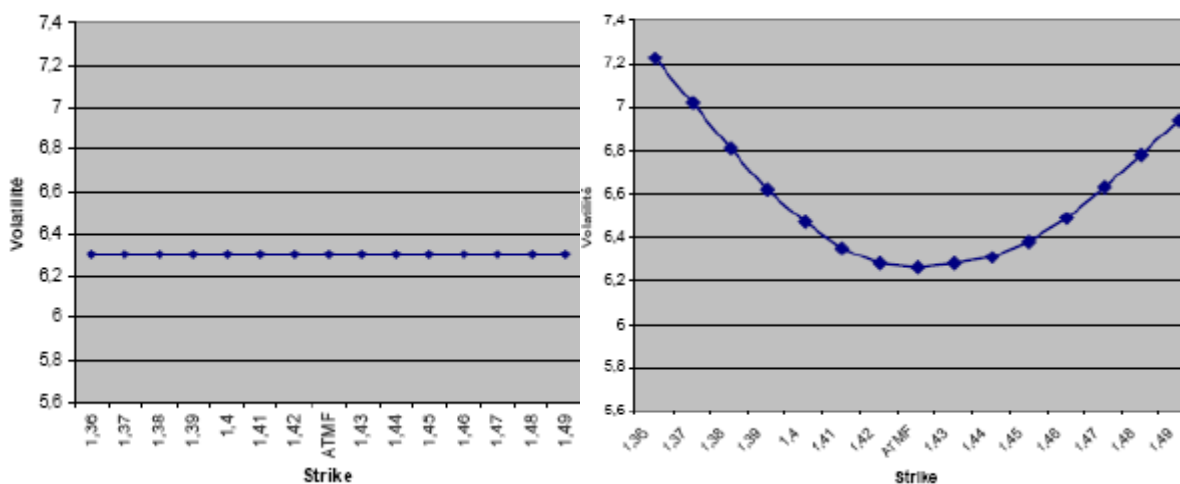
Où C_i est la prime au marché de l'option et BS est la prime évaluée par le modèle de Black-Scholes.

Les études récentes sur le sujet de l'estimation de la volatilité implicite donne ces trois méthodes présentes. Il existe donc un grand choix possible de méthodes de mesure de la volatilité implicite.

Smile de la volatilité

La volatilité est l'élément le plus important dans l'équation, il s'agit d'un seul paramètre inobservable. Le prix de l'option considéré comme fonction de la volatilité. Si ce modèle était parfait, la volatilité implicite doit être la même quelque soit le prix du marché de l'option.

On représente la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice de l'option en fixant la maturité on trouve l'allure de la courbe semblable à un sourire c'est de là le terme « **smile** » Soit ci-dessous deux courbes tracées en fonction du prix d'exercice de l'option (Strike)



Courbe1: Volatilité constante Black & Scholes

courbe2 : smile de volatilité

D'après ces deux graphes on peut illustrer la différence entre la volatilité implicite utilisé par les opérateurs de marché celle du modèle Black & Scholes qui reste constant.

Structure par termes de volatilité

On appelle structure par termes d'un prix d'exercice K , la fonction σ_t de la volatilité implicite pour des maturités T avec K représente habituellement le prix d'exercice à la monnaie lorsque les volatilités historique à court termes sont faibles alors que cette volatilité tend à être une fonction croissante de la maturité par contre si on a une baisse de la volatilité par les opérateurs alors la volatilité tend à être une fonction décroissante de la maturité

Surface de la volatilité

La surface de la volatilité est une combinaison de la structure par termes et la courbe du « smiling », c'est une représentation en trois dimensions de la volatilité implicite en fonction du temps et soit du Strike ou du delta des options cotées sur le marché.

On ci-dessous la représentation graphique de la surface de la volatilité implicite du CAC 40 :

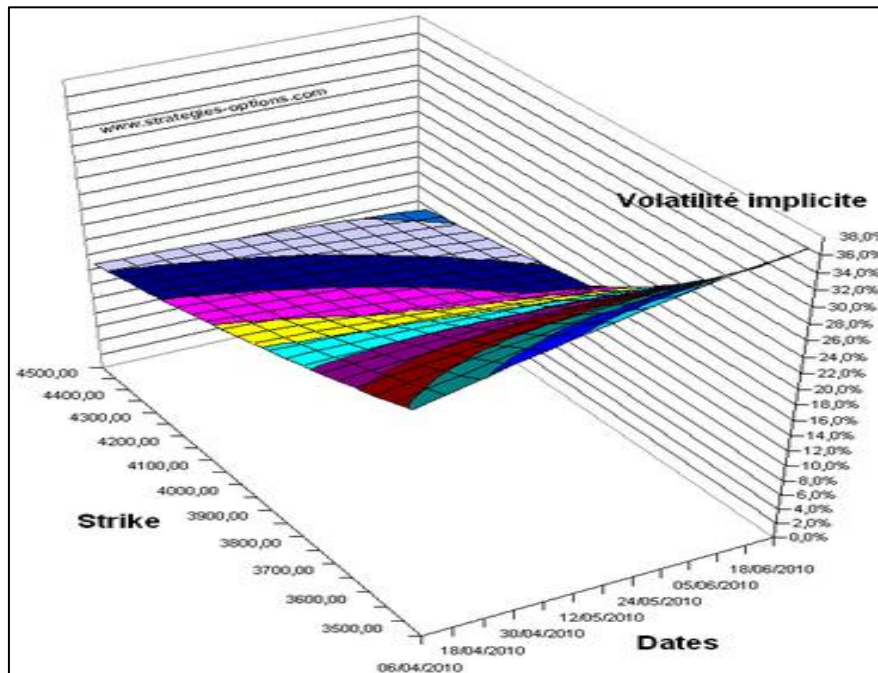


Figure : exemple de représentation de la surface du CAC 40

1.5 Les propriétés des séries financières

1.5.1 Série temporelle

C'est une suite d'observations (x_1, x_2, \dots, x_n) qui prend une variable au cours d'une période définie.

Généralement ces observations sont équidistantes les une des autres (temps discret ; $t \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$)
Le temps correspond à un jour un mois ou une année.

L'ensemble des valeurs X_t quand t varie est appelé processus aléatoire : $[X_t, t \in \mathbb{Z}]$ pour une série temporelle.

En général les séries de prix d'actif et de rendements présentent quelques propriétés similaires suivant leur périodicité.

Soit S_t le prix d'un actif à la date t . On va s'intéresser à une transformation de ce prix par rapport à une durée, ou une fréquence d'échantillonnage. C'est le rendement.

Le rendement à l'instant t peut être définie par :

- **Taux de rendement arithmétique**

$$R_{1,t} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

- **Taux de rendement géométrique :**

$$R_{2,t} = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Les deux rendements sont liés par la formule suivante :

$$R_{1,t} = e^{R_{2,t}} - 1 \approx R_{2,t}$$

Dans notre cas on utilise le taux de rendements géométrique et il sera noté par R_t . le taux de rendements géométrique est employé car il est le plus utilisé les diverses recherche, ce qui permet de comparer les résultats obtenu, et parceque le taux de rendements géométrique permet de relier les modèles en temps discret et ceux en temps continu.

1.5.2 Propriétés des séries financières

1.5.2.1 Stationnarité

a) Stationnarité forte

Le processus X_t est dit strictement stationnaire si $\forall \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ tel que $t_i \in Z$ et pour tout temps $h \in Z$, avec $t_{i+h} \in Z \quad \forall i = 1, \dots, n$. La suite $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ à la même distribution conjointe que la suite $\{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}\}$

b) Stationnarité faible

Un processus x_t est dit stationnaire au second ordre si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

i) $E(x_t^2) < \infty \quad \forall t \in Z$

ii) $E(x_t) = m$ indépendant de temps (constante)

iii) $\text{cov}(x_t, x_{t+h}) = E[(x_{t+h} - m)(x_t - m)]$
 $= \delta(h)$ Indépendant de $t, \forall (t, h) \in Z$

On a alors la première condition qui permet la convergence des moments d'ordre deux, et on a la seconde condition signifie que les variables aléatoires x_t ont la même espérance, \forall la date t . et la 3^{ème} condition porte sur les moments d'ordre deux résumés par la fonction d'auto covariance.

1.5.2.2 Non stationnarité

La plupart des séries de prix d'actifs financiers S_t sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité de la seconde ordre, tandis que les processus associés aux rendements sont compatibles avec la propriété de stationnarités du second ordre.

1.5.2.3 Excès du coefficient d'aplatissement (kurtosis) et coefficient d'asymétrie (skewness)

Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) des séries de rendement est plus intéressant que celui du bruit gaussien. Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) d'une variable aléatoire correspond à son moment centré d'ordre 4, le kurtosis est une mesure de l'épaisseur des queues de distribution. Cette mesure fondée relativement à la distribution normale, considérée comme une distribution à queue plate et qui possède un coefficient d'aplatissement égale à 3.

- Si le kurtosis excède 3, alors les queues de distribution sont épaisses et la distribution est appelée leptokurtique.
- Si le kurtosis est inférieur à 3, la distribution est dite platikurtique.

La formule de kurtosis s'écrit de la façon suivante :

$$K(x) = \frac{[X - E(X)]^4}{[var X]^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

Pour la symétrie, la distribution de l'évolution des cours est généralement asymétrique. Il y a plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse des cours c'est-à-dire les rendements tendent à baisser qu'à monter. Cela s'explique par la récurrence des chocs. Cette propriété met en évidence le phénomène d'asymétrie des séries financières.

Le coefficient de Skewness s'écrit de la façon suivante :

$$S(x) = \frac{E[X - E(X)]^3}{[var X]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si le coefficient de Skewness est négatif, la distribution est asymétrique. Cela veut dire que la probabilité d'obtenir des valeurs inférieures à la moyenne est supérieure à celle d'obtenir des valeurs plus forte que la moyenne.

1.5.2.4 Hétéroscédasticité

L'hétéroscédasticité est une caractéristique des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps. Pour démontrer facilement l'hétéroscédasticité d'une série financière, il est plus intéressant de subdiviser notre série de données et en suite de calculer la déviation standard (l'écart-type) de chacune de sous-séries et les comparer.

1.5.2.5 Autocorrélation

Les rendements ne démontrent qu'une faible autocorrélation, tandis que les carrés des rendements sont auto-corrélés à un niveau significatif.

L'autocorrélation d'un processus X_t désigne la corrélation du processus par rapport à une version décalée dans le temps de lui-même. L'absence d'autocorrélation de rendements

renvoie à la notion d'efficacité des marchés. Nous rappelons que sous cette hypothèse, le prix d'une action incorpore toute l'information disponible, elle signifie que les cours ne peuvent varier entre t et $t + 1$ qu'en raison de l'arrivée de nouvelle information non anticipées. Ce qui implique qu'après une hausse des prix d'hier, il a à peu près autant de chances une hausse ou une baisse des prix aujourd'hui. Pour l'investisseur, cela signifie qu'il est à priori difficile d'utiliser l'information dans les prix passés pour prévoir les prix futurs.

1.6 Testes statistiques

1.6.1 Test de normalité

On peut tester l'hypothèse de loi gaussienne, si les résidus sont indépendants il existe plusieurs tests statistiques de normalité, le test le plus utilisé est celui du Jarque-Bera qui est fondé sur la notion de skewness (asymétrie) et du kurtosis (aplatissement).

a) Tests de skewness et kurtosis

Soit $\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$ représente le moment centré d'ordre k , le coefficient de skewness

(S_k) est égale à : $S_k^{\frac{1}{k}} = \frac{\mu_3}{\mu_3^{3/2}}$ et le coefficient de kurtosis $K_u = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Si la distribution est normale et le nombre d'observation est grand :

$$\left(S_k^{\frac{1}{k}} \right) \sim N \left(0, \sqrt{\frac{6}{n}} \right) \quad \text{et} \quad K_u \sim N \left(3, \sqrt{\frac{24}{n}} \right)$$

On construit alors les statistiques :

$$v_1 = \frac{S_k^{\frac{1}{k}} - 0}{\sqrt{6/n}} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{K_u - 3}{\sqrt{24/n}}$$

Que l'on compare à 1,96 au seuil $\alpha = 5\%$

Si l'hypothèse $H_0 : v_1 = 0$ (symétrie) et $v_2 = 0$ (aplatissement normale) sont vérifiées alors :

$$|v_1| < 1,96 \quad \text{et} \quad |v_2| < 1,96.$$

Sinon l'hypothèse de normalité est rejetée

b) Test de jarque-Bera

Le test de normalité de Jarque-Bera est également fondé sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Il évalue les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence de la loi normale.

La statistique de Jarque-Bera (JB), qui s'écrit :

$$JB = n \left(\frac{S_k}{6} + \frac{(K_u - 3)^2}{24} \right)$$

Elle est distribuée asymptotiquement selon une loi de χ^2 à 2 degré de liberté. Si

$JB > \chi^2_{(1-\alpha)}(2)$, on rejette l'hypothèse H_0 de normalité des résidus au seuil α .

1.6.2 Autocorrélation

Il existe un grand nombre de tests d'autocorrélation pour tester si les rendements supposé de même loi sont indépendant que l'on connaisse la loi de ces dernières.

- **Test d'indépendance de Box-Ljung :**

Le test de Box-Ljung concerne les k premières autocorrélations, où k égale au quart de la taille de la série. Un modèle est homogène si ses résidus ne se comportent comme une réalisation d'un bruit blanc.

On test l'hypothèse nulle H_0 les autocorrélations ne sont pas significatives c'est à dire $\rho_1 = \rho_2 = \dots \dots \rho_k = 0$ tel que h prend les valeurs $r + 1, r + 2, \dots \dots k$ avec r est le nombre de paramètres estimés.

Pour cela on utilise le test de Box-Ljung qui est basé sur la statistique Q définie par :

$$Q = n(n + 2) \sum_{h=1}^k \frac{\hat{\rho}_h^2}{n-h}$$

qui est distribuée selon un χ^2 à $(k - r)$ degrés de liberté, avec $\hat{\rho}_h$ égale l'autocorrélation d'ordre h .

Règle de décision :

-On accepte H_0 au seuil α (indépendance des résidus) si $Q < \chi^2_{k-r}$

-On rejette H_0 au seuil α (indépendance des résidus) si $Q > \chi^2_{k-r}$

chapitre 2 Modélisation
de la variance
conditionnelle

2.1 Introduction

Une nouvelle voie particulièrement riche pour la spécialisation des comportements sur le marché financière était ouverte par la modélisation de processus ARCH (hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive, en anglais autoregressive conditional heteroscedasticity).

A partir des travaux de ENGLE(1982), toute série d'aménagement a été proposée afin d'adapter l'étude de cas particulier des principales de cette modélisation.

Ainsi, les modèles **ARCH** sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle puis généraliser en modèles de l'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive générale (**GARCH** en anglais generalized autorégressive conditional heteroscedasticity développé par BOLLER-Slev en 1986, Chou et Kronen en 1992).

2.2 Le principe général du modèle ARCH et leurs extensions :

L'approche ARCH-GARCH a été proposée pour prendre en compte des variances conditionnelles dépendant de temps. Le principe général consiste donc à remettre en cause la propriété d'homoscédasticité que l'on retient généralement dans le cadre du modèle linéaire. Ce principe qui a été proposé par Engle(1982) consiste à supposer que la variance s'étend de l'ensemble informationnel dont on dispose. Il propose une spécification ARCH(p) où le carré des perturbations suit un processus autorégressif d'ordre p. Engle a donc proposé ces processus pour pallier aux insuffisances de la classe des présentations ARMA, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) en fonction du temps et par des ajustements asymétriques. Ainsi, les modèles ARCH sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle. La famille des modèles ARCH peut se décomposer en deux sous-ensembles : les modèles ARCH linéaires et les modèles ARCH non linéaires. Les premiers reposent sur une spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations :

modèles ARCH (p; q), GARCH (p; q) (ce modèle : GARCH (p; q) est défini par Bollerslev (1986). Les modèles ARCH non linéaires sont caractérisés par des spécifications asymétriques des perturbations ce sont les modèles EGARCH (p; q), TARCH(q) et TGARCH (p; q) ce qui nous va l'aborder.

2.3 Modèle ARCH(P)

Les processus ARCH (auto Régressive conditional Heteroskedasticity) sont utilisés pour modéliser la volatilité d'une série financière

On sait que le modèle $ARMA(p, q)$ s'écrivait :

$$\Phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Où :

$$\varepsilon_t \sim \text{Bruit blanc} (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Or σ_ε^2 peut ne pas être constant on peut voir $V(\varepsilon_t/I_{t-1}) = \sigma_t^2$ qui est une variance conditionnelle.

La formule générale ARCH(P) s'écrit comme suit :

$$X_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\text{Avec } \sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Définition : un processus X_t satisfait une présentation ARCH(1) si

$$X_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

Où μ_t est un bruit blanc faible tel que $E(\mu_t) = 0$ et $E(\mu_t^2) = \sigma_\mu^2$

$$\text{Avec } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

Généralement, μ_t désigne un ensemble de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées et réduites.

La composante σ_t^2 désigne une variable qui conditionnellement à l'ensemble d'information des valeurs passées de X_t , i.e. à processus X_t est caractérisé par des autocorrélations nulles et une variance conditionnelle variable dans le temps en fonction de l'ampleur des innovations passées.

On a aussi des résultats intéressants en considérant le processus autorégressif sur X_t^2

Pour simplifier on se limite au cas **ARCH(1)** dans ces conditions :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \Leftrightarrow \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)$$

Soit aussi :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$$

Où $v_t = (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)$ est un processus d'innovation qui est lui-même une différence de deux martingales.

et en ayant les informations disponible jusqu'à $t - 1$

$$E(v_t/I_{t-1}) = 0 \text{ avec } I_{t-1} \text{ c'est l'ensemble de l'information jusqu'à } t - 1$$

En effet :

$$\begin{aligned} E(v_t/I_{t-1}) &= E[\varepsilon_t^2/I_{t-1}] - E[\sigma_t^2/I_{t-1}] \\ &= V[\varepsilon_t/I_{t-1}] - E[\sigma_t^2/I_{t-1}] \end{aligned}$$

On a: $V[\varepsilon_t/I_{t-1}] = \sigma_t^2$

Par suite on a : $E[v_t/I_{t-1}] = \sigma_t^2 - \sigma_t^2$

$$E[v_t/I_{t-1}] = 0$$

Modèle avec erreurs ARCH(p)

On considère un processus ARCH pour modéliser directement la série financière, mais les résidus d'un modèle linéaire. Prenons l'exemple d'un modèle linéaire auto-régressif avec résidus de type ARCH(p)

Définition

On considère un modèle linéaire auto-régressif de la forme :

$$Y_t = E(X_t/I_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Où ε_t est un Bruit blanc faible, tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ si $s \neq t$, satisfaisant la condition de différence martingale $E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$, on suppose que ce résidus admet une représentation de type ARCH(p) :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad \text{Avec} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 \quad (1)$$

Où z_t est un Bruit blanc faible tel que : $E(\mu_t) = 0$ et $V(\mu_t) = 1$ et L est u opérateur de retard, $\alpha_0 > 0$ et $0 \leq \alpha_1 \leq 1$

On a alors un modèle qui décrit à la fois l'évolution de l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle du processus Y_t dans le temps. On a le cas le plus simple d'un processus de type AR(1) avec erreur ARCH(1) :

$$Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

Avec $|\rho| < 1$ dans ce cas, les résidus satisfont quatre propriétés principales

2.3.1 Propriétés des modèles ARCH

Propriété 1

Propriété de différence de martingale : $E(\varepsilon_t / I_{t-s}) = 0$ et de façon générale on a :

$$E(\varepsilon_t / I_{t-s}) = 0 \quad \forall s \geq 1$$

Preuve :

$$\text{On a :} \quad E[(\varepsilon_t / I_{t-s})] = E[E[(\varepsilon_t / I_{t-1})]]$$

$$= E[(0 / I_{t-s})]$$

$$= 0 \quad \forall s \geq 1 \quad \text{Car } I_{t-s} \subset I_{t-1}, \quad \forall s \geq 1$$

Propriété 2

La Variance conditionnelle dépendante du temps définie par l'équation : $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ est non constant dans le temps t vérifie

$$V(\varepsilon_t/I_{t-s}) = \alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^s}{1-\alpha_1} \right) + \alpha_1^s \varepsilon_{t-s}^2 \quad \forall t$$

C'est la propriété centrale d processus ARCH, le processus ε_t a une variance conditionnelle qui dépend du temps.

Preuve : Nous avons que $E(\varepsilon_t/I_{t-s}) = 0$ et $V(\varepsilon_t/I_{t-s}) = E(\varepsilon_t^2/I_{t-s})$ par itération successive on a :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 [1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 \dots \dots \dots \alpha_1^{s-1}] + v_t + \alpha_1 v_{t-1} \alpha_1^2 v_{t-2} \dots \dots \dots \alpha_1^{s-1} v_{t-s+1} + \alpha_1^s \varepsilon_{t-s}^2$$

En considérant l'espace conditionnelle d chacun de nombre, on obtient :

$$E(\varepsilon_t^2/I_{t-s}) = \alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^s}{1-\alpha_1} \right) + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_1^j E[v_{t-j}/I_{t-s}] + \alpha_1^s E[\varepsilon_{t-s}^2/I_{t-s}]$$

En utilisant la définition du bruit blanc on a :

$E[v_{t-j}/I_{t-s}] = 0, \forall j = 0, 1, \dots \dots s-1$, et $E[\varepsilon_{t-s}^2/I_{t-s}] = \varepsilon_{t-s}^2$, on trouve la formule de la variance :

$$V(\varepsilon_t/I_{t-s}) = \alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^s}{1-\alpha_1} \right) + \alpha_1^s \varepsilon_{t-s}^2 \quad \forall t$$

Si s tend vers l'infini ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle, et l'on retrouve alors la formule :

$$\begin{aligned} V[\varepsilon_t] &= \lim_{s \rightarrow \infty} V[\varepsilon_t/I_{t-s}] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^s}{1-\alpha_1} \right) + \alpha_1^s \varepsilon_{t-s}^2 \right] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \end{aligned}$$

Car $\alpha_0 > 0$ et $0 < \alpha_1 < 1$

La variance non conditionnelle td définie donc par l a relation :

$$V[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Ce qui explique les contraintes sur les paramètres de la représentation ARCH : $\alpha_0 > 1$ et $0 < \alpha_1 < 1$.

Propriété 3

On peut définir les auto-covariances conditionnelles du processus par l'équation :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] = 0 \quad \forall k, s \geq 1$$

Le processus est donc un processus sans mémoire conditionnellement à $I_{t-s}, \forall s \geq 1$

Preuve :

$$\begin{aligned} cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] - E[\varepsilon_t/I_{t-s}] E[\varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] \\ &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] \\ &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}/I_{t+k-1}]/I_{t-s}] \\ &= E[\varepsilon_t E[\varepsilon_{t+k}/I_{t+k-1}]/I_{t-s}] \\ &= E[\varepsilon_t/I_{t-s}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'absence de corrélation entre les valeurs d'un processus ARCH est une caractéristique très important de cette famille de modèle, qui le rend utiles pour modéliser certaines séries financières.

Propriété 4

i)-Le processus ε_t a un moment conditionnel centré d'ordre 4 vérifié :

$$E[\varepsilon_t^4 / I_{t-1}] = 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$$

ii)-Sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, le moment conditionnelle centré d'ordre quatre du processus ε_t est égale à :

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^4] &= 3\left[\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1\alpha_0^2}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^4]\right] \\ &= 3 \frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)} \end{aligned}$$

iii) La kurtosis non conditionnelle associée au processus ARCH(1) est : est le rapport du moment centré d'ordre 2. Pour le processus ARCH(1) suivant :

$$\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, \alpha_0) + (\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)$$

$$K_u = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{\frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}}{\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2} = \frac{(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}$$

Où K_u toujours supérieur à 3 qui est la kurtosis de la loi normale.

Un processus ARCH à donc toujours une distribution leptokurtique (la série possède des queues de distribution plus épaisse que celle d'une loi normale, $K_u = 3 \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right] > 3$

Preuve :

i) si on a une variable centré X suit une loi normale centré, alors :

$$E(X_t^4) = 3(v(X))^2 - 3(E(X^2))^2$$

Alors :

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^4 | I_{t-1}] &= 3(E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}))^2 \\ &= 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2 \end{aligned}$$

ii) sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$ on a :

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^4] &= E[E(\varepsilon_t^4 | I_{t-1})] \\ &= E[3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2] \\ &= 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2\varepsilon_{t-1}^4] \\ &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1^2E(\varepsilon_{t-1}^4)] \\ &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2E(\varepsilon_{t-1}^4)] \\ &= \frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)} \end{aligned}$$

iii) les résultats précédents nous donnent :

$$K_u = \frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)} \frac{(1-\alpha_1^2)}{\alpha_0^2}$$

$$K_u = 3 \frac{(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

Ces propriétés sont plus généralisées dans le cas d'un ARCH(p).

2.4 GARCH (p,q)

C'est un modèle ARCH généralisé, car dans ce type des modèles, l'information lus éloignée dans le passé sur la variance conditionnelle des erreurs est prise en compte dans la spécification de celle-ci en y incluant les valeurs des variances décalées. BOLLERSLEV (1986).

On considère un modèle linéaire autorégressif exprimé sous la forme suivante :

$$X_t = E(X_t/I_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \text{Où } \varepsilon_t \text{ est un BB faible}$$

Tel que $E(\varepsilon_t/I_{t-1}) = 0$

On suppose toujours que le processus ε_t peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad \text{Où } \mu_t \text{ est un BB faible}$$

Pour la variance conditionnelle, BOLLERSELV(1986) définit le processus GARCH (p,q) comme suivant :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (2)$$

Où L l'opérateur de retard.

Avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1 \dots \dots \dots p$ et $\beta_j \geq 0$, $j = 1 \dots \dots \dots q$ suffisantes pour garantir la positivité de σ_t^2

GARCH faible

Un GARCH faible représente tout bruit blanc faible $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ tel que :

- $E[\varepsilon_t/I_{t-1}] = 0 \quad \forall t \in Z$
- $\forall \alpha_0, \alpha_i, i = 1, 2, \dots \dots p, j = 1, 2, \dots \dots q$ telles que

$$\sigma_t^2 = V(\varepsilon_t/I_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \forall t \in Z$$

GARCH semi-fort

Un GARCH semi-fort est le processus ε_t appelé par le processus v_t et ε_t^2 qui sont supposé deux bruit blancs faibles, lorsqu'il s'agit d'une différence martingale avec un processus d'innovation v_t qui est lui-même une différence de martingale. Les processus GARCH semi forts correspond avec l'idée initiale d'**Engle** et **Bollerslev** car si on suppose que v_t est une différence de martingale alors on a : $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ et σ_t^2 représente la variance conditionnelle à l'information passée de ε_t .

GARCH fort

Dans le cas d'un GARCH fort on a l'innovation standardisée v_t soit un bruit blanc fort.

2.4.1 Les Propriétés des processus GARCH

On déduit les propriétés des processus GARCH par la même façon que nous avons développé les propriétés des processus ARCH.

Propriété 1 :

Le processus est un bruit blanc si $E(\varepsilon_t^2) < \infty$

On a : $E(\varepsilon_t) = E[E\varepsilon_t/I_{t-1}] = 0$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] \\ &= E[\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t/I_{t-1})] \\ &= 0 \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Propriété 2

Une condition nécessaire de l'existence de la variance d'un processus GARCH(p, q) est :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Remarque :

On constate que si cette condition est vérifiée, elle est également suffisante. Alors le processus GARCH est faiblement stationnaire ou stationnaire ou seconde ordre.

Si l'inégalité précédente est saturée alors :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad \text{Donc le processus est intégré ainsi on a un processus IGARCH}$$

2.4.2 Modèle GARCH (1,1)

Le modèle GARCH(1,1) est suffisant pour modéliser les données empiriques sur le marché financière et il est donné par l'équation :

$$Y_t = cX_t + \varepsilon_t$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ et $\beta_1 > 0$ dans ce modèle les carrés des résidus suivent un processus ARMA(1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 v_{t-1} + v_t$$

Ce processus est stationnaire pour $0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1$, ou $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (processus d'innovation pour ε_t^2)

Sous la condition de stationnarité du second ordre $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ la variance non conditionnelle du processus ε_t est définie et constant dans le temps. Sachant que $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2)$, il suffit à partir de la forme ARMA(1,1) sur ε_t^2 de définir la variance du processus :

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

2.5 Estimation des paramètres ARCH et GARCH

2.5.1 L'estimation des paramètres ARCH

L'estimation des paramètres de modèles ARCH se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse X_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à X_t conditionnellement au passé X_{t-1} est donc :

$$L(x_t/X_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Et dépend du vecteur de paramètre :

$$\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p)^t \text{ À travers } \sigma_t$$

La fonction de vraisemblance de $(x_1, x_2, \dots, x_T)^t$ conditionnelle à $X_0 = \emptyset$, par conséquent

$$L(x_t/X_{t-1}; \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

L'estimateur est défini comme vecteur :

$$\hat{\theta}_T = (\hat{a}_{0,T}, \dots, \hat{a}_{p,T})$$

Qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance

$$\hat{\theta}_T = \operatorname{argmax} \ln L_T(x_1, x_2, \dots, x_T; \theta)$$

2.5.2 Estimation des paramètres GARCH

L'estimation par maximum de vraisemblance d'un modèle ARMA est rendue plus difficile que celle d'un processus autorégressif pur, puisque le processus d'innovation n'est pas directement observé, le même phénomène survient lorsqu'on tente de maximiser la vraisemblance d'un processus GARCH. En effet, la vraisemblance associée à X_t conditionnellement au passé X_{t-1} s'écrit :

$$L(x_t/X_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (3)$$

Mais cette fois la variance σ_t dépend donc des valeurs passées de la variance conditionnelle $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$. Ces valeurs n'étant pas observées en pratique, la maximisation discrète de la vraisemblance est rendue impossible. En pratique on estime successivement la valeur de $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{t-1}^2)$ avant de calculer la vraisemblance. ainsi, pour un vecteur :

$$\hat{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^t$$

Fixe de paramètres, on calcule récursivement :

$$\hat{\sigma}_s^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{s-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \hat{\sigma}_{s-j}^2$$

Avec la convention $X_T = 0$ et $\sigma_i^2 = 0$ si $i \leq 0$. On remplace donc la fonction de vraisemblance (3) par :

$$L_t(x_t, \dots, x_T; \hat{\theta}) = \prod_{t=1}^T L(x_t / X_{t-1}; \hat{\theta})$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteur $\hat{\theta}$ et sa maximisation donne l'estimateur de maximum de vraisemblance.

2.6 Modèle IGARCH (p,q)

Les processus IGARCH(p,q) proposés par Engle et Bollerslev(1986) correspondent au cas d'une racine unitaire dans le processus de variance conditionnelle ces modèles sont caractérisés par un effet de persistance dans la variance c'est-à-dire qu'un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues.

Un processus ε_t satisfait une représentation IGARCH (p, q) si et seulement si :

$$V(\varepsilon_t / I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

avec $\alpha_0 \geq 0, \alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$$

On a IGARCH(1,1) proposé par NELSON (1990) représente l'exemple le plus simple tel que :

$$V(\varepsilon_t/I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

avec $\alpha_1 + \beta_1 = 1$

Ce processus a des prévisions de la variance conditionnelle aux différents horizons k de la forme :

$$E(\sigma_{t+k}^2/\varepsilon_t) = (\alpha_1 + \beta_1)^k \sigma_t^2 + \alpha_0 \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_1 + \beta_1)^i$$

Si on a :

Si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, alors le processus ε_t est stationnaire et un choc sur la variance conditionnelle σ_t^2 a une influence décroissante et asymptotiquement négligeable sur

σ_{t+k}^2 si k tend vers l'infini.

Si $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, on a :

$$E(\sigma_{t+k}^2/\varepsilon_t) = \sigma_t^2 + \alpha_0 k$$

On peut retrouver les propriétés de prévision sur une marche aléatoire en présence d'un terme constant $E(\sigma_{t+k}^2/\varepsilon_t)$ diverge avec k .

2.7 Model GARCH-M

On peut trouver plusieurs extensions des modèles ARCH et GARCH utilisée dans le domaine de la finance. Engle, Lilien et Robbins (1987) ont propose des modèles GARCH-M (General Autorégressive conditionnel heteroskedasticity in Mean) ou la variance conditionnelle est une explicative de la moyenne conditionnelle. Ces processus semble ainsi plus adaptes a une description de influence de la volatilité sur le rendement des titres ce qui parait assez réaliste pour les cours boursiers.

Définition :

L'écriture de modèle GARCH-M porte sur la non stationnarité de son processus de la variance conditionnelle et par une variance non conditionnelle infinie.

Soit un processus y_t , d'espérance $E[y_t] = 0$ (pourquoi), satisfaisant une représentation du type GARCH-M(p, q). Ce processus s'écrit sous la forme suivante :

$$y_t = X_t b + \delta \sigma_t^2 + z_t \sqrt{\sigma_t^2} = x_t b + \delta \text{Var}[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] + z_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

et $E[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] = 0$

$$\text{Var}[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] = \text{Var}[y_t / y_{t-1}] = \sigma_t^2$$

En plus de la forme linéaire de l'écriture de y_t ci-dessus ; on peut envisager différent variantes de la relation entre la variable dépendante de y_t et la variable conditionnelle.

Par exemple en peut considérer les cas suivants :

forme de log – lineaire:

$$y_t = X_t b + \delta \log \sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

forme racine carrée:

$$w_t = X_t b + \delta \sqrt{\sigma_t^2} + \varepsilon_t$$

2.8 Modèles ARCH/GARCH asymétriques

2.8.1 Introduction

La seconde grande approche couvre les modèles ARCH non linéaires et plus particulièrement la prise en compte des phénomènes asymétriques. L'idée est que l'effet et hétéroscédastique n'est sans doute pas le même suivant que l'erreur précédente est positive ou négative. Deux grandes classes de modèles ont été proposées :

Nelson (1990) s'est intéressé aux évolutions asymétriques de la variance à l'aide des modèles EGARCH (Exponential Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic).

Engle et Bollerslev (1986) ont étudié les modèles ARCH à seuils (TARCH) où la variance est une fonction linéaire définie par morceaux qui permettent différentes fonctions de volatilité selon le signe et la valeur des chocs. **Rabemananjara** et **Zakoian** (1991) ont proposé une généralisation avec les modèles TGARCH

2.8.2 Modèle EGARCH:

Exponentiel GARCH (EGARCH(p, q)) a été proposé par Nelson(1991), ce processus donne à la variance conditionnelle la définition suivants :

Définition 1 :

Un processus ε_t satisfait une représentation EGARCH (p, q) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\text{Log}(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \text{log}(\sigma_{t-j}^2)$$

Où le résidu normaliser z_t est un bruit blanc et où la fonction $g(\cdot)$ vérifier :

$$g(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)$$

Avec θ : coefficient de signe

γ : Coefficient de l'asymétrie

Si l'on pose $a_i = \theta a_i$ et $b_i = a_i \gamma$, la variance conditionnelle de ε_t peut se récrire sous la forme :

$$\log(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q b_i (|z_{t-i}| - E\llbracket z_{t-i} \rrbracket) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) \quad (5)$$

Avec $z_{t-i} = \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}$ l'erreur standardisée

Dans le cas d' un processus EGARCH(1,1), nous avons donc :

$$\log(\sigma_t^2) = a_0 + a_1 z_{t-1} + b_1 (|z_{t-1}| - E\llbracket z_{t-1} \rrbracket) + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2)$$

Deux remarques doivent être faite à ce niveau :

Remarque

L'écriture porte sur algorithme de la variance conditionnelle σ_t^2 de ε_t , en conséquence aucun restriction na besoin d'être imposer sur les déférents paramètres de l'équation pour assurer la positivité de h_t .

La variance conditionnelle h_t fait apparaître un effet de signe, correspondant a $a_1 z_{t-1}$, et un effet d'amplitude mesure par $b_1 (|z_{t-1}| - E\llbracket z_{t-1} \rrbracket)$.

($\theta a_i > 0$), Plus le choc est important, plus la volatilité augmente.

($\theta a_i < 0$), Plus le choc important, plus la volatilité diminue.

Le modèle EGARCH permet de rendre compte de l'asymétrie dans la réponse de la variance conditionnelle.

H_0 : La symétrie des chocs positives et négatives ($\theta a_i = 0$)

H_1 : L'asymétrie des chocs positives et négatives ($\theta a_i \neq 0$)

Dans ces expressions, la valeur de $E\llbracket z_{t-i} \rrbracket$ dépend bien évidemment de la loi suppose de z_t .

On a ainsi pour les 4 distributions retenues ici :

$$E\llbracket z_t \rrbracket = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{Loi Gaussien.}$$

$$E\llbracket z_t \rrbracket = 2 \frac{\Gamma(\frac{v}{2}) \sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}(v-1) \Gamma(\frac{v}{2})} \quad \text{Loi de student (} v \text{).}$$

$$E\llbracket z_t \rrbracket = \frac{4\xi^2 \Gamma(\frac{1+v}{2})}{(\xi + \frac{1}{\xi}) \sqrt{\pi}(v-1) \Gamma(\frac{v}{2})} \quad \text{Loi de student dissymétrique paramétrée en } \xi$$

$$E\llbracket z_t \rrbracket = \frac{\Gamma(\frac{2}{v})}{\sqrt{\Gamma(\frac{1}{v}) \Gamma(\frac{3}{v})}} \quad \text{loi GED de paramètre } v.$$

2.8.3 Modèle Threshold GARCH (TGARCH)

La modélisation ARCH ou GARCH à seuils consiste intégrer l'effet d'asymétrie dans les spécifications quadratiques de la variance conditionnelle des erreurs, si bien que le signe et l'amplitude d'un choc dans les erreurs décalées soient déterminants quant à ses effets sur la variance conditionnelle au temps t .

Un processus ε_t satisfait une représentation TGARCH(p, q) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \lambda \varepsilon_{t-1}^2 D_{t-1} + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-i}^2 \quad (6)$$

Où $D_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ et $D_{t-1} = 0$ sinon Avec D_{t-1} : variable dichotmique permettant de capter l'effet levier ou d'asymétrie

Les hypothèses à vérifier sont :

H_0 : ($\lambda = 0$) Absence d'asymétrie

H_1 : ($\lambda \neq 0$) Existence d'asymétrie

2.8.4 Modèle APARCH

Introduit par Ding, Granger et Engle (1993) le modèle APARCH est l'un des plus intéressants notamment parcequ'il admet comme cas particuliers plusieurs autres processus existants.

Un processus ε_t satisfait une représentation APARCH (p, q) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^\delta}$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-i}^\delta \quad (7)$$

Où $\sqrt{\sigma_t^\delta}$ est l'écart-type conditionnelle de ε_t et μ_t est un bruit blanc faible. La positivité σ_t est assurée par les conditions :

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \text{ et } -1 < \gamma_i < 1, i = 1, \dots, q, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \delta > 0$$

La stationnarité au second ordre d'un processus APARCH nécessite :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i E[(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta] + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^\delta < 1$$

Dans le cas d'un processus **APARCH(1, 1)** on a :

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$$

On remarque en particulier que :

Un processus APARCH(1,1) correspond à un processus ARCH lorsque

$$\delta = 2 \text{ et } \gamma_i = 0 \text{ et } \beta_i = 0$$

Un processus APARCH(1,1) correspond à un processus GARCH lorsque

$$\delta = 2 \text{ et } \gamma_i = 0$$

2.9 Arbitrage entre la modélisation ARMA sans effets ARCH et celle avec effets ARCH

Lorsqu'on cherche à déterminer, dans la famille ARIMA, le processus qui permet de reproduire au mieux le mode opératoire d'une chronique (par principe de parcimonie), il est indispensable d'étudier la volatilité de celle-ci ou d'y tester la présence d'effets ARCH, surtout s'il s'agit d'une variable financière ou monétaire. En fait, la présence d'effets ARCH est synonyme d'autocorrélation de la variance des résidus, avec comme corollaire l'inflation de la variance ou la non stationnarité en variance, la non normalité, et donc la non linéarité de la série concernée. Alors, pour tester la présence d'effets ARCH dans un processus, l'on peut procéder par une série de tests dont :

- L'analyse graphique des séries brutes et stationnaires
- L'étude des statistiques descriptives de la série
- Les tests de marche aléatoire et de présence d'effets ARCH d'ordre supérieur à 3

2.9.1 L'analyse graphique

En représentant sur un même graphique les séries brute et filtrée, l'on aura à présumer l'existence d'une hétéroscédasticité conditionnelle si la série laisse présager des fortes variabilités ou une non stationnarité en variance.

2.9.2 L'étude des statistiques descriptives

L'une des caractéristiques des processus ARCH est la non normalité (ou non linéarité) de la série. La statistique de Jarque-Bera, ainsi que sa probabilité associée conduisent l'inférence.

2.9.3 Le test de marche aléatoire

Basé sur la statistique de Ljung-Box, le test de bruit blanc permet de juger de l'hétéroscédasticité de la variance conditionnelle des erreurs lorsque l'on s'intéresse aux corrélogramme des carrés des résidus. Ces derniers permettent de tester :

H_0 : La spécification est du type ARMA (termes du corrélogramme significativement nuls)

H_1 : La spécification est du type ARCH (termes du corrélogramme significativement différent de zéro)

Aussi, le test ARCH d'hétéroscédasticité d'ordre > 0 appelé aussi test du multiplicateur de vraisemblance – renseigne sur la nécessité ou pas d'une modélisation du type ARCH. Les hypothèses du test sont :

H_0 : Absence d'effets ARCH d'ordre > 3 ($prob > 5\%$)

H_0 : Existence d'effets ARCH d'ordre < 3 ($prob < 5\%$)

En outre si l'on considère la spécification des erreurs du type ARCH(p) suivants :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

Les hypothèses à vérifier sont :

H_0 :Modèle linéaire ARMA($LM < \chi_p^2$)

H_0 :Modèle linéaire ARMA($LM > \chi_p^2$)

2.9.4 Choix du processus ARCH adéquat (optimal)

En présence d'une hétéroscédasticité conditionnelle de la variance des résidus, le choix sur un processus ARCH adéquat est guidé par plusieurs critères, notamment le caractère marche aléatoire des résidus issus de la variance conditionnelle.

Par ailleurs, l'arbitrage peut aussi se faire comme suit :

Modèle ARCH vs GARCH

Partant de la spécification des erreurs de la forme GARCH (p, q) suivante :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

L'on peut tester si :

$H_0: \beta_j = 0$: Modélisation ARCH des erreurs ($LM < \chi^2(p), prob > 5\%$)

$H_0: \beta_j \neq 0$: Modélisation GARCH des erreurs ($LM < \chi^2(p), prob < 5\%$)

Modèle GARCH vs IGARCH

Si la série brute sous-étude est non stationnaire, le modèle GARCH fait place au modèle GARCH intégré (IGARCH).

Modèle GARCH vs EGARCH

Le modèle GARCH fait place au modèle TGARCH en présence d'effets seuils, c.à.d quand « a_i » est statistiquement significatif dans l'expression (5).

Modèle GARCH vs TGARCH

Le modèle GARCH fait place au modèle TGARCH en présence d'effets seuils, c.à.d. Quand « λ » est statistiquement significatif dans l'expression (6).

Modèle ARCH ou GARCH vs ARCH-M ou GARCH-M

Les modèles ARCH ou GARCH font place aux modèles ARCH-M ou GARCH-M si le paramètre associé à la variance conditionnelle « σ_t^2 » est statistiquement significatif (expression(4)), ou si graphiquement les fortes inflations lisibles sur la série brute correspondent aux fortes variabilités (lisibles sur la série filtrée) de la série concernée.

chapitre 3 Application en finance

3.1 Introduction :

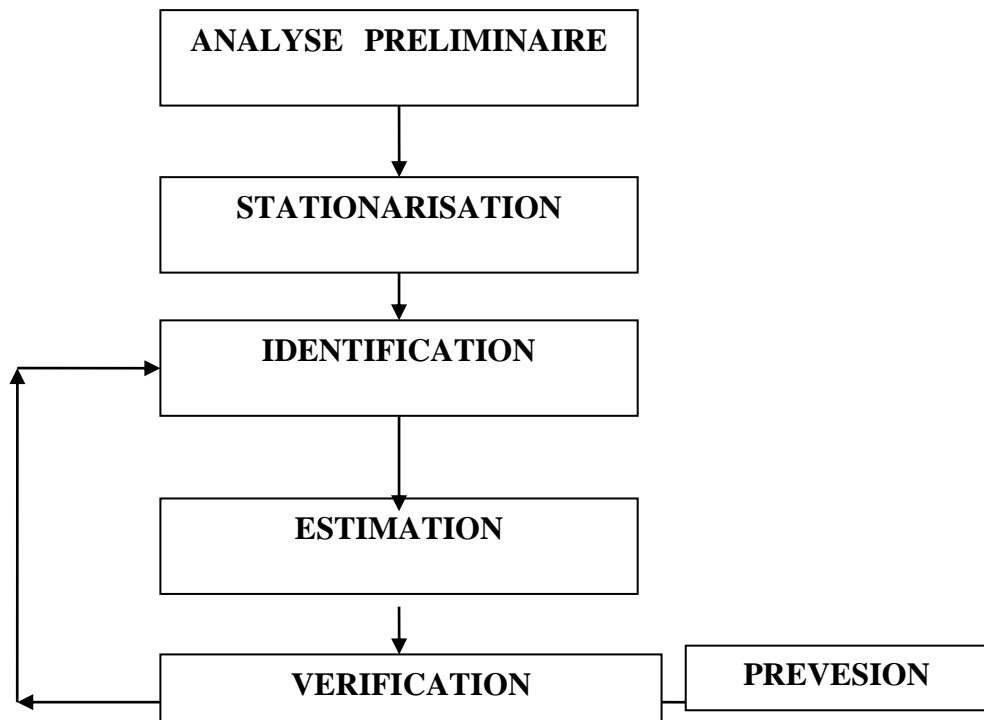
Dans ce chapitre, nous allons présenter des applications numériques sur des données réelles du prix Diesel. On modélise les rendements de notre série avec la méthode de **Box Jenkins**, Dans le but de trouver l'équation de la volatilité des résidus.

On commence par des modèle linéaire **ARCH, GARCH, ARCH-M** ensuite on les modélise avec les modèles non linéaire **EGARCH, TGARCH, APARCH**.

3.2 Méthodologie de Box et Jenkins

Wold (1954) montre que le modèle ARMA permettent de représenter la plupart des processus stationnaires. L'approche de Box et Jenkins (1976) consiste à étudier les séries chronologiques à partir de leurs caractéristiques afin de déterminer, parmi les modèles ARMA, le plus adapté à représenter le phénomène étudié.

Les principales étapes de la méthode de Box et Jenkins sont résumées par l'organigramme suivant :



Organigramme de la méthodologie de Box-Jenkins

- **Analyse préliminaire**

Une meilleure observation de la série est possible grâce à la représentation graphique. En effet, on représente les données sur un graphique à deux axes, où le phénomène étudié (x) serait en fonction du temps.

Quelques fois une simple visualisation du graphe nous aide à prendre des options sur les variables. On peut, par exemple abandonner une partie des données au début de la série, corriger les données aberrantes, transformer les données disponibles, etc.

- **Stationnarisation de la série**

Avant tout traitement de la série, il faut s'assurer que celle-ci est stationnaire : si on constate l'existence d'une composante saisonnière de périodicité s , par l'apparition de pics importants aux retards $1s, 2s, 3s, \dots$ dans la fonction d'autocorrélation simple ou par une simple visualisation du graphe, il convient de la retirer avant tout traitement statistique.

Si l'étude du corrélogramme simple présage une série affectée d'une tendance il convient d'en étudier les caractéristiques selon les tests de Dickey – Fuller. La méthode d'élimination de la tendance est fonction du processus DS ou TS sous-jacent à la chronique étudiée.

- **Identification du modèle adéquat**

Cette phase est la plus importante et la plus difficile dans la méthode de Box-Jenkins. Elle consiste à détecter le modèle adéquat parmi les modèles ARIMA, c'est-à-dire déterminer les paramètres p, d et q correspondants. L'étude est basée sur l'analyse des corrélogramme simple et partiel.

Une fois la série stationnarité, nous identifions les paramètres p, d et q de la manière suivante :

Si le corrélogramme simple n'a que ses q premiers termes différents de zéro et que les termes du corrélogramme partiel diminuent exponentiellement vers zéro, nous pouvons pronostiquer un MA (q)

Si le corrélogramme partiel n'a que ses p termes différents de zéro et que les termes du corrélogramme simple diminuent exponentiellement vers zéro, nous identifions un AR (p).

Si les fonctions d'autocorrélation simple et partiel ne paraissent pas tronquées, il s'agit alors d'un processus ARMA.

- **Estimation des paramètres**

Une fois le modèle identifié, l'étape suivante consiste à l'estimer. La méthode d'estimation diffère d'un modèle à un autre. Dans le cas AR (p), nous pouvons appliquer une méthode des moindres carrés ordinaires ou bien utiliser les relations existantes entre les autocorrélations et les coefficients du modèle.

Par contre l'estimation d'un modèle MA (q) s'avère plus complexe. Plusieurs méthodes itératives ont été proposées dans cette optique ; exemple : estimation de type balayage proposées par Box-Jenkins. (Mais l'utilisation de cette dernière engendre deux difficultés : le nombre de paramètres doit être au plus égale à 3 et la plage de variation de ces paramètres, délimitée par les conditions de stationnarité et d'inversibilité, est généralement trop complexe pour être déterminé).

- **Test d'adéquation du modèle :**

Dans cette partie, nous examinons les résultats de l'estimation d'un modèle ARMA (p,q) (vérification de la procédure itérative) à savoir les paramètres , les racines des polynômes autorégressifs et /ou moyenne mobile et les résidus du modèle .

- **Test sur les paramètres :**

Tous les coefficients du modèle retenu doivent être significativement différents de zéro. Il convient donc d'utiliser le test de student (la régression linéaire multiple).

D'autres conditions concernant les paramètres :

- La condition de la stationnarité : il faut que tous les paramètres autorégressifs soient en module strictement inférieurs à 1.
- La condition d'inversibilité : il faut que tous les paramètres moyens mobiles soient en module strictement inférieurs à 1.
-

- **Test sur les résidus :**

Une fois l'ordre du modèle validé, il reste à établir que les résidus ε_i résultent d'un bruit blanc.

Une analyse des autocorrélations de ces résidus peut déjà fournir une image graphique et une réponse partielle.

Un test de validation du modèle est néanmoins nécessaire. Plusieurs tests permettent d'établir si oui ou non les ε_i sont non corrélés ; test de Ljung-Box et test de Jarque Berra (voire le chapitre 2).

Une fois la non corrélation des résidus établie, (et donc le modèle validé) on peut vérifier si oui ou non ces derniers sont gaussiens par des tests de normalité, nous utilisons le test de Jarque-Bera ,plus spécialisé dans le domaine des séries financières qui nous concerne

- **Prévision :**

Les prévisions peuvent être calculées pour les modèles retenus en utilisant les principes développés et illustrés pour les modèles ARMA.

3.3 Etude de la série des rendements "Diesel" par la Méthode de Box-Jenkins

Nous disposons de 898 observations de prix de Diesel en dollar pour la période du juillet 1995 à septembre 2012

Analyse préliminaire

Avant tout d'analyser une série il est indispensable d'étudier le graphique présentant son évolution, car ce dernier nous donne une idée globale sur les caractéristiques du processus générant cette série à savoir la stationnarité, la tendance, la saisonnalité.

La série représente l'évolution hebdomadaire des prix de Diesel en dollar par gallon sur une période allant de 03/07/1995 à 10/09/2012 (on note PDT)

Voici le graphique de notre série de prix de diesel par gallon :

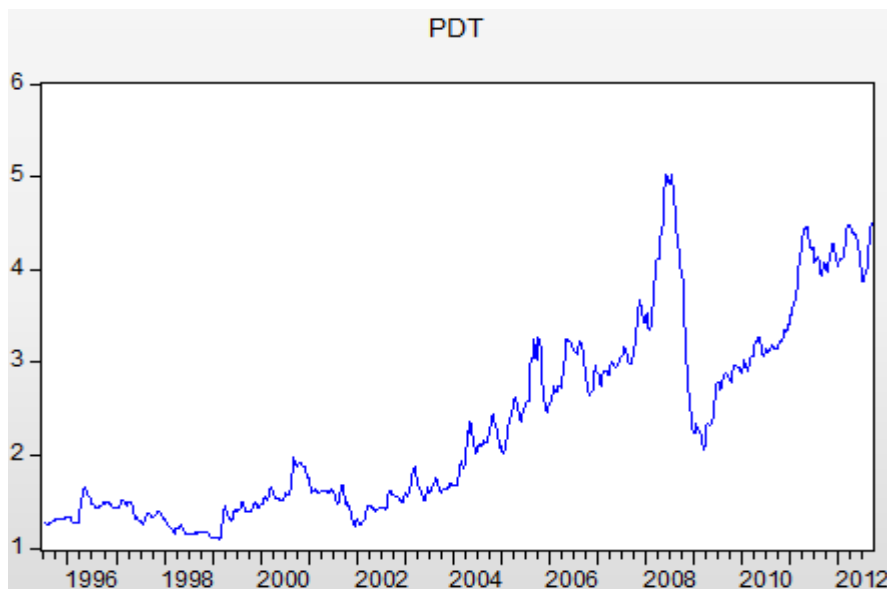


Figure 1: l'évolution du prix de diesel en dollar

La lecture visuelle de ce graphique exhibe une non stationnarité en moyenne et en variance.

A partir de ces données, nous calculons les rendements :

$$R_i = \ln(S_i/S_{i-1}) \quad \text{Pour } i = 1, \dots, n.$$

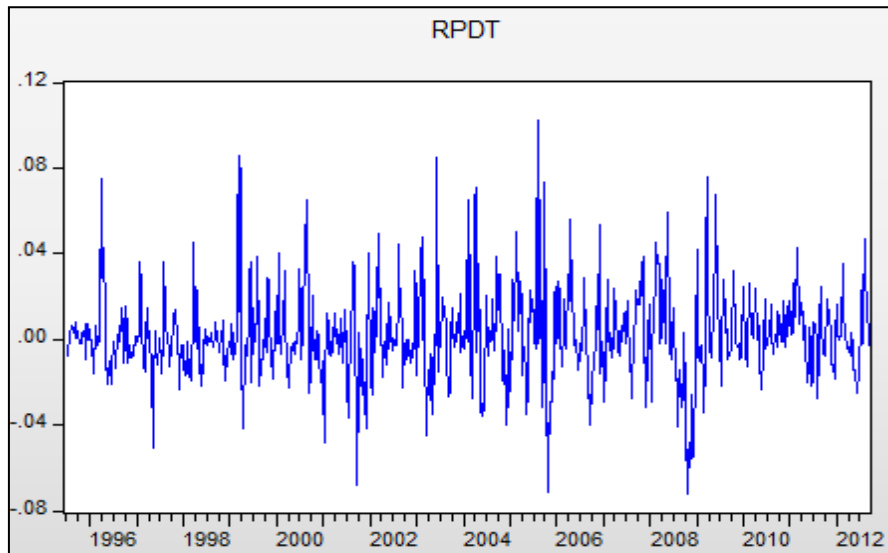


Figure 2: l'évolution des rendements en fonction de temps

Stationnarité de la série des rendements

D'après le graphe on peut voir que la série des rendements semble stationnaire c'est-à-dire a moyenne de la série se située sur une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Test de la Normalité

Les tests sont effectués à partir des valeurs empiriques des coefficients de skewness, kurtosis et la statistique de jarque-Bera données par le logiciel Eviews.

D'après le logiciel on obtient l'histogramme suivant :

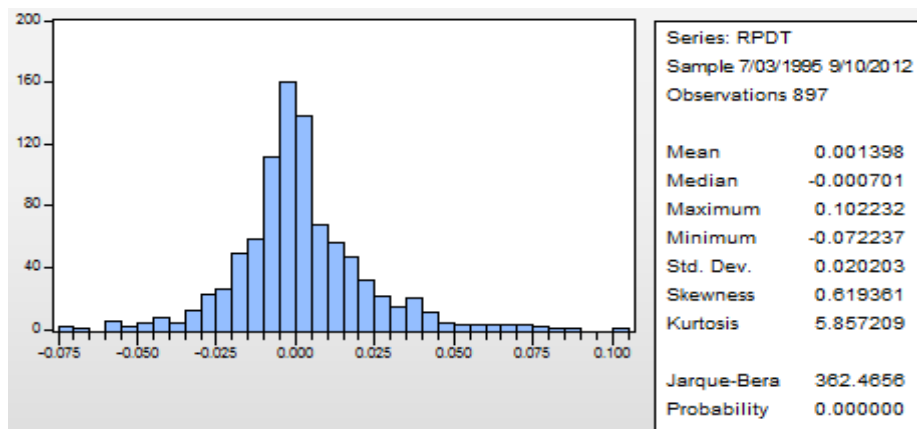


Figure 3: Histogramme et statistiques

Le coefficient de skewness (0,619361) est différent de zéro (valeur théorique du coefficient de skewness pour une loi normal).

Ce coefficient montre la présence de l'asymétrie de la courbe de la série, le coefficient d'asymétrie positive, cela nous permet de dire que la distribution étalée vers la droite, l'asymétrie peut être un indicateur de non linéarité

Le coefficient de kurtosis(5,85) est élevé, qui est supérieur à la valeur de kurtosis de la loi normal qui est 3, la valeur de ce coefficient trouvé indique que la courbe de la série est leptokurtique.

Test skewness:

$|V_1| = 7,5735 > 1,96$ à 5% On rejette l'hypothèse nulle d'asymétrie

Test de kurtosis

$|V_2| = 17,4678 > 1,96$ à 5% On rejette l'hypothèse nulle d'aplatissement

Statistiques de jarque-Bera Test de skewness

$JB = 362,4656 > \chi_{0,05}^2 = 5,99$ à 5%

Le test de jarque-Bera rejette l'hypothèse nulle de la normalité de la série de rendement

Stationnarité de la série :

Test de Dickey-Fuller Augmenté

On applique le test de DF pour affirmer ou confirmer notre hypothèse concernant la stationnarité de processus qui génère la série RPDT, on a besoin de déterminer le retard qui minimise le critère AIC et SIC qui est égal a 2 par la suite on estime par la méthode des moindre carrée avec le retard égal a 2 de trios modèles :

Modèle [3] : $RPDT_t = \varphi_i RPDT_{t-i} + bt + c + \varepsilon_t$

Null Hypothesis: RPDT has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 2 (Automatic - based on AIC, maxlag=2)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-12.62227	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.968348	
5% level	-3.414849	
10% level	-3.129595	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RPDT)
 Method: Least Squares
 Date: 06/09/19 Time: 11:06
 Sample (adjusted): 7/24/1995 9/03/2012
 Included observations: 894 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RPDT(-1)	-0.426746	0.033809	-12.62227	0.0000
D(RPDT(-1))	0.070876	0.035518	1.995514	0.0463
D(RPDT(-2))	-0.047885	0.033532	-1.428033	0.1536
C	0.000291	0.001096	0.265408	0.7908
@TREND("7/03/1995")	7.01E-07	2.12E-06	0.331314	0.7405

R-squared	0.213923	Mean dependent var	1.33E-06
Adjusted R-squared	0.210386	S.D. dependent var	0.018360
S.E. of regression	0.016315	Akaike info criterion	-5.387909
Sum squared resid	0.236628	Schwarz criterion	-5.361087
Log likelihood	2413.395	Hannan-Quinn criter.	-5.377659
F-statistic	60.48300	Durbin-Watson stat	1.997309
Prob(F-statistic)	0.000000		

Tableau 1: modèle [3]

D'après le tableau la valeur DF= -12,62 est inférieure aux valeurs critiques (1% ,5%,10%) donc la série (**RPDT**) n'admet pas une racine unitaire

En même temps nous nous constatons que la tendance n'est pas significativement différents de Zéro, puisque sa t-statistiques qui est égale à 0,33 est inférieur aux valeurs de la tendance déterministe sur la table de Dickey-Fuller (3,48 ; 2,78 ; 2,38) respectivement au seuil 1% 5% et 10%.

On passe au modèle [2]

Modèle [2] : $RPDT_t = \varphi_i RPDT_{t-i} + c + \varepsilon_t$

Null Hypothesis: RPDT has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 2 (Automatic - based on AIC, maxlag=2)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-12.62425	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.437442	
5% level	-2.864560	
10% level	-2.568431	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RPDT)
 Method: Least Squares
 Date: 06/09/19 Time: 11:08
 Sample (adjusted): 7/24/1995 9/03/2012
 Included observations: 894 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RPDT(-1)	-0.426434	0.033779	-12.62425	0.0000
D(RPDT(-1))	0.070712	0.035497	1.992090	0.0467
D(RPDT(-2))	-0.048003	0.033513	-1.432365	0.1524
C	0.000605	0.000547	1.106091	0.2690
R-squared	0.213826	Mean dependent var		1.33E-06
Adjusted R-squared	0.211176	S.D. dependent var		0.018360
S.E. of regression	0.016307	Akaike info criterion		-5.390022
Sum squared resid	0.236657	Schwarz criterion		-5.368565
Log likelihood	2413.340	Hannan-Quinn criter.		-5.381823
F-statistic	80.68812	Durbin-Watson stat		1.997354
Prob(F-statistic)	0.000000			

Tableau 2: modèle [2]

Notre attention va donc se poser sur la t-statistique de DF qui reste toujours inférieurs aux valeurs critiques (1% ; 5% ; 10%) ce qui confirme la stationnarité de la série, la t-statistique de la constante égale 1,10 est inférieur aux valeurs critique par Dickey-Fuller au seuil(1%5% 10%) qui sont respectivement (3,18 ; 2,52 ; 2,16) donc la constante n'est pas significativement différent de zéro, on passe au modèle [1]

Modèle [1] : $RPDT_t = \varphi_i RPDT_{t-i} + \varepsilon_t$

Null Hypothesis: RPDT has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 2 (Automatic - based on AIC, maxlag=2)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-12.57415	0.0000
Test critical values:		
1% level	-2.567551	
5% level	-1.941178	
10% level	-1.616461	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RPDT)
 Method: Least Squares
 Date: 06/09/19 Time: 11:09
 Sample (adjusted): 7/24/1995 9/03/2012
 Included observations: 894 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RPDT(-1)	-0.423229	0.033659	-12.57415	0.0000
D(RPDT(-1))	0.068978	0.035466	1.944876	0.0521
D(RPDT(-2))	-0.049359	0.033495	-1.473603	0.1409
R-squared	0.212745	Mean dependent var		1.33E-06
Adjusted R-squared	0.210978	S.D. dependent var		0.018360
S.E. of regression	0.016309	Akaike info criterion		-5.390886
Sum squared resid	0.236983	Schwarz criterion		-5.374793
Log likelihood	2412.726	Hannan-Quinn criter.		-5.384736
Durbin-Watson stat	1.997499			

Tableau 3: modèle [1]

D'après le tableau, nous constatons que la statistique ADF est égal a (-12,574) est inférieurs aux valeurs tabulé par Dickey-Fuller aux seuils (1% ; 5% ; 10%), alors la série RPDT ne possède pas de racine unitaire d'où la série RPDT est stationnaire.

Spécification de model :

Comme la série des rendements n'admet pas ni saisonnalité ni différenciation, on va la modéliser par un modèle ARMA (p ,q).

Pour identifier l'ordre des paramètres du model en fait référence au corrélogramme de la série RPDT

Date: 06/09/19 Time: 11:10
Sample: 7/03/1995 9/10/2012
Included observations: 897

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.588	0.588	311.52	0.000
		2	0.289	-0.088	386.67	0.000
		3	0.164	0.048	411.05	0.000
		4	0.089	-0.018	418.14	0.000
		5	0.009	-0.054	418.21	0.000
		6	-0.015	0.011	418.43	0.000
		7	-0.023	-0.013	418.89	0.000
		8	0.024	0.072	419.40	0.000
		9	0.041	-0.001	420.90	0.000
		10	0.024	-0.016	421.42	0.000
		11	-0.032	-0.069	422.35	0.000
		12	-0.072	-0.041	427.04	0.000
		13	-0.090	-0.027	434.43	0.000
		14	-0.077	0.005	439.89	0.000
		15	-0.078	-0.027	445.51	0.000
		16	-0.057	0.010	448.50	0.000
		17	0.019	0.078	448.82	0.000
		18	0.028	-0.039	449.56	0.000
		19	0.010	-0.007	449.65	0.000
		20	-0.011	-0.023	449.75	0.000
		21	-0.024	-0.009	450.27	0.000
		22	-0.043	-0.023	451.95	0.000
		23	-0.036	0.011	453.13	0.000
		24	-0.010	0.027	453.22	0.000
		25	0.010	-0.001	453.31	0.000
		26	0.006	-0.020	453.34	0.000
		27	-0.006	-0.026	453.37	0.000
		28	-0.020	-0.016	453.76	0.000
		29	-0.029	-0.006	454.54	0.000
		30	-0.036	-0.004	455.77	0.000

Tableau 4 : corrélogramme de la série RPDT

L'analyse de corrélogramme partielle de la série RPDT montre qu'aux retarde (K=1 ,2) les termes sont a l'extérieur de l'intervalle de confiance et ce qui concerne le corrélogramme simple, globalement on remarque que les valeurs de fonction d'autocorrélation simple sont élevée aux déférente retarde (K=1, 2,3) ce qui nous amène a estimé plusieurs modèles dont on choisit : ARMA (1 ,1).

Estimation des paramètres

Le tableau suivants contient l'estimation du modèle qui a été choisit car il présent des critères de pouvoir prédictif meilleur que ces des autre modèle estimer (a savoir : R-squard, statistique de ficher : maximum ; Sum squard resid, AIC et SIC : minimum ; Durbin-Watson stat : proche de 2)

Dependent Variable: RPDT
 Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
 Date: 06/09/19 Time: 11:13
 Sample: 7/03/1995 9/03/2012
 Included observations: 897
 Convergence achieved after 23 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.481168	0.039041	12.32477	0.0000
MA(1)	0.167155	0.042852	3.900756	0.0001
SIGMASQ	0.000265	7.11E-06	37.21851	0.0000
R-squared	0.351096	Mean dependent var		0.001398
Adjusted R-squared	0.349644	S.D. dependent var		0.020203
S.E. of regression	0.016293	Akaike info criterion		-5.392386
Sum squared resid	0.237309	Schwarz criterion		-5.376336
Log likelihood	2421.485	Hannan-Quinn criter.		-5.386254
Durbin-Watson stat	2.003015			
Inverted AR Roots	.48			
Inverted MA Roots	-.17			

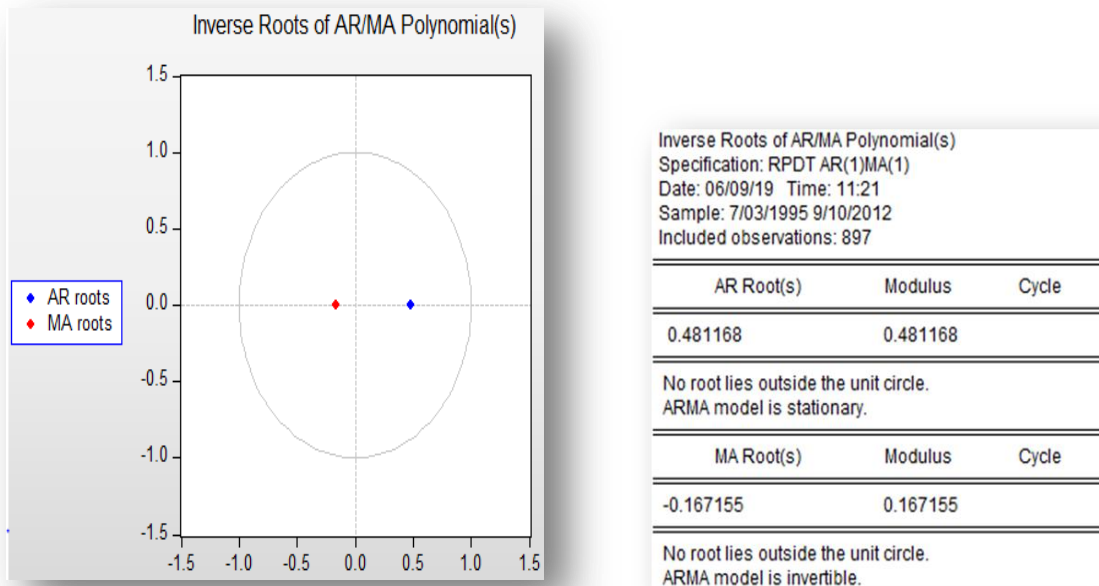
Tableau 5: Estimation des paramètres du modèle ARMA(1,1)

Validation du modèle

Test sur les paramètres

Tous les coefficients de modèle choisis sont significativement différents de zéro puisque leur statistique en valeur absolue est supérieure à la statistique de student 1,96 à 5%.

Les probabilités des composant AR et MA sont tout inférieure a (0 ,05)



La représentation graphique des inverses des racines de polynôme des retards moyennes mobile et autorégressif nous constatant que :

les inverses des racines fournies par Eviews sont tous en module inférieur à 1.

Test sur les résidus

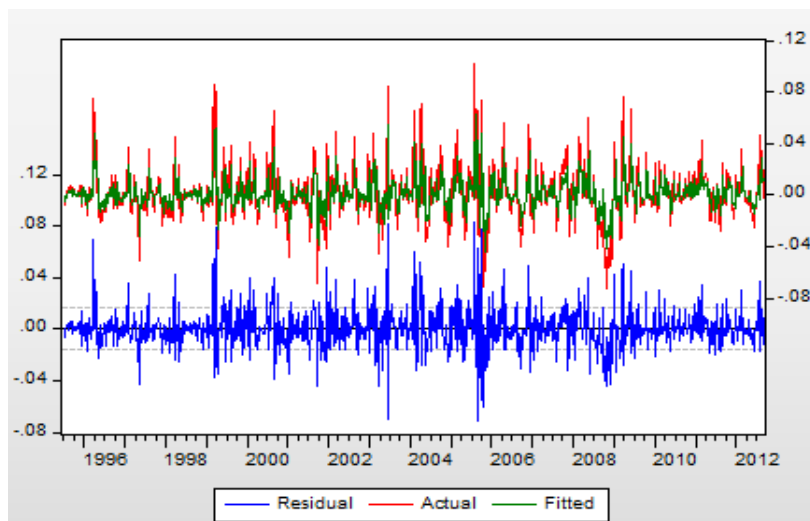


Figure 4 : Série réelle, estimée et résidus

A partir de la représentation graphique des série résiduelles, réelle et estimée, nous constatons que :

Le graphe de la série estimée est proche de celui de la série réelle.

Le modèle ARMA(1,1) explique bien le processus RPDT.

Examiner du corrélogramme des résidus

Date: 06/19/19 Time: 10:22
 Sample: 7/03/1995 9/10/2012
 Included observations: 897
 Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.003	-0.003	0.0104	
		2 -0.014	-0.014	0.1803	
		3 0.027	0.027	0.8223	0.365
		4 0.041	0.041	2.3444	0.310
		5 -0.043	-0.042	4.0001	0.261
		6 -0.003	-0.003	4.0106	0.405
		7 -0.053	-0.056	6.5087	0.260
		8 0.034	0.035	7.5641	0.272
		9 0.029	0.032	8.3434	0.303
		10 0.037	0.040	9.5962	0.295
		11 -0.025	-0.022	10.181	0.336
		12 -0.032	-0.041	11.108	0.349
		13 -0.052	-0.056	13.585	0.257
		14 -0.007	-0.010	13.627	0.325
		15 -0.036	-0.026	14.782	0.321
		16 -0.067	-0.061	18.864	0.170

Figure 5: Corrélogramme des résidus

Après l'examen du corrélogramme des résidus on remarque :
 Les pics sont à l'intérieur de l'intervalle de confiance.
 Les probabilités sont supérieures à (0,05).

Test de normalité :

D'après le logiciel on obtient l'histogramme suivant :

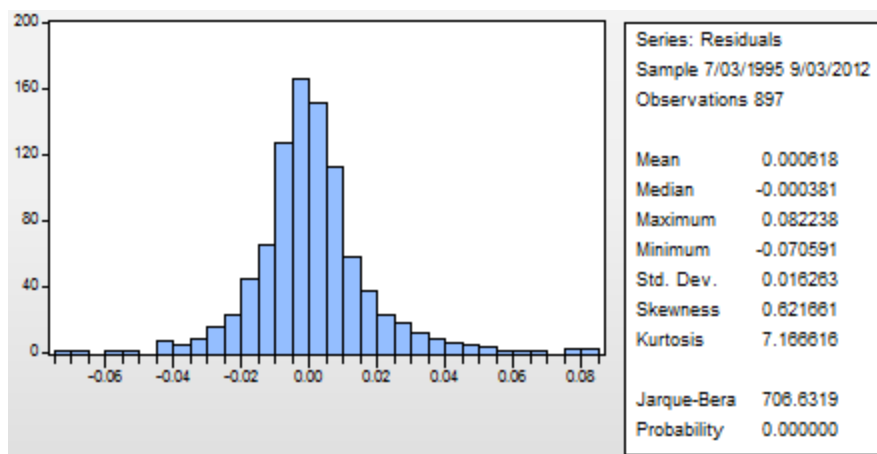


Figure 6: Histogramme des résidus

Test de skewness

$$|V_1| = 34,444 > 1,96 \text{ à } 5\%$$

On rejette l'hypothèse nulle d'asymétrie.

Test de kurtosis

$$|V_2| = 24,49 > 1,96 \text{ à } 5\%$$

On rejette l'hypothèse nulle d'aplatissement.

Statistique du jarque-Bera

On a $JB = 706,63 > 5,99$ à 5% , donc On rejette l'hypothèse H_0 de normalité.

Ces indicateurs de la forme et l'analyse du graphe des résidus, indiquent qu'il ya une présence de volatilité.

Date: 06/18/19 Time: 13:39
 Sample: 7/03/1995 9/10/2012
 Included observations: 897

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.251	0.251	56.710	0.000
		2	0.042	-0.023	58.291	0.000
		3	0.178	0.185	86.999	0.000
		4	0.208	0.130	125.96	0.000
		5	0.151	0.083	146.51	0.000
		6	0.015	-0.065	146.71	0.000
		7	0.039	0.005	148.10	0.000
		8	0.134	0.072	164.47	0.000
		9	0.057	-0.015	167.46	0.000
		10	0.022	0.013	167.91	0.000
		11	0.033	0.001	168.89	0.000
		12	0.085	0.048	175.42	0.000
		13	0.028	-0.032	176.15	0.000
		14	-0.018	-0.020	176.45	0.000
		15	0.004	-0.011	176.47	0.000
		16	0.004	-0.026	176.49	0.000

Figure 7: Corrélogramme des résidus aux carrés

D'après le corrélogramme on voit des pics significativement différent de zéro alors les ε_t sont pas des bruit blanc ce que l'on confirmera par le test de Box-ljung :

$$Q - stat(16) = 176,45 > \chi_{0,05}^2(14) = 23,68$$

Le pic de retard est significatif, ainsi on rejette l'hypothèse H_0 c'est-à-dire les résidus ne forment pas un bruit blanc. Donc il existe un effet ARCH, pour confirmera on' applique le test de multiplicateur de Lagrange, les résultats sont présentés sur le table (6):

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	60.13211	Prob. F(1,894)	0.0000
Obs*R-squared	56.46846	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 06/09/19 Time: 11:30

Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012

Included observations: 896 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000198	2.31E-05	8.600752	0.0000
RESID^2(-1)	0.251024	0.032371	7.754490	0.0000
R-squared	0.063023	Mean dependent var		0.000265
Adjusted R-squared	0.061975	S.D. dependent var		0.000662
S.E. of regression	0.000641	Akaike info criterion		-11.86431
Sum squared resid	0.000368	Schwarz criterion		-11.85360
Log likelihood	5317.210	Hannan-Quinn criter.		-11.86022
F-statistic	60.13211	Durbin-Watson stat		1.988842
Prob(F-statistic)	0.000000			

Tableau 6: Test ARCH

On a :

$LM(\text{calculé}) = 56,46846 > \chi^2_{(2)} = 5,99$. Donc les résidus ne forment pas un bruit blanc gaussien, il existe un effet ARCH ou GARCH, il faut modéliser la variance conditionnelle

3.4 Etude de la volatilité de la série “prix du Diesel ”

- **Estimation de modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1) :**

Pour Estimer le modèle ARCH(1), nous allons utiliser le logiciel Eviews, l'estimation se résume dans le tableau suivant :

Dependent Variable: RPDT
 Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
 Date: 06/09/19 Time: 11:31
 Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
 Included observations: 896 after adjustments
 Convergence achieved after 39 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients
 MA Backcast: 7/03/1995
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.562684	0.035044	16.05661	0.0000
MA(1)	0.198208	0.039561	5.010159	0.0000
Variance Equation				
C	0.000186	7.60E-06	24.48558	0.0000
RESID(-1)^2	0.313655	0.050708	6.185517	0.0000
R-squared	0.342086	Mean dependent var		0.001403
Adjusted R-squared	0.341350	S.D. dependent var		0.020214
S.E. of regression	0.016405	Akaike info criterion		-5.485086
Sum squared resid	0.240594	Schwarz criterion		-5.463667
Log likelihood	2461.319	Hannan-Quinn criter.		-5.476902
Durbin-Watson stat	2.216158			

Tableau 7 : Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1)

Le tableau de l'estimation montre que les |z-statistiques| des paramètres sont supérieurs à 1,96 au seuil 5 %.

Les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et positifs, donc vérifient les contraintes assurant la positivité de la variance.

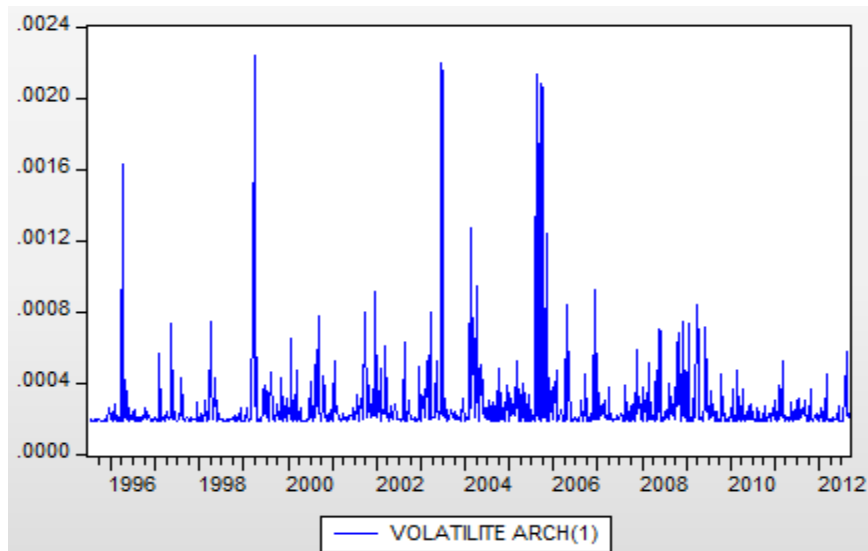


Figure 8: volatilité du modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1)

D'Après ce graphe on remarque que la volatilité est non constante (hétéroscédastique),

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,562 RPDT_{t-1} - 0,198 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$

Dont la variance conditionnelle ARCH(1) est donnée par :

$$\sigma_t^2 = 0.00186 + 0,313655 \varepsilon_{t-1}^2$$

Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur GARCH(1, 1)

Nous allons résumer l'estimation de ce modèle dans le tableau suivant :

Dependent Variable: RPDT
Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
Date: 06/09/19 Time: 11:34
Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
Included observations: 896 after adjustments
Convergence achieved after 50 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
MA Backcast: 7/03/1995
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.504319	0.050821	9.923494	0.0000
MA(1)	0.231843	0.055199	4.200121	0.0000
Variance Equation				
C	3.42E-05	5.41E-06	6.323173	0.0000
RESID(-1)^2	0.173931	0.026054	6.675868	0.0000
GARCH(-1)	0.699619	0.038452	18.19466	0.0000
R-squared	0.346187	Mean dependent var	0.001403	
Adjusted R-squared	0.345455	S.D. dependent var	0.020214	
S.E. of regression	0.016354	Akaike info criterion	-5.545942	
Sum squared resid	0.239095	Schwarz criterion	-5.519167	
Log likelihood	2489.582	Hannan-Quinn criter.	-5.535712	
Durbin-Watson stat	2.176174			

Figure 9: Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur GARCH(1,1)

Le tableau de l'estimation de GARCH(1,1) illustre que les |z-statistiques| des paramètres sont supérieurs à 1,96. De cela nous retenons ce modèle et que les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et que les coefficients de l'équation de la variance vérifient les contraintes qui assure la positivité de la variance.

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,5043 RPDT_{t-1} - 0,2318 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{Avec} \quad \varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

Dont la variance conditionnelle GARCH(1,1) est :

$$\sigma_t^2 = 0,02304 + 0,17399 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,699619 \sigma_{t-1}^2$$

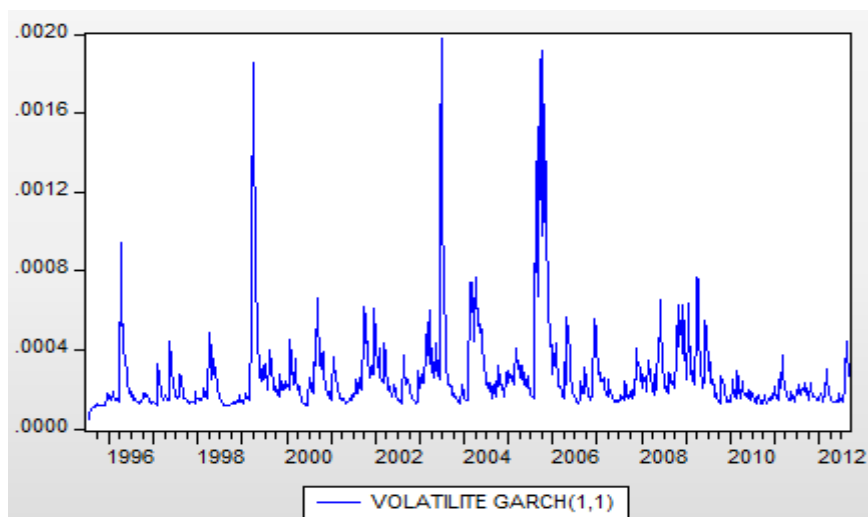


Figure 10: volatilité du modèle ARMA(1,1) avec erreur GARCH(1,1)

D'Après ce graphe on remarque que la volatilité est non constante (hétéroscédastique)

Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1)-M

Dependent Variable: RPDT
 Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
 Date: 06/09/19 Time: 11:40
 Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
 Included observations: 896 after adjustments
 Convergence achieved after 45 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients
 MA Backcast: 7/03/1995
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	4.124813	1.749000	2.358383	0.0184
AR(1)	0.572122	0.036042	15.87357	0.0000
MA(1)	0.187131	0.039574	4.728679	0.0000
Variance Equation				
C	0.000185	7.87E-06	23.46127	0.0000
RESID(-1)^2	0.311361	0.048956	6.360053	0.0000
R-squared	0.330732	Mean dependent var	0.001403	
Adjusted R-squared	0.329234	S.D. dependent var	0.020214	
S.E. of regression	0.016555	Akaike info criterion	-5.485017	
Sum squared resid	0.244746	Schwarz criterion	-5.458243	
Log likelihood	2462.288	Hannan-Quinn criter.	-5.474787	
Durbin-Watson stat	2.240404			

Tableau 8: Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1)-M

D'après le tableau de nous remarquons que tous les | z-statistiques | des paramètres sont supérieurs à 1,96 au seuil 5 %.

Les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et positifs donc vérifient les contraintes assurant la positivité de la variance.

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,5721 RPDT_{t-1} - 0,1871 \varepsilon_{t-1} + 4,1248 \sigma_t^2$$

$$\text{Avec } \varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

Dont la variance conditionnelle ARCH(1)-M de modèle s'écrit comme suit :

$$\sigma_t^2 = 0.000185 + 0,311361 \varepsilon_{t-1}^2$$

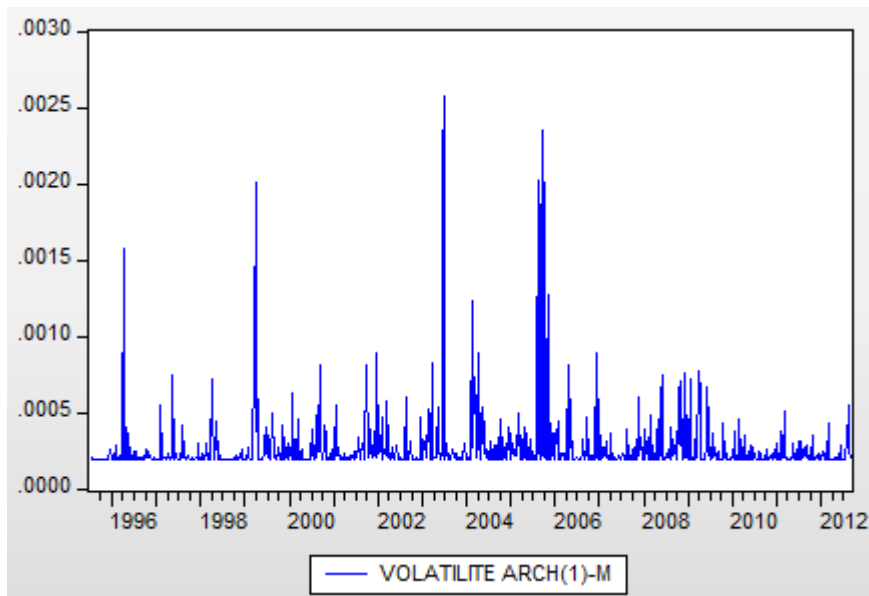


Figure 11:volatilité du modèle ARMA(1,1) avec erreur ARCH(1)-M

D'Après ce graphe on remarque que la volatilité est non constante (hétéroscédastique)

Estimation du modèle ARMA avec erreur EGARCH(1, 1)

Nous avons estimé ce modèle pour illustré la propriété d'asymétrie, le résultat de l'estimation s'apparaitre dans le tableau ci-dessous:

Dependent Variable: RPDT
Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
Date: 06/09/19 Time: 11:45
Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
Included observations: 896 after adjustments
Convergence achieved after 76 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
MA Backcast: 7/03/1995
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) + C(5)
*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.606777	0.043131	14.06825	0.0000
MA(1)	0.179201	0.047154	3.800303	0.0001

Variance Equation

C(3)	-1.727082	0.229971	-7.509989	0.0000
C(4)	0.349285	0.047222	7.396646	0.0000
C(5)	0.175096	0.030819	5.681375	0.0000
C(6)	0.826187	0.024718	33.42489	0.0000

R-squared	0.336132	Mean dependent var	0.001403
Adjusted R-squared	0.335390	S.D. dependent var	0.020214
S.E. of regression	0.016479	Akaike info criterion	-5.574236
Sum squared resid	0.242771	Schwarz criterion	-5.542107
Log likelihood	2503.258	Hannan-Quinn criter.	-5.561960
Durbin-Watson stat	2.253145		

Tableau 9: Estimation du modèle ARMA avec erreur EGARCH(1,1)

Nous constatons du tableau de l'estimation d'EGARCH(1,1) que tous les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et que les valeurs absolues de tous les z-statistiques sont supérieurs à 1,96 de cela nous pouvons dire qu'il existe un phénomène d'asymétrie.

Nous remarquons que $\theta a_i = 0,175 \neq 0$, donc on accepte H_1 , et comme qu'elle est supérieur à Zéro, alors que les chocs négatives a des fléctuations plus sévère que celle positive et plus les chocs est importants plus la volatilité augmente.

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,6067 RPDT_{t-1} - 0,1792 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Avec } \varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

Dont la variance conditionnelle EGARCH (1,1) est :

$$\log(\sigma_t^2) = -1,727 + 0,3492 \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right) + 0,175 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) + 0,8261(\log(\sigma_{t-1}^2))$$

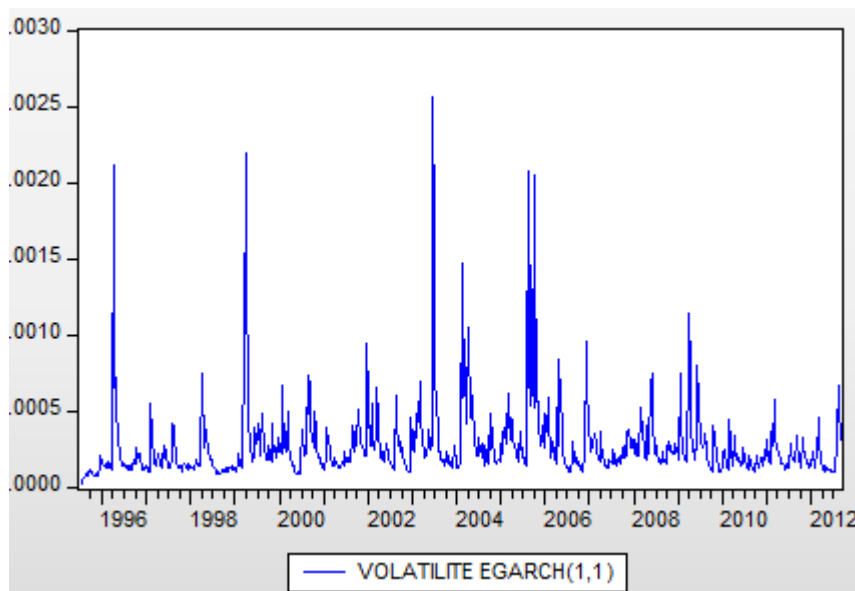


Figure 12:volatilité du modèle ARMA avec erreur EGARCH(1,1)

Estimation du modèle ARMA (1,1) avec erreur TGARCH(0, 1)

Nous estimons ce modèle pour vérifier la persistance de phénomène de l'asymétrie de notre série.

L'estimation de ce modèle est comme suit :

Dependent Variable: RPDT
Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
Date: 06/09/19 Time: 11:54
Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
Included observations: 896 after adjustments
Convergence achieved after 81 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
MA Backcast: 7/03/1995
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.505749	0.033747	14.98671	0.0000
MA(1)	0.174746	0.042855	4.077568	0.0000
Variance Equation				
C	8.73E-06	1.34E-06	6.531805	0.0000
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.070698	0.011488	6.154106	0.0000
GARCH(-1)	0.939090	0.008030	116.9525	0.0000
R-squared	0.350343	Mean dependent var	0.001403	
Adjusted R-squared	0.349617	S.D. dependent var	0.020214	
S.E. of regression	0.016302	Akaike info criterion	-5.456017	
Sum squared resid	0.237575	Schwarz criterion	-5.429243	
Log likelihood	2449.296	Hannan-Quinn criter.	-5.445787	
Durbin-Watson stat	2.066369			
Inverted AR Roots	.51			
Inverted MA Roots	-.17			

Tableau 10: Estimation du modèle ARMA (1,1) avec erreur TGARCH(0,1)

La lecture du tableau de l'estimation de TGARCH(0,1) montre que tous les coefficients de l'estimation de la moyenne sont significativement différents de zéro que les valeurs absolues de tous les z-statistiques sont supérieures à 1,96 au seuil 5%. Ainsi que le coefficient

($\lambda = 0,07$) est différent de zéro ce qui nous permet d'accepter l'hypothèse H_1 (existence d'asymétrie) et on a ($\lambda > 0$) veut dire que les chocs négatives a des fléctuations plus sévère que celle positive.

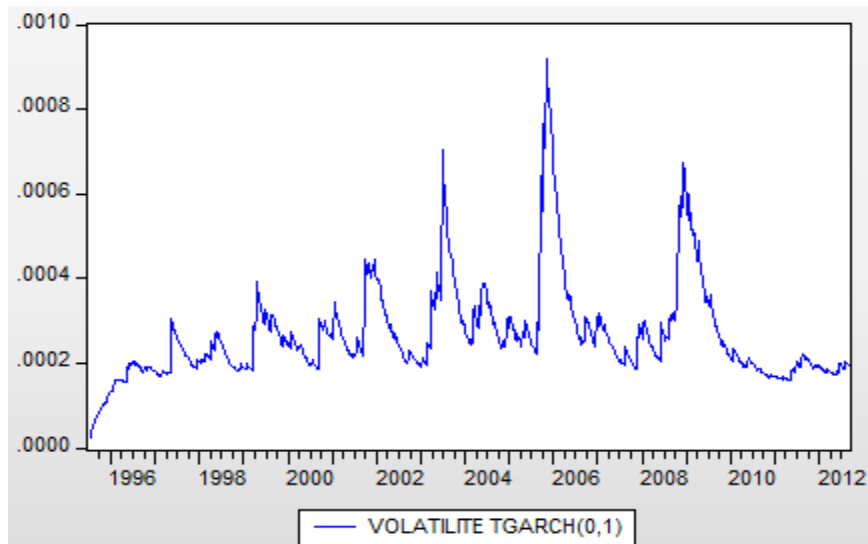


Figure 13:volatilité du modèle ARMA (1,1) avec erreur TGARCH(0,1)

D'Après ce graphe on remarque que la volatilité est non constante (hétéroscédastique)

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,5057 RPDT_{t-1} - 0,1747 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^2}$

Dont l'équation de la variance conditionnelle TGARCH(1,1) est :

$$\sigma_t^2 = 0,02156 + 0,0706\varepsilon_{t-1}^2 + 0,939\sigma_{t-1}^2$$

Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur APARCH(1,1)

Dependent Variable: RPDT
Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
Date: 06/09/19 Time: 12:19
Sample (adjusted): 7/10/1995 9/03/2012
Included observations: 896 after adjustments
Failure to improve likelihood (non-zero gradients) after 36 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
MA Backcast: 7/03/1995
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
@SQRT(GARCH)^C(7) = C(3) + C(4)*(ABS(RESID(-1)) - C(5)*RESID(-1))^C(7) + C(6)*@SQRT(GARCH(-1))^C(7)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.641556	0.031374	20.44854	0.0000
MA(1)	0.110158	0.035630	3.091677	0.0020
Variance Equation				
C(3)	0.011291	0.004983	2.265765	0.0235
C(4)	0.212631	0.022937	9.270306	0.0000
C(5)	-0.649573	0.085713	-7.578429	0.0000
C(6)	0.690314	0.034256	20.15151	0.0000
C(7)	0.632823	0.103157	6.134557	0.0000
R-squared	0.337431	Mean dependent var	0.001403	
Adjusted R-squared	0.336690	S.D. dependent var	0.020214	
S.E. of regression	0.016463	Akaike info criterion	-5.582946	
Sum squared resid	0.242296	Schwarz criterion	-5.545462	
Log likelihood	2508.160	Hannan-Quinn criter.	-5.568623	
Durbin-Watson stat	2.181290			

Tableau 11: Estimation du modèle ARMA(1,1) avec erreur APARCH(1,1)

D'après le tableau on constate que tous les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et positive sauf $\gamma_1 = -0,64 \in]-1,1[$, ces conditions assurent la positivité de l'écart-type conditionnelle. On a aussi les valeurs absolues de tous les z-statistiques sont supérieurs à 1,96 au seuil 5% de cela nous pouvons dire qu'il existe un phénomène d'asymétrie.

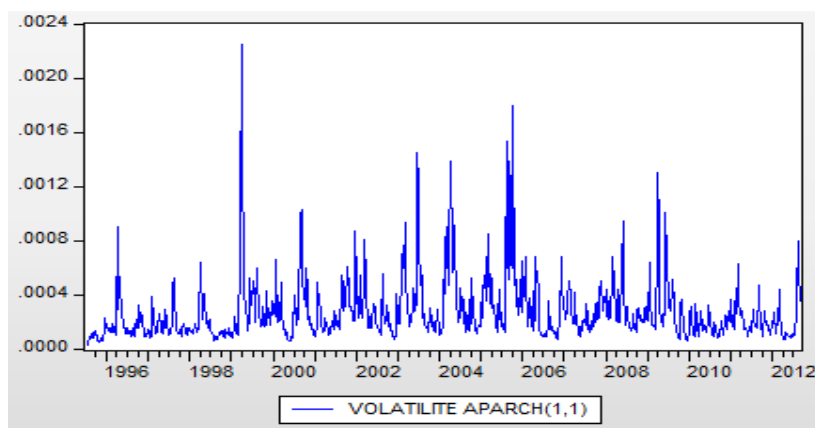


Figure 14: volatilité du modèle ARMA(1,1) avec erreur APARCH(1,1)

L'équation du modèle ARMA(1,1) estimé est :

$$RPDT_t = 0,6415 RPDT_{t-1} - 0,1101 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Avec } \varepsilon_t = \mu_t \sqrt{\sigma_t^\delta}$$

Dont l'écart-type conditionnelle s'écrit comme suit :

$$\sqrt{\sigma_t^{0,632}} = 0,0112 + 0,2126(|\varepsilon_{t-1}| + 0,649\varepsilon_{t-1})^{0,632} + 0,69 \sqrt{\sigma_{t-1}^{0,632}}$$

Comparaisons des modèles estimés

Dans la section précédente nous avons estimé le modèle ARMA(1,1) avec les modèles du variance conditionnelle qui sont ARCH(1), GARCH(1,1); ARCH(1)-M (variance), EGARCH(1,1) et TGARCH(0,1) et APARCH(1,1) nous avons retenu ces modèles, on a :

Les modèles EGARCH(1,1) et TGARCH(0,1), APARCH(1,1) vérifient la condition d'asymétrie.

Les modèle ARCH(1) GARCH(1,1); ARCH(1)-M satisfont la condition de la positivité des coefficients de l'équation de la variance.

La question qui nous supposons est :

Quel modèle doit-on finalement retenir pour la modélisation de la variance conditionnelle de la série du diesel ?

Pour répondre à cette question, nous utilisons les critères de choix entre les différentes modèles : le coefficient de détermination corrigé (\bar{R}^2) la valeur de Durbin-watson et le critère d'information d'Akaike (AIC).

Recherche du modèle optimal

Le tableau ci-dessous présente les résultats des différents modèles estimés (nous y insérons quelques critères de sélection d'un modèle optimal) :

	ARCH(1)	GARCH (1,1)	TGARCH(0,1)	EGARCH(1,1)	ARCH(1)-M Variance	APARCH(1,1)
	Equation	de	la	moyenne		
AR(1)	0,56 (0,00)	0,504 (0,00)	0,50 (0,00)	0,60 (0,00)	0,572 (0,00)	0,64 (0,00)
MA(1)	0,19 (0,00)	0,23 (0,00)	0,174 (0,00)	0,179 (0,00)	0,187 (0,00)	0,11 (0,002)
	Equation	De	La	variance		
constante	0,000186	0,023	0,0216	-1,72	0,000185	0,0112
ARCH(1)	0,3136	0,173	.	.	0,311	.
GARCH(1,1)	.	0,6996	0,9390	.	.	.
Rési(-1)²(Resi(-1)<0)	.	.	0,0706	.	.	.
ABS(resi(- 1)/@SQRT (GARCH(-1) Resi(-1)/ @Sqrt (GARCH(-1) Log(GARCH(-1))	.	.	.	0,3492	.	.
GARCH	4,12	.
ABS(resi(-1)) Resi(-1) @Sqrt (GARCH(-1))	0,2126 -0,6495 0,69
R²	0,342	0,346	0,35	0,336	0,33	0,337
AIC	-5,485	-5,54	-5,456	-5,574	-5,48	-5,58
DW	2,21	2,17	2,06	2,25	2,24	2,18

Tableau 12 : résumé du résultats des différents modèles Estimés

Si l'on s'en tient au corrélogramme des résidus aux carrés, il apparaît que pour les six modèles, les résidus issus de la variance conditionnelle ne sont pas des bruits blancs (prob < 5%).

La comparaison des critères sélectionnée entre les différents modèles retenus nous conduit à choisir le processus TGARCH(0,1) pour la modélisation de la variance conditionnelle du prix de Diesel par Gallon en dollar.

Date: 06/14/19 Time: 22:46
Sample: 7/03/1995 9/10/2012
Included observations: 896
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
		1 -0.024	-0.024	0.5268	
		2 -0.027	-0.027	1.1633	
		3 0.013	0.011	1.3070	0.253
		4 0.045	0.045	3.1159	0.211
		5 -0.056	-0.053	5.8992	0.117
		6 -0.024	-0.024	6.4130	0.170
		7 -0.034	-0.039	7.4380	0.190
		8 0.021	0.018	7.8402	0.250
		9 0.030	0.035	8.6574	0.278
		10 0.034	0.037	9.7320	0.284
		11 -0.059	-0.057	12.941	0.165
		12 -0.024	-0.033	13.456	0.199
		13 -0.052	-0.061	15.963	0.143
		14 -0.015	-0.018	16.170	0.184
		15 -0.023	-0.014	16.669	0.215
		16 -0.079	-0.080	22.362	0.071

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

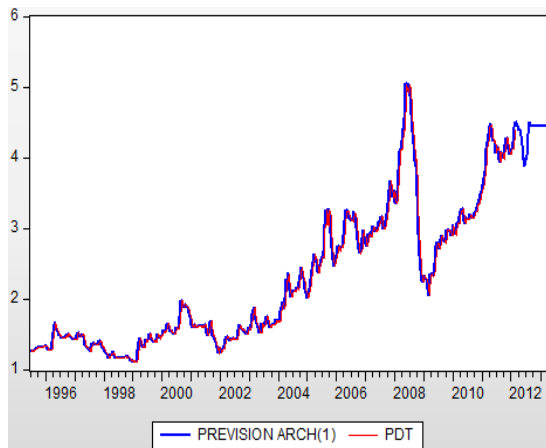
Figure 15: Corrélogramme des résidus standardisés du modèle ARMA (1,1) avec erreur TGARCH(0,1)

Les résidus d'estimation de ce modèle semblent des bruits blancs (prob < 5%), alors le processus ARMA(1,1) avec erreur TGARCH(0,1) est accepté.

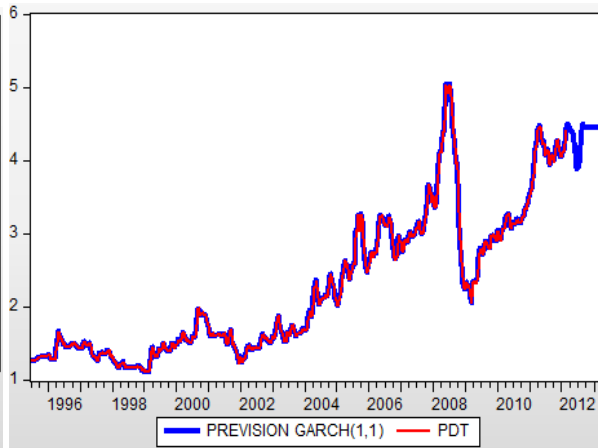
3.5 Les Prévisions

Les graphes suivants représentant les réalisations et les valeurs ajustées de la série Diesel avec des prévisions de 10/9/2012 jusqu'au 25/03/2013

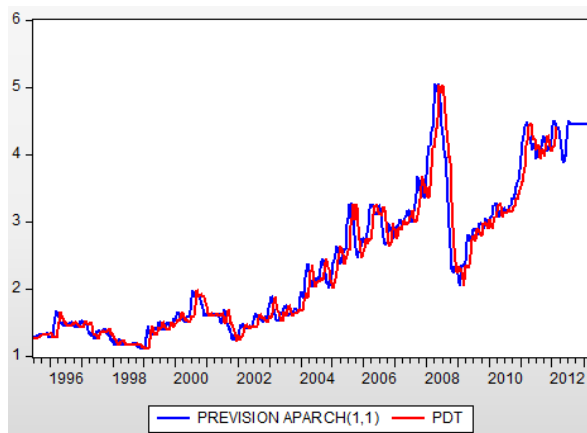
ARCH(1)



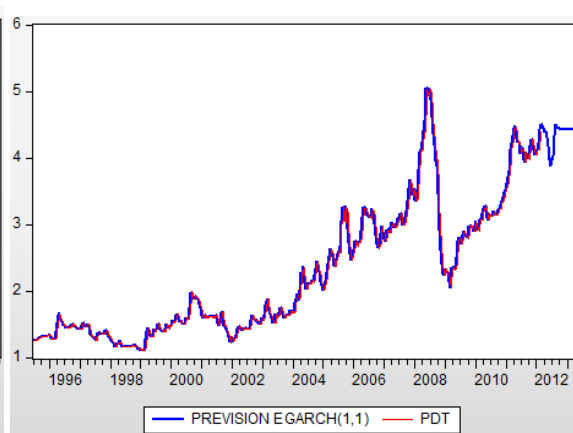
GARCH(1,1)



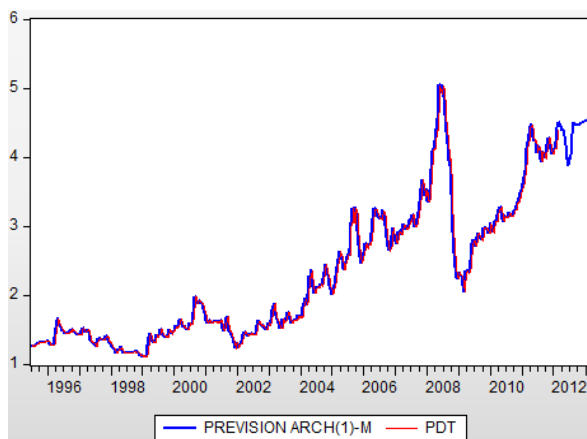
APARCH(1,1)



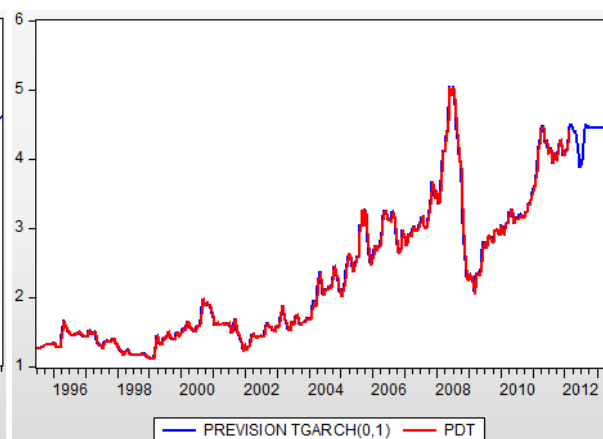
EGARCH(1,1)



ARCH(1)-M



TGARCH(0,1)



Comparaison entre les modèles prévus

On présente dans le tableau ci-dessous six valeurs prévues de notre modèle ARMA(1,1) avec différente modélisation des résidus

DATE	Série PDT	ARCH(1)	GARCH(1,1)	ARCH(1)M	EGARCH(1,1)	APARCH(1,1)	TGARCH(0,1)
01/08/1996	1.332	1.32711774	1.32711774	1.32711774	1.32711774	1.28100942	1.32711774
1/15/1996	1.324	1.30606829	1.32711774	1.30606829	1.30606829	1.277	1.32711774
1/22/1996	1.324	1.28501884	1.30606829	1.28501884	1.28501884	1.27599765	1.30606829
1/29/1996	1.303	1.27900471	1.28501884	1.27900471	1.27900471	1.27499529	1.28501884
02/05/1996	1.282	1.27299058	1.27900471	1.27299058	1.27299058	1.28702355	1.27900471

Tableau 13: quelques valeurs prévues avec la série du Diesel

D'après le tableau, nous remarquons que les valeurs prévus du modèle TGARCH(0,1) sont plus proche de la série PDT parmi les valeurs des autres modèles, ce que l'on confirmera par le critère RMSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}}$$

Avec

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$: Somme des résidus au carré.

n : Nombre d'observation.

	ARCH(1)	GARCH(1,1)	ARCH(1)M	EGARCH(1,1)	APARCH(1,1)	TGARCH(0,1)
RMSE	0,01638	0,01633	0,01652	0,01646	0,01644	0,01628

Le calcul de ce critères a été fait par le logiciel Eviews, qui nous a donné les résultats précédentes, nous constatons que RMSE de modèle ARMA(1,1) ~ TGARCH(0,1) est le plus proche de zéro, cela nous permet de conclure que nous avons aboutis à une bonne prédiction.

Conclusion

L'objet de cette application est de modéliser la volatilité de prix de diesel par gallon en dollar, notre étude à montrer que notre série est caractérisé par le phénomène de volatilité par des spécifications d'asymétrie, nous avons effectué un test ARCH qui a rejeté l'hypothèse nulle d'homoscédasticité, nous avons donc déduit qu'un modèle ARMA avec erreur de type ARCH est adéquat, en suite nous avons estimés six modèle ARMA (1,1) avec erreur volatile:

- ARMA(1, 1) – ARCH(1)
- ARMA(1, 1) – GARCH(1,1)
- ARMA(1, 1) – ARCH(1) – M (variance)
- ARMA(1, 1) – TGARCH(0,1)
- ARMA(1, 1) – EGARCH(1,1)
- ARMA(1, 1) – APARCH(1,1)

D'après les critères de choix, Nous amenons à choisir le modèle TGARCH(0,1) comme modèle adéquat pour des bonnes prévisions.

Conclusion générale

Nous avons consacré notre étude à la modélisation de la volatilité des séries financières selon le modèle ARCH et leur extension, dans le but d'estimation des paramètres de ces modèles et faire une application sur la série de diesel (PDT).

Dans le première chapitre, nous avons exposé les principaux concepts de base des prix d'actif financière, ensuite nous introduire le modèle utilisé pour modéliser les actifs financières « modèle de Black Scholes » qui reste le plus utilisé dans le domaine de la finance, ensuite on a présenté quelques caractéristiques des séries de rendements. Parmi ces caractéristiques, on retrouve l'excès du coefficient d'aplatissement, le coefficient d'asymétrie (Skewness) ainsi que l'hétéroscédasticité et l'autocorrélation dans les carrés des rendements, ensuite nous avons montré les différentes techniques utilisées pour vérifier la présence de ces caractéristiques.

Concernant la volatilité on a vu qu'elle est une variable clé que l'on retrouve pour la plupart des instruments financiers, elle joue un rôle centrale dans la plupart des domaines de la finance et intervient dans les modèles d'évaluation d'option, aussi bien que dans la modélisation du prix des options ainsi que les différentes approches utilisées pour estimer la volatilité, avec son existence plusieurs chercheurs essayent d'étudier la raison de la volatilité du marché, qui n'est pas seulement les informations existantes sur le marché mais aussi les comportements des investisseurs, et plusieurs autres facteurs.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté la volatilité conditionnelle (ARCH, GARCH et GARCH-M symétrique et des autres extensions EGARCH, TGARCH et APARCH (asymétrique)

Ces plusieurs extensions au modèle générique ont été proposées pour capturer l'asymétrie.

Afin d'assimiler toute cette théorie nous avons eu recours à l'application sur des prix de diesel en dollar, et d'après cette partie pratique on constate que le modèle TGARCH(0,1) est clairement le plus performant puisqu'il obtient le score le plus bas sur le métrique d'ajustement tout en présentant le RMSE le plus bas parmi tous les modèles.

Bibliographie

- [1] A POPIER, " le modèle de Black Scholes " 2001.
- [2] A .EZZEBSA, "Modélisation des marchés financiers et krachs boursiers", Thèse Mathématique ,2014 .
- [3] BERA,A.K et HIGGINS, M.L.(1993), " ARCH Models :propriétés,Estimation and testing" journal of Economic Surveys.
- [4] BERHOUNE.K. " Processus ARCH-GARCH applications". Mémoire à université Abou bekr Belkaid- Tlemcen-2013.
- [5] BROOKS, C. and S. P. BURKE. "Forecasting exchange rate volatility using conditional Variance model selected by information criteria". Economics Letters 61 : 273-278 (1998).
- [6] COULON.J. "Volatilité et gestion de portefeuille". Mémoire longue, 2009.
- [7] C.COX.J.A.ROSS.S.RUBINSTEIN.M. "Options pricing : a simplified approach". journal offinancial economics, 1979.
- [8] D.AUROUX.) "Méthodes numériques pour le pricing d'options", polyTech Nice-Sophia Mathématiques Appliquées et Modélisation 5^{ème} année, 2011-2012
- [9] ENGLE, R. F., D. M. Lilien and R. P. Robins, "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model", Econometrica, 55, 391-407, (1987).
- [10] E.RACICOT.F. "Théoret.R. Finance computationnelle et gestion des risques ingénierie financières avec applications Excel (visual Basic) et Matlab". Presse de l'Université du Québec, 2006.
- [11] FARES.C. " Estimation et prévision de la volatilité de l'indice SP&500". Université du Québec á Montréal, Mai 2008.
- [12] GABET.L.ABERGEL.F.MUNITOKE.I. " Introduction aux mathématiques financières". Ecole Centrale Paris, 2010.
- [13] HURLIN.C. "Econométrie pour la finance Modèle ARCH-GARCH". Université d'Or-Léans , 2006-2007.

- [14] J.KUMA, "Modélisation Hétéroscédastique : Les modèles ARCH-GARCH " , Archives-Ouvertes ,2018.
- [15] LEGRIGNOU.B. " La surface de volatilité". Ecole Normale Supérieure.
- [16] NELSON, D.B. "ARCH Models as Diffusion Approximations," Journal of Econométrie"
45, 7.38 (1990).
- [17] SAIMI.N. "Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire", Université du Québec à trois Rivières, 2001.
- [18] S.M.HISSIENE, "Estimation de la volatilité des donnée financiers a haute fréquence", Archives-ouvertes, 2017.
- [19] ZAKOIAN, J.-M, "Threshold Arch Models", CREST.DP, (1991).
- [20] ZAKOIAN, J.-M, "Threshold Heteroskedastic Models", Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 931.955, (1994).
- [21] ZEGHDOUDI, H. Bouseba, F,Z , " Use of the GARCH Models to Energy Markets : Oil Price Volatility". Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol11, N_6 pp. 4385-4394 (2015).