الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أمحمد بوقرة بومرداس

كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès

Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales

مطبوعة بيداغوجيةتحت عنوان:

الاقتصـــــاد القياســـــي

محاضرات وتمارين محلولة

موجهة لطلبة:ليسانس

تخصص: اقتصاد كمي

من اعداد الدكتور: قوري يحي عبد الله

قسم: العلوم الاقتصادية

السنة: 2018/2017

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهـــرس العــــام

تقديم

الاقتصاد القياسي هو أحد فروع العلوم الاقتصادية التي تهتم باستخدام الأساليب الكمية في تحليل الظواهر الاقتصادية، لأغراض متعددة كالتنبؤ والتحليل الاقتصادي ووضع السياسات الاقتصادية واتخاذ القرارات الاقتصادية المثلى وغيرها.

تقترح هذه المطبوعة مجموعة من الدروس والمحاضرات في مقياس الاقتصاد القياسي موجهة لطلبة السنة الثالثة قسم العلوم الاقتصادية، فرع الاقتصاد التطبيقي على الخصوص وفقا للبرنامج العلمي الأكاديمي المقترح من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. المطبوعة موجهة أيضا لكل الطلبة والباحثين المهتمين بمجال الاقتصاد القياسي بمختلف مستوياتهم بما في ذلك طلبة الماستر والدكتوراه.

المطبوعة هي نتاج تجربة اكاديمية في حقل التدريس بجامعة بومرداس لمدة ثلاث سنوات دراسية، يتعلق الامر بمقياس الاقتصاد القياسي، طلبة السنة الثالثة، علوم اقتصادية، تخصص اقتصاد تطبيقي.

حاولنا من خلال هذه المطبوعة الإلمام بالعلاقات والقوانين الأساسية التي تقوم عليها النماذج القاعدية النظرية في الاقتصاد القياسي، وذلك من خلال أربع فصول رئيسية: عموميات حول الاقتصاد القياسي، نماذج الانحدار الخطي البسيط، نماذج الإنحدار الخطي المتعدد ومشاكل الاقتصاد القياسي. العلاقات والقوانين النظرية المختلفة المتعلقة بموضوع البحث منتقاة بعناية من مراجع كثيرة ومتعددة ومزودة ببراهينها الرياضية والإحصائية بطرق مبسطة لتمكين الطالب من فهم وهضم المحتوى النظري للمادة.

وبالنظر إلى أن الاقتصاد القياسي يتضمن جانيا تطبيقيا مهما حرسنا على إضافة بعض الأمثلة التطبيقية والتمارين المحلولة لتمكين الطالب من تطبيق العلاقات النظرية في أبحاثه التطبيقية، هذا دون أن ننسى محاولة الاعتناء بالمصطلحات العلمية وترجمتها من اللغة الإنجليزية إلى اللغة العربية.

ويبقى هذا العمل في طبعته الأولى تحت تصرف كل الطلبة والباحثين من أجل اثرائه بملاحظاتهم وانتقاداتهم المختلفة، التي سيتم اخذها بعين الاعتبار مع جزيل الشكر والامتنان.

الفصل الأول: عموميات حول الاقتصاد القياسي.

1. **مفهوم الاقتصاد القياسي.**
2. **أهداف الاقتصاد القياسي.**
3. **أدوات الاقتصاد القياسي.**
4. **مراحل البحث في الاقتصاد القياسي.**
   - **1.4.مرحلة تحديد النموذج**
   - **2.4. مرحلة تقدير النموذج**
   - **3.4.مرحلة تقييم النموذج المقدر**
   - **4.4.مرحلة استعمال النموذج لغرض التنبؤ**

الفصل الأول: عموميات حول الاقتصاد القياسي

1. مفهوم الاقتصاد القياسي (Econometric):

ينقسم البحث في علم الاقتصاد على غرار باقي العلوم إلى بحث نظري**research) (theoretical** وبحث تجريبي (**empirical research**). والاقتصاد القياسي هو أحد فروع العلوم الاقتصادية الذي يهتم بالبحث التجريبي، يتميز باستخدامه للأساليب الكمية في تحليل الظواهر الاقتصادية.

استخدم مصطلح الاقتصاد القياسي لأول مرة سنة 1926 ، Econometrics من طرف الاقتصادي Ranger Frisch، غير أن البداية الحقيقية للاقتصاد القياسي هي مع تأسيس جمعية الاقتصاد القياسي Econometric Society في عام 1930، ودورية Econometrica Journal في يناير 1933.

والاقتصاد القياسي هو مصطلح يوناني يتكون من مقطعين: Economic وتعني اقتصاد، Metrics و تعني القياس، أي حرفيا: القياس في الاقتصاد، أو الاقتصاد القياسي أو القياس الاقتصادي. ويمكن تعريفه على أنه فرع من علم الاقتصاد يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية وتكميمها من خلال بيانات إحصائية واقعية.

2. أهداف الاقتصاد القياسي:

يهدف الاقتصاد القياسي إلى عقلنة اتخاذ القرار الاقتصادي من خلال:

- اختبار العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات كما تقدمها النظرية الاقتصادية.
- تحليل الظواهر الاقتصادية وتفسيرها من خلال اختبار الفروض النظرية.
- وضع السياسات الاقتصادية وتقييمها.
- التنبؤ والتوقع بالسلوك الذي تأخذه المتغيرات الاقتصادية في المستقبل.

3. أدوات الاقتصاد القياسي:

يعتمد الاقتصاد القياسي في منهجيته على ثلاث علوم أساسية:

- النظرية الاقتصادية: وذلك من خلال الفرضيات التي تقدمها المدارس الاقتصادية فيما يتعلق بالعلاقات الموجودة بين المتغيرات الاقتصادية، سواء اكان ذلك على المستوى الكلي أو على المستوى الجزئي.
- علم الإحصاء: وذلك من خلال الطرق والأساليب التي يقدمها علم الإحصاء في كيفية قياس واختيار المتغيرات، اختيار العينة، قياس المتوسط الحسابي والتباين، والارتباط الخطي.....
- علم الرياضيات: وذلك من خلال ما توفره من أدوات مهمة في التحليل والتقدير والاختبارات والتنبؤ كالجبر والاحتمالات والمنطق.

- الاعلام الالي: وذلك من خلال ما يوفره من البرمجيات والخوارزميات التي تسهل القيام بحل المشاكل والعمليات المعقدة.

4. مراحل البحث في الاقتصاد القياسي:

تمر عملية البحث في الاقتصاد القياسي بعدة مراحل.

1.4..مرحلة تعيين أو تخصيص النموذج:

وتتضمن هي الأخرى عدة مراحل كما يلي:

أ. تحديد متغيرات النموذج:

ويقصد بمتغيرات النموذج، أي مجموعة المتغيرات المستعملة في النموذج فعلى سبيل المثال: دالة الاستهلاك العائلي تتضمن متغيرين هما: الاستهلاك العائلي ودخل العائلة.
وتنقسم المتغيرات إلى نوعين: متغيرات تابعة أو مفسرة أو مشروحة ومتغيرات مستقلة أو مفسرة أو شارحة، فعلى سبيل المثال في دالة الستهلاك العائلي: يسمى الاستهلاك متغير تابع أو متغير مشروح أو متغير مفسر وأما الدخل فيسمى متغير مستقل أو مفسر أو شارح.

ب. تحديد النموذج:

النموذج لغة هو عبارة عن تمثيل مبسط لشيئ معقد، ويمكن أن نميز بين ثلاثة أنواع من النماذج:

- النموذج الاقتصادي: يقصد بالنموذج الاقتصادي أي النموذج الذي تقترحه النظرية الاقتصادية في تحليلها وتفسيرها للظواهر الاقتصادية ونوع العلاقات الموجودة بين المتغيرات الاقتصادية كأن يقال مثلا: إن استهلاك العائلات يتناسب طردا مع دخلها أو أن يقال إن الدخل العائلي هو المحدد الأساسي لاستهلاكها. فيتضمن النموذج الاقتصادي: المتغيرات الاقتصادية بالإضافة إلى نوع العلاقات الموجودة بينها (علاقة طردية أو علاقة عكسية).
- النموذج الرياضي: هو عبارة عن تمثيل رياضي مبسط للنموذج الاقتصادي بدون استعمال التعابير اللفظية المعقدة والبيانات الإحصائية، بل يقتصر على الرموز والمعادلات الرياضية. مثال: في حالة دالة الاستهلاك العائلي يمكن كتابة النموذج الرياضي المعبر عن العلاقة الطردية بين الاستهلاك والدخل كما يلي:

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y, \qquad \beta_1 \rangle 0$$

C ، Y تمثلان الاستهلاك والدخل العائليين على الترتيب.

النموذج القياسي: هو عبارة عن نموذج اقتصادي ورياضي في نفس الوقت يستعمل بيانات إحصائية واقعية ويتضمن متغير عشوائي يفترض فيه أنه يحقق مجموعة من الشروط. مثال: في حالة دالة الاستهلاك العائلي، يمكن كتابة النموذج القياسي كما يلي:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 R_i + u_i, \quad \beta_1 \rangle 0$$

مع: C_i ، R_i تمثلان الاستهلاك والدخل للعائلة i على الترتيب.

β_0 ، β_1 : تسمى معالم النموذج.

u_i : تمثل متغير عشوائي يعبر عن الأخطاء التي يمكن أن تكون في النموذج ويحقق مجموعة من الفرضيات تسمح لاحقا بتقدير معالم النموذج: β_0 ، β_1 كفرضية استقلالية الأخطاء، وثبات تباينها وتوزيعها الإحتمالي الطبيعي.

الفرق بين النموذج الرياضي والنموذج القياسي هو المتغير العشوائي الذي يجعل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في النموذج القياسي علاقات احتمالية غير مؤكدة. كما يتميز النموذج القياسي يكونه يسمح بتقدير العلاقة الموجودة بين المتغيرات خلافا للنموذج الاقتصادي والرياضي اللذان يكتفيان بتحديد اتجاهها فقط.

2.4. مرحلة تقدير النموذج:

وتتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

أ. تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بمتغيرات الدراسة:

وهي عبارة عن مجموعة من البيانات الإحصائية التي يتم تجمعيها وفقا لشروط معينة سواء كان ذلك على المستوى الاقتصادي الكلي، كاستهلاك العائلات، الدخل، الاستثمار معدل الفائدة، الناتج الداخلي الخام وغيرها أو على المستوى الاقتصادي الجزئي: كالقيمة المضافة، رقم الأعمال، الأجور، الأرباح......

يمكن أن نميز بين عدة أنواع من المتغيرات بحسب البيانات والقيم الإحصائية التي تأخذها:

- البيانات الزمنية او السلاسل الزمنية (Time series data)، وهي عبارة عن بيانات تتغير تبعا لمؤشر الزمن، مثال: تغير الاستهلاك خلال الفترة 2000 – 2017 نرمز له بالرمز: C_t مع: $(t = 2000,2001,.....,2017)$.

t	C_t
2000	C_{2000}
2001	C_{2001}
⋮	⋮
2017	C_{2017}

- البيانات المقطعية (Cross-Sectional Data): وهي عبارة عن بيانات إحصائية تتغير تبعا لمؤشرات أخرى غير الزمن بحسب نوع المتغير، مثل: تغيرات الإستهلاك حسب العائلات، أو تغير الاستهلاك حسب الدول، أو تغير دخول الأفراد حسب نوع الشهادات العلمية التي يحوزونها، ....وذلك في لحظة زمنية معلومة وثابتة، في حالة تغير الاستهلاك حسب الدول في سنة 2017 مثلا يمكن وضعها في جدول كما يلي:

i	C_i
الجزائر	$C_{\text{الجزائر}}$
تونس	$C_{\text{تونس}}$
⋮	⋮
المغرب	$C_{\text{المغرب}}$

- بيانات البانل (Panel data): وهي عبارة عن بيانات إحصائية متقاطعة بحيث تتغير تبعا لمؤشر الزمن من جهة ومؤشر آخر غير الزمن من جهة أخرى، مثل تغير الاستهلاك تبعا لمؤشر الزمن من جهة وتبعا للدول من جهة أخرى، فيمكن وضعها في جدول كما يلي:

i	t	C_{it}
الجزائر	2000	$C_{\text{الجزائر}\ 2000}$
	⋮	⋮
	2017	$C_{\text{الجزائر}\ 2017}$
⋮	2000	
	⋮	⋮
	2017	
تونس	2000	$C_{\text{تونس}\ 2000}$
	⋮	⋮
	2017	$C_{\text{تونس}\ 2017}$

وهناك مجموعة من الشروط الواجب مراعاتها عند تجميع البيانات الإحصائية: من بينها:

- ضرورة مراعاة الوحدة الزمنية التي شوهدت فيها البيانات: حيث يمكن التفريق بين البيانات الإحصائية السنوية، نصف سنوية، فصلية أو شهرية ......، وهنا يستطيع الباحث تجميع البيانات الاحصائية بحسب نوع البيانات الذي تتطلبه الدراسة.
- ضرورة مراعاة الوحدة المكانية للبيانات الإحصائية، فكل منطقة جغرافية لها بياناتها الإحصائية الخاصة وقد يضطر الباحث الى تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بدولة معينة أو منطقة معينة بحسب ما تقتضيه الدراسة.
- أن تكون البيانات الإحصائية متجانسة: بحيث يمكن المقارنة بينها كأن يكون لها نفس وحدة القياس، وقد يضطر الباحث لهذا الغرض إلى تحويل البيانات من وحدة قياس إلى وحدة قياس أخرى، كتحويل الوحدات الفيزيائية إلى وحدات نقدية.
- ضرورة التفريق بين المتغيرات بالقيم الحقيقية والمتغيرات بالقيم الاسمية، فالمتغيرات بالقيم الحقيقية تلغي أثر تغيرات الأسعار.
- ضرورة فهم العلاقات المحاسبية بين المتغيرات سواء كان ذلك على المستوى الكلي (المحاسبة الوطنية)، أو على المستوى الجزئي (محاسبة المؤسسة).
- أن يكون للبيانات الإحصائية مصدر معلوم دقيق وموثوق بحيث يمكن الاعتماد عليه والرجوع اليه.

ب.تقدير معالم النموذج القياسي:

يقصد بتقدير النموذج أي إيجاد مقدرات عددية لمعالم النموذج، وهناك عدة طرق تستخدم للتقدير منها: طريقة المربعات الصغرى العادية، طريقة المعقولية العظمى، التقدير باستعمال مجال الثقة، التقدير باستعمال طريقة العزوم، وتختلف هذه الطرق في ملاءمتها باختلاف النموذج القياسي المستعمل، والبيانات الإحصائية المتاحة، وخصائص المقدرات التي تفضي إليها، بالإضافة إلى الخوارزميات والبرامج الإحصائية التي تسمح بتطبيق كل طريقة.

3.4. مرحلة تقييم النموذج المقدر:

ويتضمن التقييم ثلاث أنواع من التقييم:

أ. التقييم الاقتصادي:

يقصد بالتقييم الاقتصادي معرفة مدى مطابقة حجم وإشارة قيم المعالم المقدرة للنظرية الاقتصادية. إذا كان هناك تطابق مع النظرية الاقتصادية فهذا يعني أن النموذج المتحصل عليه مقبول اقتصاديا وإلا فإنه يكون مرفوضا اقتصاديا، إلا أن يكون ثمت تفسير اقتصادي أو إحصائي منطقي لهذا الاختلاف كأن لا تتحقق بعض الفرضيات الأساسية للنموذج، أو أن تكون هنالك ظروف خاصة حالت دون تحقق القاعدة النظرية. فعلى سبيل المثال في دالة الاستهلاك، تشترط النظرية الاقتصادية شرطين على معالم النموذج:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 R_i + u_i,$$

$0 \le \beta_1 \le 1$ ويسمى هذا المعلم اقتصاديا بالميل الحدي للاستهلاك بحيث يكون محصورا بين صفر وواحد ويعني أن الاستهلاك هو جزء من الدخل.

$\beta_0 \ge 0$ ويسمى بالاستهلاك الابتدائي أو التلقائي قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل معدوما، ويفترض فيه نظريا أنه أكبر من الصفر.

إذن تقييم النموذج اقتصاديا: يعني مقارنة إشارة وحجم قيم المعالم المقدرة بالشروط التي تضعها النظرية الاقتصادية.

ب.التقييم الإحصائي:

يقصد بالتقييم الإحصائي معرفة مدى الثقة الإحصائية للتقديرات الخاصة بمعالم النموذج، واختبارات المعنوية الإحصائية لكل معلم على حدى ثم المعنوية الاحصائية الكلية للنموذج و ذلك بمقارنة

الإحصائيات المحسوبة للمقدرات بالإحصائيات المجدولة الموافقة لها، فإذا كانت المعالم معنوية إحصائيا و النموذج أيضا معنوي فهذا يعني أن النموذج مقبول إحصائيا و إلا فهو مرفوض.
يدخل أيضا ضمن التقييم الإحصائي حساب معامل التحديد.

ت. التقييم القياسي:

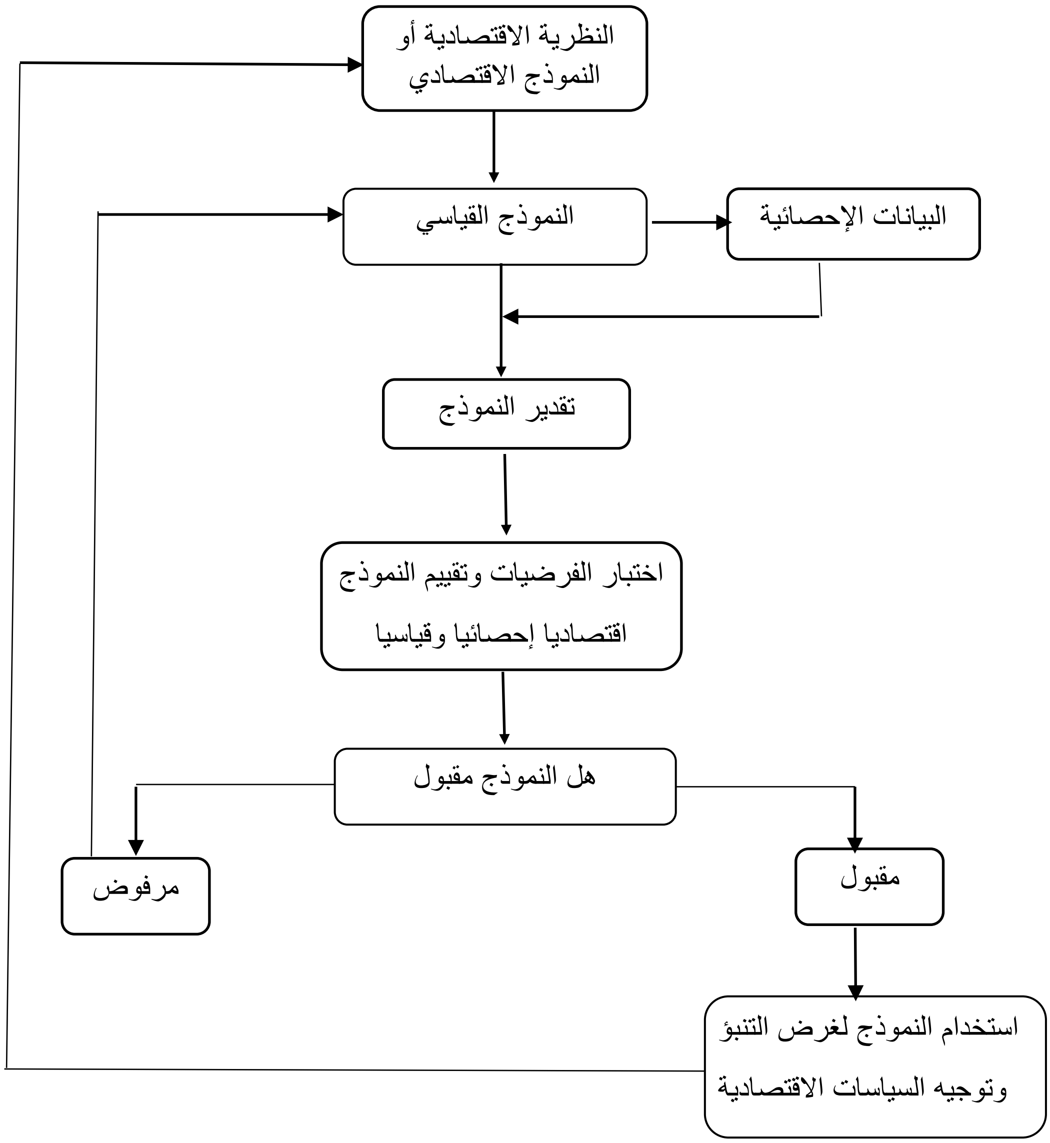
يهدف التقييم القياسي إلى اختبار مدى صحة الفرضيات الي بني عليها النموذج القياسي والمتعلقة على الخصوص بالمتغير العشوائي u والذي يعبر عن أخطاء النموذج، فإذا كانت هذه الفرضيات محققة فإن هذا يعطي نتائج التقدير مصداقية كبيرة، ويجعلها متصفة بصفات أساسية أهمها صفتي الاتساق وعدم التحيز. ومن بين هذه الفرضيات: فرضية عدم ارتباط الأخطاء، وثبات تبانها، وتوزيعها الطبيعي.

4.4.مرحلة استعمال النموذج لغرض التنبؤ:

يقوم التنبؤ على أساس أن المستقبل القريب هو امتداد للماضي القريب، لكن اذا حدثت تغيرات هيكلية سريعة للظروف الاقتصادية والاجتماعية فإن النموذج لا يكون قادرا على التنبؤ بهذه التغيرات.
لاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لابد من اختبار استقرارية المعلمات المقدرة عبر الزمن، واختبار مدى حساسية هذه التقديرات لتغيرات حجم العينة المختارة.

يمكن اختصار مراحل البحث في الاقتصاد القياسي عمليا من خلال المخطط الموالي:

خطوات التحليل في الاقتصاد القياسي التطبيقي



الفصل الثاني : نموذج الانحدار الخطي البسيط

الفصل الثاني: نموذج الانحدار الخطي البسيط

(Simple Linear Regression)

سنتطرق في هذا الفصل إلى تحليل الانحدار البسيط وسمي بذلك لأنه يتضمن متغيرين اثنين فقط، فهو أبسط أنواع الانحدار الخطي.

1. كتابة النموذج :

يمكن نمذجة العلاقة بين متغيرين Y و X يمثلان مجتمع معين، حيث المتغير X يشرح المتغير Y ، أو بعبارة أخرى كيف يتغير Y بدلالة تغير X و ذلك في شكل نموذج انحدار خطي بسيط عند كل مشاهدة i على الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \quad i = 1,2,....,n$$

- Y يسمى بالمتغير المُفَسَّر أو التابع أو المشروح، (Dependent, Endogenous).
- X يسمى بالمتغير المُفَسِّر أو المستقل أو الشارح، ونشير هنا إلى أن التمييز بين المتغير التابع والمتغير المستقل (Exogenous, Regressor, Independent) في كتابة النموذج يتم وفقا لما تمليه النظرية الاقتصادية.
- i مؤشر للدلالة على رقم المشاهدة، $(i = 1,2,....,n)$ حيث n هو طول العينة المختارة من المجتمع الذي نرغب في دراسته.
- β_0 و β_1 تسمى معالم (Parameters) النموذج، وهي عبارة عن أعداد حقيقية مجهولة في المجتمع المدروس، لكنها تصبح معلومة في العينة باستعمال طرق التقدير الرياضي.
- u متغير عشوائي يعبر عن الأخطاء (Error term) الموجودة في النموذج (الأخطاء في تفسير المتغير التابع Y)، أو أيضا البواقي (Residual) لأنه يمكن كتابتها عند كل مشاهدة i على الشكل التالي:

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i, \quad i = 1,2,......,n$$

ويرجع وجود حد الأخطاء إلى عدة أسباب نذكر من بينها:

- إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج ولكن لم يتم أخذها بعين الإعتبار.
- وجود أخطاء في البيانات المشاهدة والتي تعبر لا قد لا تعبير بشكل دقيق عن المتغيرات.

– أخطاء في الصياغة الرياضية التي تعبر عن العلاقة الاقتصادية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

مثال:1 نموذج انحدار خطي بسيط ممثل لدالة الاستهلاك العائلي: إذا اخترنا عينة مكونة من 12 عائلة، فإنه من أجل كل عائلة i يمكن كتابة دالة الاستهلاك العائلي على الشكل التالي:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 R_i + u_i , \quad i = 1,2,....,12$$

مع: C_i يرمز للاستهلاك العائلة i وهو المتغير التابع، R_i يرمز لدخل العائلة i وهو المتغير المستقل. هذه الدالة تعني أن الإستهلاك العائلي هو متغير تابع للدخل بحيث يتحدد داخل النموذج (أي كلما تغير دخل العائلة تغير استهلاكها تبعا له)، أما الدخل فهو متغير مستقل يتحدد خارج النموذج (أي أنه غير تابع للإستهلاك بل مستقل عنه، حتى وإن كان يمكن أن يكون تابعا لمتغيرات أخرى لم تدرج في النموذج).

مثال 2: النموذج القياسي الخاص بالطلب على 100 سلعة يمكن كتابته على الشكل الموالي:

$$D_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + u_i , \quad i = 1,2,....,100$$

مع: D_i يرمز للكمية المطلوبة من السلعة i وهو متغير تابع يتحدد تبعا للسعر، أما P_i فيرمز لسعر هذه السلعة وهو متغير مستقل.

2.فرضيات النموذج:

هناك مجموعة من الفرضيات التي تم وضعها لبناء نموذج الانحدار الخطي البسيط وهي:

➢ الفرضية الأولى: النموذج خطي (Linear) بالنسبة لمعالم النموذج وشعاع الأخطاء، ويعني هذا أنه يمكن كتابته على الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i , \quad i = 1,2,....,n$$

فهذه العلاقة هي علاقة خطية يمكن تمثيلها بيانيا في شكل خط مستقيم.

➢ الفرضية الثانية: قيم المتغير X_i حقيقية (غير عشوائية) وغير متساوية جميعا فيما بينها.

➢ الفرضية الثالثة: الأمل الرياضي (Expectation) للأخطاء (Errors) معدوم، أو بعبارة أخرى: متوسط الأخطاء معدوم:

$$E(u_i) = 0, \quad \forall i = 1,.....,n$$

➢ الفرضية الرابعة: تجانس أو ثبات تباين الأخطاء Homoscedasticity :

وتعني أن تشتت الأخطاء حول المتوسط ثابت، ويعبر عنها رياضيا بالكتابة:

$$V(u_i)=E(u_i^2)=\sigma_u^2 \quad ,\forall i=1....n$$

➢ الفرضية الخامسة: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء (Autocorrelation): بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على طول العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$Cov(u_i,u_j)=E(u_i u_j)=0 \quad ,\forall i\neq j \qquad i,j=1....n$$

➢ الفرضية السادسة: الأخطاء مستقلة عن المتغير الشارح: X، أي:

$$Cov(X_i,u_i)=0, \forall i=1,\dots,n$$

➢ الفرضية السابعة: فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء (Normal distribution): وهي تعني أن الأخطاء تتوزع وفق القانون الإحتمالي الطبيعي.

الفرضية السابعة مع الفرضية الأولى والثانية والثالثة يمكن اختصارها رياضيا حسب الترميز الموالي:

$$u_i \to \mathrm{N}(0,\sigma_u^2)$$

3.تقدير معالم النموذج:

يقصد بتقدير النموذج، أي إيجاد مقدرات لمعالم النموذج: β_0 و β_1 بدلالة المتغيرات: X، و Y، وتسمى بمقدرات المعالم أو مقدرات النموذج ويرمز لها بالرمز $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ على الترتيب، وهي أحسن القيم الممكنة للتعبير عن النموذج في صيغته الخطية.

النموذج المكتوب بدلالة $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يسمى بالنموذج المقدر.

نشير هنا إلى الفرق بين المقدر (Estimator) وقيمة المقدر (Estimation)، فالمقدر هو متغير عشوائي يعبر عن علاقة إحصائية (Statistic) بدلالة X، و Y، أما قيمة المقدر فهي عبارة عن قيمة عددية ثابتة للمقدر تحسب بعد تعويض X، و Y بمشاهداتها الفعلية أو الحقيقية في العينة.

هناك عدة طرق لإيجاد $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أهمها: طريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المعقولية العظمى.

1.3. طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Squares):

تحاول طريقة المربعات الصغرى العادية (Least Squares) إيجاد مقدرات النموذج عن طريق تدنية (تصغير) مجموع مربعات الأخطاء (u_i) أو البواقي وتفضي إلى النتائج:

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}\\ \hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}\end{cases}$$

البرهان:

الكتابة الرياضة للأخطاء انطلاقا من نموذج الانحدار الخطي البسيط يمكن تحديدها كما يلي:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+u_i,\quad i=1,2,......,n \quad\Rightarrow u_i=Y_i-\beta_0-\beta_1X_i,\quad i=1,2,......,n$$

تبعا لذلك يمكن إيجاد مجموع مربعات الأخطاء الذي يرمز له بالرمز S:

$$S=\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2,\qquad i=1,2,......,n$$

المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ التي تصغر مجموع مربعات الأخطاء بدلالة المشاهدات X و Y هي تلك التي تعدم مشتقات S بالنسبة لـ: β_0 و β_1 على الترتيب وتكون الدالة S عندها محدبة (Convexe).

$$Min\,S=Min\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\underset{\beta_0,\beta_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2$$

بالإشتقاق بالنسبة لـ: β_0 و β_1 نجد:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\beta_0}=\dfrac{\partial}{\partial\beta_0}\sum\limits_{i}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2=-2\sum\limits_{i}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)\\ \dfrac{\partial S}{\partial\beta_1}=\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}\sum\limits_{i}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2=-2\sum\limits_{i}^{n}X_i\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)\end{cases}$$

المقدرات: $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ التي تعدم المشتقات تستخرج كما يلي:

$$\begin{cases}-2\sum\limits_{i}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)=0\\ -2\sum\limits_{i}^{n}X_i\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)=0.............................1\\ \sum\limits_{i}^{n}X_i\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)=0........................2\end{cases}$$

انطلاقا من المعادلة 1 نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i=n\hat{\beta}_0\Rightarrow\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}$$

بالتعويض في المعادلة 2 نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\beta}_1 \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

بضرب البسط والمقام في: n نجد:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}$$

بضرب البسط والمقام في: $\frac{1}{n}$ مرة أخرى نجد:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}$$

بعبارات مكافئة:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right) \left(Y_i - \bar{Y} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

وذلك لأن:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right) \left(Y_i - \bar{Y} \right) = \sum X_i Y_i - \bar{Y} \sum X_i - \bar{X} \sum Y_i + \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \sum X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum X_i \sum Y_i - \frac{1}{n} \sum X_i \sum Y_i + \frac{1}{n} \sum X_i Y_i$$

$$= \sum X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum X_i \sum Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\sum X_i^{\,2}-2\bar{X}\sum X_i+n\bar{X}_i^{\,2}=\sum X_i^{\,2}-\frac{1}{n}(\sum X_i)^2$$

ومن جهة أخرى:

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}),\quad V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\Rightarrow\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\hat{\beta}_1$$

إذن:

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}\\ \hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\end{cases}$$

$\bar{X}$ و $\bar{Y}$ يمثلان المتوسط الحسابي للمتغيرات X و Y على الترتيب.

شروط الرتبة الثانية لتكون $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ مصغرة لمجموع مربعات الأخطاء هي أن تكون الدالة S محدبة (Convexe) وليتحقق ذلك ينبغي أن تكون مصفوفة المشتقات الثانية (Hessian) معرفة موجبة (Positive Definite).

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 S}{\partial\beta_1^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\beta_1\,\partial\beta_0}\\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial\beta_0\,\partial\beta_1} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\beta_0^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2n & 2\sum X_i\\ 2\sum X_i & 2\sum X_i^2\end{pmatrix}$$

لتكون H معرفة موجبة يجب أن يكون محددها أكبر من الصفر.

$$|H|=\begin{vmatrix}2n & 2\sum X_i\\ 2\sum X_i & 2\sum X_i^2\end{vmatrix}=4n\sum X_i^2-4\left(\sum X_i\right)^2$$

$$=4n\left(\sum X_i^2-\frac{1}{n}(\sum X_i)^2\right)=4n\sum(X_i-\bar{X})^2>0$$

بما أن هذه الشروط محققة إذن: المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ تصغر مجموع مربعات الأخطاء S، وهو المطلوب.

نرمز لمقدرات الأخطاء u_i بالرمز $\hat{u}_i$ أو أيضا e_i، ونرمز لمقدرات المتغير التابع Y_i بالرمز $\hat{Y}_i$،
بالتالي يمكن استنتاج **الكتابات المختلفة التالية لنموذج الانحدار الخطي البسيط:**

معادلة خط الإنحدار الخطي عبارة عن معادلة خط مستقيم ميله: $\hat{\beta}_1$ تكتب كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i, \quad i = 1,2,......,n$$

النموذج المقدر تكتب على شكلين متكافئين:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i, \quad i = 1,2,......,n$$
$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i, \quad i = 1,2,......,n$$

أو أيضا باستعمال e_i:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i, \quad i = 1,2,......,n$$
$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i, \quad i = 1,2,......,n$$

معادلة البواقي المقدرة تكتب أيضا على شكلين متكافئين:

$$e_i = \hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i, \quad i = 1,2,......,n$$
$$e_i = \hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i, \quad i = 1,2,......,n$$

ملاحظات:

- انطلاقا من المعادلتين 1 و 2 أعلاه يمكن استنتاج أن:

$$\sum_i^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = \sum_i^n (X_i - \bar{X})\hat{u}_i = 0$$

وذلك لأن:

$$\begin{cases} \sum_i^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \\ \sum_i^n X_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X}\sum_i^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \\ \sum_i^n X_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \end{cases}$$

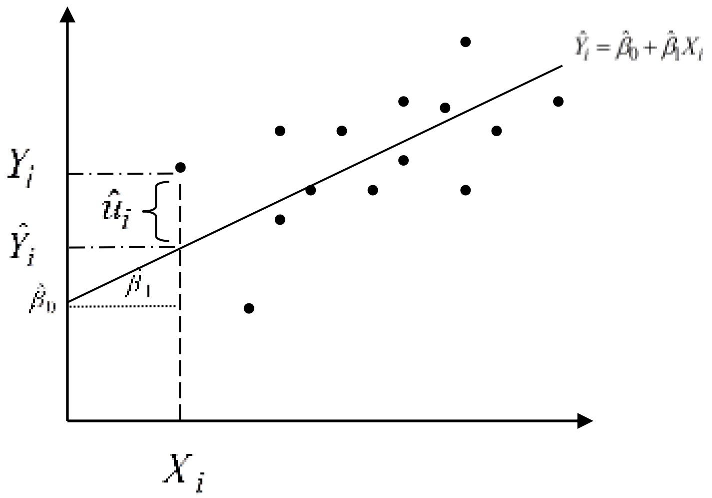
$$\Rightarrow \sum_i^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = \sum_i^n X_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) - \bar{X}\sum_i^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

التفسير الهندسي لطريقة المربعات الصغرى العادية:

الثنائيات (X_i, Y_i) يمكن تمثيلها بسحابة نقاط مبينة في الشكل أدناه، هذه النقاط الغير منتظمة يتم تعديلها بواسطة خط مستقيم. هناك عدة خطوط مستقيمة يمكن رسمها لتعديل سحابة النقط، فرسم خط مستقيم يكفي بتعيين نقطتين من على التمثيل البياني، غير أن أحسن خط مستقيم يمكن رسمه هو ذلك الذي يشمل أكبر عدد ممكن من الثنائيات (X_i, Y_i) أو يكون أقرب ما يكون إليها، هذا الخط هو الذي يسمى خط الانحدار الخطي ومعادلته: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$ وتنتمي إليه الثنائيات: $(X_i, \hat{Y}_i)$.

الأخطاء أو البواقي $\hat{u}_i$ تمثل المسافات العمودية بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة للمتغير التابع $(\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i)$.

المقاربة الهندسية لطريقة المربعات الصغرى العادية



2.3.طريقة المعقولية العظمى (Maximum Likelihood):

التقدير باستعمال طريقة المعقولية العظمى يفضي إلى نفس نتائج التقدير باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{cases}$$

البرهان:

انطلاقا من الفرضية:

$$u_i \rightarrow \mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$$

يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية للأخطاء على الشكل التالي:

$$f(u_i) = \left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_u^2}\right), i = 1,2,\ldots,n$$

نسمي $L(u_1,\ldots,u_n)$ دالة المعقولية العظمى، والمعرفة كما يلي:

$$L(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^{n} f(u_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_u^2}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

بما أن:

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i, \ i = 1,2,\ldots,n$$

بالتعويض نجد:

$$L(u_1,\ldots,u_n) = \left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i^2}{\sigma_u^2}\right)$$

$$= \left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{\sigma_u^2}\right)$$

نضع:

$$S = \ln\left[L(u_1,\ldots,u_n)\right]$$

مع: ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري.

المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$، $\hat{\sigma}_u^2$ التي تعظم دالة المعقولية بدلالة المشاهدات X و Y هي تلك التي تعدم مشتقات S بالنسبة لـ: β_0 و β_1، σ_u^2 على الترتيب ويكون عندها محدد مصفوفة Hessian أقل من الصفر.

$$\max_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_u^2} S = \max_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_u^2} \left\{-\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)X_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma_u^4}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)^2$$

المقدرات: $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ التي تعدم المشتقات تحسب كما يلي:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0}=\frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1}=\frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)X_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)X_i=0$$

بالمرور على نفس المراحل السابقة كما في طريقة المربعات الصغرى العادية نجد أن مقدرات المربعات الصغرى (Least Squares Estimator) العادية تساوي مقدرات المعقولية العظمى:

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\\ \hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\end{cases}$$

مثال:

نرغب في تقدير العلاقة الخطية بين الاستهلاك C والدخل R لمجموعة من العائلات، وذلك حسب نموذج الانحدار الخطي البسيط الموالي:

$$C_i=\alpha+\beta R_i+u_i \quad i=1,2,...,n$$

لهذا الغرض تم اختيار عينة مكونة من 12 عائلة وكانت النتائج كما يلي:

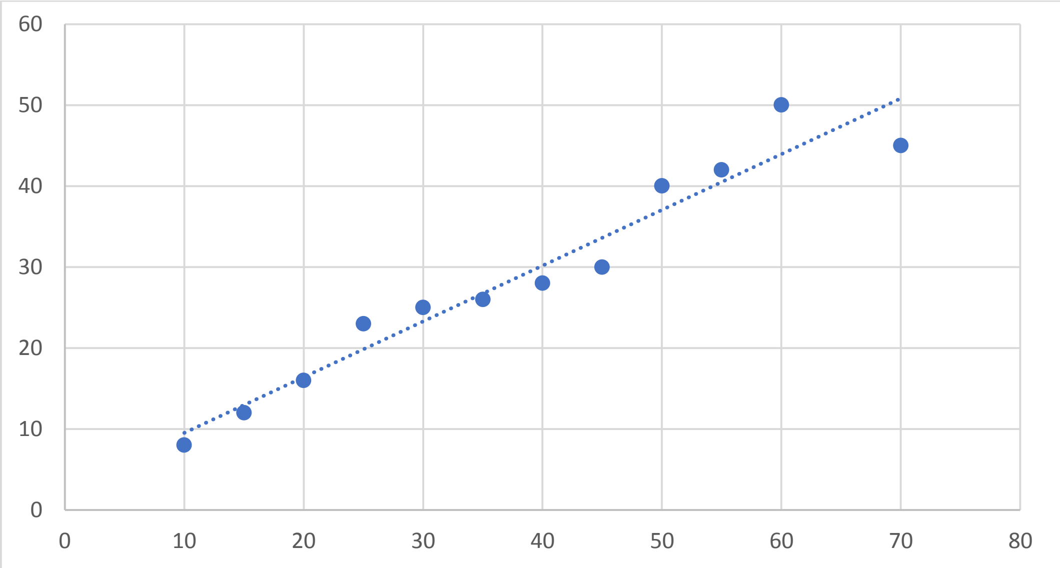
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_i	4.8	9.5	9	10.5	10.8	12.2	13.5	16	17.5	18	22	25
R_i	5	10	10	11	12	13	15	18	20	20	25	30

ألف وحدة نقدية.

- مثل سحابة النقاط بيانيا.
- قدر معالم معادلة الانحدار α و β أي $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$.
- اعط الكتابات المختلفة للنموذج.
- ماذا تمثل معالم الانحدار اقتصاديا. وهل نتائج النموذج القياسي موافقة للنظرية الاقتصادية.
- باستعمال معادلة الانحدار احسب القيم الجديدة المقدرة للاستهلاك $\hat{C}_i$.
- أحسب البواقي المقدرة $\hat{e}_i$.

التمثيل البياني:

تمثيل الاستهلاك العائلي بدلالة تغيرات الدخل



– تقدير معالم معادلة الانحدار α و β أي $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$:

للقيام بالحسابات الضرورية يمكن الاستعانة بالجدول الموالي:

i	R_i	C_i	$R_i-\bar{R}$	$C_i-\bar{C}$	$(R_i-\bar{R})(C_i-\bar{C})$	$(R_i-\bar{R})^2$
1	10	8	−27.917	−20.750	579.271	779.340
2	15	12	−22.917	−16.750	383.854	525.174
3	20	16	−17.917	−12.750	228.438	321.007
4	25	23	−12.917	−5.750	74.271	166.840
5	30	25	−7.917	−3.750	29.688	62.674
6	35	26	−2.917	−2.750	8.021	8.507
7	40	28	2.083	−0.750	−1.563	4.340
8	45	30	7.083	1.250	8.854	50.174
9	50	40	12.083	11.250	135.938	146.007
10	55	42	17.083	13.250	226.354	291.840
11	60	50	22.083	21.250	469.271	487.674
12	70	45	32.083	16.250	521.354	1029.340
	$\bar{R}=$ **37.917**	$\bar{C}=$ **28.750**			$\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})(C_i-\bar{C})=$ **2663.750**	$\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2=$ **3872.917**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{12}\left(R_i - \bar{R}\right)\left(C_i - \bar{C}\right)}{\sum_{i=1}^{12}\left(R_i - \bar{R}\right)^2} = \frac{2663.750}{3872.917} = 0.687$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = \bar{C} - \hat{\beta}_1\bar{R} = 28.750 - \left(0.687 * 28.750\right) = 2.671$$

- المعنى الاقتصادي للمقدرات:

$\hat{\beta}_1$ يمثل الميل الحدي للاستهلاك وبما أن $0 \leq \hat{\beta}_1 = 0.687 \leq 1$ فهذا موافق للنظرية الاقتصادية.

إذا ارتفع الدخل بواحد وحدة فهذا يؤدي إلى ارتفاع الاستهلاك بـ 0.68 وحدة.

$\hat{\beta}_0$ يمثل الاستهلاك الابتدائي أو الاستهلاك التلقائي، أي قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل معدوم وإشارته موافقة للنظرية الاقتصادية، لأن هذه الأخيرة تفرض ضرورة وجود حد أدنى من الاستهلاك (أكبر من الصفر) حتى ولو كان الدخل معدوم.

- الكتابات المختلفة للنموذج:

$$C_i = 2.671 + 0.687R_i + \hat{u}_i, \qquad i = 1,2,......,12$$

$$\hat{C}_i = 2.671 + 0.687R_i,$$ لة خط الانحدار

$$C_i = \hat{C}_i + \hat{u}_i, \Rightarrow \hat{u}_i = e_i = C_i - \hat{C}_i, \qquad i = 1,2,......,12$$

حساب القيم الجديدة المقدرة للاستهلاك $\hat{C}_i$ والبواقي e_i: وذلك بتعويض قيم R_i و C_i في المعادلات أعلاه كما في الجدول الموالي:

$\hat{C}_i = 2.671 + 0.687R_i$	$\hat{u}_i = e_i = C_i - \hat{C}_i$
9.549	-1.549
12.988	-0.988
16.427	-0.427
19.866	3.134
23.305	1.695
26.744	-0.744
30.183	-2.183
33.622	-3.622
37.061	2.939
40.500	1.500
43.939	6.061
50.817	-5.817
	$\sum_{i=1}^{12} e_i = 0$

4. خصائص مقدرات المربعات الصغرى:

المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هي متغيرات عشوائية، تحسب بدلالة المشاهدات X، Y وتأخذ قيما حقيقية في العينة بعد تعويض X و Y بقيمها الحقيقية المشاهدة. سنحاول في هذه الفقرة دراسة خصائص المقدرات $\hat{\beta}_0$، $\hat{\beta}_1$ كمتغيرات عشوائية.

1.4.خاصية عدم التحيز (Unbiased):

يقصد بالتحيز ذلك الفرق الموجود بين مقدر معين وتوقعه الرياضي، إذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز، وأما اذا كان معدوما فإن المقدر غير متحيز. يمكن التعبير عن ذلك رياضيا كما يلي:

بافتراض أن $\hat{\theta}$ هو مقدر لـ θ فإننا نقول أن $\hat{\theta}$ غير متحيز إذا حقق الشرط:

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$$

بنفس التعريف يمكن القول أن المقدرات: $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ غير متحيزة إذا حققت:

$$E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0$$
$$E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$$

برهان عدم تحيز $\hat{\beta}_1$:

لنبرهن أن: $E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$ ينبغي أولا كتابة $\hat{\beta}_1$ بدلالة β_1.

لدينا:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

ولدينا أيضا:

$$Y_i-\bar{Y}=(\beta_0+\beta_1X_i+u_i)-(\beta_0+\beta_1\bar{X}_i+\bar{u})=\beta_1(X_i-\bar{X}_i)+(u_i-\bar{u})$$
$$Y_i-\bar{Y}=\beta_1(X_i-\bar{X}_i)+(u_i+\bar{u})$$

بالتعويض نجد:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left[\beta_1(X_i-\bar{X}_i)+(u_i-\bar{u})\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\beta_1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

وذلك لأن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\bar{u}=\bar{u}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=\bar{u}\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{u}\bar{X}=\bar{u}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{u}\bar{X}=\bar{u}n\bar{X}-n\bar{u}\bar{X}=0$$

للبرهنة على العلاقة $E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$ يكفي إدخال عملية التوقع الرياضي على الجانبين:

$$E(\hat{\beta}_1)=E\left(\beta_1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)$$

من خصائص التوقع الرياضي: إذا كان a عدد حقيقي ثابت و Z متغير عشوائي فإن:

$$E(a)=a$$

$$E(aZ)=aE(Z)$$

$$E(a+Z)=E(a)+E(Z)=a+E(Z)$$

بتطبيق هذه الخواص على العلاقة مع الأخذ بعين الاعتبار أن u متغير عشوائي توقعه الرياضي صفر $\left(E(u)=0\right)$ و β_1 عدد حقيقي ثابت غير معلوم و X متغير غير عشوائي ذو قيم حقيقة ثابتة نجد:

$$E(\hat{\beta}_1)=E(\beta_1)+E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]=\beta_1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)E\left(u_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

$$E\left(u_i\right)=0\Rightarrow E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$$

برهان عدم تحيز $\hat{\beta}_0$:

لنبرهن أن: $E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0$ ينبغي أولا كتابة $\hat{\beta}_0$ بدلالة β_0 .

لدينا مما سبق:

$$\hat{\beta}_1=\beta_1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\Rightarrow\hat{\beta}_1-\beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

ولدينا أيضا:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{u} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \beta_0 - \bar{X}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + \bar{u}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = \beta_0 - \bar{X}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = \beta_0 - \bar{X}\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} + \bar{u}$$

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 - \bar{X}\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} + \bar{u}$$

بإدخال عملية التوقع الرياضي على الطرفين نجد:

$$E\left(\hat{\beta}_0\right) = E\left(\beta_0\right) - \bar{X}\frac{\sum_{i=1}^{n} E\left(u_i\right)\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} + E(\bar{u}),$$

$$E\left(u_i\right) = 0 \quad \forall i, \;\; E(\bar{u}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(u_i) = 0$$

$$\Rightarrow E\left(\hat{\beta}_0\right) = \beta_0$$

ومنه نقول أن المقدرتين: $\hat{\beta}_0$و $\hat{\beta}_1$ هما مقدرتين غير متحيزتين لـ β_0 و β_1 على التوالي.

2.4.أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE):(Best linear unbiased estimators)

حسب نظرية Gauss–Markov والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى".

تتضمن هذه النظرية على الخصوص خاصية أقل تباين للمقدرات (Minimal Variance)، ويمكن برهنة هذه الخاصية بعد حساب تباينات المقدرات وذلك كما يلي:

تباين $\hat{\beta}_1$:

$$V\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

البرهان:

لدينا:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \Rightarrow \hat{\beta}_1 - \beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

من خصائص التوقع الرياضي والتباين: نعلم أنه إذا كان Z متغير عشوائي فإن:

$$V(Z) = E(Z_i - E(Z))^2$$

تطبيق هذه الخاصية على المتغير العشوائي $\hat{\beta}_1$ يفضي إلى ما يلي:

$$\Rightarrow V\left(\hat{\beta}_1\right) = E\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]^2$$

نضع:

$$\omega_i = \left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$\Rightarrow V\left(\hat{\beta}_1\right) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\omega_i}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2}\right]^2 = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\right]^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\omega_i\right]^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\omega_i\right]^2 = E(u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots . + u_n\omega_n)^2 = E(u_1^2\omega_1^2 + u_2^2\omega_2^2 + \ldots . + u_n^2\omega_n^2 +$$

$$+ 2u_1\omega_1u_2\omega_2 + \ldots\ldots + +2u_{n-1}\omega_{n-1}u_n\omega_n) = \omega_1^2E(u_1^2) + \omega_2^2E(u_2^2) +$$

$$+ \ldots . + \omega_n^2E(u_n^2) + 2\omega_1\omega_2E(u_1u_2) + \ldots\ldots + +2\omega_{n-1}\omega_nE(u_{n-1}u_n)$$

نعلم من فرضيات النموذج أن:

$$Cov(u_iu_j) = E(u_iu_j) = 0 \ , \ \forall(i \neq j), \quad E(u_i)^2 = \sigma_u^2 \quad \forall i$$

وبالتالي:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\omega_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} E\left(u_i\omega_i\right)^2 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 + 0 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2$$

$$\Rightarrow V\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma_u^2\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^2\right]^2}=\frac{\sigma_u^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^2}$$

بتعويض ω_i بقيمتها نجد:

$$V\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma_u^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

تباين $\hat{\beta}_0$:

$$V(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\sigma_u^2$$

البرهان:

لدينا:

$$\hat{\beta}_0=\beta_0-\bar{X}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\left(X_i-\bar{X}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}+\bar{u}\Rightarrow\hat{\beta}_0-\beta_0=\bar{u}-\bar{X}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\left(X_i-\bar{X}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

نضع:

$$\omega_i=\left(X_i-\bar{X}\right)$$

فنجد:

$$\hat{\beta}_0-\beta_0=\bar{u}-\bar{X}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iw_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^{\,2}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i-\bar{X}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iw_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^{\,2}}$$

$$\Rightarrow\hat{\beta}_0-\beta_0=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\bar{X}\frac{w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^{\,2}}\right)u_i$$

$$E\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)^2=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}u_i-\bar{X}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}u_i\right)\right]^2=E\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}u_i-\bar{X}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}u_i\right)^2$$

$$E\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)^2=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}u_i^2-2\bar{X}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}u_i^2+\bar{X}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2\right)^2}u_i^2\right)\right]$$

$$V(\hat{\beta}_0)=E\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)^2=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}u_i^2+\bar{X}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2\right)^2}u_i^2\right)\right]$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{1}{n^2}u_i^2-2\bar{X}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}u_i^2+\bar{X}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2\right)^2}u_i^2\right)$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}E(u_i^2)-2\bar{X}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}E(u_i^2)+\bar{X}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2\right)^2}E(u_i^2)\right)$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}\sigma_u^2-2\bar{X}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}\sigma_u^2+\bar{X}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2\right)^2}\sigma_u^2\right)$$

بما أن:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=0$$

إذن:

$$V(\hat{\beta}_0)=\left[\frac{n}{n^2}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2}\right]\sigma_u^2=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\sigma_u^2$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)\sigma_u^2$$

بالعودة إلى خاصية أقل تباين نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_u^2/n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n}$$

بما أن: σ_u^2 ثابت حسب فرضيات النموذج فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_u^2/n=0$$

من جهة أخرى:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n=\lim_{n\to\infty}V(X)\neq 0$$

وذلك لأنه حسب فرضيات النموذج قيم X غير متساوية وتباينه غير معدوم.

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_0)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2/n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n}\right)\sigma_u^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sigma_u^2+\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{X}^2/n}{V(X)}=0$$

وذلك لأنه حسب فرضيات النموذج: $V(X)\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\bar{X}^2}{n}=0$$

انطلاقا من هذه الخصائص، يمكن أن نستنتج أن تباينات المقدرات هي أقل ما يمكن.

3.4.خاصية الاتساق (Consistent):

نقول عن مقدر $\hat{\theta}$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا حقق شرطين:

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

$$\lim_{n\to\infty}V(\hat{\theta})=0$$

بما أن المقدرات تحقق الشروط:

$$E(\hat{\beta}_0)=\beta_0$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_0)=0$$

$$E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_1)=0$$

إذن المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هي مقدرات متسقة للمعالم β_0 و β_1 على الترتيب.

يمكن أيضا استنتاج بعض الخواص لـ $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ كما يلي:

- $V(\hat{\beta}_0)=\dfrac{\sigma_u^2}{n}+\bar{X}^2 V(\hat{\beta}_1)$

البرهان:

$$V(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\sigma_u^2=\frac{1}{n}\sigma_u^2+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\sigma_u^2$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\frac{1}{n}\sigma_u^2+\bar{X}^2 V(\hat{\beta}_1)$$

- $Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=-\bar{X}V(\hat{\beta}_1)$

البرهان:

نعلم أنه إذا كان Z و W متغيران عشوائيان فإن:

$$Cov(Z,W)=E\{(Z-E(Z))(W-E(W))\}$$

بالتطبيق نجد:

$$Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=E\left[\left(\hat{\beta}_0-E(\hat{\beta}_0)\right)\left(\hat{\beta}_1-E(\hat{\beta}_1)\right)\right]=E\left[\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\right]$$

ولدينا أيضا:

$$\begin{cases}\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\\ E(\hat{\beta}_0)=\bar{Y}-\beta_1\bar{X}\end{cases}\Rightarrow \hat{\beta}_0-E(\hat{\beta}_0)=-\hat{\beta}_1\bar{X}+\beta_1\bar{X}=-\bar{X}\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)=\hat{\beta}_0-\beta_0$$

بالتعويض نجد:

$$Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=E\left\{\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\right\}=E\left\{-\bar{X}\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)^2\right\}=-\bar{X}E\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)^2$$

$$\Rightarrow Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=-\bar{X}V(\hat{\beta}_1)$$

ملاحظات:

- يمكن أن نبرهن أن: $\bar{\hat{Y}}=\bar{Y}$ وذلك كما يلي:

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_i \Rightarrow E(\hat{Y})=E(\hat{\beta}_0)+E(\hat{\beta}_1)\bar{X} \Rightarrow \bar{\hat{Y}}=\beta_0+\beta_1\bar{X}$$

$$(E(\hat{\beta}_0)=\beta_0, E(\hat{\beta}_1)=\beta_1)$$

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+u_i \Leftrightarrow \bar{Y}=\beta_0+\beta_1\bar{X}+\bar{u} \Leftrightarrow \bar{Y}=\beta_0+\beta_1\bar{X} \ (\bar{u}=0)$$

- يمكن أن نبرهن أن: $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0$ وذلك كما يلي:

$$\hat{u}_i=Y_i-\hat{Y}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=\sum_{i=1}^{n}Y_i-\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i=0$$

$$(\bar{Y}=\bar{\hat{Y}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}Y_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i)$$

5.حالة خاصة: حالة البيانات الممركزة

نقول عن متغير $\tilde{Z}_i$ أنه ممركز بالنسبة لقيمه العادية Z_i إذا حقق:

$$\tilde{Z}_i=Z_i-\bar{Z}$$

في حالة $\tilde{X}_i$ ، و $\tilde{Y}_i$ بيانات ممركزة:

$$\tilde{X}_i=X_i-\bar{X}$$
$$\tilde{Y}_i=Y_i-\bar{Y}$$

يصبح نموذج الانحدار الخطي على الشكل:

$$\begin{cases}Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+u_i\\ \bar{Y}=\beta_0+\beta_1\bar{X}\end{cases} \Rightarrow Y_i-\bar{Y}=\beta_0+\beta_1(X_i-\bar{X})+u_i \Leftrightarrow \tilde{Y}_i=\beta_1\tilde{X}_i+u_i$$

في هذه الحالة نلاحظ خلو نموذج الإنحدار الخطي الممركز من الحد الثابت ويمكن تقدير النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث تفضي نتائج التقدير إلى:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i}^{n}\tilde{Y}_i\tilde{X}_i}{\sum_{i}^{n}\tilde{X}_i^2}$$

البرهان:

$$\tilde{Y}_i = \beta_1 \tilde{X}_i + u_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_i^n \left(\tilde{Y}_i - \beta_1 \tilde{X}_i \right)^2 = -2 \sum_i^n \left(\tilde{Y}_i - \beta_1 \tilde{X}_i \right) \tilde{X}_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow -2 \sum_i^n \left(\tilde{Y}_i - \hat{\beta}_1 \tilde{X}_i \right) X_i = 0 \Rightarrow \sum_i^n \tilde{Y}_i \tilde{X}_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i^n \tilde{Y}_i \tilde{X}_i}{\sum_i^n \tilde{X}_i^2}$$

يمكن أن نبرهن أيضا أن:

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2}$$

البرهان:

$$V(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 = E \left(\frac{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i u_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2} \right)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^4} E \left(\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i u_i \right)^2$$

$$E \left(\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i u_i \right)^2 = E(\tilde{X}_1^2 u_1^2 + ... + \tilde{X}_n^2 u_n^2 + 2\tilde{X}_1 u_1 \tilde{X}_2 u_2 + ... + 2\tilde{X}_{n-1} u_{n-1} u_n \tilde{X}_n)$$

$$= \sigma_u^2 \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2$$

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^4} = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2}$$

6.تقدير تباين الأخطاء ودراسة خصائصه:

يمكن تقدير تباين الأخطاء باستعمال طريقتين:

1.6.التقدير باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{V}(\hat{u})=\hat{\sigma}_{\hat{u}}^{2}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{cases} Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+u_i \\ \bar{Y}=\beta_0+\beta_1\bar{X}+\bar{u} \end{cases} \Rightarrow Y_i-\bar{Y}=\beta_1\left(X_i-\bar{X}\right)+\left(u_i-\bar{u}_i\right)$$

من جهة أخرى:

$$\begin{cases} Y_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i+\hat{u}_i \\ \bar{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\bar{X} \end{cases} \Rightarrow Y_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_1\left(X_i-\bar{X}\right)+\hat{u}_i \Leftrightarrow \hat{u}_i=Y_i-\bar{Y}-\hat{\beta}_1\left(X_i-\bar{X}\right)$$

بالتعويض نجد:

$$\hat{u}_i=\beta_1\left(X_i-\bar{X}\right)+\left(u_i-\bar{u}\right)-\hat{\beta}_1\left(X_i-\bar{X}\right)=\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)\left(X_i-\bar{X}\right)+\left(u_i-\bar{u}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2=\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2-2\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(u_i-\bar{u}\right)$$

بتطبيق عملية التوقع الرياضي على الجانبين نجد:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2E\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)^2+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2\right]-2E\left[\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(u_i-\bar{u}\right)\right]$$

ولدينا أيضا:

$$E\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)^2=V(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2\right]=E\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^2-2u_i\bar{u}+\bar{u}^2\right)=E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2-2\bar{u}\sum_{i=1}^{n}u_i+n\bar{u}^2\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2-2n\bar{u}^2+n\bar{u}^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left(u_i^2\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(u_i^2\right)=n\sigma_u^2-\frac{n\sigma_u^2}{n}$$

$$=\left(n-1\right)V\left(u\right)=\left(n-1\right)\sigma_u^2$$

$$E\left[\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(u_i-\overline{u}\right)\right]=E\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i\left(X_i-\overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)u_i$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)E\left(u_i^2\right)=\sigma_u^2$$

إذن:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right)=\sigma_u^2+(n-1)\sigma_u^2-2\sigma_u^2=(n-2)\sigma_u^2$$

2.6.التقدير باستعمال طريقة المعقولية العظمى:

لدينا مما سبق:

$$\frac{\partial S}{\partial\sigma_u^2}=-\frac{n}{2\sigma_u^2}+\frac{1}{2\sigma_u^4}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial\sigma_u^2}=0\Rightarrow-\frac{1}{2\hat{\sigma}_u^2}\left[n-\frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)^2\right]=0$$

$$n-\frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)^2=0\Rightarrow\frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2=n\Rightarrow\hat{\sigma}_u^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n}$$

نلاحظ أن مقدر تباين الأخطاء باستعمال طريقة المعقولية العظمى يختلف عن ذلك المتحصل عليه باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث أنه في الحالة الأولى متحيز وفي الحالة الثانية غير متحيز.

البرهان:

الحالة الأولى:

$$E\left(\hat{\sigma}_u^2\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n}\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\hat{u}_i^2\right)=\frac{1}{n}(n-2)\sigma_u^2\neq\sigma_u^2$$

عندما يكون n كبير نسبيا يصبح هذا المقدر غير متحيز:

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\sigma}_u^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n-2)\sigma_u^2=\sigma_u^2$$

الحالة الثانية:

$$E\left(\hat{\sigma}_u^2\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}\right)=\frac{1}{n-2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right)=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}E\left(\hat{u}_i^2\right)=\frac{1}{n-2}(n-2)\sigma_u^2=\sigma_u^2$$

ملاحظة:

نرمز لتباينات المقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ بالرمزين: $\sigma_{\hat{\beta}_0}^2$ ، $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ على الترتيب فنكتب:

$$\sigma_{\hat{\beta}_0}^2=V(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\sigma_u^2,\quad \sigma_{\hat{\beta}_1}^2=V(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\sigma_u^2$$

يمكن حساب مقدرات هذه التباينات بتعويض تباين الأخطاء σ_u^2 بمقدره $\hat{\sigma}_u^2$ فنجد:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2=\hat{V}(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\hat{\sigma}_u^2,\quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2=\hat{V}(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\hat{\sigma}_u^2$$

الانحرافات المعيارية المقدرة (Standard Error) لـ $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ على الترتيب تكتب كالتالي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}=\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_0)}=\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)\hat{\sigma}_u^2}=\hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_1)}=\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\hat{\sigma}_u^2}=\hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$$

7. توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير المجالي للمعالم:

1.7. التوزيع الإحتمالي للمقدرات :

بمعرفة توزيع المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يمكن تكوين مجالات ثقة وإجراء الاختبارات الإحصائية للفرضيات المتعلقة بمعالم الانحدار β_0 و β_1 .

لدينا:

نعلم أنه في حالة العينات الكبيرة $(n \geq 30)$ إذا كان Z متغير عشوائي يحقق:

$$Z \rightarrow \mathrm{N}(\mu, \sigma_Z^2)$$

فإنه حسب نظرية النهايات المركزية:

$$W = \frac{Z-\mu}{\sigma_Z} \rightarrow \mathrm{N}(0,1)$$

حسب فرضيات النموذج:

$$u_i \rightarrow \mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$$

وهذا يعني أن المقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ لهما نفس التوزيع الطبيعي (Normal Distribution) بمتوسط وتباين سبق حسابهما:

$$\hat{\beta}_0 \rightarrow \mathrm{N}(\beta_0, \sigma_{\hat{\beta}_0}^2) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_0}} \rightarrow \mathrm{N}(0,1)$$

$$\hat{\beta}_1 \rightarrow \mathrm{N}(\beta_1, \sigma_{\hat{\beta}_1}^2) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_1-\beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \rightarrow \mathrm{N}(0,1)$$

استعمال الاختبار الطبيعي في هذه الحالة لا يكون مجديا بالنظر إلى أن $\sigma_{\hat{\beta}_0}^2$ ، $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ مجهولان. ولهذا الغرض ينبغي الانتقال إلى توزيعة استيودنت (Student t-distribution) وذلك كما يلي:

نعلم أن:

$$\frac{\mathrm{N}(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_2^n}{n}}} \rightarrow t_n$$

مع: $\mathrm{N}(0,1)$ يشير إلى التوزيع الطبيعي المعياري، χ_2^n يشير إلى توزيع الكاي مربع (chi-square) ذو درجة حرية n ، t_n يشير إلى توزيع استيودنت ذو درجة حرية n .

من جانب اخر:

$$\chi_2^n = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{N}(0,1)\right]^2$$

بالعودة إلى المقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$:

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_0}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}}} \to t(n-2)$$

وذلك لأن:

$$\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_0}} \to \mathrm{N}(0,1)$$

$$u_i \to N(0,\sigma_u^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \to \chi_{n-2}^2$$

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2=\hat{\sigma}_u^2(n-2)$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)\Big/\sigma_u\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_u^2}\hat{\sigma}_u^2(n-2)\Big/(n-2)}}=\frac{\left(\hat{\beta}_0-\beta_0\right)\Big/\sigma_u\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}{\hat{\sigma}_u\big/\sigma_u}$$

$$=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_u\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \to t(n-2)$$

بنفس الطريقة:

$$\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1 \Big/ \sigma_u\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma_u^2}\hat{\sigma}_u^2(n-2)\Big/(n-2)}}=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1 \Big/ \sigma_u\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}{\hat{\sigma}_u / \sigma_u}$$

$$=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_u\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right)}}=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\rightarrow t(n-2)$$

بعد إيجاد التوزيع الإحتمالي للمقدرات: $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ فإنه يمكن عند مستوى معنوية (α) إيجاد مجال ثقة لكل معلم.

2.7.بناء مجالات ثقة للمعالم:

يعطى مجال ثقة بالنسبة للمعالم β_0 و β_1 كما يلي:

$$\beta_0\in\left[\hat{\beta}_0\pm\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad , \quad \beta_1\in\left[\hat{\beta}_1\pm\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

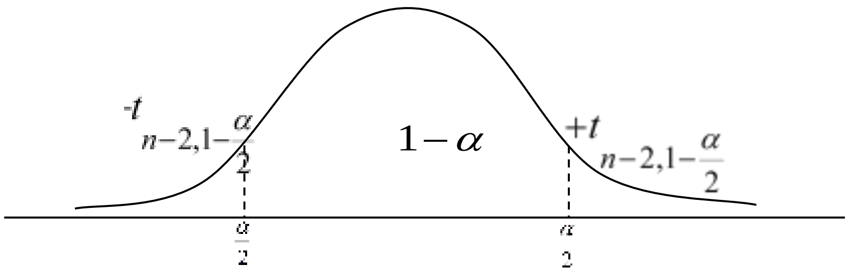
البرهان:

$$\Pr\left[-t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\leq+t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$: القيمة (المقروءة) الحرجة لتوزيع استيودنت عند درجة حرية $n-2$ و مستوى معنوية (α)

كما في الشكل الموالي:

توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_0$ ثنائي الطرف



حل المتراجحة يفضي إلى إيجاد مجال ثقة لـ β_0 كما يلي:

$$-t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \hat{\beta}_0-\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0+\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد مجال ثقة للمعلم β_1:

$$\Pr\left[-t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$$-t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \hat{\beta}_1-\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1+\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ملاحظة:

إذا كان: σ_u^2 معلوم فيمكن إيجاد مجالات ثقة للمعالم باستخدام التوزيع الطبيعي وذلك بنفس الطريقة السابقة.

3.7.إيجاد مجال ثقة لـ تباين الأخطاء σ_u^2:

يمكن أن نبرهن أن:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}\right]$$

البرهان:

لدينا مما سبق:

$$u_i \to N(0,\sigma_u^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \to \chi_{n-2}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \hat{\sigma}_u^2(n-2) \Rightarrow \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \Rightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \to \chi_{n-2}^2$$

باستخدام التوزيع المجدول لقانون الكاي مربع يمكن إيجاد مجال ثقة لـ σ_u^2 عند مستوى معنوية α كما يلي:

$$\Pr\left[\chi_{n-2,\alpha/2}^2 \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \le \chi_{n-2,1-\alpha/2}^2\right] = 1-\alpha \Rightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-2,1-\alpha/2}^2} \le \sigma_u^2 \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-2,\alpha/2}^2}$$

$\chi_\alpha^2(n-2)$: القيمة الحرجة لتوزيع الكاي مربع $\left(\chi^2\right)$ بدرجة حرية $(n-2)$ يكون مجال الثقة:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-2,1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-2,\alpha/2}^2}\right]$$

مثال: (المثال السابق):

- أحسب مقدر تباين الأخطاء، وانحرافها المعياري ثم أوجد مجال ثقة لمقدر تباين الأخطاء.
- أحسب تباينات المقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$وانحرافاتها المعيارية، ثم أوجد مجالات ثقة للمقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$.

الحل:

- حساب مقدر تباين الأخطاء:

$$\hat{V}(\hat{u}) = \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2$$

i	$u_i = C_i - \hat{C}_i$	$\hat{u}_i^2 = e_i^2$
1	−1.549	2.400
2	−0.988	0.976
3	−0.427	0.182
4	3.134	9.822
5	1.695	2.873
6	−0.744	0.553
7	−2.183	4.765
8	−3.622	13.118
9	2.939	8.639
10	1.500	2.251
11	6.061	36.740
12	−5.817	33.832
	$\sum_{i=1}^{12} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{12} e_i = 0$	$\sum_{i=1}^{12} \hat{u}_i^2 = 116.152$

$$\hat{V}(\hat{u}) = \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{116.152}{10} = 11.615$$

- الإنحراف المعياري للأخطاء:

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{u}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \sqrt{11.615} = 3.408$$

- مجال ثقة لتباين الأخطاء:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}\right]$$

عند درجة حرية $(n-2=10)$ ومستوى معنوية $\alpha = 5\%$ يمكن أن نقرأ مباشرة من جدول الكاي مربع القيمتين: $\chi^2_{n-2,\alpha/2} = 3.247$ ، $\chi^2_{n-2,1-\alpha/2} = 20.483$ وبالتالي:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}\right] \Leftrightarrow \sigma_u^2 \in \left[\frac{10\times 11.615}{20.483}, \frac{10\times 11.615}{3.247}\right]$$

$$\sigma_u^2 \in [5.670,\ 35.771]$$

- حساب تباينات المقدرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ وانحرافاتها المعيارية:

حساب تباين المقدر $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = \hat{V}(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right)\hat{\sigma}_u^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{R}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)^2}\right)\hat{\sigma}_u^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = \left(\frac{1}{12} + \frac{(37.917)^2}{3872.917}\right)\times 11.615 = 5.279$$

حساب الانحراف المعياري لـ $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0}} = \sqrt{5.279} = 2.297$$

حساب تباين المقدر $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)^2}\hat{\sigma}_u^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \left(\frac{1}{3872.917}\right)\times 11.615 = 0.00299$$

حساب الانحراف المعياري لـ $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}} = \sqrt{0.00299} = 0.0546$$

إيجاد مجل ثقة للمعلم β_0 :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

عند درجة حرية $(n-2=10)$ ومستوى معنوية $\alpha = 5\%$ يمكن أن نقرأ من جدول استيودنت القيمة $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = 2.228$:

$$\beta_0 \in \left[2.671 \pm 2.279 \times 2.228\right]$$
$$\beta_0 \in \left[2.406,\ 7.768\right]$$

إيجاد مجل ثقة للمعلم β_1:

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \times t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
$$\beta_1 \in \left[0,687 \pm 0.0546 \times 2.228\right]$$
$$\beta_1 \in \left[0.565,\ 0.808\right]$$

8.معادلة وجدول تحليل التباين:

1.8.معادلة تحليل التباين:

تساعد البواقي $\hat{u}_i$ المقدرة على قياس مدى تمثيل النموذج المقدر للنموذج الحقيقي، وهو ما يسمى بجودة التوفيق حيث كلما كانت البواقي كبيرة قلت جودة التمثيل والعكس صحيح، غير أن البواقي تعتمد على المتغير التابع Y_i، الذي يمكن تعريفه حول وسطه كما يلي:

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{u}_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة لكل i نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})\hat{u}_i$$

لدينا مما سبق:

$$\bar{Y} = \bar{\hat{Y}},\quad \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0,\ \hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})\hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{X})\hat{u}_i = \hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

هذه المعادلة مفيدة فيما يتعلق بقياس القدرة التفسيرية للنموذج، وتتكون من:

- $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ هو مجموع مربعات الانحرافات الكلية في المتغير Y: Total Sum of Squares (TSS).

- $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$ فهو مجموع مربعات الانحرافات المشروحة: Explained Sum of Squares (ESS).
- ويبقى الحد الأخير $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$ الذي هو مجموع مربعات البواقي: Residual Sum of Squares (RSS).

يمكن إعادة صياغة المعادلة السابقة على الشكل:

$$TSS = ESS + RSS$$

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية SCT نجد:

$$1=\frac{ESS}{TSS}+\frac{RSS}{TSS}$$

النسبة: $\frac{ESS}{TSS}$ تسمى معامل التحديد (Coefficient of determination) ويرمز له بالرمز: R^2:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{RSS}{TSS}$$

معامل التحديد R^2 يقيس ويشرح نسبة الانحرافات الكلية أو التغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y، والمشروحة بواسطة تغيرات المتغير المستقل X، فهي نسبة تأثير المتغير المستقل X على المتغير التابع Y، فهو إذن مقياس للقدرة التفسيرية للنموذج ويختبر جودة التوفيق والارتباط. مجال معامل التحديد هو: $0\leq R^2\leq 1$، حيث كلما كان قريب من الواحد دل ذلك على جودة التوفيق (جودة الانحدار) والعكس صحيح.

ويمكن التعبير عن R^2 بطريقة مكافئة كما يلي:

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}$$

يمكن أيضا إيجاد علاقة بين R^2 و $\hat{\beta}_1$ كما يلي:

$$Y_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_1(X_i-\bar{X})+\hat{u}_i \Leftrightarrow \left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\hat{\beta}_1^2(X_i-\bar{X})^2+\hat{u}_i^2+2\beta_1^2(X_i-\bar{X})\hat{u}_i$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\hat{\beta}_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2+\sum\hat{u}_i^2+2\beta_1^2\sum(X_i-\bar{X})\hat{u}_i$$

$$\sum(X_i-\bar{X})\hat{u}_i=0\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

إذن:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

يمكن أيضا كتابة معامل التحديد بشكل آخر:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \Rightarrow R^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right]^2 \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

حالة خاصة:

في حالة عدم وجود الحد الثابت في النموذج أو بتعبير اخر حالة المعطيات المركزة يمكن كتابة معادلة تحليل التباين على الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\hat{\tilde{Y}}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

البرهان:

لدينا:

$$\hat{\tilde{Y}}_i = \hat{\beta}\tilde{X}_i + \hat{u}_i \Rightarrow \tilde{Y}_i^2 = \hat{\beta}^2\tilde{X}_i^2 + \hat{u}_i^2 + 2\hat{\beta}\tilde{X}_i\hat{u}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{\tilde{Y}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}^2\tilde{X}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\hat{u}_i$$

حسب فرضيات النموذج:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\hat{u}_i = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\tilde{Y}}_i^2}_{TSS} = \hat{\beta}^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^2}_{ESS} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}_{RSS} \Leftrightarrow TSS = ESS + RSS$$

في هذه الحالة يكتب معامل التحديد R^2 على الشكل:

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\tilde{Y}}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i^2}=\frac{\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\tilde{Y}_i}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i^2}=\frac{\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i^{\,2}}$$

ملاحظة:

الفرق بين معامل التحديد R^2 ومعامل الارتباط الخطي r (Coefficient of Correlation) يكمن في السببية، حيث يقيس معامل الارتباط r العلاقة الخطية الموجودة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير (متغير تابع أو متغير مستقل) وهو محصور بين -1 و 1 .أما معامل التحديد فيقيس أيضا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار السببية حيث أن المتغير X هو الذي يشرح الظاهرة Y (Yمتغير تابع و X متغير مستقل). معامل الارتباط الخطي البسيط تعطى عبارته كما يلي:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})\right)^2}}=\sqrt{R^2}$$

2.8.جدول تحليل التباين:

يمكن رسم جدول تحليل التباين في حالة نموذج انحدار خطي بسيط كما هو مبين أدناه:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير الشارح	$ESS=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	1	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{1}$
البواقي	$RSS=\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$	$n-2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}$
المجموع	$TSS=ESS+RSS$ $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$	$n-1$	$\neq$

<u>مثال: المثال السابق:</u>

– احسب معامل التحديد R^2، ماذا تستنتج.

- ارسم جدول تحليل التباين.

الحل:

- حساب معامل التحديد R^2

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i-\bar{C}\right)^2}=1-\frac{116.152}{1948.250}=0.94$$

الاستنتاج: الدخل يشرح تغيرات الإستهلاك بنسبة 94 % وهو يدل على الجودة الإحصائية للنموذج.

الحسابات مبينة في الجدول أدناه:

i	$\hat{u}_i^2$	$\left(C_i-\bar{C}\right)^2$
1	2.400	430.5625
2	0.976	280.5625
3	0.182	162.5625
4	9.822	33.0625
5	2.873	14.0625
6	0.553	7.5625
7	4.765	0.5625
8	13.118	1.5625
9	8.639	126.5625
10	2.251	175.5625
11	36.740	451.5625
12	33.832	264.0625
	$\sum_{i=1}^{12}\hat{u}_i^2=116.152$	$\sum_{i=1}^{12}\left(C_i-\bar{C}\right)^2=1948.250$

- **جدول تحليل التباين:**

جدول تحلي التباين لنموذج الانحدار الخطي البسيط المقدر مبين في الجدول الموالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير الشارح	$ESS=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=1832.098$	1	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{1}=1832.098$
البواقي	$RSS=\sum_{i=1}^{12}\hat{u}_i^2=116.152$	10	$\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}=11.61$
المجموع	$TSS=\sum_{i=1}^{12}\left(C_i-\bar{C}\right)^2=1948.250$	11	$\neq$

9. اختبار الفرضيات:

بمعرفة توزيع $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يمكن إجراء اختبار الفرضيات المتعلقة بمعالم النموذج β_0 و β_1.

1.9.اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

اختبار معنوية: β_1:

اختبار معنوية معلمة من معالم النموذج يقصد بها إختبار هل هذه المعلمة معدومة أو غير معدومة فبالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}_1$ يمكن كتابة فرضية العدم H_0 على الشكل:

$$H_0:\beta_1=0$$

ويمكن كتابة الفرضية البديلة H_1 على الشكل:

$$H_1:\beta_1\neq 0$$

بما أن العلاقة بين Y و X قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن قبول الفرضية H_0 يعني بأن خط الإنحدار هو عبارة عن خط أفقي، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X.

الإحصائية المحسوبة التي تسمح بإجراء الاختبار وما يوافقها من الإحصائيات المجدولة مبينة كما يلي:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\rightarrow t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0 نكتب:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\rightarrow t_{n-2}$$

قاعدة القرار:

إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_1 له معنوية إحصائية (Significant).

بالمقابل: إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_1 ليس لـه معنوية إحصائية، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X.

اختبار معنوية: β_0:

بنفس الطريقة السابقة يمكن اختبار معنوية المعلمة β_0:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

الإحصائية المحسوبة والمجدولة التي تسمح بإجراء الاختبار:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \rightarrow t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0 نكتب:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \rightarrow t_{n-2}$$

قاعدة القرار:

إذا كانت: $t_c = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_0 له معنوية إحصائية.

بالمقابل: إذا كانت: $t_c = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_0 ليس له معنوية إحصائية في النموذج.

ملاحظات:

يمكن أن يتغير شكل فرضية العدم أو الفرضية البديلة وفي هذه الحالة يمكن حصول تغييرات كما في الحالات التالية:

الحالة الأولى:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = a \\ H_1 : \beta_1 \neq a \end{cases}$$

حيث: a عدد حقيقي معلوم.

في هذه الحالة وتحت الفرضية H_0 تصبح الإحصائية المحسوبة كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \to t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0 إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_1 - a|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$ (عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$) في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_1 يختلف معنويا عن العدد الحقيقي a، أما اذا كانت $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_1 - a|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_1 لا يختلف معنويا عن العدد الحقيقي a.

الحالة الثانية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = a \\ H_1 : \beta_1 \leq a \end{cases}$$

تحت الفرضية H_0 إذا كانت: $t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} > t_{n-2,1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية: H_1 وأما إذا كانت: $t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq t_{n-2,1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1.

الحالة الثالثة:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = a \\ H_1 : \beta_1 \geq a \end{cases}$$

تحت الفرضية H_0 إذا كانت: $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} < -t_{n-2,1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية: H_0 ونقبل الفرضية H_1، وأما إذا كانت: $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \geq -t_{n-2,\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-2)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية: H_0 ونرفض الفرضية H_1.

2.9.اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

إن اختبار معنوية المعلم β_1 على الخصوص في نموذج انحدار خطي بسيط يمكن أن يتم باستعمال إختبار فيشر وذلك كما يلي:

نعلم أنه إذا كان Z و W متغيرات عشوائية فإن:

$$Z \to \chi_n^2, \quad W \to \chi_m^2 \Rightarrow \frac{\chi_n^2 / n}{\chi_m^2 / m} \to F(n,m)$$

حيث ترمز: $F(n,m)$ لقانون فيشر ذو درجات حرية n و m على الترتيب.

لتكن فرضية العدم H_0 والفرضية البديلة H_1 كما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : SCE = 0 \\ H_1 : SCE \neq 0 \end{cases}$$

بما أن:

$$\left[\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\sigma_u^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}} \right]^2 \to \chi_1^2 \quad , \quad \frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \to \chi_{n-2}^2$$

إذن:

$$F_c = \frac{\left[\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\sigma_u^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}} \right]^2 \Big/ 1}{\frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \Big/ (n-2)} \to F_{(1,n-2),\alpha}$$

بالتبسيط وتحت الفرضية H_0 نجد:

$$F_c = \frac{\frac{\hat{\beta}_1^2}{\sigma_u^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2} \Big/ 1}{\frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \Big/ (n-2)} = \frac{(n-2)\hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2} \to F_{(1,n-2),\alpha}$$

إذا كانت: $F_c > F_{(1,n-2),\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (1) و $(n-2)$ على الترتيب، في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_1 له معنوية إحصائية.

بالمقابل: إذا كانت: $F_c \leq F_{(1,n-2),\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (1) و $(n-2)$ على الترتيب ففي هذه الحالة نقبل الفرضية: H_0 ونرفض الفرضية: H_1، وبالتالي المعلم β_1 ليس له معنوية إحصائية في النموذج.

ملاحظة:

يمكن التعبير عن إحصائية فيشر بشكلين اخرين كما يلي:

الشكل الأول:

$$F_c = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)} \to F_{(1,n-2),\alpha}$$

وذلك لأن:

$$F_c = \frac{ESS/1}{RSS/n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \Big/ (n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X}) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \Big/ (n-2)} = \frac{(n-2)\hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}$$

الشكل الثاني:

$$F_c = \frac{R^2/1}{\left(1-R^2\right)/(n-2)} \to F_{(1,n-2),\alpha}$$

وذلك لأن:

$$F_c = \frac{R^2/1}{\left(1-R^2\right)/n-2} = \frac{(n-2)R^2}{1-R^2} = \frac{(n-2)\frac{ESS}{TSS}}{\frac{RSS}{TSS}} = \frac{(n-2)ESS}{RSS}$$

$$F_c = \frac{(n-2)\hat{\beta}_1^{\,2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}$$

<u>مثال (المثال السابق):</u>

اختبر معنوية معالم النموذج والمعنوية الكلية عند مستوى خطأ 5 % أو مستوى ثقة 95 %.

اختبار معنوية المعلم β_0 :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \to t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0 :

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{2.671}{2.279} = 1.17$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $\left(n-2=12-2=10\right)$ نلاحظ أن: $|t_c| = 1.17 < t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} = 2.228$ وبالتالي: نقبل الفرضية H_0 والمعلم β_0 غير معنوي في النموذج.

اختبار معنوية المعلم β_1:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \to t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.687}{0.0546} = 12.58$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $(n-2=12-2=10)$ نلاحظ أن:

$|t_c| = 12.58 > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} = 2.228$ وبالتالي: نرفض الفرضية H_0 والمعلم β_1 معنوي في النموذج.

اختبار المعنوية الكلية:

اختبار المعنوية الكلية في حالة الانحدار الخطي البسيط مكافئ لاختبار معنوية المعلم β_1.

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : ESS = 0 \\ H_1 : ESS \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)} \rightarrow F_{(1,n-2),\alpha}$$

$$F_c = \frac{1832.098}{11.61} = 157.8$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ودرجات حرية $(1,\ 10)$ نلاحظ أن: $F_c = 157.8 > F_{(1,10),1-\alpha} = 4.96$

وبالتالي: نرفض الفرضية H_0 والمعلم β_1 معنوي في النموذج والنموذج أيضا معنوي.

10.التنبؤ باستعمال نموذج انحدار خطي بسيط:

بما أن المتغير X هو متغير مستقل فهذا يعني أنه يمكن تحديد قيمه خارج النموذج الذي قمنا بتقديره، بافتراض أن قيمة X من أجل المشاهدة $n+h$ $(h=1,2,....)$ هي X_{n+h} في هذه الحالة يمكن التنبؤ بقيمة Y_{n+h} وذلك كما يلي:

$$\hat{Y}_{n+h} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+h}$$

يمكن أيضا إيجاد مجال ثقة لـ Y_{n+h}:

$$Y_{n+h} \in \hat{Y}_{n+h} \pm t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_u \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+h} - \bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\hat{u}_{n+h}=Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}=\hat{Y}_{n+h}=(\beta_0+\beta_1 X_{n+h}+u_{n+h})-(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_{n+h})$$
$$=\beta_0-\hat{\beta}_0+(\beta_1-\hat{\beta}_1)X_{n+h}+u_{n+h}$$

خصائص $\hat{u}_{n+h}$:

$$E(\hat{u}_{n+h})=E\left(\beta_0-\hat{\beta}_0+(\beta_1-\hat{\beta}_1)X_{n+h}+u_{n+h}\right)$$
$$=\beta_0-E(\hat{\beta}_0)+(\beta_1-E(\hat{\beta}_1))X_{n+h}+E(u_{n+h})==\beta_0-\beta_0+(\beta_1-\beta_1)X_{n+h}=0$$

$$V(\hat{u}_{n+h})=V\left(\beta_0-\hat{\beta}_0+(\beta_1-\hat{\beta}_1)X_{n+h}+u_{n+h}\right)$$
$$=V\left(-(\hat{\beta}_0-\beta_0)-(\hat{\beta}_1-\beta_1)X_{n+h}+u_{n+h}\right)$$
$$=V\left(-(\hat{\beta}_0-\beta_0)\right)+V\left(-(\hat{\beta}_1-\beta_1)X_{n+h}\right)+V\left(u_{n+h}\right)$$
$$+2Cov\left[-(\hat{\beta}_0-\beta_0),-(\hat{\beta}_1-\beta_1)X_{n+h}\right]$$
$$V(\hat{u}_{n+h})=V\left(\hat{\beta}_0\right)+X_{n+h}^2V\left(\hat{\beta}_1\right)+\sigma_u^2+2X_{n+h}Cov\left[\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right]$$

مما سبق:

$$V(\hat{\beta}_0)=\frac{\sigma_u^2}{n}+\bar{X}^2V(\hat{\beta}_1)$$
$$Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=-\bar{X}V(\hat{\beta}_1)$$

بالتعويض نجد:

$$V(\hat{u}_{n+h})=\frac{\sigma_u^2}{n}+\bar{X}^2V(\hat{\beta}_1)+X_{n+h}^2V\left(\hat{\beta}_1\right)+\sigma_u^2-2\bar{X}X_{n+h}V(\hat{\beta}_1)$$
$$=\frac{\sigma_u^2}{n}+\sigma_u^2+\left[\bar{X}^2+X_{n+h}^2-2\bar{X}X_{n+h}\right]V(\hat{\beta}_1)$$

$$V(\hat{u}_{n+h}) = \frac{\sigma_u^2}{n} + \sigma_u^2 + \left[\bar{X}^2 + X_{n+h}^2 - 2\bar{X}X_{n+h}\right]\frac{\sigma_u^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{n} + \sigma_u^2 + \left(\bar{X} - X_{n+h}\right)^2 \frac{\sigma_u^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$V(\hat{u}_{n+h}) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+1} - \bar{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1\right]\sigma_u^2$$

من فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء يمكن أن نستنتج أن:

$$\hat{u}_{n+h} = Y_{n+h} - \hat{Y}_{n+h} \to N\left(0,\ \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+1} - \bar{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1\right]\sigma_u^2\right)$$

بما أن σ_u^2 مجهول فالواجب هو استخدام قانون استيودنت لإيجاد مجال ثقة لـ Y_{n+h}:

$$\frac{Y_{n+h} - \hat{Y}_{n+h} \Big/ \sigma_u\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+h} - \bar{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_u^2}\hat{\sigma}_u^2(n-2) \Big/ (n-2)}} = \frac{Y_{n+h} - \hat{Y}_{n+h} \Big/ \sigma_u\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+h} - \bar{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1}}{\hat{\sigma}_u \big/ \sigma_u}$$

$$= \frac{Y_{n+h} - \hat{Y}_{n+h} \Big/ \sigma_u\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_{n+h} - \bar{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1}}{\hat{\sigma}_u \big/ \sigma_u}$$

$$=\frac{Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}}{\hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(X_{n+h}-\bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}+1}}\to t_{(n-2)}$$

عند مستوى معنوية يمكن إيجاد مجال الثقة الموالي لـ Y_{n+h}:

$$Y_{n+h}\in\hat{Y}_{n+h}\pm t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\times\hat{\sigma}_u\times\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(X_{n+h}-\bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}+1}$$

مثال: (المثال السابق):

- أوجد الاستهلاك المتوقع عند دخل مساوي لـ 80. مع تحديد مجال للقيمة المطلوبة عند مستوى خطأ 5 % أو مستوى ثقة 95 %.

- الاستهلاك المتوقع:

$$\hat{Y}_{n+h}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{n+h}$$

$$\hat{C}_{n+1}=\hat{C}_{13}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1R_{13}=2.671+0.687\times 80=57.631$$

مجال الثقة للاستهلاك المتوقع:

$$Y_{n+h}\in\hat{Y}_{n+h}\pm t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\times\hat{\sigma}_u\times\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(X_{n+h}-\bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}+1}$$

$$C_{13}\in\hat{C}_{13}\pm t_{10,\ 0.025}\times\hat{\sigma}_u\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{\left(R_{13}-\bar{R}\right)^2}{\sum_{i=1}^{12}(R_i-\bar{R})^2}+1}$$

$$C_{13}\in 57.631\pm 2.228\times 3.408\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{(80-37.91)^2}{3872.917}+1}$$

$$C_{13}\in[48.206,\ 67.056]$$

11.ملخص دروس الانحدار الخطي البسيط:

نموذج انحدار خطي بسيط:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

مقدرات المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\text{Cov(x,y)}}{\text{v(x)}}$$

حالة خاصة:

$$Y_i = \beta X_i + u_i, \quad \text{i} = 1, 2, \ldots\ldots, \text{n}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

تباينات المقدرات و انحرافاتها المعيارية:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = \hat{\sigma}^2_{\hat{u}} \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \right]$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\hat{u}}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

مقدر تباين الأخطاء:

$$\hat{V}(\hat{u}) = \hat{\sigma}^2_{\hat{u}} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \quad \left(e_i = Y_i - \hat{Y}_i\right)$$

مجال ثقة للمقدرات:

$$\beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{(n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$$

$$\beta \in \hat{\beta} \pm t_{(n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$$

معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

اختبار الفرضيات:

-

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = a \\ H_1 : \beta_0 \neq a \end{cases} \qquad t^c = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \to t_{(n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

تحت الفرضية H^0 اذا كانت الإحصائية المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من الإحصائية المجدولة استيودنت عند مستوى معنوية α و درجة حرية $(n-2)$ نرفض H^0، نقبل H^1 و العكس صحيح.

-

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = a \\ H_1 : \beta_1 \neq a \end{cases} \qquad t^c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \to t_{(n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

تحت الفرضية H^0 إذا كانت الإحصائية المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من الإحصائية المجدولة استيودنت عند مستوى معنوية α و درجة حرية $(n-2)$ نرفض H^0، نقبل H^1 و العكس صحيح.

-

$$\begin{cases} H_0 : \text{ESS} = 0 \\ H_1 : ESS \neq 0 \end{cases}$$

$$F^c = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)} = \frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)} \to F_{(1,\ n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

إذا كانت الإحصائية المحسوبة أكبر من الإحصائية المجدولة فيشر، عند مستوى معنوية α و درجات حرية : 1 و $(n-2)$ نرفض H^0، نقبل H^1 و العكس صحيح.

التنبؤ و مجال ثقة للتنبؤ:

$$\hat{Y}_{n+h} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+h}$$

$$Y_{n+h} \in \hat{Y}_{n+h} \pm t_{(n-2)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{u}} \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+h} - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + 1}$$

12.تمارين محلولة:

التمرين الأول:

يبين الجدول الموالي قيمة استهلاك الحلويات (الوحدة: مليون جنيه إسترليني) مقابل عدد السكان (الوحدة مليون نسمة)، في 17 دولة، نرمز للاستهلاك بـ y_i وعدد السكان بـ x_i .

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 751.8 \quad \sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 97913.92 \quad \sum_{i=1}^{17} y_i = 13683.8$$

$$\sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 36404096.44 \quad \sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 1798166.66$$

المطلوب:

1− قدر معالم نموذج الانحدار الخطي البسيط $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$.

2− اكتب معادلة تحليل تباين واحسب معامل التحديد.

3− اوجد مجال ثقة لـ β_1 واختبر الفرضية: $H^0 : \beta_1 = 0$ مقابل الفرضية: $H^1 : \beta_1 \neq 0$ عند مستوى معنوية 5%، ماذا تستنتج.

4− اختبر الفرضية: $H^0 : \beta_0 = 0$ مقابل الفرضية: $H^1 : \beta_0 \neq 0$ عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

1. تقدير معالم النموذج:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1798166.66 - 17\dfrac{751.8}{17}\dfrac{13683.8}{17}}{97913.92 - 17\left(\dfrac{751.8}{17}\right)^2} = 18.44$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{13683.8}{17} - 18.44\frac{751.8}{17} = -10.49$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{y}_i = -10.49 + 18.44 x_i$$

2. معادلة تحليل التباين:

$$TSS = ESS + RSS$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

$$TSS = 36404096.44 - \frac{1}{17}(13683.8)^2 = 25389603.35$$

$$ESS = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \hat{\beta}_1^2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$$ESS = 18.44^2 \left[97913.92 - \frac{1}{17}(751.8)^2\right]$$

$$ESS = 21988840.80$$

$$RSS = TSS - ESS = 3400762.54$$

معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{21988840.80}{25389603.35} = 0.866$$

المتغير المتمثل في عدد السكان يشرح تغيرات استهلاك الحلويات بنسبة 86.6 %.

3. مجال ثقة لـ β_1:

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \times t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right], \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-2} RSS$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 64666.67$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{1}{n-2} RSS \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{15} 3401114.49 \Big/ 64666.67} = \sqrt{3.50} = 1.87$$

$$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}=t_{15,\ 0.025}=2.13\Rightarrow \beta_1\in[18.44\pm 2.13\times 1.87]$$

$$\beta_1\in[14.45,\ 22.42]$$

اختبار الفرضية:

$$\begin{cases}H_0:\beta_1=0\\ H_1:\beta_1\neq 0\end{cases}$$

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\rightarrow t_{n-2}$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}=\frac{18.44}{1.87}=9.86$$

عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ ودرجة حرية $(n-2=17-2=15)$ نلاحظ أن: $|t_c|=9.86>2.13$

وبالتالي: نرفض الفرضية H_0 والمعلم β_1معنوي في النموذج.

4. اختبار معنوية المعلم β_0 :

$$\begin{cases}H_0:\beta_0=0\\ H_1:\beta_0\neq 0\end{cases}$$

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\rightarrow t_{n-2},\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}=\sqrt{\frac{1}{n-2}RSS\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}=\sqrt{\frac{1}{15}3401114.49\left(\frac{1}{17}+\frac{\left(\frac{751.5}{17}\right)^2}{64666.67}\right)}=\sqrt{20195.05}=142.10$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}=\frac{-10.49}{142.10}=-0.07$$

عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ ودرجة حرية $(n-2=17-2=15)$ نلاحظ أن: $|t_c|=0.07<2.228$ وبالتالي: نقبل الفرضية H_0 والمعلم β_0 غير معنوي في النموذج.

التمرين الثاني:

ليكن نموذج الانحدار الخطي البسيط الموالي: $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ مع:

$$\sum YX = 184500 \quad \sum Y^2 = 26350 \quad \sum X^2 = 1400000 \quad \bar{Y} = 60 \quad \bar{X} = 400 \quad n = 7$$

1. قدر معالم النموذج.
2. قيم نوعية التعديل او التوفيق.
3. اختبر المعنوية الكلية للنموذج.

الحل:

1. تقدير معالم النموذج:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{184500 - 7 \times 400 \times 60}{14000000 - 7(400)^2} = 0.0589$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 60 - 0.0589 \times 400 = 36.44$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{Y}_i = 36.44 + 0.0589 X_i$$

نوعية التعديل:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

$$TSS = ESS + RSS$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2$$

$$TSS = 26350 - \frac{1}{7} \times (60 \times 7)^2 = 1150$$

$$ESS = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_1^2 \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$$

$$ESS = 0.0589^2 \left[1400000 + \frac{1}{7}(400 \times 7)^2 \right]$$

$$ESS = 971.37$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{971.37}{1150} = 0.84$$

اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : ESS = 0 \\ H_1 : ESS \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{R^2}{(1-R^2)/(n-2)} \to F_{(1,n-2),\alpha}$$

$$F_c = \frac{0,84}{(1-0,84)/5} = 26,25$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ودرجات حرية $(1,\ 5)$ نلاحظ أن: $F_c = 26.25 > 6.61$ وبالتالي: نرفض الفرضية: H_0 والمعلم β_1معنوي في النموذج والنموذج أيضا معنوي.

<u>التمرين الثالث:</u>

يبين الجدول أدناه معطيات احصائية متعلقة بكل من عدد سنوات التمدرس لكل عامل (N) ومتوسط أجره السنوي (R) بالدولار الامريكي في الولايات المتحدة الامريكية خلال سنة 1985.

1. احسب معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين.
2. نرغب في دراسة العلاقة الموجودة بين المتغيرين باستعمال انحدار خطي بسيط، ما هو المتغير التابع وما هو المتغير المستقل مع التعليل.
3. قدر معالم النموذج واكتب معادلة خط الانحدار بافتراض وجود حد ثابت ثم بافتراض عدم وجوده.

i	N_i	R_i
1	6	4.4567
2	7	5.77
3	8	5.9787
4	9	7.3317
5	10	7.3182
6	11	6.5844
7	12	7.8182
8	13	7.8351
9	14	11.0223
10	15	10.6738
11	16	10.8361
12	17	13.615
13	18	13.531

الحل:

1. المتغير التابع هو الأجر R والمتغير المستقل هو عدد سنوات التمدرس N، لان الأجر عادة يتغير تبعا لتغير المستوى الدراسي.
2. تقدر معالم النموذج بافتراض وجود الحد الثابت:

$$R_i = \beta_0 + \beta_1 N_i + u_i$$

i	N_i	R_i	$N_i - \bar{N}$	$R_i - \bar{R}$	$(N_i - \bar{N})(R_i - \bar{R})$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	6	4.4567	-6	-4.218	25.308	36
2	7	5.77	-5	-2.905	14.524	25
3	8	5.9787	-4	-2.696	10.784	16
4	9	7.3317	-3	-1.343	4.029	9
5	10	7.3182	-2	-1.357	2.713	4
6	11	6.5844	-1	-2.090	2.090	1
7	12	7.8182	0	-0.857	0.000	0
8	13	7.8351	1	-0.840	-0.840	1
9	14	11.0223	2	2.348	4.695	4
10	15	10.6738	3	1.999	5.997	9
11	16	10.8361	4	2.161	8.646	16
12	17	13.615	5	4.940	24.701	25
13	18	13.531	6	4.856	29.138	36
	$\bar{N} =$ 12	$\bar{R} =$ 8.675			$\Sigma(N_i - \bar{N})(R_i - \bar{R}) =$ 131.786	$\Sigma(N_i - \bar{N})^2 =$ 182

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \bar{N}\right)\left(R_i - \bar{R}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \bar{N}\right)^2} = \frac{131.78}{182} = 0.724$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{R} - \hat{\beta}_1\bar{N} = 8.67 - 0.724 \times 12 = -0.014$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{R}_i = -0.014 + 0.724N_i, \qquad i = 1,2,......,13$$

3. تقدر معالم النموذج بافتراض عدم وجود الحد الثابت:

$$R_i = \beta N_i + u_i$$

i	N_i	R_i	$N_i \times R_i$	N_i^2
1	6	4.4567	26.740	36
2	7	5.77	40.390	49
3	8	5.9787	47.830	64
4	9	7.3317	65.985	81
5	10	7.3182	73.182	100
6	11	6.5844	72.428	121
7	12	7.8182	93.818	144
8	13	7.8351	101.856	169
9	14	11.0223	154.312	196
10	15	10.6738	160.107	225
11	16	10.8361	173.378	256
12	17	13.615	231.455	289
13	18	13.531	243.558	324
	$\bar{N} =$ 12	$\bar{R} =$ 8.675	$\sum N_i R_i =$ 1485.040	$\sum N_i^2 =$ 2054

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i R_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i^2} = \frac{1485.04}{2054} = 0.722$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{R}_i = 0.722N_i, \qquad i = 1,2,......,13$$

الفصل الثالث : نموذج الانحدار الخطي المتعدد

الفصل الثاني: نموذج الانحدار الخطي المتعدد
(Multiple Regression)

نموذج الانحدار الخطي البسيط يفرض وجود متغير مستقل واحد فقط لتفسير المتغير التابع، غير أنه وفي الواقع الاقتصادي كثيرا ما يتطلع المتغير التابع أكثر من متغير واحد لتفسيره.

سنحاول في هذا الفصل بدراسة الانحدار الخطي المتعدد أو العام والذي يضم أكثر من متغير مستقل واحد في تفسير المتغير التابع، مع تقدر معالم النموذج ودراسة خصائصها بالإضافة إلى اختبار فرضيات المعنوية الإحصائية والتنبؤ.

1. الكتابة العامة للنموذج:

يمكن كتابة نموذج انحدار خطي عام أو متعدد على الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i = 1,2,...,n$$

- X_1 ، X_2 ،... X_k : متغيرات مستقلة (أو شارحة) عددها k .
- β_0 ، β_1 ، β_2 ،... β_k تسمى معالم النموذج وعددها: $(k+1)$.
- n طول العينة.
- u_i متغير عشوائي يعبر عن الأخطاء الموجودة في النموذج (الأخطاء في تفسير المتغير التابع Y) ولذلك تسمى الأخطاء، أو أيضا البواقي لأنه يمكن كتابتها عند كل مشاهدة i على الشكل التالي:

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_1 X_{2i} - ... - \beta_k X_{ki}, \quad i = 1,2,...,n$$

الكتابة المصفوفية (Matrix form) للنموذج:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_1 X_{21} + ... + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_1 X_{22} + ... + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_1 X_{2n} + ... + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}$$

$$\underset{(n,1)}{Y} = \underset{(n,k+1)}{X}\ \underset{(k\times1)}{\beta} + \underset{(n\times1)}{u}$$

مع:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

2. فرضيات النموذج:

- الفرضية الأولى: النموذج خطي (Linear Model) بالنسبة لمعالم النموذج، وشعاع الأخطاء ويعني هذا أنه يمكن كتابته على الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i=1,2,\ldots,n$$

- الفرضية الثانية: قيم المتغير X_{ji} $\left(j=1,2,..,k, i=1,2,\ldots,n\right)$ حقيقية مشاهدة بدون أخطاء (غير عشوائية).

- الفرضية الثالثة: الأمل الرياضي للأخطاء معدوم، أو بعبارة أخرى: متوسط الأخطاء معدوم:

$$E(u_i)=0, \quad \forall i=1,\ldots..,n$$

- الفرضية الرابعة: تجانس أو ثبات تباين الأخطاء Homoscedasticity: وتعني أن تشتت الأخطاء حول المتوسط ثابت، ويعبر عنها رياضيا بالكتابة:

$$V(u_i)=E(u_i^2)=\sigma_u^2 \quad ,\forall i=1\ldots..n$$

- الفرضية الخامسة: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء: بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على طول العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$Cov(u_s,u_t)=E(u_s u_t)=0 \quad ,\forall s\neq t \qquad s,t=1\ldots..n$$

الفرضية الرابعة والخامسة يمكن التعبير عنهما معا باستعمال مصفوفة تباين–تباين مشترك للأخطاء والتي يرمز لها بالرمز Ω_u كما يلي:

$$\Omega_u = E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & 0 & E(u_nu_n) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_u = \begin{pmatrix} V(u_1) & Cov(u_2,u_1) & \cdots & Cov(u_n,u_1) \\ Cov(u_1,u_2) & V(u_2) & \cdots & Cov(u_n,u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(u_1,u_n) & Cov(u_2,u_n) & \cdots & V(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

- <u>الفرضية السادسة</u>: الأخطاء مستقلة عن المتغيرات الشارحة: X_j ، أي:

$$Cov(X_{ji},u_i) = 0, \forall\, j = 1,2,\ldots,k, \quad i = 1,\ \ldots,\ n,$$

- <u>الفرضية السابعة</u>: فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء: وهي تعني أن الأخطاء تتوزع وفق القانون الإحتمالي الطبيعي. هذه الفرضية مع الفرضية الأولى والثانية والثالثة يمكن اختصارها رياضيا كما يلي:

$$u_i \to N(0,\sigma_u^2)$$

- <u>الفرضية الثامنة</u>: عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة وهو ما يستلزم أن محدد المصفوفة $X'X$ غير معدوم وبالتالي يمكن ايجاد المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

- <u>الفرضية التاسعة</u>: $\frac{1}{n}X'X$ تؤول إلى مصفوفة محدودة غير فردية.

- <u>الفرضية العاشرة</u>: عدد المشاهدات أكبر بكثير من عدد المتغيرات المستقلة (بما في ذلك الحد الثابت).

$$(n > k+1)$$

3. تقدير معالم النموذج:

1.3. طريقة المربعات الصغرى العادية:

ليكن نموذج الانحدار الخطي العام في كتابته المصفوفية والمكون من k متغير مستقل و n مشاهدة.

$$Y = X\beta + u$$

مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ تعطى بالعبارة:

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

مع: X' يشير إلى منقول المصفوفة X.

البرهان:

تقوم طريقة المربعات الصغرى العادية على تصغير مجموع مربعات البواقي أو الأخطاء وهي تلك الفروق الموجودة بين القيم الحقيقية Y والقيم المقدرة $\hat{Y}$.

مجموع مربعات الأخطاء S يكتب كما يلي:

$$Y = X\beta + u \Rightarrow u = Y - X\beta$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u'u$$

u' ترمز إلى منقول الشعاع: u.

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \left(Y - X\beta\right)'\left(Y - X\beta\right) = \left(Y' - \beta'X'\right)\left(Y - X\beta\right)$$

$$S = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

بما أن:

$$Y'X\beta = \beta'X'Y$$

إذن:

$$S = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

المقدرات $\hat{\beta}$ التي تصغر مجموع مربعات الأخطاء بدلالة المشاهدات X و Y هي تلك التي تعدم مشتقات S بالنسبة لـ: β ويكون عندها المشتق الثاني لـ S بالنسبة لـ: β أكبر من الصفر.

$$Min\ S = \underset{\beta}{Min}\left[Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta\right]$$

باشتقاق S بالنسبة لـ: β نجد:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta\right] = -2X'Y + 2\beta X'X$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=0 \Rightarrow -2X'Y+2\hat{\beta}X'X=0 \Rightarrow X'Y=\hat{\beta}X'X$$

$X'X$ مصفوفة مربعة رتبتها $(k+1,k+1)$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$ وبالتالي:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$$

للتأكد من أن $\hat{\beta}$ هو قيمة دنيا لـ S، يجب التحقق من شرط الدرجة الثانية:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \beta'}=\frac{\partial}{\partial \beta'}\left[-2X'Y+2\beta X'X\right]=2X'X \geq 0$$

$X'X$ هي مصفوفة معرفة موجبة ومنه فإن $\hat{\beta}$ يصغر S.

2.3.طريقة المعقولية العظمى:

استعمال طريقة المعقولية العظمي لتقدير معالم النموذج الانحدار الخطي المتعدد تفضي إلى نفس نتائج طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$$

البرهان:

بافتراض أن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا فان دالة كثافتها الإحتمالية تكتب على الشكل التالي:

$$f(u)=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u'u}{2\sigma_u^2}\right)$$

نسمي $L(u_1,\ldots,u_n)$ دالة المعقولية العظمى، حيث:

$$L(u_1,\ldots,u_n)=\prod_{i=1}^{n} f(u_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u'u}{2\sigma_u^2}\right),$$

بما أن:

$$u=Y-X\beta$$

بالتعويض نجد:

$$L(u_1,\ldots,u_n)=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u'u\right)$$

$$=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)\right)$$

نضع: $S=\ln(L)$ مع $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري.

المقدرات $\hat{\beta}$ التي تعظم دالة المعقولية بدلالة المشاهدات X و Y هي تلك التي تعدم مشتقات S بالنسبة لـ: β ويكون عندها محدد مصفوفة Hessian أقل من الصفر.

$$\max_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_u^2} S = \max_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_u^2} \left\{ -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sigma_u^2}\left(-X'Y + \beta X'X\right)$$

المقدرات: $\hat{\beta}$ التي تعدم المشتقات تحسب كما يلي:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow -X'Y + \hat{\beta} X'X = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

ملاحظات:

- في الكتابة $\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$ يمكن ملاحظة أن:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki}Y_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

- حالة خاصة: في حالة المعطيات المركزة يمكن حساب المقدرات كما يلي:

لدينا:

$$\tilde{X}_i = X_i - \bar{X} \quad , \tilde{Y}_i = Y_i - \bar{Y} \ , \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

$\tilde{X}_i$ ، $\tilde{Y}_i$ ترمز إلى البيانات المركزة.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\tilde{X}_1) & Cov(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) & Cov(\tilde{X}_1,\tilde{X}_3) & \cdots & Cov(\tilde{X}_1,\tilde{X}_k) \\ Cov(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) & V(\tilde{X}_2) & Cov(\tilde{X}_2,\tilde{X}_3) & \cdots & Cov(\tilde{X}_2,\tilde{X}_k) \\ Cov(\tilde{X}_3,\tilde{X}_1) & Cov(\tilde{X}_3,\tilde{X}_2) & V(\tilde{X}_3) & \cdots & Cov(\tilde{X}_3,\tilde{X}_k) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Cov(\tilde{X}_k,\tilde{X}_1) & Cov(\tilde{X}_k,\tilde{X}_2) & Cov(\tilde{X}_k,\tilde{X}_3) & \cdots & V(\tilde{X}_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cov(\tilde{X}_1,\tilde{Y}) \\ Cov(\tilde{X}_2,\tilde{Y}) \\ Cov(\tilde{X}_3,\tilde{Y}) \\ \vdots \\ Cov(\tilde{X}_k,\tilde{Y}) \end{bmatrix}$$

أما المقدر $\hat{\beta}_0$ فيحسب كما يلي:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}_1 - \hat{\beta}_2\bar{X}_2 - \ldots\ldots - \hat{\beta}_k\bar{X}_k$$

مثال:

ليكن النموذج الموالي ذو المتغير التابع Y_i والمتغيرات المستقلة X_{1i} ، X_{2i} ، خلال خمس سنوات فقط من أجل تبسيط الحسابات (عمليا ينبغي تكبير حجم العينة).

i	Y_i	X_{1i}	X_{2i}
1	8	3	5
2	1	1	4
3	8	5	6
4	3	2	4
5	5	4	6

- اكتب النموذج بشكل مصفوفي.

-قدر معالم النموذج.

-اكتب معادلة الانحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر.

-حول معطيات التمرين الى مشاهدات ممركزة ثم اعد عملية التقدير.

الحل:

عدد المتغيرات المستقلة في هذا المثال هو: $k=2$: بإضافة الحد الثابت للنموذج نتحصل على: $k+1=3$ ، عدد المشاهدات: $n=5$.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + u_i, \quad i = 1,2,...,5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_1 X_{21} + u_1, \\ Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_1 X_{22} + u_2, \\ Y_3 = \beta_0 + \beta_1 X_{13} + \beta_1 X_{23} + u_3, \\ Y_4 = \beta_0 + \beta_1 X_{14} + \beta_1 X_{24} + u_4, \\ Y_5 = \beta_0 + \beta_1 X_{15} + \beta_1 X_{25} + u_5, \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}8\\1\\8\\3\\5\end{pmatrix}}_{Y}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&5\\1&1&4\\1&5&6\\1&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}}_{\beta}+\underbrace{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{pmatrix}}_{u}$$

- الكتابة المصفوفية:

$$Y=X\beta+u$$

- تقدير معالم النموذج:

$$\hat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)$$

$$X'X=\begin{pmatrix}n&\sum_{i=1}^{n}X_{1i}&\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\\\sum_{i=1}^{n}X_{1i}&\sum_{i=1}^{n}X_{1i}^2&\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\\\sum_{i=1}^{n}X_{2i}&\sum_{i=1}^{n}X_{2i}X_{1i}&\sum_{i=1}^{n}X_{2i}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15&25\\15&55&81\\25&81&129\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(X'X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5&15&25\\15&55&81\\25&81&129\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}534&90&-160\\90&20&-30\\-160&-30&50\end{pmatrix}$$

$$X'Y=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_i\\\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_i\\\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\91\\134\end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}534&90&-160\\90&20&-30\\-160&-30&50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\91\\134\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2.5\\-1.5\end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2.5\\-1.5\end{pmatrix}$$

- **معادلة الإنحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر:**

$$\hat{Y}_i = 5 + 2.5X_{1i} - 1.5X_{2i}, \quad i = 1,2,3,4,5$$

يمكن أيضا كتابة النموذج المقدر على الشكل:

$$Y_i = 5 + 2.5X_{1i} - 1.5X_{2i} + e_i, \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

- **حالة البيانات الممركزة:**

ينبغي أولا حساب المقدرين: $\hat{\beta}_1$ ، $\hat{\beta}_2$.

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Cov(X_1, Y) \\ Cov(X_2, Y) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 & \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2) \\ \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2) & \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(Y_i - \bar{Y}) \\ \sum(X_{2i} - \bar{X}_1)(Y_i - \bar{Y}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 & \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2) \\ \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2) & \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(Y_i - \bar{Y}) \\ \sum(X_{2i} - \bar{X}_1)(Y_i - \bar{Y}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

الحد الثابت $\hat{\beta}_0$ يمكن حسابه كما يلي:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \ldots\ldots - \hat{\beta}_k \bar{X}_k$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = 5 - (2.5 \times 3) + (1.5 \times 5) = 5$$

شعاع المقدرات المحسوبة $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أننا تحصلنا على نفس النتائج.

4.خصائص المقدرات:

لتسهيل دراسة خصائص المقدرات ينبغي أولا كتابة $\hat{\beta}$ بدلالة β :

$$\hat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}X'Y,\ Y=X\beta+u$$
$$\Rightarrow\hat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}X'\left(X\beta+u\right)=\left(X'X\right)^{-1}X'X\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'u$$
$$\Rightarrow\hat{\beta}=\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'u$$

1.4.خاصية عدم التحيز :

$$E(\hat{\beta})=\beta$$

البرهان:

$$E(\hat{\beta})=E(\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'u)=E(\beta)+\left(X'X\right)^{-1}X'E(u)$$
$$E(u)=0,E(\beta)=\beta\Rightarrow E(\hat{\beta})=\beta$$

2.4.خاصية أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE):

حسب نظرية Gauss–Markov والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ أفضل مقدرات خطية غير متحيزة، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى".

تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات، ويمكن برهنة هذه الخاصية بعد حساب تباينات المقدرات وذلك كما يلي:

بما أن $\hat{\beta}$ عبارة عن شعاع فتباينه سيعطي مصفوفة تسمى مصفوفة تباين– تباين مشترك ويرمز لها بالرمز: $\Omega_{\hat{\beta}}$، هذه المصفوفة بعدها $\left(k+1,k+1\right)$ وتتكون من العناصر:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\begin{pmatrix} V(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_0) \\ Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_k) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) & \cdots & V(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

يمكن أن نبرهن أن:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}$$

البرهان:

$$\hat{\beta}=\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'u\Rightarrow\hat{\beta}-\beta=\left(X'X\right)^{-1}X'u$$

$$(\hat{\beta}-\beta)'=u'X\left(X'X\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow\Omega_{\hat{\beta}}=E\left((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right)=E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'uu'X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow\Omega_{\hat{\beta}}=\left(X'X\right)^{-1}X'E(uu')X\left(X'X\right)^{-1}$$

يمكن كتابة مصفوفة تباين–تباين مشترك $\left(\Omega_u\right)$ لشعاع الأخطاء u كما يلي:

$$\Omega_u=E(uu')=\begin{pmatrix}E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n)\\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & 0 & E(u_nu_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_u^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_u^2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_u^2\end{pmatrix}=\sigma_u^2 I_n$$

$$E(uu')=\sigma_u^2 I_n=\Omega_u\Rightarrow\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}$$

يمكن أن نبرهن أن هذا التباين $\left(\Omega_{\hat{\beta}}\right)$ هو الأقل بحساب نهايته عندما يكون n كبير نسبيا:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}=\sigma_u^2\frac{n}{n}\left(X'X\right)^{-1}=\frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}$$

اذا كانت الفرضية الرابعة والتاسعة صحيحتين فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\Omega_{\hat{\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}=0$$

3.4.خاصية الاتساق:

بما أن المقدرات $\hat{\beta}$ تحقق الشروط:

$$E(\hat{\beta})=\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\Omega_{\hat{\beta}}=0$$

إذن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم β.

5.تقدير تباين الأخطاء:

يمكن تقدير تباين الأخطاء باستعمال طريقتين:

1.5.طريقة المربعات الصغرى العادية:

تقدير تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_u^2$ بطريقة المربعات الصغرى العادية يفضي إلى:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\hat{u} = Y - \hat{Y}$$
$$Y = X\beta + u,\ \hat{Y} = X\hat{\beta}$$
$$\Rightarrow \hat{u} = X\beta + u - X\hat{\beta} = u - X(\hat{\beta} - \beta) = u - X(X'X)^{-1}X'u$$
$$\Rightarrow \hat{u} = (I_n - X(X'X)^{-1}X')u$$

نضع:

$$M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$$

تسمى المصفوفة M بالمصفوفة الدورية ولها بعض الخواص كما يلي:

$$M^2 = M$$
$$M' = M$$
$$MX = (I_n - X(X'X)^{-1}X')X = X - X = 0$$

إذن:

$$\hat{u} = Mu \Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = u'M'Mu$$
$$M'M = M \Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = u'Mu$$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين:

$$E(\hat{u}'\hat{u}) = E(u'Mu)$$
$$E(\hat{u}'\hat{u}) = \hat{u}'\hat{u},\ \ E(u'Mu) = \sigma_u^2 M = \sigma_u^2 Trace(M)$$

مع: $Trace$ يمثل أثر مصفوفة مربعة وهو يساوي مجموع عناصر المحور الأول لهذه المصفوفة.

$$u'Mu = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$u'Mu = u_1^2 M_{11} + u_2^2 M_{22} + \ldots + u_n^2 M_{nn} + u_1 u_2 M_{12} + \\ + u_1 u_2 M_{21} + \ldots. + u_{n-1} u_n M_{n-1n} + u_{n-1} u_n M_{nn-1}$$

بما أن:

$$\begin{cases} E(u_i u_j) = 0 \ \forall i \neq j \\ E(u_i^2) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

إذن:

$$E(u'Mu) = \sigma_u^2 M_{11} + \sigma_u^2 M_{22} + \ldots + \sigma_u^2 M_{nn} = \sigma_u^2 Trace(M)$$

$$E(u'Mu) = \sigma_u^2 M = \sigma_u^2 Trace(M)$$

من خصائص الأثر: إذا كانت B ، A مصفوفتان مربعتان:

$$Trace(A+B) = Trace(A) + Trace(B)$$

إذن:

$$Trace(M) = Trace(I_n - X(X'X)^{-1}X') = Trace(I_n) - Trace\left(X(X'X)^{-1}X'\right) \\ = n - (k+1) = n - k - 1$$

وبالتالي:

$$E(u'Mu) = \sigma_u^2 (n-k-1)$$

$$E(\hat{u}'\hat{u}) = E(u'Mu) \Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = \hat{\sigma}_u^2 (n-k-1) \Rightarrow \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1}$$

يمكن أن نبرهن أن هذا المقدر غير متحيز، حيث نلاحظ أن:

$$E\left(\hat{\sigma}_u^2\right) = \frac{1}{n-k-1} E(\hat{u}'\hat{u}) = \frac{n-k-1}{n-k-1} \sigma_u^2 = \sigma_u^2$$

2.5.طريقة المعقولية العظمى:

سبق أن لوغاريتم دالة المعقولية يكتب على الشكل:

$$\ln L(\beta,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma_u^2\right) - \frac{1}{2\sigma_u^2}u'u$$

بالإشتقاق نجد:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_u^4}u'u$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}_u^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}_u^4}\hat{u}'\hat{u} = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\hat{u}'\hat{u}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}$$

في هذه الحالة يمكن أن نلاحظ أن مقدر تباين الأخطاء متحيز وذلك لأن:

$$E\left(\hat{\sigma}_u^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\hat{u}'\hat{u}\right) = \frac{(n-k-1)}{n}\sigma_u^2 \neq 0$$

ملاحظات:

- عندما يكون n كبير نسبيا فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-k-1}{n} = 1$$

- بتعويض σ_u^2 بـ $\hat{\sigma}_u^2$ في العلاقة: $\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}$ نتحصل على مصفوفة تباين–تباين مشترك المقدرة: $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2\left(X'X\right)^{-1}$ لمقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$.
- الكتابة المصفوفية لمصفوفة تباين–تباين مشترك المقدرة تكتب كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2\left(X'X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 & \cdots & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_2) & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}^2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ من خلال هذه الكتابة أن تباينات المقدرات $\left(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2\right)$ تتموضع في محور المصفوفة بينما تمثل باقي العناصر التباينات المشتركة بين المقدرات، يمكن أن نكتب تباين المقدر $\hat{\beta}_j$ من الشعاع $\hat{\beta}$ كما يلي:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_j} = \hat{\sigma}^2_u a_{jj}$$

مع: a_{jj} هو العنصر الواقع في السطر رقم j والعمود رقم j من المصفوفة: $(X'X)^{-1}$.

الانحراف المعياري لـ $\hat{\beta}_j$ يكتب على الشكل:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_u a_{jj}} = \hat{\sigma}_u \sqrt{a_{jj}}$$

مثال (المثال السابق):

- احسب مقدر تباين الأخطاء $\hat{\sigma}^2_u$.
- أحسب مقدر مصفوفة تباين تباين–مشترك للمقدرات $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$.

الحل:

- حساب مقدر تباين الأخطاء:

$$\hat{\sigma}^2_u = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1}$$

i	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	$e_i = \hat{u}_i = Y_i - 5 + 2.5X_{1i} - 1.5X_{2i}$	$\hat{u}_i^2$
1	8	3	5	3	9
2	1	1	4	−0.5	0.25
3	8	5	6	−0.5	0.25
4	3	2	4	−1	1
5	5	4	6	−1	1
				$\sum \hat{u}_i = 0$	$\sum \hat{u}_i^2 = 11.5$

إذن:

$$\hat{\sigma}^2_u = \frac{11.5}{5-2-1} = \frac{11.5}{2} = 5.75$$

- حساب مقدر مصفوفة تباين تباين–مشترك للمقدرات $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$.

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2 \left(X'X \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) & \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = 5.75 \begin{pmatrix} 26.7 & 4.5 & -8 \\ 4.5 & 1 & -1.5 \\ -8 & -1.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153.5 & 25.8 & -46 \\ 25.87 & 5.75 & -8.6 \\ -46 & -8.6 & 14.3 \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نستنتج أن:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = 153.5, \quad \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = 5.75, \quad \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} = 14.3, \; Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) = Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) = 25.8,$$

$$Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2) = Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_0) = -46, \; Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) = Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) = -8.6$$

6.معادلة وجدول تحليل التباين:

1.6.معادلة تحليل التباين:

كما في نموذج الانحدار الخطي البسيط يمكن كتابة معادلة تحليل التباين في نموذج الانحدار الخطي المتعدد كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

$$\text{TSS} \quad = \quad \text{ESS} \; + \; \text{RSS}$$

TSSترمز إلى مجموع المربعات الكلية، ESSمجموع المربعات الشارحة، RSS مجموع مربعات البواقي.

البرهان:

لدينا:

ينبغي أولا التذكير بالعلاقات التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i, \; \bar{Y} = \bar{\hat{Y}}, \quad \sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

يمكن إيجاد معادلة تحليل التباين كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i+\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}Y_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i,\ \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)=0$$

بما أن:

$$Y_i-\hat{Y}_i=u_i$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2$$

2.6.جدول تحليل التباين:

جدول تحليل التباين في حالة الانحدار الخطي المتعدد يكون على الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$	k	ESS/k
البواقي	$RSS=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2$	$n-k-1$	$RSS/(n-k-1)$
المجموع	$TSS=ESS+RSS$ $=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$	$n-1$	$\neq$

في حالة الإنحدار الخطي المتعدد، يمكن أيضا اختبار جودة التوفيق بحساب معامل التحديد المتعدد R^2، فهو يشير إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع Y بدلالة المتغيرات المستقلة المدرجة في المعادلة، ويستعمل كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الانحدار المحتوي على k متغير مستقل، ولحسابه يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في النموذج الخطي البسيط:

لدينا:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\beta_3X_{i3}+....+\beta_kX_{ik}+u_i \quad i=1,....,n$$

يمكن حساب R^2 على الشكل:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}$$

يمكن أيضا كتابة معامل التحديد R^2 بدلالة شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ كما يلي:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}=\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y}$$

إضافة متغيرات مستقلة أخرى للنموذج لا يمكن أن تقلل من قيمة R^2، بل بمكن أن تزيد من قيمته نظرا لثبات قيمة TSS، وارتفاع قيمة ESS. ولذلك يستحسن تعديل R^2 إلى معامل التحديد المعدل $\left(\bar{R}^2\right)$ وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار درجات الحرية كما يلي:

$$\bar{R}^2=1-\frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}/(n-k-1)}{Y'Y/(n-1)}=1-\frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right)$$

إذن عندما تكون درجة الحرية (Degrees of Freedom) ضعيفة وهي الفرق بين عدد المشاهدات وعدد المتغيرات المستقلة (العينات الصغيرة نسبيا)، يتم تعديل معامل التحديد R^2 باستعمال $\bar{R}^2$.

يمكن أن نلاحظ أنه عندما يكون عدد المشاهدات n كبير نسبيا فإن $\bar{R}^2$ يؤول إلى R^2.

$$\lim_{n\to\infty}\bar{R}^2=1-\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right)=R^2$$

ملاحظات:

- R يسمى معامل الارتباط المضاعف.
- $0\le R^2\le 1$، عندما يكون R^2 قريب من الواحد فهذا يدل على جودة التوفيق والعكس صحيح.
- إذا كان: $RSS=0$ فهذا يعني أن النموذج عبارة عن خط مستقيم ولا توجد أخطاء في النموذج، أما إذا كانت: $ESS=0$ فهذا يعني أن المتغيرات المستقلة ليس لها أي تأثير على المتغير التابع.
- إذا كان النموذج لا يحتوي على الحد الثابت، فإن: R^2 يحسب كما يلي:

$$R^2=\frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}$$

مثال: (المثال السابق):

- ارسم جدول تحليل التباين.
- احسب معامل التحديد ومعامل التحديد المعدل.

الحل:

- رسم جدول تحليل التباين:

لدينا:

$$TSS = ESS + RSS$$
$$RSS = \sum \hat{u}_i^2 = 11.5$$

مجموع المربعات الكلية (TSS) يمكن حسابها كما في الجدول الموالي:

i	Y_i	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	8	9
2	1	16
3	8	9
4	3	4
5	5	0
		$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 38$

$$TSS = \sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 38$$
$$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = TSS - RSS = 38 - 11.5 = 26.5$$

جدول تحليل التباين يكون على الشكل:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = 26.5$	$k = 2$	ESS / k $= 26.5 / 2 = 13.25$
البواقي	$RSS = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2 = 11.5$	$n - k - 1$ $= 2$	$RSS / (n - k - 1)$ $= 11.5 / 2 = 5.75$
المجموع	$TSS = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 38$	$n - 1$ $= 4$	$\neq$

• حساب معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{26.5}{38} = 0.697$$

• حساب معامل التحديد المعدل:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right) = 1 - \frac{4}{2}\left(1-0.697\right) = 0.394$$

7. توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير المجالي للمعالم

1.7. التوزيع الاحتمالي للمقدرات:

انطلاقا من فرضية التويع الطبيعي للأخطاء:

$$u_i \to \mathrm{N}(0,\sigma_u^2)$$

$$u_i \to N(0,\sigma_u^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \to \chi^2_{n-k-1}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-k-1} \Rightarrow (n-k-1)\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \to \chi^2_{n-k-1}$$

من جهة أخرى كل مقدر $\hat{\beta}_j$ يتبع توزيع طبيعي بمتوسط وتباين سبق حسابهما:

$$\hat{\beta}_j \to \mathrm{N}(\beta_j, \sigma_u^2 a_{jj}) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}} \to \mathrm{N}(0,1)$$

لا يمكن استعمال الاختبار الطبيعي إذا كان $\sigma^2_{\hat{\beta}_j}$ مجهولا، ولهذا ينبغي الانتقال على استعمال توزيعة استيودنت:

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-k-1}}} \to t(n-k-1) \quad \forall j = 0,\ldots,k$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j \Big/ \sigma_u\sqrt{a_{jj}}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_u^2}\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)\Big/(n-k-1)}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_u\sqrt{a_{jj}}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\rightarrow t(n-k-1)$$

2.7.بناء مجالات ثقة للمعالم (Prediction Interval):

يمكن عند مستوى معنوية (α) إيجاد مجال ثقة لكل معلم β_j:

$$\beta_j \in \left[\hat{\beta}_j \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \times t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \qquad \forall j=0,1,\ldots,k$$

البرهان:

لدينا:

$$\Pr\left[-t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \le +t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$: القيمة (المقروءة) الحرجة لتوزيع استيودنت عند درجة حرية $n-k-1$ و مستوى معنوية (α).

حل المتراجحة يفضي إلى إيجاد مجال ثقة لـ β_j كما يلي:

$$-t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \le +t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_j-\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}\times t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \beta_j \le \hat{\beta}_j+\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}\times t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \beta_j \in \left[\hat{\beta}_j \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \times t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \qquad \forall j=0,1,\ldots,k$$

3.7.إيجاد مجال ثقة لـ تباين الأخطاء:

$$\frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-k-1,1-\alpha/2}} \le \sigma_u^2 \le \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi^2_{n-k-1,\alpha/2}}$$

البرهان:

لدينا مما سبق:

$$u_i \to N(0,\sigma_u^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \to \chi_{n-k-1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \hat{\sigma}_u^2(n-k-1) \Rightarrow \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \Rightarrow \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \to \chi_{n-k-1}^2$$

باستخدام التوزيع المجدول لقانون الكاي مربع يمكن إيجاد مجال ثقة لـ σ_u^2 عند مستوى معنوية α كما يلي:

$$\Pr\left[\chi_{n-k-1,\alpha/2}^2 \le \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \le \chi_{n-k-1,1-\alpha/2}^2\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-k-1,1-\alpha/2}^2} \le \sigma_u^2 \le \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-k-1,\alpha/2}^2}$$

$\chi_{n-k-1,\alpha/2}^2$ ، $\chi_{n-k-1,1-\alpha/2}^2$ القيم الحرجة لتوزيع الكاي مربع (χ^2) عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $(n-k-1)$.

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-k-1,1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\chi_{n-k-1,\alpha/2}^2}\right]$$

8.اختبار الفرضيات:

بمعرفة التوزيع الإحتمالي لـ $\hat{\beta}_j$ يمكن إجراء اختبار الفرضيات المتعلقة بالمعالم β_j $(j=0,1,...,k)$.

هناك أربع عناصر أساسية لإجراء إختبار إحصائي: فرضية العدم H_0 وتقابلها الفرضية البديلة H_1، الإحصائية المحسوبة ذات العلاقة بفرضية الإختبار، الإحصائية المجدولة ذات العلاقة بالإحصائية المحسوبة، وأخيرا قاعدة القرار التي يتم بموجبها رفض أو قبول فرضية الإختبار (فرضية العدم).

1.8.اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم:

اختبار معنوية معلمة من معالم النموذج يقصد بها إختبار هل هذه المعلمة معدومة أو غير معدومة في النموذج، يمكن كتابة فرضية العدم H_0 على الشكل:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

ويمكن كتابة الفرضية البديلة H_1 على الشكل:

$H_1:\beta_j \neq 0$

بما أن العلاقة بين Y و X_j قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن قبول الفرضية H_0 يعني بأن خط الإنحدار هو عبارة عن خط أفقي، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X_j.

الإحصائية المحسوبة:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1} \quad \forall j=0,1,\ldots,k$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1} \quad \forall j=0,1,\ldots,k$$

قاعدة القرار:

إذا كانت: $\left|t_c\right|=\frac{\left|\hat{\beta}_j\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}>t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_j معنوي إحصائيا.

بالمقابل: إذا كانت: $\left|t_c\right|=\frac{\left|\hat{\beta}_j\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_j ليس له معنوية إحصائية، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X_j.

ملاحظات:

يمكن أن يتغير شكل فرضية العدم والفرضية البديلة كما يلي:

الحالة الأولى:

$$\begin{cases} H_0:\beta_j=a \\ H_1:\beta_j\neq a \end{cases}$$

حيث: a عدد حقيقي معلوم.

في هذه الحالة وتحت الفرضية H_0 تصبح الإحصائية المحسوبة كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_j - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_j - a|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} > t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_j يختلف معنويا عن العدد الحقيقي a، أما إذا كانت $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_j - a|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \le t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي المعلم β_j لا يختلف معنويا عن العدد الحقيقي a.

الحالة الثانية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_j = a \\ H_1 : \beta_j \le a \end{cases}$$

إذا كانت: $t_c = \frac{\hat{\beta}_j - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} > t_{n-k-1,1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1.

الحالة الثالثة:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_j = a \\ H_1 : \beta_j \ge a \end{cases}$$

إذا كانت: $t_c = \frac{\hat{\beta}_j - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} < -t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$

ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1.

الحالة الرابعة:

نرغب في اختبار فرضيات من الشكل:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i + \beta_j = a \\ H_1 : \beta_i + \beta_j \neq a \end{cases} \quad i \neq j$$

في هذه الحالة وتحت الفرضية H_0 تصبح الإحصائية المحسوبة كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j - a}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

مع:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{\beta}_i} + \sigma^2_{\hat{\beta}_j} + 2Cov(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)}$$

إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j - a|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j}} > t_{n-k-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، وبالتالي مجموع المعلمتين β_i، β_j يختلف معنويا عن العدد الحقيقي a.

مثال: (المثال السابق):

- اختبر معنوية المعالم: β_0، β_1، β_2.
- اختبر الفرضية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2 \\ H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 2 \end{cases}$$

الحل:

- اختبار معنوية: β_0.

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \rightarrow t_2$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{5}{\sqrt{153.5}} = 0.40$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية $(5\ \%)$ ودرجة حرية (2) $t_c = 0.40 < t_{2,0.975} = 4.30$ وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1 وهو ما يعني أن المعلم β_0 غير معنوي في النموذج.

- اختبار معنوية: β_1.

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \rightarrow t_2$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{2.5}{\sqrt{5.75}} = 1.04$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية $(5\ \%)$ ودرجة حرية (2) ، $t_c = 1.04 < t_{2,0.975} = 4.30$ وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1 وهو ما يعني أن المعلم β_1 غير معنوي في النموذج.

- اختبار معنوية: β_2:

$$\begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \rightarrow t_2$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} = \frac{\left|-1.5\right|}{\sqrt{14.3}} = 0.39$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية $(\%5)$ ودرجة حرية (2) $t_c = 0.39 < t_{2,0.975} = 4.30$ وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وهو ما يعني أن المعلم β_1 غير معنوي في النموذج.

- اختبار الفرضية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2 \\ H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 2 \end{cases}$$

لدينا:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2}} \to t_2$$

مع:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{\beta}_1} + \sigma^2_{\hat{\beta}_2} + 2Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)} = \sqrt{5.75 + 14.3 + 2(-8.6)} = 1.68$$

$$t_c = \frac{2.5 - 1.5 - 2}{1.68} = -0.59$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2) $\quad |t_c| = 0.59 < t_{2,0.975} = 4.30$

وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، وبالتالي مجموع المعلمتين β_1، β_2 لا يختلف معنويا عن العدد الحقيقي 2.

2.8.اختبار فيشر للقيود المتعددة Wald Test:

يستعمل اختبار استودنت لاختبار فرضية ذات قيد واحد، أما في حالة القيود المتعددة فالواجب هو استخدام اختبار فيشر وذلك وفقا للمنهجية الموالية.

نعلم أنه إذا كان Z و W متغيرات عشوائية فإن:

$$Z \to \chi^2_n, \quad W \to \chi^2_m \Rightarrow \frac{\chi^2_n / n}{\chi^2_m / m} \to F(n,m)$$

حيث ترمز $F(n,m)$ لقانون فيشر ذو درجات حرية n و m على الترتيب.

لتكن فرضية العدم والفرضية البديلة في شكل كتابات مصفوفية والتي تضع قيودا على مجموعة من المعالم:

$$\begin{cases} H_0 : R\beta = r \\ H_1 : R\beta \neq r \end{cases}$$

مع:

R مصفوفة أبعادها $(q,k+1)$، β شعاع بعده $(k+1,1)$، r شعاع بعده $(q,1)$، يمثل عدد القيود وهو عدد الأسطر في المصفوفة R.

خصائص الشعاع $R\hat{\beta}$:

المتوسط:

$$E\left(R\hat{\beta}\right)=RE\left(\hat{\beta}\right)=R\beta$$

مصفوفة التباين تباين مشترك (Covariance Matrix):

$$\Omega_{R\hat{\beta}}=R'\sigma_u^2(X'X)^{-1}R=\sigma_u^2R'(X'X)^{-1}R$$

وذلك لأن:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_u^2(X'X)^{-1}$$

من فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء يمكن أن نستنتج أن:

$$R\hat{\beta}\rightarrow N\left(R\beta,\sigma_u^2R'(X'X)^{-1}R\right)$$

بتطبيق نظرية النهاية المركزية ونظرية الأعداد الكبيرة نجد:

$$\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)\left(\sigma_u^2R'(X'X)^{-1}R\right)^{-1}\rightarrow N\left(0,1\right)$$

بالتربيع نجد:

$$\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)'\left(\sigma_u^2R'(X'X)^{-1}R\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)\rightarrow\chi_q^2$$

وبما أن:

$$\frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}\rightarrow\chi_{n-k-1}^2$$

بالقسمة نجد الإحصائية المحسوبة F_c:

$$F_c=\frac{\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)'\left(\sigma_u^2R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)\Big/q}{\dfrac{(n-k-1)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}\Big/(n-k-1)}\rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

تحت الفرضية: H_0 وبالتبسيط نجد:

$$F_c=\left(R\hat{\beta}-r\right)'\left(\hat{\sigma}_u^2R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)\Big/q\rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

أو أيضا:

$$F_c=\frac{\left(R\hat{\beta}-r\right)'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)\Big/q}{\hat{u}'\hat{u}/(n-k-1)}\rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

قاعدة القرار :

إذا كانت: $F_c \geq F_{(q,n-k-1),1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (q) و $(n-k-1)$ على الترتيب، في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1.

3.8.حالة خاصة: اختبار فيشر للمعنوية الكلية:

يهدف هذا الاختبار إلى معرفة مدى المعنوية الكلية للنموذج أي معنوية جميع المتغيرات المستقلة في شرح المتغير التابع في نفس الوقت.

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k \\ H_1 : \exists \beta_j \ / \qquad \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

هناك ثلاث طرق مختلفة للقيام بهذا الاختبار:

الطريقة الأولى:

بالإعتماد على الكتابة $R\beta = r$، يمكن صياغة الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$ في كتابة مصفوفية على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \vdots \\ \beta_k = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{r}$$

ومن ثم نحسب F_c:

$$F_c = \left(R\hat{\beta} - r\right)' \left(\hat{\sigma}_u^2 R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right) \Big/ q \rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

أو أيضا:

$$F_c = \frac{\left(R\hat{\beta} - r\right)' \left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right) \Big/ q}{\hat{u}'\hat{u} / (n-k-1)} \rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

قاعدة القرار لا تتغير.

الطريقة الثانية:

تكتب الإحصائية المحسوبة F_c بالاعتماد على جدول تحليل التباين (نسبة التباين المفسر إلى التباين الغير المفسر) كما يلي:

$$F_c=\frac{ESS/q}{RSS/(n-k-1)}=\frac{R^2/q}{\left(1-R^2\right)/(n-k-1)}\rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

قاعدة القرار لا تتغير.

الطريقة الثالثة:

تكتب الإحصائية المحسوبة F_c بالاعتماد على الصياغة الرياضية التالية:

$$F_c=\frac{(e_r'e_r-e'e)/q}{e'e/(n-k-1)}=\frac{(RSS_r-RSS)/q}{(RSS)/(n-k-1)}\rightarrow F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

مع: $RSS_r=e_r'e_r$: يمثل مجموع مربعات البواقي الناتجة عن النموذج المقيد بالفرضية H_0، وهو النموذج الذي يكتب كما يلي:

$$Y_i=\beta_0+u_i,\quad i=1,2,...,n$$

$RSS=e'e=\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$: يمثل مجموع مربعات البواقي للنموذج الغير المقيد أي:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_1X_{2i}+...+\beta_kX_{ki}+u_i,\quad i=1,2,...,n$$

قاعدة القرار لا تتغير.

مثال (المثال السابق):

- قيم المعنوية الكلية للنموذج بثلاث طرق مختلفة.
- اختبر الفرضية:

$$\begin{cases}H_0:\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\[2ex] H_1:\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

الحل:

- اختبار المعنوية الكلية:

$$\begin{cases}H_0:\beta_1=\beta_2=0\\H_1:\exists\beta_j\ /\ \beta_j\neq0\end{cases}$$

يمكن استعمال ثلاث طرق مختلف لاختبار المعنوية الكلية:

الطريقة الأولى:

$$F_c=\frac{ESS/q}{RSS/(n-k-1)}=\frac{R^2/q}{\left(1-R^2\right)/(n-k-1)}\to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

$$F_c=\frac{ESS/q}{RSS/(n-k-1)}=\frac{26.5/2}{11.5/2}=2.3$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية (5%) ودرجات حرية $(q=2)$ و $(n-k-1=2)$ على الترتيب أن: $F_c=2.3<F_{(2,2),0.95}=19$ ، وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1، أي النموذج غير معنوي.

الطريقة الثانية: Wald Test

ينبغي كتابة فرضية العدم على الشكل:

$$H_0:R\beta=r$$

نلاحظ أن:

$$H_0:\beta_1=\beta_2=0\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{R}\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}}_{\beta}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{r}$$

وبالتالي يمكن كتابة الإحصائية F_c كما يلي:

$$F_c=\frac{\left(R\hat{\beta}-r\right)'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)/q}{\hat{u}'\hat{u}/(n-k-1)}\to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

مع:

R مصفوفة أبعادها $(2,3)$ أي: $q=2$، β شعاع بعده $(3,1)$، r شعاع بعده $(2,1)$.

$$R\hat{\beta}-r=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\-1.5\end{pmatrix}\quad،\quad\left(R\hat{\beta}-r\right)'=\begin{pmatrix}2.5&-1.5\end{pmatrix}$$

$$\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26.7&4.5&-8\\4.5&1&-1.5\\-8&-1.5&2.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} == \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_c = \frac{(2.5 \quad -1.5)\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \Big/ 2}{11.5/2} = 2.30$$

الطريقة الثالثة:

يمكن كتابة الإحصائية المحسوبة F_c كما يلي:

$$F_c = \frac{(e_r'e_r - e'e)/q}{e'e/(n-k-1)} = \frac{(RSS_r - RSS)/q}{(RSS)/(n-k-1)} \to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

مع: $RSS_r = e_r'e_r$: يمثل مجموع مربعات البواقي الناتجة عن النموذج المقيد بالفرضية H_0، وهو النموذج الذي يكتب كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + u_{ri}, \quad i = 1,2,...,n$$

$$\hat{\beta}_0 = (X'X)^{-1}X'Y = \left[(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}\right] = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \bar{Y}$$

$$\hat{\beta}_0 = 5 \Rightarrow \hat{Y}_i = 5, \quad Y_i = 5 + \hat{u}_{ri}, \quad i = 1,2,...,5$$

i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_{ri}$	$\hat{u}_{ri}^2$
1	8	9	3	9
2	1	16	−4	16
3	8	9	3	9
4	3	4	−2	4
5	5	0	0	0
				$RSS_r = \sum \hat{u}_{ri}^2 = 38$

$$F_c = \frac{(RSS_r - RSS)/q}{(RSS)/(n-k-1)} = \frac{(38-11.5)/2}{11.5/2} = 2.30$$

قاعدة القرار لا تتغير.

- اختبار الفرضية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ H_1 : \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

في هذه الحالة يمكن استعمال طريقتين فقط لاختبار الفرضية المبينة أعلاه:

الطريقة الأولى:Wald Test

$$H_0 : R\beta = r$$

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{r}$$

مع:

R مصفوفة أبعادها $(2,3)$، β شعاع بعده $(3,1)$، r شعاع بعده $(2,1)$.

الإحصائية المحسوبة F_c تكتب كما يلي:

$$F_c = \frac{\left(R\hat{\beta} - r\right)' \left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right) / q}{\hat{u}'\hat{u} / (n-k-1)} \rightarrow F_{(q, n-k-1), \alpha}$$

$$R\hat{\beta} - r = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{،} \quad \left(R\hat{\beta} - r\right)' = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26.7 & 4.5 & -8 \\ 4.5 & 1 & -1.5 \\ -8 & -1.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} == \begin{pmatrix} 26.7 & 4.5 \\ 4.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1550 & -0.6976 \\ -0.6976 & 4.1395 \end{pmatrix}$$

$$F_c=\frac{\left.(3\quad 1.5)\begin{pmatrix}0.1550 & -0.6976\\ -0.6976 & 4.1395\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1.5\end{pmatrix}\right/2}{11.5/2}=\frac{4.43/2}{11.5/2}=0.38$$

نلاحظ أنه عند مستوى معنوية $(\%5)$ ودرجات حرية $(q=2)$ و $(n-k-1=2)$ على الترتيب أن: $F_c=2.3<F_{(2,2),0.95}=0.38$ ، وبالتالي نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1.

الطريقة الثانية:

$$\begin{cases}H_0:\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ H_1:\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

الإحصائية المحسوبة F_c تكتب على الشكل:

$$F_c=\frac{(e_r'e_r-e'e)/q}{e'e/(n-k-1)}=\frac{(RSS_r-RSS)/q}{(RSS)/(n-k-1)}\to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

مع: $SCR_r=e_r'e_r$: يمثل مجموع مربعات البواقي الناتجة عن النموذج المقيد بالفرضية H_0 ، وهو النموذج الذي يكتب كما يلي:

$$Y_i=2+X_{1i}+\beta_2X_{2i}+u_{ri},\quad i=1,2,\dots,n$$
$$\Leftrightarrow Y_i-2+X_{1i}=\beta_2X_{2i}+u_{ri},\quad i=1,2,\dots,n$$
$$\Leftrightarrow \tilde{Y}_i=\beta_2X_{2i}+u_{ri},\quad \tilde{Y}_i=Y_i-2+X_{1i}\quad i=1,2,\dots,n,$$

تقدير هذا النموذج يفضي إلى ما يلي:

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\tilde{Y}_i}{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}^2}=\frac{3}{129}=0.02325$$

i	Y_i	$\tilde{Y}_i$	$\hat{\tilde{Y}}_i$	$\hat{u}_{ri}$
1	8	3	0.1162	2.88
2	1	−2	0.093	−2.09
3	8	1	0.1395	0.86

4	3	−1	0.093	−1.09
5	5	−1	0.1395	−1.13
				$RSS_r = \sum \hat{u}_{ri}^2 = 15.9302$

إذن:

$$F_c = \frac{(RSS_r - RSS)/q}{(RSS)/(n-k-1)} = \frac{(15.9302 - 11.5)/2}{11.5/2} = 0.38$$

قاعدة القرار لا تتغير.

4.8.اختبار استقرار معاملات النموذج: (Chow forecast test)

يهدف هذا الاختبار إلى معرفة مدى استقرارية النموذج عبر الزمن، أو مدى استقرارية معالم النموذج مع مرور الزمن ويمر هذا الاختبار بالمراحل التالية:

المرحلة الأولى: نقسم المشاهدات إلى عينتين: العينة الأولى وطولها n_1، العينة الثانية وطولها n_2 مع $n = n_1 + n_2$.

يتم تقدير نموذجين لكل عينة باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية.

$$Y_i = \beta_0^1 + \beta_1^1 X_{1i} + \beta_2^1 X_{2i} + \ldots + \beta_k^1 X_{ki} + u_i, \quad i = 1,2,\ldots,n_1$$
$$Y_i = \beta_0^2 + \beta_1^2 X_{1i} + \beta_2^2 X_{2i} + \ldots + \beta_k^2 X_{ki} + u_i, \quad i = n_1+1, n_1+2,\ldots,n_2$$

ثم حساب مجموع مربعات البواقي للنموذجين المقدرين: SCR_1 و SCR_2.

يتم تقدير النموذج بالنسبة للعينة الكلية باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية،

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ثم حساب مجموع مربعات البواقي للنموذج المقدر SCR.

المرحلة الثانية: نختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{cases} \beta_0 = \beta_0^1 = \beta_0^2 \\ \beta_0 = \beta_0^1 = \beta_0^2 \\ \beta_1 = \beta_1^1 = \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_k = \beta_k^1 = \beta_k^2 \end{cases} \\ H_1 : \exists \beta_j \,/\, \beta_j \neq \beta_j^1 \neq \beta_j^2 \end{cases}$$

للقيام بهذا الاختبار ينبغي حساب الإحصائية F_c حيث:

$$F_c = \frac{RSS - (RSS^1 + RSS^2)/k_1}{(RSS^1 + RSS^2)/k_1} \to F_{(k_1,k_2),\alpha}$$

مع:

$$k_1 = (n-k-1) - [(n_1-k-1)+(n_2-k-1)] = k+1$$

$$k_2 = (n_1-k-1)+(n_2-k-1) = n-2(k+1)$$

إذا كانت: $F_c \geq F_{(k_1,k_2),1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (k_1) و (k_2) على الترتيب، في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 وهو ما يعني أن النموذج غير مستقر، أما إذا كانت: $F_c \leq F_{(k_1,k_2),\alpha}$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 والنموذج مستقر.

9.المتغيرات الصورية (Dummy Variables) ونماذج الانحدار الخطي:

المتغير الصوري هو عبارة عن متغير يمكن أن يكون مستقل أو تابع، يتميز بكونه يأخذ إحدى القيمتين 1 أو 0 فقط. في هذه الفقرة سنتطرق إلى المتغيرات الصورية على أنها متغيرات مستقلة فقط.

يستعمل المتغير الصوري كمتغير مستقل في النموذج للتعبير عن ظاهرة أو صفة معينة تتميز بكونها موجودة أو غير موجودة. على سبيل المثال: للتعبير عن حالة الحرب هل هناك حالة حرب ام حالة لا حرب (سلم)، أو للتعبير عن نظام اقتصادي سائد: اقتصاد رأسمالي أو اقتصاد غير رأسمالي، الحالة العائلية (متزوج أو غير متزوج)، أو للتعبير عن الجنس (ذكر أو أنثى)، أو أيضا للتعبير عن مستوى التعليم (متعلم أو غير متعلم) وغيرها من الأمثلة المتعددة.

مثال 1:

الجدول المبين أدناه يبين المرتب السنوي لعشر موظفين حسب الجنس والسؤال هل تختلف أجور الذكور بالمقارنة مع أجور الإناث؟

متغير صوري للدلالة على الجنس	الجنس	المرتب السنوي (وحدة نقدية)
1	ذكر	1000
1	ذكر	1100
0	أنثى	800
0	أنثى	900
1	ذكر	1050
0	أنثى	950
0	أنثى	850

1300	ذكر	1
1500	ذكر	1
950	أنثى	0

ينبغي أولا تقدير النموذج:

$$R_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$$

مع: R_i يرمز للأجر السنوي لكل موظف، D_i متغير صوري يرمز لنوع الجنس حيث يأخذ القيمة 1 إذا كان جنس الموظف ذكر ويأخذ القيمة 0 إذا كان جنس الموظف أنثى.

تقدير النموذج يفضي إلى النتائج الموالية:

$$\underset{}{\hat{R}_i} = \underset{(12.9)}{890} + \underset{(3.08)}{300}\ D_i, \quad R^2 = 0.54$$

الأرقام بين قوسين تمثل إحصائية استيودنت المحسوبة.

لمعرفة ما إذا كان نوع الجنس يؤثر على الراتب نختبر الفرضية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

عند مستوى معنوية: $\alpha = 5\%$ نلاحظ أن: $t^c = 3.08 > t_{(8,0.975)} = 2.3$. وبالتالي نرفض فرضية العدم وهو ما يعني أن نوع الجنس يؤثر معنويا على المرتب السنوي.

مثال 2:

نحاول قياس التغيرات الحاصلة في المعدل الحدي للاستهلاك بين المناطق الريفية والمناطق الحضارية فالنموذج الواجب تقديره يكون على الشكل التالي:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 R_i + \beta_2 D_i + u_i$$

مع: C_i يرمز لاستهلاك العائلات، R_i يرمز لدخل العائلات، D_i متغير صوري يرمز لنوع المنطقة الجغرافية التي تقطن بها العائلة المختارة، حيث يأخذ القيمة 1 إذا كانت العائلة المختارة تقطن في منطقة ريفية، ويأخذ القيمة 0 إذا كانت العائلة المختارة تقطن في منطقة حضارية.

إذا كان β_2 يختلف معنويا عن الصفر فهذا يهني وجود اختلاف في نمط الاستهلاك بين المدن والأرياف.

مشكلة هذا النموذج أنه لا يحدد نوع الاختلاف الحاصل، هل هو متعلق بالميل الحدي فقط، ام بالقاطع (الحد الثابت) فقط، أم أن الإختلاف يتعلق بالميل الحدي والقاطع في نفس الوقت. لهذا الغرض ينبغي تقدير نماذج أخرى حسب الفرضيات الاقتصادية التي يتطلبها كل نموذج.

الفرضية الأولى: الاختلاف موجود في الميل الحدي والقاطع معا:

في هذه الحالة النموذج الواجب تقديره يأخذ الشكل الموالي:

$$C_i = \alpha_1 + \alpha_2 D_i + \beta_1 R_i + \beta_2 D_i R_i + u_i$$

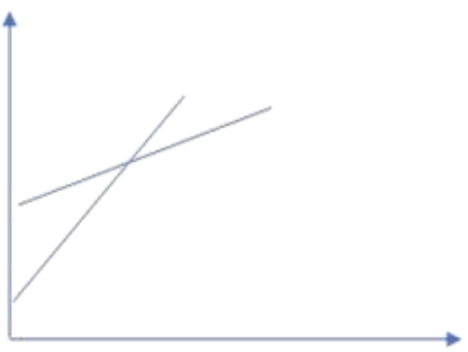
من أجل: $D_i = 0$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + \beta_1 R_i + u_i$$

من أجل: $D_i = 1$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) R_i + u_i$$

في هذه الحالة يمكن تمثيل دالتي الاستهلاك في الريف والحضر على الشكل الموالي، حيث نلاحظ اختلاف في كل من الميل الحدي والاستهلاك الابتدائي.



الفرضية الثانية: الاختلاف موجود في الميل الحدي فقط:

في هذه الحالة النموذج الواجب تقديره يأخذ الشكل الموالي:

$$C_i = \alpha_1 + \beta_1 R_i + \beta_2 D_i R_i + u_i$$

من أجل: $D_i = 0$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + \beta_1 R_i + u_i$$

من أجل: $D_i = 1$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2) R_i + u_i$$

في هذه الحالة يتساوى القاطف في الدالتين في حين نسجل اختلاف في الميول الحدية.

الفرضية الثالثة: الاختلاف موجود في القاطع فقط:

في هذه الحالة النموذج الواجب تقديره يأخذ الشكل:

$$C_i = \alpha_1 + \alpha_2 D_i + \beta_1 R_i + u_i$$

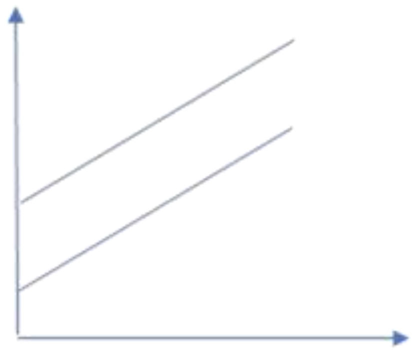
من أجل: $D_i = 0$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + \beta_1 R_i + u_i$$

من أجل: $D_i = 1$ يصبح النموذج:

$$C_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 R_i + u_i$$

في هذه الحالة يمكن تمثيل دالتي الاستهلاك في الريف والحضر على الشكل الموالي، حيث نلاحظ اختلاف في القاطع مع تساوي الميل الحدي للدالتين.



ملاحظات:

-استخدام المتغيرات الصورية يزيد من عدد المتغيرات المستقلة ومع محدودية عدد المشاهدات تتناقص درجات الحرية وهو ما يؤثر على معنوية المقدرات.

-عند إضافة متغيرات صورية، يجب الانتباه إلى الخاصية المراد معرفة تأثيرها فهي التي ينبغي تأخذ القيمة واحد.

-عند إضافة متغيرات صورية يجب الانتباه إلى أن لا تكون متعارضة في ما بينها بحيث لا يلغي بعضها أثر البعض الأخر.

10.التنبؤ باستعمال نموذج انحدار خطي متعدد:

بما أن المتغيرات المستقلة X_j معرفة خارج النموذج الذي تم تقديره، وبالتالي إذا افترضنا أن X_j معرفة من أجل المشاهدة $n+h$ $(h=1,2,....)$ في هذه الحالة يمكن التنبؤ بقيمة Y_{n+h} وذلك كما يلي:

$$Y_{n+h}=\beta_0+\beta_1 X_{1n+h}+\beta_1 X_{2n+h}+...+\beta_k X_{kn+j}+u_{n+h},\quad h=1,2,..$$
$$\hat{Y}_{n+h}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_{1n+h}+\hat{\beta}_1 X_{2n+h}+...+\hat{\beta}_k X_{kn+j}\quad h=1,2,..$$

الكتابة المصفوفية تكون على الشكل:

$$Y_{n+h}=X_{n+h}\hat{\beta}+u_{n+h}\quad h=1,2,..$$
$$\hat{Y}_{n+h}=X_{n+h}\hat{\beta}\quad h=1,2,..$$

يمكن أيضا إيجاد مجال ثقة لـ Y_{n+h}:

$$Y_{n+h}\in\hat{Y}_{n+h}\pm t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}\times\hat{\sigma}_u\times\sqrt{1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}}$$

البرهان:

لدينا:

$$Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}=X_{n+h}\beta+u_{n+h}-X_{n+h}\hat{\beta},\quad h=1,2,..$$
$$Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}=X_{n+h}\left(\beta-\hat{\beta}\right)+u_{n+h},\ h=1,2,..$$
$$Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}=-X_{n+h}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+u_{n+h},\ h=1,2,..$$

خصائص $Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}$:

التوقع الرياضي:

$$E\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)=E\left(u_{n+h}-X_{n+h}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right)=E\left(u_{n+h}\right)-X_{n+h}E\left(\hat{\beta}-\beta\right)$$
$$E\left(u_{n+h}\right)=0,\ E\left(\hat{\beta}-\beta\right)=0\Rightarrow E\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)=0$$

التباين:

$$V\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)=E\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)^2=E\left(u_{n+h}\right)^2+E\left[X_{n+h}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right]^2$$
$$-2Cov\left[u_{n+h},X_{n+h}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right]$$
$$E\left(u_{n+h}\right)^2=\sigma_u^2,\ E\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1},\ Cov\left[u_{n+h},X_{n+h}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow V\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)=\sigma_u^2+\sigma_u^2 X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}=\sigma_u^2\left(1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}\right)$$

حسب نظرية النهايات المركزية ونظرية الأعداد الكبيرة:

$$\frac{\dfrac{Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}}{\sqrt{\sigma_u^2\left(1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-k-1}}}\rightarrow t(n-k-1)\qquad \forall j=0,\dots,k$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{\left(Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}\right)\Big/\sqrt{\sigma_u^2\left(1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_u^2}\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)\Big/(n-k-1)}}=\frac{Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2\left(1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}\right)}}$$

$$=\frac{Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}}{\hat{\sigma}_u\sqrt{1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}}}\rightarrow t(n-k-1)$$

انطلاقا من هذه العلاقة نستنتج أن:

$$\Pr\left[-t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}\le\frac{Y_{n+h}-\hat{Y}_{n+h}}{\hat{\sigma}_u\sqrt{1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}}}\le+t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

حل المتراجحة يفضي إلى إيجاد مجال ثقة لـ Y_{n+h}:

$$Y_{n+h}\in\hat{Y}_{n+h}\pm t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}\times\hat{\sigma}_u\times\sqrt{1+X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1}X'_{n+h}}$$

مثال: المثال السابق:

- اوجد القيمة التنبئية لـ Y من أجل المشاهدة $i=6$ علما أن: $X_{16}=7,\ X_{26}=9$.
- أوجد مجال ثقة لهذه القيمة التنبئية.

الحل:

- **إيجاد القيمة التنبئية:**

$$\hat{Y}_{5+1} = \hat{Y}_6 = \beta_0 + \beta_1 X_{16} + \beta_1 X_{26} = 5 + 2.5 \times 7 - 1.5 \times 9 = 9$$

$$Y_{n+h} \in \hat{Y}_{n+h} \pm t_{n-k-1, \frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_u \times \sqrt{1 + X_{n+h} \left(X'X \right)^{-1} X'_{n+h}}$$

$$X_{n+h} \left(X'X \right)^{-1} X'_{n+h} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26.7 & 4.5 & -8 \\ 4.5 & 1 & -1.5 \\ -8 & -1.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 8.2$$

- **مجال ثقة:**

$$Y_6 \in 9 \pm 4.30 \times \sqrt{5.75} \times \sqrt{1 + 8.10} \Leftrightarrow Y_6 \in \left[-22.10, \ 40.10 \right]$$

ملخص دروس الانحدار الخطي المتعدد:

الكتابة الخطية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i,\ i = 1,..,n$$

الكتابة المصفوفية:

$$Y = X\beta + u$$

مقدرات المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

معادلة خط الانحدار:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ki},\ i = 1,..,n$$

مصفوفة تباين تباين مشترك للمقدرات:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

تباينات المقدرات موجودة على المحور الأول للمصفوفة : $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$

مقدر تباين الأخطاء:

$$\left(e_i = \hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i\right)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \hat{u}'\hat{u} / (n-k-1)$$

مجال ثقة للمقدرات:

$$\beta_j \in \hat{\beta}_j \pm t_{(n-k-1)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}$$

$$j = 0,1,..,k$$

معادلة تحليل التباين:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

TSS = ESS + RSS

معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y} = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y}$$

معامل التحديد المعدل:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

اختبار معنوية المعالم:

-

$$\begin{cases} H_0 : \beta_j = a \\ H_1 : \beta_j \neq a \end{cases} \qquad t^c = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \to t_{(n-k-1)}^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

تحت الفرضية H_0 اذا كانت الإحصائية المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من الإحصائية المجدولة استيودنت عند مستوى معنوية α و درجة حرية $(n-k-1)$ نرفض H_0.

-اختبار المعنوية الكلية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k \\ H_1 : \exists \beta_j \,/\quad \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \left(R\hat{\beta} - r\right)' \left(\hat{\sigma}_u^2 R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right) \Big/ q$$

$$\to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

إذا كانت: $F_c \geq F_{(q,n-k-1),1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (q) و $(n-k-1)$ على الترتيب، في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1.

التنبؤ و مجال ثقة للتنبؤ:

$$\hat{Y}_{n+h} = X_{n+h}\hat{\beta} \quad h = 1,2,..$$

مجال الثقة:

$$Y_{n+h} \in \hat{Y}_{n+h} \pm t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_{n+h}\left(X'X\right)^{-1} X'_{n+h}}$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

ليكن النموذج القياسي المتعدد الموالي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + u_i$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ ? & 9.3 & 5.4 \\ ? & 5.4 & 12.7 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} -40.25 \\ 8.157 \\ 9.136 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9.3 & 5.4 \\ 5.4 & 12.7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1428 & -0.0607 \\ -0.0607 & 0.1046 \end{bmatrix}, \quad Y'Y = 80,$$

1.احسب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$.

2.احسب مقدر تباين الأخطاء وأوجد مجال ثقة له عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

3.اختبر الفرضية: $\begin{cases} H_0 : B_0 = 0 \\ H_1 : B_0 \neq 0 \end{cases}$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

4.احسب معامل التحديد وأنشئ جدول تحليل التباين.

5.اوجد القيمة التنبئية لـ Y ومجال ثقة لها عند مستوى معنوية: $\alpha = 0.10$ من أجل: $X_2 = 0, X_1 = 1$.

6.اعد تقدير النموذج تحت الفرضية: $H_0 : B_1 = B_2 = 0$ واحسب مجموع المربعات المقيدة، ثم باستعمال اختبار احصائي وعند مستوى معنوية: $\alpha = 0.05$ بين هل النموذج المقيد يختلف معنويا عن النموذج الغير مقيد.

الحل:

1. حساب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1428 & -0.0607 \\ 0 & -0.0607 & 0.1046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40.25 \\ 8.157 \\ 9.136 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.61 \\ 0.61 \\ 0.46 \end{bmatrix}$$

2. حساب مقدر تباين الأخطاء ومجال الثقة:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k-1}$$

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y = 80 - \begin{pmatrix} -1.61 & 0.61 & 0.46 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -40.25 \\ 8.157 \\ 9.136 \end{bmatrix} = 6.03$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_u^2 = \frac{6.03}{22} = 0.27$$

مجال ثقة لتباين الأخطاء:

$$\frac{\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)}{\sigma_u^2} \to \chi^2_{n-k-1} \Rightarrow P\left[K_1 \le \frac{\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)}{\sigma_u^2} \le K_2\right] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)}{K_2} \le \sigma_u^2 \le \frac{\hat{\sigma}_u^2(n-k-1)}{K_1}$$

$$\Rightarrow \frac{0.27 \times 22}{36.781} \le \sigma_u^2 \le \frac{0.27 \times 22}{10.982} \to 0.16 \le \sigma_u^2 \le 0.54$$

3. اختبار الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : B_0 = 0 \\ H_1 : B_0 \ne 0 \end{cases}$$

$$t^c = \frac{\left|\hat{B}_0 - 0\right|}{\sqrt{\hat{V}(\hat{B}_0)}} = \frac{1.61}{\sqrt{0.27 \times 0.04}} = 15.49 \succ t^{1-\frac{0.10}{2}=0.95}(22) = 1.71$$

نرفض فرضية العدم H_0.

4.حساب معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{6.03}{TSS}$$

$$TSS = \sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum Y_i^2 - 2\bar{Y}\sum Y_i + n\bar{Y}^2$$

$$= 80 - 2\left(\frac{-40.25}{25}\right)(-40.25) + 25\left(\frac{-40.25}{25}\right)^2$$

$$R^2 = 1 - \frac{6.03}{15.197} = 0.60$$

جدول تحليل التباين:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغيرات الشارحة	ESS=9.16	k=2	ESS/k=4.58
البواقي	RSS=6.03	n-k-1=22	RSS/ N-k-1=0.27
المجموع	TSS=15.19	n-1=24	//

5.ايجاد القيمة التنبؤية:

$$\hat{Y} = -1.61 + 0.61 = -1$$

$$Y \in \hat{Y} \pm t^{0.95}(22)\sqrt{\hat{\sigma}^2\left\{1+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0.04 & 0 & 0\\ 0 & 0.1428 & -0.0607\\ 0 & -0.0607 & 0.1046\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}} = -1 \pm 1.71 \times 0.56$$

$$Y \in [-0.04 \ \ , -1.95]$$

6.تحت الفرضية $B_1 = B_2 = 0$:

$$Y_i = B_0 + U_i \Rightarrow \hat{B}_0 = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{-40.25}{25} = -1.61 \rightarrow Y_i = -1.61 + e_{ri}$$

$$\Rightarrow e_r^{'} e_r = \sum e_{ei}^2 = \sum (Y_i + 1.61)^2 = 15.19$$

$$F^C = \frac{(e_r' e_r - e'e)/q}{e'e/(n-k-1)} = \frac{(15.19 - 6.03)/2}{6.03/22} = 16.7 > F^{0.95}(2,22) = 3.44$$

نرفض فرضية العدم وبالتالي النموذجين لا يختلفان معنويا عن بعضهما.

<u>التمرين الثاني:</u>

ليكن النموذج :

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + U_i$$

$$U_i \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$$

ليكن جدول تحليل التباين المبين ادناه.

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع

			المربعات
المتغيرات الشارحة	1504.4		
البواقي		n-3	19.6
المجموع	1680.8	n-1	//

المطلوب:

1. اكمل جدول تحليل التباين.
2. اختبر الفرضية: $H_0 : B_1 = B_2 = 0$.
3. احسب معامل التجديد.
4. اوجد مقدر تباين الأخطاء.

الحل:

إتمام الجدول:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغيرات الشارحة	ESS=1504.4	2	1504.4/2
البواقي	RSS=176.4	n-3	176.4/(n-3)=19.6
المجموع	TSS=1680.8	n-1	//

اختبار المعنوية الكلية:

$$H_0 : B_1 = B_2 = 0$$

يمكن استنتاج طول العينة من جدول تحليل التباين:

$$176.4/(n-3) = 19.6 \Rightarrow n = 12$$

$$F^C = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)} = \frac{1504.4/2}{176.4/9} = 38.3 > F^{0.95}(2,9) = 4.26$$

الاستنتاج: نرفض الفرضية H_0 والنموذج معنوي.

تقدير تباين الأخطاء:

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{e'e}{n-k-1}=\frac{RSS}{n-k-1}=\frac{176.4}{9}$$

التمرين الثالث:

من أجل دراسة أثر عدد سنوات دراسة الأب والأم على عدد سنوات دراسة أبنائهم، تم أخذ عينة مكونة من 20 شخص. في كل مرة يتم حساب عدد سنوات دراسة هذا الشخص (Y) مع عدد سنوات دراسة أمه (X_1) وعدد سنوات دراسة والده (X_2).

$$Y=B_1X_1+B_2X_2$$

تعطى المجاميع التالية:

$$\sum_i Y_i=51 \qquad \sum_i Y_i^2=181 \qquad \sum_i X_{1i}=54$$

$$\sum_i X_{1i}^2=228 \qquad \sum_i X_{2i}=54 \qquad \sum_i X_{2i}^2=202 \qquad \hat{\sigma}_u^2=0.932$$

$$\sum_i Y_iX_{1i}=184 \qquad \sum_i Y_iX_{2i}=158 \qquad \sum_i X_{1i}X_{2i}=144$$

1.قدر معلمات النموذج (تؤخذ النتائج بثلاث أرقام بعد الفاصلة) وبين دلالتها.

2.اختبر الفرضية: $H_0:B_1=B_2=0.5$.

3.قدر النموذج المقيد بالفرضية: $H_0:B_1=B_2$.

الحل:

$$X'Y=\begin{pmatrix}\sum_i Y_iX_{1i}\\ \sum_i Y_iX_{2i}\end{pmatrix},\quad X'X=\begin{pmatrix}\sum_i X_1^2 & \sum_i X_1X_2\\ \sum_i X_1X_2 & \sum_i X_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}228 & 144\\ 144 & 202\end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix}228 & 144\\ 144 & 202\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}184\\ 158\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.0079 & -0.0056\\ -0.0056 & 0.009\end{pmatrix}\begin{pmatrix}184\\ 158\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5693\\ 0.3763\end{pmatrix}$$

أثر المستوى الدراسي للأب يؤثر بشكل أكبر على مستوى دراسة الأبناء مقارنة مع مستوى دراسة الأم، حيث أن زيادة المستوى الدراسي للأب بسنة واحدة يؤدي إلى زيادة عدد سنوات دراسة الأبناء ب 0.56

سنة، أما زيادة المستوى الدراسي للأم بسنة واحدة فيؤدي إلى زيادة عدد سنوات دراسة الأبناء بـ 0.37 سنة.

اختبار الفرضية:

$$H_0 : B_1 + B_2 = 0.5$$

لاختبار هذه الفرضية ينبغي أولا إيجاد مصفوفة تباين–تباين مشترك للمقدرات:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2 \left(X'X \right)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{RSS}{n-k}$$

$$RSS = TSS - ESS = Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y} = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y$$

$$RSS = 181 - \begin{pmatrix} 0.5693 & 0.3763 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 184 \\ 158 \end{pmatrix} = 16.7832$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{16.7832}{18} = 0.9324$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2 \left(X'X \right)^{-1} = 0.9324 \begin{pmatrix} 0.0079 & -0.0056 \\ -0.0056 & 0.009 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0074 & -0.0053 \\ -0.0053 & 0.0083 \end{pmatrix}$$

تحت الفرضية: H_0

$$t^c = \frac{\left| \hat{B}_1 + \hat{B}_2 - 0.5 \right|}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 - 2Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}} = \frac{\left| 0.5639 + 0.3763 - 0.5 \right|}{\sqrt{0.0074 + 0.0083 - 2(-0.0053)}}$$

$$= \frac{0.4402}{0.1621} = 2.71 > \ t_{(18,0.975)} = 2.10$$

النتيجة: نرفض الفرضية H_0 وهو ما يعني أن أثر عدد سنوات الأب يختلف معنويا عن أثر عدد سنوات الأم.

تقدير النموذج المقيد بالفرضية: $H_0{:}B_1{=}B_2$

$$Y_i = \beta \left(X_{1i} + X_{2i} \right) + u_i$$

$$\hat{B} = \frac{\sum Y_i \left(X_{1i} + X_{2i} \right)}{\sum \left(X_{1i} + X_{2i} \right)^2} = \frac{\sum Y_i X_{1i} + \sum Y_i X_{2i}}{\sum X_{1i}^2 + \sum X_{2i}^2 + 2 \sum X_{1i} X_{2i}}$$

$$= \frac{184 + 158}{228 + 202 + 2(144)} = 0.4763$$

$$\hat{Y}_i = 0.4763 \left(X_{1i} + X_{2i} \right)$$

الفصل 3 : مشاكل الاقتصاد القياسي

الفصل الرابع: مشاكل الاقتصاد القياسي

يُغطي هذا الفصل ثلاثة مشاكل قياسية قد تواجه الباحث عند بنائه للنموذج مصدرها هو عدم تحقق من بعض الفرضيات الكلاسيكية التي بني وقدر على أساسها النموذج وهي:

- مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء (Autocorrelation).
- مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء (Heteroskedasticity).
- مشكلة التعدد الخطي (Multicollinearity).
- مشكلة لاخطية النماذج.

إن وجود هذه المشاكل يؤثر سلبا على مقدرات النموذج بحيث لا تتحقق فيها بعض الخواص المطلوبة، فبالرغم من أن المقدرات تحافظ على عدم تحيها لكن تبايناتها لا تكون هي الأقل، وهو ما يقودنا الى البحث عن بعض التعديلات للنموذج أو للبيانات من أجل تجنب هذه المشاكل.

1. مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء (Autocorrelation):

1.1.تعريف الارتباط الذاتي للأخطاء:

من بين الافتراضات الكلاسيكية الأساسية التي وضعت لبناء وتقدير معالم نموذج الانحدار الخطي، هو استقلال الأخطاء فيما بينها. في هذه الحالة مصفوفة تباين–تباين مشترك للأخطاء تكتب على الشكل:

$$\Omega_u = E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & 0 & E(u_nu_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

في حالة عدم تحقق هذه الفرضية فهذا يدل على وجود ما يسمى بالارتباط الذاتي للأخطاء. حيث أن مصفوفة التباينات–التباينات المشتركة $E(uu') = \Omega_u \neq \sigma_u^2 I_n$ لا تحتوي على الصفر خارج القطر الأول وكنتيجة لذلك سنتحصل على مقدرات متحيزة وتباينها ليس هو الأقل.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)') = (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$
$$= (X'X)^{-1}(X'\Omega_u X)(X'X)^{-1} \neq \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}$$

2.1.أسباب الإرتباط الذاتي للأخطاء وآثاره:

ينشأ الارتباط الذاتي من عدة أسباب منها:

- إهمال بعض المتغيرات المستقلة في النموذج المراد تقديره.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج.
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.

3.1.اختبارات الكشف عن الإرتباط الذاتي للأخطاء:

1.3.1.اختبار دربين واتسون Durbin-Watson test :

يعتبر اختبار Durbin-Watson من أهم الاختبارات الشائعة المستخدمة في اكتشاف الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى حسب الشكل:

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \ ,$$

مع: u_t حدود الأخطاء في نموذج الانحدار الخطي المراد تقديره:

$$u_t = Y_t - \beta_0 - \beta_1 X_{1t} - \beta_1 X_{2t} - ... - \beta_k X_{kt}, \quad \mathrm{t} = 1, 2, ..., n$$

وبافتراض أن:

$$v_t \to N(0, \sigma_v^2)$$

يمكن تقدير ρ باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_{t-1}^2}$$

مع: $\hat{u}_t$ حدود الأخطاء المقدرة انطلاقا نموذج الانحدار الخطي المقدر:

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_1 X_{2t} - ... - \hat{\beta}_k X_{kt}, \quad \mathrm{t} = 1, 2, ..., n$$

يقوم اختبار Durbin-Watson على اختبار الفرضية:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

لاختبار فرضية العدم H_0 يجب حساب إحصائية دربين واتسون DW :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_{t-1}^2}$$

يمكن أيضا كتابة الإحصائية DW بدلالة مقدر معامل الارتباط ρ، وذلك كما يلي:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_{t-1}^2}$$

بما أن: $\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 \approx \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$ إذن:

$$DW \approx \frac{2\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_{t-1}^2} - \frac{2\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_{t-1}^2} \approx 2(1-\hat{\rho})$$

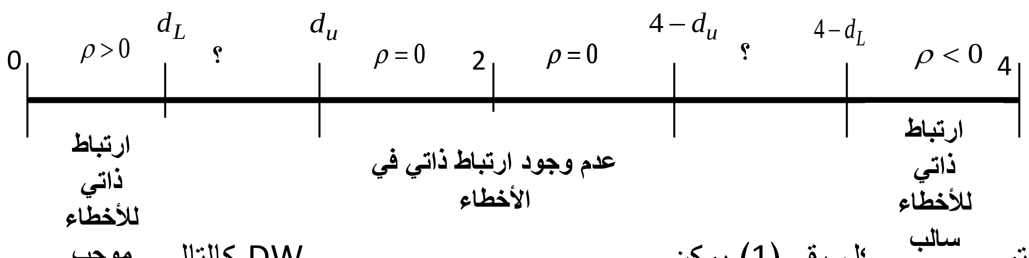
الإحصائية DW تمثل القيمة المحسوبة للاختبار وتأخذ قيما محصورة بين 0 و 4.

تحت الفرضية H_0 والتي تعني عدم وجود ارتباط ذاتي في الأخطاء من الدرجة الأولى تصبح الإحصائية DW كما يلي:

$$DW \approx 2(1-\hat{\rho}) \approx 2$$

يوضح الشكل التالي القيم المجدولة للإختبار (d) والتي تشير إلى وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ d ($d_{L,} d_u$) في الجدول الإحصائي لتوزيع دربين واتسون.

مناطق القبول والرفض لاختبار Durbin-Watson



بالاعتمـ ... ـل رقم (1) يمكن ... DW كالتالي

- إذا كانت $DW < d_L$ أو $DW > 4-d_L$ نرفض H_0. (يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء نوعه موجب و سالب على الترتيب).
- إذا كانت $4-d_U > DW > d_U$ يقبل H_0. (أي لا يوجد ارتباط ذاتي في الأخطاء)

-إذا كانت $4-d_U \leq DW \leq 4-d_L$ أو $d_L \leq DW \leq d_U$ تكون نتيجة الاختبار غير محددة، ومن ثم يجب إضافة بيانات أكثر في ما يتعلق بطول العينة.

ملاحظة: لا يمكن استعمال اختبار Durbin-Watson إلا في ظل الشروط التالية:

-يجب أن يكون النموذج متضمنا للمعلم الثابت β_0.

-يجب أن لا يظهر المتغير التابع في جملة المتغيرات المستقلة بفترات إبطاء.

-اختبار ربين واتسون يختبر الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

2.3.1. اختبار Breusch-Godfrey:

على خلاف اختبار دربين واتسون يمكن لاختبار Breusch-Godfrey أن يختبر ارتباط الأخطاء من أجل رتب مختلفة.

الارتباط الذاتي للأخطاء من أجل الرتبة p يعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + v_t$$

مع:

$$v_t \rightarrow N(0, \sigma_v^2)$$

بالتعويض في نموذج الانحدار الخطي نجد:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \ldots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + v_t$$

فرضية استقلالية الأخطاء H_0 التي ينبغي اختبارها هي:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$$

لإجراء هذا الاختبار ينبغي المرور على ثلاث مراحل كما يلي:

- المرحلة الأولى: تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى ثم حساب البواقي $\hat{u}_t$.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_1 X_{2t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t, \quad \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, n$$
$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_1 X_{2t} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{kt}, \quad \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, n$$

- المرحلة الثانية: تقدير النموذج الموالي باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \ldots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \ldots + \rho_p \hat{u}_{t-p} + v_t$$

ثم حساب معامل التحديد R^2 الخاص بهذا النموذج، نذكر أن استعمال هذا النموذج، سيؤدي إلى فقدان p مشاهدة وطول العينة يصبح: $n-p$.

- المرحلة الثالثة: نختبر فرضية استقلال الأخطاء:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$$

وذلك باستعمال الإحصائية:

$$LM = (n-p) \times R^2 \rightarrow \chi_p^2$$

(R^2 هو معامل التحديد المحسوب في المرحلة الثانية).

LM يسمى مضاعف لاغرانج Lagrange Multiplier test ويتبع توزيعة الكاي مربع بدرجة حرية p.

قاعدة القرار: إذا كانت LM أكبر من القيمة المجدولة لتوزيع الكاي عند مستوى معنوية α ودرجة حرية p فإننا نرفض فرضية العدم H_0 وبالتالي يوجد ارتباط في الأخطاء من الدرجة p.

4.1.تقدير النموذج في حالة وجود ارتباط ذاتي في الأخطاء:

في حالة وجود ارتباط ذاتي للأخطاء باستعمال الاختبارات السابقة في هذه الحالة ينبغي إجراء بعض التعديلات على النموذج حتى تجعله متوافقا مع الفرضيات الكلاسيكية.

لدينا:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

مصفوفة تباين–تباين مشترك للأخطاء: $\Omega_u = E(uu') \neq \sigma_u^2 I_n$

نفرض أن هناك مصفوفة G تحقق العلاقة $G\varepsilon = u$:

بضرب النموذج في المصفوفة G نجد:

$$GY = GX\beta + G\varepsilon \Leftrightarrow GY = GX\beta + u$$

هذا النموذج يحقق الفرضيات الكلاسيكية ويمكن تقديره باستعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة وذلك كما يلي:

$$\hat{\beta} = \left[(GX)'(GX)\right]^{-1}\left[(GX)'GY\right] = \left(X'G'GX\right)^{-1}\left(X'G'GY\right)$$

$$\hat{\beta} = \left(X'G'GX\right)^{-1}\left(X'G'GY\right)$$

لدينا من جهة أخرى مصفوفة تباين–تباين مشترك لـ $G\varepsilon$:

$$\Omega_{G\varepsilon} = E\left(G\varepsilon(G\varepsilon)'\right) = E\left(G\varepsilon\varepsilon'G'\right) = GE\left(\varepsilon\varepsilon'\right)G' = G\Omega_\varepsilon G'$$

حسب الفرضية: $G\varepsilon = u$:

$$\Omega_{G\varepsilon} = G\Omega_{\varepsilon}G' = \sigma_u^2 I_n$$
$$\Rightarrow GG' = \sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}$$

بالتعويض نجد:

$$\hat{\beta} = \left(X'\sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y\right) = \frac{1}{\sigma_u^2}\left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X\right)^{-1}\sigma_u^2\left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y\right)$$
$$\Rightarrow \hat{\beta} = \left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y\right)$$

مصفوفة تباين–تباين مشترك للمقدرات تحسب بدورها كما يلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2\left(X'\sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}X\right)^{-1}$$
$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X\right)^{-1}$$

عندما تكون الفرضيات الأساسية للنموذج محققة، فإن:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y) = \left(X'\left(\sigma_u^2 I\right)^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\left(\sigma_u^2 I\right)^{-1}Y\right)$$
$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \hat{\beta}_{OLS}$$

في هذه الحالة، نلاحظ أن المقدرات المتحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى المعممة هي نفسها تلك المتحصل عليها باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية.

المطلوب هو إيجاد المصفوفتين G و $\Omega_{\varepsilon}^{-1}$.

إذا أخذنا بعين الاعتبار الارتباط الذاتي بين الأخطاء، النموذج الخطي العام يكتب على الشكل التالي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

مع:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t,\ |\rho| < 1$$

تعبر هذه المعادلة عن سيرورة الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$ الذي يحقق الفرضيات التالية:

$$E(u_t) = 0$$
$$E(u_t^2) = \sigma_u^2,\ \forall t$$
$$Cov(u_t, \varepsilon_{t-1}) = 0,\ \forall t$$

لدينا:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t,$$
$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}$$

بالتعويض نجد:

$$\varepsilon_t = \rho\left(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}\right) + u_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

من جهة أخرى:

$$\varepsilon_{t-2} = \rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2},$$

بالتعويض مرة أخرى نجد:

$$\varepsilon_t = \rho^2\left(\rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}\right) + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$\varepsilon_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

بمواصلة التعويض مرات عديدة نجد:

$$\varepsilon_t = u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \dots$$

الحدود الأخيرة لهذه السيرورة إلى الصفر لأن: $|\rho| < 1$.

خصائص ε_t:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t)^2 = E\left(\rho\varepsilon_{t-1} + u_t\right)^2 = E\left(\rho^2\varepsilon_{t-1}^2 + u_t^2 + 2\rho\varepsilon_{t-1}u_t\right)$$

$$E(\varepsilon_t)^2 = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(u_t^2) + 2\rho E(\varepsilon_{t-1}u_t)$$

$$E(\varepsilon_{t-1}u_t) = 0 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \rho^2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 \Rightarrow \sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

$$Cov\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right) = E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right)$$

$$\varepsilon_t = u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \dots + \rho^{n-1}u_1$$

$$\varepsilon_{t-1} = u_{t-1} + \rho u_{t-2} + \rho^2 u_{t-3} + \rho^3 u_{t-4} + \dots + \rho^{n-1}u_1$$

$$Cov\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right) = E\left(u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \dots + \rho^{n-1}u_1\right) \times \left(u_{t-1} + \rho u_{t-2} + \rho^2 u_{t-3} + \rho^3 u_{t-4} + \dots + \rho^{n-1}u_1\right)$$

$$Cov\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right) = E(u_t u_{t-1} + \rho u_t u_{t-2} + \rho^2 u_t u_{t-3} + \rho^3 u_{t-3} + \dots + \rho u_{t-1}^2 + \rho^2 u_{t-1}u_{t-2} + \rho^3 u_{t-1}u_{t-3} + \dots..)$$

$$Cov\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right) = E\left(\rho u_{t-1}^2 + \rho^3 u_{t-2}^2 + \rho^5 u_{t-3}^2 + \dots\right)$$

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \sigma_u^2 \left(\rho + \rho^3 + \rho^5 + \ldots\right)$$

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \sigma_u^2 \rho \left(1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots\right)$$

حسب قوانين الاشتقاق والنهايات:

$$\frac{1}{1-\rho^2} = 1 + \rho^2 + \rho^4 + ..$$

بالتعويض نجد:

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \frac{\sigma_u^2 \rho}{1-\rho^2}$$

بالتعميم نجد:

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}) = \frac{\sigma_u^2 \rho^i}{1-\rho^2}$$

إذن مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء في حالة وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} V(\varepsilon_1) & \cdots & Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & V(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \ldots & \rho^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

أما معكوس مصفوفة التباين–التباين مشترك للأخطاء فيعرف كما يلي:

$$\Omega_{\varepsilon}^{-1}=\frac{1}{\sigma_u^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة G التي تحقق $GG'=\sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}$ هي:

$$\underset{(n-1,n)}{G}=\begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

إذن يمكن تقدير النموذج الذي يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي في الأخطاء من الدرجة الأولى عن طريق تحويل المتغيرات وذلك باستعمال شبه الفروقات من الدرجة الأولى، بالضرب في المصفوفة G كما يلي:

$$GY=\begin{pmatrix} Y_2-\rho Y_1 \\ Y_3-\rho Y_2 \\ \dots \\ Y_n-\rho Y_{n-1} \end{pmatrix} \quad ,GX_j=\begin{pmatrix} X_{j2}-\rho X_{j1} \\ X_{j3}-\rho X_{j2} \\ \dots \\ X_{jn}-\rho X_{jn-1} \end{pmatrix}\forall j=1,2,\dots,k$$

عند استخدام شبه الفروقات، نفقد المشاهدة الأولى لكل متغير ولتجنب ضياعها، يمكن أن نضع:

$$Y_1^*=Y_1\sqrt{1-\rho^2}$$
$$X_{j1}^*=X_{j1}\sqrt{1-\rho^2}$$

يكتب النموذج المصحح على النحو التالي:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \ldots + \beta_k(X_{kt} - \rho X_{kt-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

المجهول الوحيد هو ρ والذي يمكن تقديره بعدة طرق سنبينها في الفقرة الموالية.

بعد إيجاد قيمة $\hat{\rho}$ نقوم بتقدير النموذج التالي:

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho} X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho} X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho} X_{t-1,k}) + u_t$$

مقدرات المربعات الصغرى العادية في حالة نموذج يعاني من ارتباط الأخطاء من الدرجة الأولى هي المقدرات: $\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k$ و $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$.

1.4.1.تقدير معامل الارتباط الخطي عن طريق إحصائية Durbin-Watson:

يمكن تقدير ρ باستعمال إحصائية DW وذلك حسب العلاقة:

$$DW \approx 2(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} \approx 1 - \frac{DW}{2}$$

2.4.1. تقدير معامل الارتباط الخطي بطريقة Theil-Nagar:

اقترح Theil و Nagar تقديرا لـ ρ من خلال العلاقة التالية :

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left[1-(DW/2)\right] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث k هو عدد المتغيرات المستقلة، و n طول العينة.

3.4.1.تقدير معامل الارتباط الخطي بطريقة Cochrane-Orcutt:

اقترح Cochrane و Orcutt طريقة معينة لتقدير ρ وذلك بالمرور على الخطوات التالية.

تقديرا بإعطاء قيمة ابتدائية لـ ρ بواسطة القيم المقدرة لحد الخطأ.

<u>الخطوة الأولى</u>: إعطاء قيمة ابتدائية لـ ρ :

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0$$

<u>الخطوة الثانية</u>: تقدير النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t - \hat{\rho}_0 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_0) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,k}) + u_t$$

المعالم المقدرة هي: $\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k$ و $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$.

الخطوة الثالثة: إعادة تقدير ρ ببواقي التقدير الناتجة عن الخطوة الثانية:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

الخطوة الرابعة: تقدير النموذج التالي على المتغيرات ذات شبه الفروقات باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_1) + \beta_1(X_{1t} - \hat{\rho}_1 X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t-2} - \hat{\rho}_1 X_{2t-1}) + \ldots + \beta_k(X_{kt} - \hat{\rho}_1 X_{kt-1}) + u_t$$

ثم نعيد تقدير ρ مرة أخرى ببواقي تقدير نموذج الخطوة الرابعة فنحصل على تقدير لـ $\hat{\rho}_2$. نكرر العملية مرات أخرى عديدة ونتوقف عندما تصبح المقدرات ثابتة.

4.4.1.تقدير معامل الإرتباط الخطي باستعمال طريقة Hildreth-Lu:

الخطوة الأولى: تحديد نوع الارتباط (موجب أو سالب) بواسطة إحصائية Durbin-Watson.

الخطوة الثانية: نحدد مجالا للقيم الممكنة لمعامل الارتباط ρ. نختار قيما تنتمي إلى المجال $[0,1]$ إذا كان المعامل موجبا و قيما تنتمي إلى المجال $[-1,0]$ إذا كان سالبا.

على سبيل المثال يكون لدينا إذا اعتبرنا أن معامل الارتباط موجب فيتم اختيار $\rho = \{0.1; 0.2; \ldots; 0.9; 1\}$ ومع كل قيمة يتم تقدير النموذج:

$$Y_t - \hat{\rho}_i Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_i) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_i X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_i X_{t-1,2}) + \ldots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_i X_{t-1,k}) + u_t$$

أحسن قيمة ممكنة لـ ρ هي تلك التي تصغر مجموع مربعات البواقي $\sum_t \hat{u}_t^2$ الناتجة عن النموذج المقدر.

2.مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء Heteroscedasticity :

1.2. تعريف عدم ثبات تباين الأخطاء:

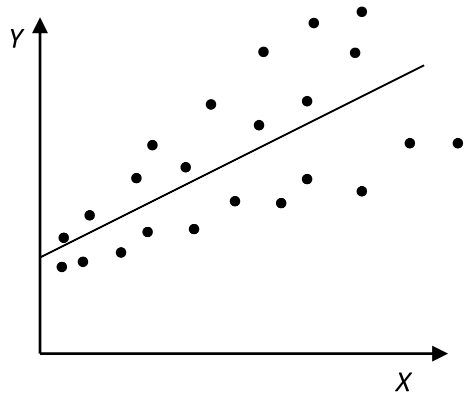
إذا كانت فرضية ثبات أو تجانس التباين غير محققة، فإن مصفوفة التباين–تباين مشترك للأخطاء Ω_ε تختلف عن $\sigma_u^2 I_n$ وبالمقابل يمكن تعريفها كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\Omega_{\varepsilon}=E(\varepsilon\varepsilon')=\begin{pmatrix}\sigma_{\varepsilon 1}^{2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_{\varepsilon 2}^{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon n}^{2}\end{pmatrix}$$

تباينات الأخطاء المبينة في القطر الأول للمصفوفة Ω_{ε} غير ثابتة حيث يتغير بدلالة المتغيرات المستقلة كما يظهر في الشكل (3-3). حيث نلاحظ أن زيادة X_j سوف تؤدي إلى زيادة تباين حد الخطأ.

عدم ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



2.2.أسباب وآثار مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء:

هناك عدة أسباب لعدم ثبات تباين الأخطاء منها أساليب تجميع البيانات، حيث كلما قلت الأخطاء المرتكبة في القياس، كلما كان ذلك سببا في التقليل من مشكلة عدم تجانس تباين الأخطاء. و يترتب على مشكلة عدم ثبات التباين عددا من الآثار منها:

- تبقى المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى متصفة بعدم التحيز والاتساق، ولكنها تفقد صفة الكفاءة.
- تصبح التباينات المقدرة وكذلك التباينات المشتركة Covariances الخاصة بالمعالم المقدرة متحيزة وغير متسقة، ولذا فإن اختبارات الفرضيات لا تصبح دقيقة أو ملائمة.

- بالرغم من أن التنبؤات القائمة على أساس المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة، وهو ما يعني أنها تكون أقل مصداقية من التنبؤات الأخرى.

3.2. اختبارات الكشف عن عدم ثبات تباين الأخطاء:

يتم اكتشاف عدم ثبات تباين الأخطاء بواسطة عدة اختبارات منها ما يلي:

1.3.2. اختبار White:

اقترح White (1980) اختبارا يعتمد على احتبار العلاقة بين مربعات البواقي والمتغيرات المستقلة باستعمال إحصائية مضاعف لاغرانج. يمكن إبراز خطوات هذا الاختبار كما يلي:

الخطوة الأولى: تقدير النموذج العام $Y = X\beta + \varepsilon$ بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي $\hat{\varepsilon}_t^2$.

الخطوة الثانية: تقدير النموذج الموالي باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \alpha_1 X_{t1}^2 + \ldots + \beta_k X_{tk} + \alpha_k X_{tk}^2 + v_t$$

ثم حساب معامل التحديد R^2 لهذا النموذج.

الخطوة الثالثة: اختبار فرضية ثبات تباين الأخطاء H_0 التي تأخذ الشكل التالي:

$$H_0 : \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_k = 0$$

وذلك عن طريق حساب إحصائية مضاعف لاغرانج:

$$LM = n \times R^2 \rightarrow \chi_{2k}^2$$

k هو عدد المتغيرات المستقلة، n عدد المشاهدات، R^2 معامل التحديد المحسوب في الخطوة الثانية.

قاعدة القرار: إذا كانت LM أكبر من القيمة المجدولة لتوزيعة الكاي مربع عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $2k$ فإننا نرفض الفرضية H_0 وهو ما يعني أن تباين الأخطاء غير ثابت أو غير متجانس.

2.3.2. اختبار Goldfeld-Quandt:

يستعمل هذا الاختبار لاختبار وجود علاقة موجبة بين تباين الأخطاء واحد المتغيرات المستقلة في النموذج، للتبسيط نفرض أن نموذج الانحدار الخطي يتكون من متغير مستقل واحد كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

يمر هذا الاختبار بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: ترتيب المشاهدات X ترتيبا تصاعديا.

الخطوة الثانية: استبعاد المشاهدات الوسطى لكل من X و Y والتي عددها c، ثم تكوين مجموعتين من المشاهدات: طول كل واحدة منها هو: $(n-c)/2$، ثم تقدير النموذجين أدناه لكل عينة مع حساب مجموع مربعات الأخطاء الناتجة عن كل نموذج مقدر:

$$Y_{1i} = \beta_0^1 + \beta_1^1 X_{1i} + \varepsilon_{1i} \rightarrow RSS1$$
$$Y_{2i} = \beta_0^2 + \beta_1^2 X_{2i} + \varepsilon_{2i} \rightarrow RSS2$$

الخطوة الثالثة: نستعمل اختبار فيشر لاختبار فرضية ثبات تباين الأخطاء:

$$H_0 : RSS1 = RSS2$$

وذلك باستعمال النسبة F حيث:

$$F = \frac{RSS1/[(n-c-2k)/2]}{RSS2/[(n-c-2k)/2]}$$

في هذه الحالة $k=1$.

قاعدة القرار: إذا كانت F أكبر من القيمة المجدولة لتوزيعة فيشر عند مستوى معنوية α ودرجات حرية $(n-c-2k)/2$ و $(n-c-2k)/2$ فإننا نرفض الفرضية H_0 وهو ما يعني أن تباين الأخطاء غير ثابت أو غير متجانس.

3.3.2. اختبار ثبات التباين الشرطي للأخطاء ARCH-LM:

تسمح نماذج ARCH بنمذجة المتغيرات المالية التي تحتوي على تباين شرطي غير ثابت للأخطاء العشوائية يعبر في الغالب عن المخاطرة. يعتمد إ هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج *LM* ويمر على الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: تقدير النموذج العام $Y = X\beta + \varepsilon$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي المقدرة $\hat{\varepsilon}_t^2$.

الخطوة الثانية: تقدير النموذج:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \theta_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \theta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + v_t$$

وحساب معامل التحديد R^2 الخاص بهذا النموذج المقدر. (تقدير هذا النموذج يؤدي إلى ضياع q مشاهدة).

الخطوة الثالثة: اختبار فرضية ثبات التباين الشرطي الأخطاء:

$$H_0 : \theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_q = 0$$

وذلك باستعمال إحصائية مضاعف لاغرانج:

$$LM = (n-q) \times R^2 \rightarrow \chi_q^2$$

قاعدة القرار: إذا كانت LM أكبر من القيمة المجدولة لتوزيعة الكاي مربع عند مستوى معنوية α ودرجة حرية q فإننا نرفض الفرضية H_0 وهو ما يعني أن تباين الأخطاء غير ثابت أو غير متجانس.

4.2.معالجة مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء :

تقدير نموذج الانحدار الخطي في حالة عدم ثبات تباين الأخطاء يتم باستعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة:

$$\hat{\beta} = \left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1} X \right)^{-1} \left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1} Y \right)$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1} X \right)^{-1}$$

لا توجد طريقة معينة متفق عليها للتخلص من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء، ولكن هناك طرق متعددة تعتمد على السبب المؤدي لوجود هذه المشكلة. القاعدة العامة هي إيجاد تعديل معين للبيانات المتعلقة بالمتغير التابع والمتغيرات المستقلة تؤدي إلى الحصول على تباين ثابت للأخطاء.

ليكن نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + ... + \beta_j X_{ji} .... + \varepsilon_i , \quad i = 1, \ ..., \ n$$

فإن هناك عدة مسببات لعدم ثبات تباين الأخطاء، ويختلف التعديل المطلوب بحسب هذه االمسببات كما في الفرضيات التالية:

❖ الافتراض الأول:

$$E\left(\varepsilon_j^2\right) = \sigma^2 X_j^2 \quad \forall j = 1, 2, ..., k$$

طبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي عن طريق القيام بالتعديل التالي:

$$\frac{Y_i}{X_{ji}} = \frac{\beta_0}{X_{ji}} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_{ji}} = \beta_0 \frac{1}{X_{ji}} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{X_{ji}} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{X_{ji}} + ... + \beta_j + ... + \omega_i$$

حيث: ξ_i حد الخطأ العشوائي الجديد والذي يحقق فرضية ثبات تباين الأخطاء.

$$\omega_i = \frac{\varepsilon_i}{X_{ji}}$$

التحقيق:

$$V(\omega_i) = V\left(\frac{\varepsilon_i}{X_{ji}} \right) = \frac{1}{X_{ji}^2} V(\varepsilon_i) = \frac{1}{X_{ji}^2} \sigma^2 X_{ji}^2 = \sigma^2$$

❖ الافتراض الثاني:

$$E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma^2\ X_{ji}\quad ,j=1,2,...,k$$

طبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي كما يلي:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_{ji}}}=\frac{\beta_0}{\sqrt{X_{ji}}}+\beta_1\frac{X_{1i}}{\sqrt{X_{ji}}}+\beta_2\frac{X_{2i}}{\sqrt{X_{ji}}}+...+\beta_j\sqrt{X_{ji}}+...+v_i\quad X_{ji}\geq 0$$

حيث ω_i عبارة عن حد الخطأ المحول:

$$\omega_i=\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_{ji}}}$$

التحقيق:

$$V(\omega_i)=V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_{ji}}}\right)=\frac{1}{X_{ji}}V\left(\varepsilon_i\right)=\frac{1}{X_{ji}}\sigma^2\ X_{ji}=\sigma^2$$

❖ الافتراض الثالث:

$$E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma^2\ Y_i^2$$

طبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي كما يلي:

$$\frac{Y_i}{Y_i}=\frac{\beta_0}{Y_i}+\beta_1\frac{X_{1i}}{Y_i}+\beta_1\frac{X_{2i}}{Y_i}+...+\beta_j\frac{X_{ji}}{Y_i}+...+\omega_i$$

$$\omega_i=\frac{\varepsilon_i}{Y_i}$$

التحقيق:

$$V(\omega_i)=V\left(\frac{\varepsilon_i}{Y_i}\right)=\frac{1}{Y_i}V\left(\varepsilon_i\right)=\frac{1}{Y_i^2}\sigma^2\ Y_i^2=\sigma^2$$

❖ الافتراض الرابع:

$$E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma^2\left|\varepsilon_i\right|$$

طبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي كما يلي:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}=\frac{\beta_0}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}+\beta_1\frac{X_{1i}}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}+\beta_1\frac{X_{2i}}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}+...+\beta_j\frac{X_{ji}}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}+...+\omega_i$$

$$\omega_i=\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\left|\varepsilon_i\right|}}$$

التحقيق:

$$V(\omega_i)=V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{|\varepsilon_i|}}\right)=\frac{1}{|\varepsilon_i|}V(\varepsilon_i)=\frac{1}{|\varepsilon_i|}\sigma^2|\varepsilon_i|=\sigma^2$$

❖ الافتراض الخامس: التحويلات اللوغاريتمية، إن تحويل النموذج الأصلي إلى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدي غالبا إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ، ومن ثم طبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلي كما يلي:

$$\ln Y_i=\beta_0+\beta_1\ln X_{1i}+....+\beta_j\ln X_{ji}....+w_i,\quad i=1,\ ...,\ n$$

هذا التحويل يتم مع البيانات الموجبة، وفي حالة البيانات السالبة هناك بعض الطرق الإحصائية التي تم وضعها لتحويل البيانات السالبة إلى بيانات موجبة.

3.مشكلة التعدد الخطي Multicollinearity:

1.3.تعريف التعدد الخطي:

إحدى فرضيات النموذج الكلاسيكي للانحدار الخطي المتعدد منه على الخصوص هي أن لمصفوفة المشاهدات الخاصة بالمتغيرات المستقلة رتبة تامة k أي: $rg(X)=k$، فإذا لم تتحقق هذه الفرضية، أي: $rg(X)<k$ تكون المصفوفة $X'X$ شاذة (أي محددها معدوم)، ومنه فإن $(X'X)^{-1}$ تكون غير موجودة والمعادلة: $(X'X)\hat{\beta}=X'Y$ لا تقبل حلا وحيدا بل عدد لا نهائي من الحلول.

إذا كانت رتبة X أقل من أو تساوي k فإن هذا يترجم بوجود ارتباط خطي بين أعمدة المصفوفة X، أو بعبارة أخرى وجود ارتباط خطي بين عدد من المتغيرات المفسِّرة (المستقلة).

في حالة وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة فإنه يوجد شعاع C يحقق:

$$C_1X_1+C_2X_2+..........+C_kX_k=0$$

$$C'=\left[C_1,C_2,....C_j.....C_k\right]\neq 0$$

2.3. أسباب التعدد الخطي وآثاره:

ينشأ التعدد الخطي من عدة أسباب منها ما يلي:

- وجود اتجاه عام في المتغيرات الاقتصادية مع مرور الزمن يجعلها تسلك نفس السلوك ارتفاعا أو انخفاضا.
- استخدام متغيرات مستقلة ذات فترات إبطاء في النموذج المراد تقديره.

في حالة وجود التعدد الخطي فإن ذلك سيترتب عنه:

- في حالة التعدد الخطي الكامل بين المتغيرات المستقلة يصبح محدد المصفوفة $X'X$ معدوم ويتعذر تقدير معالم النموذج كما أن تبايناتها غير متناهية.
- عندما يتزايد الارتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة تصبح القيم المقدرة لمعاملات الانحدار غير مستقرة، حيث أن تغير طفيف في البيانات يؤدي إلى تغير كبير في المقدرات المحسوبة.
- تزايد الارتباط الخطي يؤدي إلى زيادة التباين والتباين المشترك للمقدرات بدرجة كبيرة، وهو ما يؤدي بدوره إلى زيادة حجم مجالات الثقة للمعالم، ومن ثم تتناقص قيم استيودنت المحسوبة وتصبح المعالم غير معنوية في النموذج.

3.3.اختبارات اكتشاف التعدد الخطي:

تتوقف مشكلة التعدد الخطي على درجة الارتباط الخطي، والارتباط الكلي بين المتغيرات المستقلة، وهناك اختبارات عديدة للكشف عن مشكلة التعدد الخطي ومن بينها:

1.3.3.اختبار Klein :

لا يتعلق الامر باختبار احصائي وانما مجرد خاصية يمكن الاعتماد عليها لكشف مشكلة التعدد الخطي.

يتم أولا تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد وحساب معامل التحديد الخاص به R^2.

بالموازاة مع ذلك يتم حساب معاملات الارتباط الخطي بين كل متغيرين مستقلين X_i, X_j، مع: $i \neq j$

أي: r_{X_i,X_j}.

إذا كان: $R^2 < r_{X_i,X_j}$ نقول أن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

2.3.3. اختبار Farrar-Glauber:

لاكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع Farrar-Glauber الخطوات التالية:

حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

كلما اقترب D من الواحد دل ذلك على عدم وجود مشكلة التعدد الخطي.

فعلى سبيل المثال إذا افترضنا وجود متغيرين مستقلين فقط وكانا متعامدين بحيث لا يوجد بينهما ارتباط خطي فإنه يمكن كتابة D على الشكل:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_2X_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

يمكن استعمال اختبار χ^2 لاختبار الفرضية H_0 الموالية والتي تعني عدم وجود مشكلة الارتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة:

$$H_0 : \mathrm{D} = 1$$

مقابل الفرضية البديلة التي تعني وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة:

$$H_1 :\ \mathrm{D} < 1$$

الإحصائية المحسوبة لاختبار Farrar-Glauber تعرف كما يلي:

$$\chi^2 * = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 7) \right] \ln D$$

حيث n هو حجم العينة، k هو عدد المتغيرات المستقلة في النموذج، ln ترمز إلى اللوغاريتم النبيري.

قاعدة قرار الاختبار: إذا كانت قيمة: $\chi^2 *$ أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع الكاي مربع عند مستوى معنوية α ودرجة حرية: $\frac{1}{2}k(k+1)$ ، نرفض الفرضية: H_0 ونقبل الفرضية: H_1 أي أن النموذج يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

4.3.الحلول المقترحة لمشكلة التعدد الخطي:

عند وجود التعدد الخطي، يمكن اقتراح الحول التالية:

- توسيع حجم العينة، فيمكن مثلا تحويل البيانات السنوية إلى بيانات موسمية أو شهرية إن أمكن ذلك، ونشير هنا إلى أن زيادة بيانات جديدة لا تختلف معنويا عن البيانات المتوفرة يؤدي إلى تفاقم أكثر في مشكلة التعدد الخطي.
- يمكن أيضا التخلص أو التخفيف من مشكلة التعدد الخطي عن طريق اللجوء إلى النظرية الاقتصادية وما تقترحه من قيود حول بعض المعالم، أو أيضا إمكانية حذف بعض المتغيرات بالنظر إلى أنها تفسر نفس الظاهرة.

-يمكن أيضا إضافة عدد حقيقي ثابت c مختار بشكل عشوائي إلى القطر الأول للمصفوفة $X'X$ أي: $X'X + cI_n$ وهو ما يؤدي إلى التخفيف من مشكلة التعدد الخطي.

5.3.اختيار النموذج الأمثل:

من خلال مشكلة التعدد الخطي، يتضح أن الدراسات القياسية التطبيقية قد تقترح العديد من النماذج التي يمكن بناؤها لدراسة ظاهرة اقتصادية معينة وذلك من خلال اختيار المتغيرات المستقلة X_j التي يجب وضعها في النموذج (أو حذفها منه) لشرح المتغير التابع Y . في هذا الإطار تم وضع مجموعة من المعايير المعلوماتية الإحصائية التي تسمح بتحديد أحسن نموذج ممكن وذلك بغض النظر عن الجانب الاقتصادي والذي يجب مراعاته مسبقا.

فإذا تحصلنا على مجموعة من النماذج كلها معنوية احصائيا والمتغيرات المستقلة فيها أيضا كلها معنوية احصائيا فالسؤال المطروح إذا: ما هو أحسن نموذج ينبغي اختياره لتعبير عن المتغير : Y؟.

الجواب البدهي الأول لهذا السؤال هو الإعتماد على معامل التحديد R^2 ، حيث أن أحسن نموذج مقدر هو ذلك الذي يعطي أكبر قيمة ممكنة لمعامل التحديد، غير أن هذا المعيار قد لا يكون كافيا بالنظر إلى الاختلاف الكامن بين النماذج في ما يتعلق بعدد المشاهدات وعدد المتغيرات المستقلة في كل نموذج وهو ما يسمى بدرجة الحرية (الفرق بين عدد المشاهدات وعدد المتغيرات المستقلة في كل نموذج) هذا الاختلاف قاد الإحصائيين لإيجاد معايير أخرى تسمح باختيار النموذج الأمثل ومن أشهر هذه المعايير الإحصائية نجد:

- المعيار المعلوماتي Akaike (AIC):

$$AIC = Ln\left(\frac{RSS}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

- المعيار المعلوماتي Schwatrz (SC):

$$SC = Ln\left(\frac{RSS}{n}\right) + \frac{k\ Ln(n)}{n}$$

مع:

Ln يشير إلى اللوغاريتم النيبيري.

RSS مجموع مربعات البواقي للنموذج المقدر.

n عدد المشاهدات.

k عدد المتغيرات المستقلة في النموذج.

أحسن نموذج ممكن هو ذلك النموذج الذي يتميز بكون متغيراته المستقلة تشرح بأفضل شكل ممكن المتغير التابع من جهة، وتتميز أيضا بكونها الأقل ارتباطا من جهة أخرى، و يمكن تعيينه عن طريق تقدير كل النماذج الممكنة، ثم اختيار النموذج الذي تكون كل المتغيرات المستقلة فيه معنوية، ويعطي أقل قيمة ممكنة لمعياري AIC و SC.

4.مشكلة لاخطية النماذج :

من بين الفرضيات الكلاسيكية لنموذج الانحدار، هي وجود علاقة خطية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، غير أن الواقع الاقتصادي يبين أن هذه الفرضية لا تتحقق في كثير من الأحيان.

في حالة النماذج الغير الخطية يمكن أيضا القيام بتعديل البيانات لتحويل النموذج من نموذج غير خطي (non-linear model) إلى نموذج خطي أو أيضا تقدير النموذج بصيغته الغير الخطية باستعمال طرق الأمثلية العددية (Optimization).

1.4.أمثلة عن النماذج الغير الخطية وتحويلها إلى نماذج خطية

1.1.4. دالة كوب دوقلاس:Cobb-Douglas

تعبر هذه الدالة عن العلاقة الأسية الموجودة بين حجم الإنتاج Q (المتغير التابع) وعوامل الإنتاج ممثلة في رأس المال K وعنصر العمل L.

تكتب دالة كوب دوقلاس على الشكل:

$$Q = aK^{\beta_1} L^{\beta_2}$$

مع: a, β_1, β_2 معالم للتقدير.

يمكن تحويل هذه الدالة الغير خطية إلى دالة خطية وذلك بإدخال عملية اللوغاريتم النيبيري على طرفي النموذج فنتحصل على:

$$\ln Q = \ln a + \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L$$

النموذج القياس الموافق من أجل عينة طولها n يكتب على الشكل:

$$\ln Q_i = \ln a + \beta_1 \ln K_i + \beta_2 \ln L_i + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وهو نموذج خطي من الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

مع:

$$\ln Q = Y, \ \ln K = X_1, \ln L = X_2, a = e^{\beta_0}$$

المعنى الاقتصادي للمقدرات في هذه الحالة:

$$\beta_1 = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln K} = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta K / K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q}$$

β_1 يمثل مرونة الإنتاج بالنسبة إلى عنصر رأس المال.

$$\beta_2 = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln L} = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta L / L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q}$$

β_2 يمثل مرونة الإنتاج بالنسبة إلى عنصر العمل.

2.1.4.النموذج اللوجستيكي:

يستعمل هذا النموذج عادة للتنبؤ بالمبيعات بدلالة الزمن ويكتب كما يلي:

$$Z_t = \frac{Z_{Max}}{1+br^t}$$

مع:

Z_t يمثل قيمة المبيعات في اللحظة t .

Z_{Max} أعلى قيمة للمبيعات وتسمى بحد الإشباع.

r,b معاملات للتقدير، r يسمى سرعة الإنتشار ومقيد بالقيد: $0< r <1$.

يمكن تقدير هذا النموذج عن طريق القيام بالتحويلات التالية:

$$\frac{Z_{Max}}{Z_t} = 1+br^t \Leftrightarrow \frac{Z_{Max}}{Z_t} - 1 = br^t$$

$$\ln\left[\frac{Z_{Max}}{Z_t} - 1\right] = \ln\left[br^t\right] \Leftrightarrow \ln\left[\frac{Z_{Max}}{Z_t} - 1\right] = \ln b + \ln r \times t$$

وهو نموذج من الشكل:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

النموذج القياسي الموافق هو:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

مع:

$\ln\left[\frac{Z_{Max}}{Z_t} - 1\right]$ يمثل المتغير التابع في النموذج بينما يمثل t المتغير المستقل في النموذج.

بعد تقدير النموذج يمكن تحديد b,r كما يلي:

$$\begin{cases} \beta_0 = \ln b \\ \beta_1 = \ln r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{\beta_0} \\ r = e^{\beta_1} \end{cases}$$

3.1.4.نموذج Gompertz:

يستعمل هذا النموذج أيضا للتنبؤ بالمبيعات ويكتب كما يلي:

$$Z_t = e^{br^t + a}$$

مع:

Z_t يمثل قيمة المبيعات في اللحظة t .

$$e^a = Z_{Max} \Leftrightarrow a = Ln(Z_{Max})$$

Z_{Max} أعلى قيمة للمبيعات وتسمى بحد الإشباع.

r,b معاملات للتقدير، r يسمى سرعة الإنتشار ومقيد بالقيد: $0 < r < 1$ ، أما b فمقيد بالقيد: $b < 0$

.

يمكن تقدير النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية وذلك بعد تحويله إلى نموذج خطي كما يلي:

$$Z_t = e^{br^t + a} \Leftrightarrow Z_t = e^{br^t} e^a \Leftrightarrow e^{br^t} = \frac{Z_t}{e^a} \Leftrightarrow e^{-br^t} = \frac{e^a}{Z_t}$$

بإدخال اللوغاريتم النيبيري على الطرفين نجد:

$$Ln\left(e^{-br^t}\right) = Ln\left(\frac{e^a}{Z_t}\right) \Leftrightarrow Ln\left(\frac{e^a}{Z_t}\right) = Ln(-b) + Ln(r)t$$

نضع:

$$Ln\left(\frac{e^a}{Z_t}\right) = W_t, Ln(-b) = \beta_0, Ln(r) = \beta_1$$

فنتحصل على النموذج الخطي الموالي:

$$W_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

بعد تقدير النموذج يمكن تحديد b,r كما يلي:

$$\begin{cases} \beta_0 = \ln(-b) \\ \beta_1 = \ln(r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -e^{\beta_0} \\ r = e^{\beta_1} \end{cases}$$

2.4.التقدير باستعمال طرق الأمثلية العددية: طريقة Gauss -Newton

في حالة عدم إمكانية تحويل النموذج الغير خطي إلى نموذج خطي بطريقة مباشرة، يمكن استعمال طرق أخرى تعرف بطرق الأمثلية العددية، وذلك بمساعدة نشر تايلور Taylor. ومن أهم هذه الطرق نجد طريقة أو خوارزمية Gauss-Newton.

ليكن الشكل العام لنموذج غير خطي:

$$Y = f(X,\beta) + u$$

حيث X هي مصفوفة المشاهدات للمتغيرات المستقلة المفسرة بعدها $(n, k+1)$، β شعاع المعالم ذو بعد $k+1$، Yالمتغير التابع، u شعاع الأخطاء.

في ظل الفرضيات الأساسية الكلاسيكية للنموذج، يمكن إيجاد مقدر لشعاع المعالم وذلك بتصغير مجموع مربعات البواقي S:

$$u = Y - f(X,\beta)$$

$$S = u'u = \left[Y - f(X,\beta)\right]'\left[Y - f(X,\beta)\right]$$

لدينا $k+1$ مشتق جزئي من الدرجة الأولى:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta}\left[Y - f(X,\beta)\right]$$

حيث:

$$\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X_1,\beta)}{\partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial f(X_1,\beta)}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_n,\beta)}{\partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial f(X_n,\beta)}{\partial \beta_k} \end{pmatrix}$$

نعلم أن كل دالة $f(X)$ يمكن كتابتها بجوار نقطة ابتدائية x^0 باستعمال نشر تايلور كما يلي:

$$f(x) = f(x^0) + (x - x^0) f'(x^0) + \frac{(x - x^0)^2}{2!} f''(x^0) + \ldots + \varepsilon$$

باستعمال نشر تايلور وبجوار نقطة ابتدائية $\hat{\beta}^0$ يمكن كتابة الدالة $f(X,\beta)$ كما يلي:

$$f(X,\beta) \approx f(X,\beta^0) + \frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\left(\beta - \hat{\beta}^0\right)$$

بالتعويض في النموذج نجد:

$$Y = f(X,\hat{\beta}^0) + \frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\left(\beta - \hat{\beta}^0\right) + u$$

$$\Rightarrow Y - f(X,\hat{\beta}^0) + \frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\hat{\beta}^0 = \frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\beta + u$$

تحصلنا على نموذج خطي يمكن تقديره باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، ومقدراته تكتب على الشكل:

$$\hat{\beta}^1 = \left[\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)'\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)'\left[Y - f(X,\hat{\beta}^0) + \frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\hat{\beta}^0\right]$$

$$\hat{\beta}^1 = \hat{\beta}^0 + \left[\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)'\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\right)'\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^0)}{\partial \beta}\left[Y - f(X,\hat{\beta}^0)\right]$$

إذا كانت: $\hat{\beta}^1 = \hat{\beta}^0$ تتوقف العملية واذا لم يتحقق هذا الشرط تتواصل العملية باختيار تكرار ثاني

حيث: $\hat{\beta}^2$

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\beta}^1 + \left[\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^1)}{\partial \beta}\right)'\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^1)}{\partial \beta}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^1)}{\partial \beta}\right)'\frac{\partial f(X,\hat{\beta}^1)}{\partial \beta}\left[Y - f(X,\hat{\beta}^1)\right]$$

تتوقف العملية عند ما يتحقق الشرط:

$$\hat{\beta}^p = \hat{\beta}^{p-1}$$

ملخص عن بعض الإختبارات الإحصائية				
Test	**Modèle de test**	**Hypothèse de test**	**Statistique calculé**	**Statistique tabulé**
Student-Coefficient de régression	$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ..\beta_i X_{it} ..+ \beta_k X_{kt} + \mu_t$	$H_0 : \beta_i = \theta$	$t = \frac{\lvert\hat{\beta}_i - \theta\rvert}{\sqrt{\hat{v}(\hat{\beta}_i)}} = \frac{\lvert\hat{\beta}_i - \theta\rvert}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$	$t^{\alpha/2}(n-k-1)$
Student-Coefficient de corrélation	--	$H_0 : \rho_{x,y} = 0$	$t_c = \lvert\rho_{x,y}\rvert / \sqrt{\frac{(1-\rho_{x,y}^2)}{n-2}}$	$t^{\alpha/2}(n-2)$
Ficher - Sous ensemble de q coefficients d'une régression	$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ..\beta_i X_{it} ..+ \beta_k X_{kt} + \mu_t$	$H_0 : RB = r$	$F = \frac{(RSS_r - RSS)/q}{RSS/(n-k-1)}$	$F^{\alpha}(q, n-k-1)$
Ficher- Test de Chow	$\begin{cases} Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ..\beta_i X_{it} ..+ \beta_k X_{kt} + \mu_t \\ Y_t = \beta_0^1 + \beta_1^1 X_{1t} + ..\beta_i^1 X_{it} ..+ \beta^1{}_k X_{kt} + \mu_t \\ Y_t = \beta^2{}_0 + \beta^2{}_1 X_{1t} + ..\beta^2{}_i X_{it} ..+ \beta^2{}_k X_{kt} + \mu_t \end{cases}$	$H_0 : \begin{cases} \beta_0 = \beta_0^1 = \beta_0^2 \\ \beta_1 = \beta_1^1 = \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_K = \beta_K^1 = \beta_K^2 \end{cases}$	$F = \frac{SCR - (SCR^1 + SCR^2)/(k+1)}{SCR^1 + SCR^2 / (n-2(k+1))}$	$F^{\alpha}(k+1, n-2(k+1))$
Ficher - Goldfeld-Quandt Hétéroscédasticité	$\begin{cases} Y_t = \beta_0^1 + \beta_1^1 X_{1t} + ..\beta_i^1 X_{it} ..+ \beta^1{}_k X_{kt} + \mu_t \\ Y_t = \beta^2{}_0 + \beta^2{}_1 X_{1t} + ..\beta^2{}_i X_{it} ..+ \beta^2{}_k X_{kt} + \mu_t \end{cases}$	$H_0 : SCR^1 = SCR^2$	$F = \frac{RSS^2/(n_2-k-1)}{SCR^1/(n_1-k-1)}$	$F(n_2-k-1, n_1-k-1)$
Chi-deux- Breush Godfrey autocorrélation des erreurs	$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p\varepsilon_{t-p} + \upsilon_t$	$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$	$LM = n \times R^2$	$\chi^2(p)$
Chi-deux - White Hétéroscédasticité	$e_t^2 = B_0 + B_1 X_{1t} + \alpha_1 X_{1t}^2 + \ldots + B_k X_{kt} + \alpha_1 X_{kt}^2 + \mu_t$	$H_0 : B_1 = \alpha_1 = B_2 = \alpha_2 = \ldots = B_k = \alpha_k = 0$	$LM = n \times R^2$	$\chi^2(2k)$
Chi-deux - ARCH Hétéroscédasticité	$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 \ldots + \alpha_p e_{t-p}^2 + \xi_t$	$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$	$LM = n \times R^2$	$\chi^2(p)$
Ficher - Test de spécification de Ramsey	$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + ..\hat{\beta}_i X_{it} ..+ \hat{\beta}_k X_{kt}$ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ..\beta_i X_{it} ..+ \beta_k X_{kt} + \phi_2 \hat{Y}_t^2 +$ $\phi_3 \hat{Y}_t^2 + \cdots + \phi_h \hat{Y}_t^2 + \upsilon_t$	$H_0 : \phi_2 = \phi_3 = \ldots = \phi_h = 0$	$F = \frac{(RSS_r - RSS)/q}{RSS/(n-k-1)}$	$F^{\alpha}(q, n-k-1)$
Test Durbin Watson - autocorrélation des erreurs d'ordre 1	$\begin{cases} Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ..\beta_i X_{it} ..+ \beta_k X_{kt} + \mu_t \\ e_t = \rho\, e_{t-1} + \upsilon_t \end{cases}$	$H_0 : \rho = 0$	$dw = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$	$DW^{\alpha}(dl, du)$

تمرين:

تقدير دالة الإنتاج من نوع Cobb–Douglas لمؤسسة اقتصادية بدلالة تراكمات رأس المال وعنصر العمل مقيمة بالوحدات النقدية خلال 45 فصلا أفضت إلى النتائج التالية:

$$Q_t = 2.3 + 0.23K_t + 0.68L_t + e_t$$
$$\quad\quad (0.0632) \quad (0.2828)$$
$$R^2 = 0.75 \qquad F^C = 80.72 \qquad DW = 1.68$$

Q لوغاريتم حجم الإنتاج، K لوغاريتم رأس المال، L لوغاريتم العمالة. الارقام بين قوسين تمثل الانحرافات المعيارية للمقدرات.

1. ماذا تمثل مقدرات النموذج اقتصاديا وكيف يمكن تفسيرها هل معاملات راس المال والعمل تختلف معنويا عن 0 عند مستوى معنوية 5 %
2. هل النموذج مقبول احصائيا عند مستوى معنوية 5 %
3. هل الاخطاء مرتبطة في ما بينها من الدرجة الأولى
4. تحقق عند مستوى معنوية 5 % اذا ما كانت غلة الحجم ثابتة $\left(cov(\widehat{B}_1,\widehat{B}_2)=0.04\right)$
5. لغرض تقييم النموذج قياسيا قدرنا النماذج التالية: (الارقام بين قوسين احصائية استودنت):

$n: 1 \rightarrow 22$

$Q_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 K_t + \hat{\beta}_2 L_t + e_t$

$R^2 = 0.95 \qquad F^C = 86 \qquad SCR = 204$

$n: 23 \rightarrow 45$

$Q_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 K_t + \hat{\beta}_2 L_t + e$

$R^2 = 0.97 \qquad F^C = 108 \qquad SCR = 2924$

$$e_t^2 = \underset{(-0.14)}{\hat{\beta}_0} + \underset{(-0.65)}{\hat{\beta}_1 K_t} + \underset{(2.97)}{\hat{\beta}_2 K_t^2} + \underset{(0.83)}{\hat{\beta}_3 L_t} + \underset{(0.64)}{\hat{\beta}_4 L_t^2} + \underset{(-2.85)}{\hat{\beta}_5 K_t L_t} + \upsilon_t$$

$R^2 = 0.564 \qquad SCR = 123$

A. باستعمال الاختبارات الاحصائية المناسبة ماذا تستنتج؟

B. بين كيف يمكن معالجة المشكل الذي يعاني منه النموذج؟

6. بافتراض أن النموذج صالح للتنبؤ، اكتب الصيغة الغير خطية لدالة Cobb–Douglas ثم تنبأ بقيمة الإنتاج من اجل قيم $K = 20$ ، $L = 10$.

الحل:

$$Q_t = 2.3 + 0.23K_t + 0.68L_t + e_t$$
$$\quad\quad (0.0632) \quad (0.2828)$$
$$R^2 = 0.75 \qquad F^C = 80.72 \qquad DW = 1.68$$

Q لوغاريتم حجم الإنتاج، K لوغاريتم رأس المال، L لوغاريتم العمالة. الارقام بين قوسين تمثل الانحرافات المعيارية للمقدرات.

1.مقدرات النموذج تمثل على الترتيب مرونة الانتاج لعنصر راس المال و مرونة الانتاج لعنصر العمل، اذا زاد راس المال ب 1 % يزيد الانتاج ب 0.23 % و اذا زاد العمل ب 1 % يزيد الانتاج ب 0.68 %.

2.هل معاملات راس المال والعمل تختلف معنويا عن 0 عند مستوى معنوية 5 %

$$H_0 : B_1 = 0, \quad t^c = \frac{0.23}{0.0632} = 3.63 > t_{(42,0.975)} = 2.02$$

قاعدة القرار: نرفض H0 و راس المال معنوي في النموذج.

$$H_0 : B_1 = 0, \quad t^c = \frac{0.68}{0.2828} = 2.4 > t_{(42,0.975)} = 2.02$$

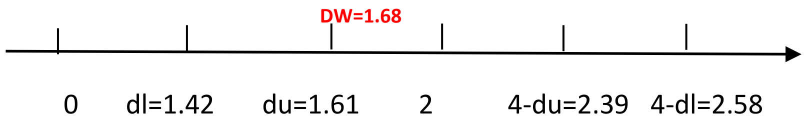
قاعدة القرار: نرفض H0 و عنصر العمل معنوي في النموذج.

3.هل النموذج مقبول احصائيا عند مستوى معنوية 5 %:

$$H_0 : B_1 = B_2 = 0, \quad F^c = 80.7 > F_{(2,42)}^{0.95} = 3.22$$

قاعدة القرار: نرفض H0 و النموذج معنوي او مقبول احصائيا.

4.هل الاخطاء مرتبطة في ما بينها من الدرجة الأولى:



نلاحظ أن $du < DW^C = 1.68 < 2$ و هي المنطقة الموافقة لعدم وجود ارتباط في الاخطاء من الدرجة الاولى.

5.غلة الحجم ثابتة:

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 - 1 = 0$$

$$t^c = \frac{\left|\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 1\right|}{\sqrt{v(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}} = \frac{\left|\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 1\right|}{\sqrt{v(\hat{\beta}_1) + v(\hat{\beta}_2) + 2\operatorname{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}}$$

$$= \frac{\left|0.23 + 0.68 - 1\right|}{\sqrt{(0.0632)^2 + (0.2828)^2 + 2(0.04)}} = 0.22 < t_{(42,0.975)} = 2.02$$

عند مستوى معنوية 5 % نقبل الفرضية H_0 وبالتالي غلة الحجم ثابتة.

الاختبارات الاحصائية:

Goldfeld-Quandt	$\begin{cases} Y_t = \beta_0^1 + \beta_1^1 X_{1t} + \ldots + \\ \beta_i^1 X_{it} .. + \beta^1{}_k X_{kt} + \mu_t \\ Y_t = \beta^2{}_0 + \beta^2{}_1 X_{1t} + \ldots + \\ \beta^2{}_i X_{it} .. + \beta^2{}_k X_{kt} + \mu_t \end{cases}$	$H_0 : SCR^1 = SCR^2$	$F = \frac{SCR^2/(n_2-k-1)}{SCR^1/(n_1-k-1)} = \frac{2924/(23-3)}{204/(22-3)} = 13.6$	$F(20,19) = 2.16$
Chi-deux White Hétéroscédasticité	$e_t^2 = B_0 + B_1 X_{1t} + \alpha_1 X_{1t}^2 + \ldots + B_k X_{kt} + \alpha_1 X_{kt}^2 + \mu_t$	$H_0 : B_1 = \alpha_1 = B_2 = \alpha_2 = \ldots = B_k = \alpha_k = 0$	$LM = n \times R^2 = 0.56 \times 45 = 25.2$	$\chi^2(5) = 12.8$

نستنتج من خلال الجدول قبول فرضية عدم ثبات تباين الاخطاء.

المتغير المسؤول عن عدم ثبات تباين الاخطاء هو المتغير الموافق لأعلى قيمة لستيودنت أي: K^2 .

تصحيح المشكل يكون بقسمة النموذج على المتغير K.

بافتراض أن النموذج صالح للتنبؤ، ايجاد قيمة الإنتاج الحقيقي من اجل $K = 20$ ، $L = 10$:

$$Q = A_0 K^{\hat{\beta}_1} L^{\hat{\beta}_2} = e^{\hat{B}_0} K^{\hat{\beta}_1} L^{\hat{\beta}_2} = e^{2.3} (20)^{0.23} (10)^{0.68} = 95.08$$

المراجع:

عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الإسكندرية، الدار الجامعية، 2005.

محمد شيخي، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2011.

نورة اليوسف، محاضرات في الاقتصاد القياسي، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، الموقع الالكتروني لجامعة الملك سعود.

نعمة الله نجيب إبراهيم، مقدمة في مبادئ الاقتصاد القياسي، الإسكندرية مؤسسة شباب الجامعة، 2002.

Arnaud Guyader, Régression linéaire, Université Rennes 2, 2012/2013.

Ben Vogelvang, Econometrics Theory and Application with EViews, Pearson Education Limited, 1 st Edition, England, 2005.

Bourbonnais Régis, Économétrie, 2 ème édition (1998), 7 ème édition (2009), 9 ème édition (2015).

Brooks Chris, Introduction econometrics for finance, Cambridge University Press, United states, Second edition 2008.

Brooks Chris, Introductory Econometrics for finances, Second Edition, Cambridge University Press, United States, 2008.

Damodar N. Gujarati, Dawn C. Porter, Basic Econometrics, 5 th edition, McGraw-Hill/Irwin, United States, 2009.

Dimitrios Asteriou, S. G. Hall, Applied Econometrics, Palgrave Macmillan, Revised edition, United States, 2007.

Eric Dor, Evonometrie, Collection Synthex, Pearson Education, France, 2009.

Heij, C., de Boer, P.M.C., Franses, P.H., Kloek, T. and van Dijk, H.K., Econometric Methods with Applications in Business and Economics, Oxford University Press (2004).

Hurlin Christophe, Économétrie Appliquée, Séries temporelles, Université d'Orléans.

Jeffrey M. Wooldridge, Introductory Econometrics: A Modern Approach, 4 th edition, South-Western Cengage Learning, 2009.

William H. Greene, Econometric Analysis, Fifth Editon, Pearson Education, United states, 2003.

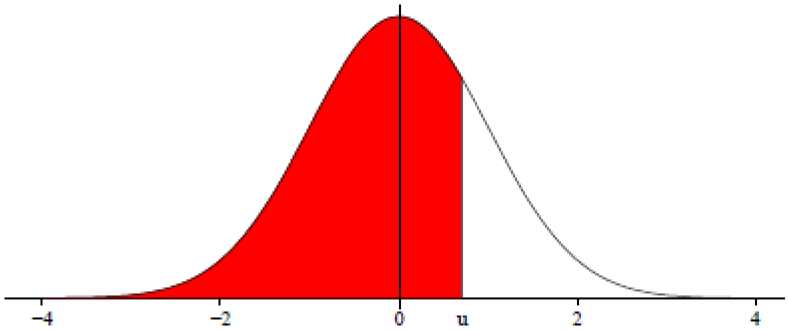
Yves Tillé, Résumé du Cours d'Econométrie, Université de Neuchatel, 2008.

ملحق: الجداول الإحصائية لبعض القوانين الإحتمالية

1. القانون الطبيعي المعياري: Loi Normale $X \to N(0,1)$

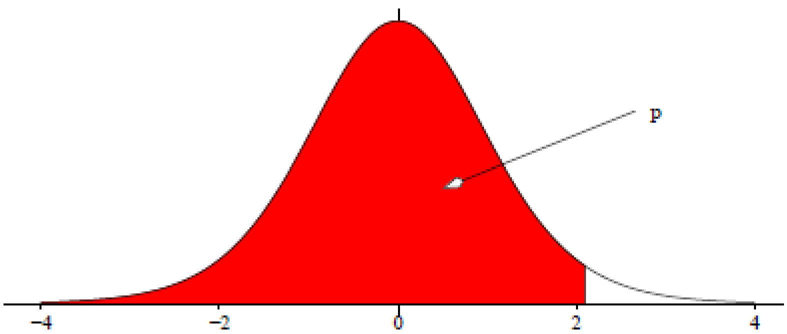
Valeurs de $\Pr(X \leq u)$ en fonction de u.

u	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995



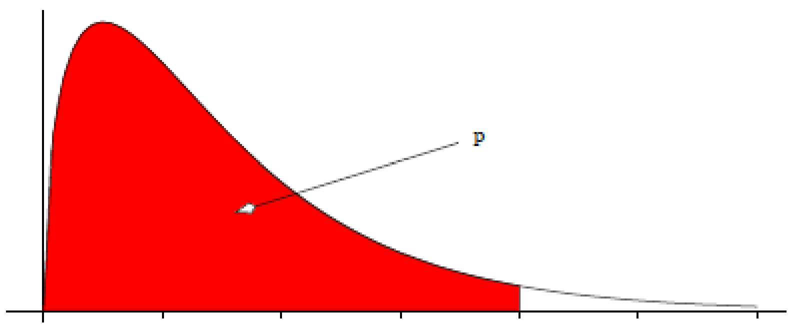
.2 قانون استيودنت: Loi de Student $X \to t_v$

ν \ p	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.000	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	0.000	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328	31.600
3	0.000	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	0.000	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	0.000	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	0.000	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.660
30	0.000	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
200	0.000	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
∞	0.000	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290



3. قانون الكاي مربع: Loi du Khi-deux $X \to \chi^2_\nu$

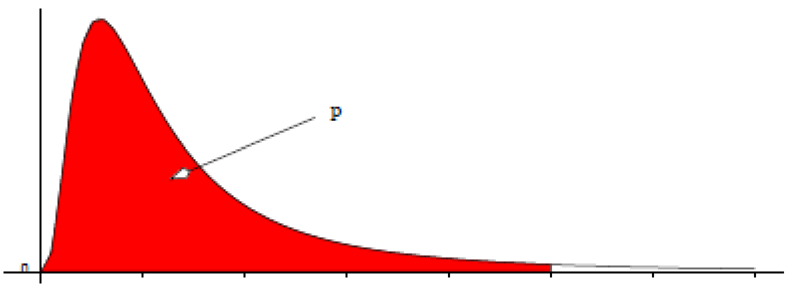
ν \ p	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	0.599	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	0.857	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.698
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.619
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051
27	9.803	11.808	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335	58.301
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702
40	17.917	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	39.036	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.42	104.21	112.32
80	46.520	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	54.156	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30	137.21
100	61.918	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449



.4 قانون فيشر: Loi de Fisher $X \to F(v_1, v_2)$

Table des fractiles $f_{(\nu_1,\nu_2)})$ pour une loi $\mathcal{F}_{(\nu_1,\nu_2)}$: $0.95 = \Pr\{X \leq f_{(\nu_1,\nu_2)}(p)\}$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	80	100
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	251	252	252	253	253
2	18.5	19	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.7	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6	5.96	5.86	5.8	5.75	5.72	5.7	5.69	5.67	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.5	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.3	3.29	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.8	2.79	2.77	2.76
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.7	2.66	2.64	2.62	2.6	2.59
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.4	2.38	2.36	2.35
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.3	2.27	2.26
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.2	2.19
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.4	2.33	2.25	2.2	2.18	2.16	2.14	2.12
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.1	2.08	2.06	2.03	2.02
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2	1.98	1.96	1.94
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.2	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.1	2.01	1.96	1.94	1.92	1.89	1.88
22	4.3	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.4	2.34	2.3	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.89	1.86	1.85
23	4.28	3.42	3.03	2.8	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82
24	4.26	3.4	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.3	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.8
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.6	2.49	2.4	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87	1.84	1.82	1.8	1.78
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.07	1.99	1.9	1.85	1.82	1.8	1.78	1.76
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.2	2.06	1.97	1.88	1.84	1.81	1.79	1.76	1.74
28	4.2	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.74	1.73
29	4.18	3.33	2.93	2.7	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.03	1.94	1.85	1.81	1.77	1.75	1.73	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.7
32	4.15	3.29	2.9	2.67	2.51	2.4	2.31	2.24	2.19	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.71	1.69	1.67
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	1.97	1.89	1.8	1.75	1.71	1.69	1.66	1.65
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.67	1.64	1.62
38	4.1	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.65	1.62	1.61
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	1.91	1.83	1.73	1.68	1.65	1.62	1.59	1.57
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.1	2.05	1.9	1.81	1.72	1.67	1.63	1.61	1.58	1.56
46	4.05	3.2	2.81	2.57	2.42	2.3	2.22	2.15	2.09	2.04	1.89	1.8	1.71	1.65	1.62	1.6	1.57	1.55
48	4.04	3.19	2.8	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.88	1.79	1.7	1.64	1.61	1.59	1.56	1.54
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.4	2.29	2.2	2.13	2.07	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.6	1.58	1.54	1.52
60	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.1	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.53	1.5	1.48
70	3.98	3.13	2.74	2.5	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.5	1.47	1.45
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2	1.95	1.79	1.7	1.6	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43
90	3.95	3.1	2.71	2.47	2.32	2.2	2.11	2.04	1.99	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41
100	3.94	3.09	2.7	2.46	2.31	2.19	2.1	2.03	1.97	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.9	1.85	1.69	1.59	1.48	1.42	1.38	1.35	1.3	1.28
∞	3.84	3	2.6	2.37	2.21	2.1	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24



5. قانون دربن واتسن: Durbin watson

(نموذج انحدار خطي بحد ثابت عند مستوى معنوية 5 %)

Durbin-Watson Statistic: 5 Per Cent Significance Points of dL and dU

	k'=1		k'=2		k'=3		k'=4		k'=5		k'=6		k'=7		k'=8		k'=9		k'=10	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.610	1.400	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.700	1.356	0.467	1.896	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	-----	-----	-----	-----
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	-----	-----
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.258	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.959	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.838	1.369	1.874	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.720	1.747	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.846	1.608	1.862	1.593	1.877
200	1.758	1.779	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.809	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

قانون دربن واتسون (تابع)

(حالة نموذج انحدار خطي بحد ثابت تابع عند مستوى معنوية 5 %)

	$k^{*}=11$		$k^{*}=12$		$k^{*}=13$		$k^{*}=14$		$k^{*}=15$		$k^{*}=16$		$k^{*}=17$		$k^{*}=18$		$k^{*}=19$		$k^{*}=20$	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
16	0.098	3.503	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	0.138	3.378	0.087	3.557	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583	0.058	3.705	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495	0.083	3.619	0.052	3.731	-----	-----	-----	-----	-----	-----
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753	-----	-----	-----	-----
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327	0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773	-----	-----
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251	0.172	3.376	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
26	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179	0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112	0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050	0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
29	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992	0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937	0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.887	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
32	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733	0.457	2.840	0.401	2.946	0.349	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.348
33	0.731	2.382	0.668	2.484	0.606	2.588	0.546	2.692	0.488	2.796	0.432	2.899	0.379	3.000	0.329	3.100	0.283	3.198	0.239	3.293
34	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.554	0.575	2.654	0.518	2.754	0.462	2.854	0.409	2.954	0.359	3.051	0.312	3.147	0.267	3.240
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716	0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586	0.575	2.680	0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646	0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614	0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585	0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.829	0.430	2.974
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439	0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350	0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227	0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
65	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183	1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
70	1.272	1.987	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148	1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118	1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
90	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995	1.318	2.025	1.292	2.055	1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
95	1.418	1.930	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186
100	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026	1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
150	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931	1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

*K' is the number of regressors excluding the intercept

قانون دربن واتسون (تابع)

(حالة نموذج انحدار خطي بدون حد ثابت عند مستوى معنوية 5 %، حالة ارتباط موجب بين الأخطاء)

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	0.012	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	0.168	0.006	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	0.355	0.105	0.004	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	0.478	0.248	0.070	0.002	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	0.584	0.358	0.180	0.050	0.002	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.677	0.462	0.275	0.136	0.037	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.754	0.556	0.371	0.217	0.106	0.029	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.820	0.635	0.460	0.303	0.175	0.085	0.023	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.877	0.706	0.539	0.385	0.251	0.143	0.069	0.019	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.927	0.768	0.610	0.460	0.326	0.211	0.120	0.058	0.016	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.972	0.823	0.674	0.530	0.397	0.279	0.180	0.101	0.049	0.013	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	1.012	0.872	0.731	0.593	0.464	0.345	0.241	0.154	0.087	0.042	0.011	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	1.047	0.916	0.783	0.651	0.525	0.408	0.302	0.210	0.134	0.075	0.036	0.010	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	1.079	0.955	0.829	0.704	0.583	0.467	0.361	0.266	0.185	0.118	0.066	0.031	0.008	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	1.109	0.992	0.872	0.752	0.635	0.523	0.418	0.322	0.237	0.164	0.104	0.058	0.028	0.007	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	1.136	1.024	0.911	0.797	0.684	0.575	0.472	0.376	0.288	0.211	0.146	0.093	0.052	0.025	0.007	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	1.160	1.055	0.946	0.837	0.729	0.624	0.523	0.427	0.339	0.260	0.190	0.131	0.083	0.046	0.022	0.006	0.000	-----	-----	-----	-----	-----
19	1.183	1.082	0.979	0.875	0.771	0.669	0.570	0.476	0.388	0.307	0.235	0.171	0.118	0.075	0.041	0.020	0.005	0.000	-----	-----	-----	-----
20	1.204	1.108	1.010	0.910	0.810	0.711	0.615	0.523	0.436	0.354	0.280	0.213	0.156	0.107	0.067	0.037	0.018	0.005	0.000	-----	-----	-----
21	1.224	1.132	1.038	0.942	0.846	0.751	0.657	0.567	0.481	0.400	0.324	0.256	0.195	0.142	0.097	0.061	0.034	0.016	0.004	0.000	-----	-----
22	1.242	1.154	1.064	0.972	0.879	0.787	0.697	0.609	0.524	0.443	0.368	0.298	0.235	0.178	0.130	0.089	0.056	0.031	0.015	0.004	0.000	-----
23	1.259	1.175	1.088	1.000	0.911	0.822	0.734	0.648	0.565	0.485	0.410	0.339	0.274	0.216	0.164	0.119	0.081	0.051	0.028	0.014	0.004	0.000
24	1.275	1.194	1.111	1.026	0.940	0.854	0.769	0.685	0.604	0.525	0.450	0.380	0.314	0.254	0.199	0.151	0.110	0.075	0.047	0.026	0.012	0.003
25	1.290	1.212	1.132	1.050	0.967	0.884	0.802	0.720	0.641	0.563	0.489	0.419	0.353	0.291	0.235	0.184	0.140	0.101	0.069	0.044	0.024	0.011
26	1.304	1.229	1.152	1.073	0.993	0.913	0.833	0.753	0.676	0.600	0.527	0.457	0.390	0.328	0.271	0.218	0.171	0.130	0.094	0.064	0.040	0.022
27	1.318	1.245	1.171	1.094	1.017	0.940	0.862	0.785	0.709	0.635	0.563	0.493	0.427	0.365	0.306	0.252	0.203	0.159	0.120	0.087	0.060	0.037
28	1.330	1.260	1.188	1.115	1.040	0.965	0.889	0.815	0.741	0.668	0.597	0.529	0.463	0.400	0.341	0.286	0.236	0.190	0.148	0.112	0.081	0.055
29	1.342	1.275	1.205	1.134	1.062	0.989	0.916	0.843	0.770	0.699	0.630	0.562	0.497	0.435	0.376	0.320	0.268	0.221	0.177	0.139	0.105	0.076
30	1.354	1.288	1.221	1.152	1.082	1.011	0.940	0.869	0.799	0.729	0.661	0.595	0.530	0.468	0.409	0.353	0.301	0.252	0.207	0.166	0.130	0.098
31	1.365	1.301	1.236	1.169	1.101	1.033	0.964	0.895	0.826	0.758	0.691	0.626	0.562	0.501	0.442	0.386	0.333	0.283	0.237	0.195	0.156	0.122
32	1.375	1.313	1.250	1.185	1.120	1.053	0.986	0.919	0.852	0.785	0.720	0.653	0.593	0.532	0.474	0.418	0.364	0.314	0.267	0.223	0.183	0.147
33	1.385	1.325	1.264	1.201	1.137	1.072	1.007	0.942	0.876	0.811	0.747	0.684	0.623	0.563	0.504	0.449	0.395	0.344	0.297	0.252	0.211	0.173
34	1.394	1.336	1.277	1.216	1.153	1.091	1.027	0.963	0.900	0.836	0.774	0.712	0.651	0.592	0.534	0.479	0.425	0.374	0.326	0.280	0.238	0.199
35	1.403	1.347	1.289	1.230	1.169	1.108	1.046	0.984	0.922	0.860	0.799	0.738	0.678	0.620	0.563	0.508	0.455	0.404	0.355	0.309	0.266	0.225
36	1.412	1.357	1.301	1.243	1.184	1.125	1.064	1.004	0.943	0.883	0.823	0.763	0.705	0.647	0.591	0.536	0.483	0.432	0.384	0.337	0.293	0.252
37	1.420	1.367	1.312	1.256	1.199	1.141	1.082	1.023	0.964	0.905	0.846	0.787	0.730	0.673	0.618	0.564	0.511	0.460	0.412	0.365	0.321	0.279
38	1.428	1.376	1.323	1.268	1.212	1.156	1.099	1.041	0.983	0.925	0.868	0.811	0.754	0.698	0.644	0.590	0.538	0.488	0.439	0.392	0.347	0.305
39	1.436	1.385	1.333	1.280	1.225	1.170	1.114	1.058	1.002	0.945	0.889	0.833	0.778	0.723	0.669	0.616	0.564	0.514	0.466	0.419	0.374	0.331
40	1.443	1.394	1.343	1.291	1.238	1.184	1.130	1.075	1.020	0.965	0.909	0.854	0.800	0.746	0.693	0.641	0.590	0.540	0.492	0.445	0.400	0.357
45	1.476	1.432	1.387	1.341	1.294	1.246	1.197	1.148	1.099	1.049	1.000	0.950	0.900	0.851	0.802	0.753	0.706	0.658	0.612	0.567	0.523	0.480
50	1.504	1.464	1.424	1.382	1.340	1.297	1.253	1.209	1.164	1.120	1.075	1.029	0.984	0.939	0.894	0.849	0.804	0.760	0.717	0.674	0.631	0.590
55	1.528	1.492	1.455	1.417	1.379	1.340	1.300	1.260	1.219	1.179	1.138	1.096	1.055	1.013	0.972	0.930	0.889	0.848	0.807	0.766	0.726	0.687
60	1.549	1.516	1.482	1.447	1.412	1.376	1.340	1.303	1.266	1.229	1.191	1.153	1.115	1.077	1.038	1.000	0.962	0.923	0.885	0.847	0.810	0.772
65	1.568	1.537	1.505	1.474	1.441	1.408	1.375	1.341	1.307	1.272	1.238	1.202	1.167	1.132	1.096	1.061	1.025	0.989	0.953	0.918	0.882	0.847
70	1.584	1.555	1.526	1.497	1.467	1.436	1.405	1.374	1.342	1.310	1.278	1.245	1.213	1.180	1.147	1.113	1.080	1.047	1.013	0.980	0.947	0.914
75	1.599	1.572	1.545	1.517	1.489	1.461	1.432	1.403	1.373	1.344	1.313	1.283	1.253	1.222	1.191	1.160	1.129	1.098	1.066	1.035	1.004	0.972
80	1.612	1.587	1.561	1.536	1.509	1.483	1.456	1.429	1.401	1.373	1.345	1.317	1.288	1.259	1.230	1.201	1.172	1.143	1.113	1.084	1.054	1.025
85	1.624	1.600	1.576	1.552	1.527	1.502	1.477	1.452	1.426	1.400	1.373	1.347	1.320	1.293	1.266	1.238	1.211	1.183	1.155	1.128	1.100	1.072
90	1.635	1.613	1.590	1.567	1.544	1.520	1.497	1.472	1.448	1.423	1.399	1.373	1.348	1.323	1.297	1.271	1.245	1.219	1.193	1.167	1.141	1.114
95	1.645	1.624	1.603	1.581	1.559	1.537	1.514	1.491	1.468	1.445	1.422	1.398	1.374	1.350	1.326	1.301	1.277	1.252	1.227	1.202	1.177	1.152
100	1.654	1.634	1.614	1.593	1.573	1.551	1.530	1.508	1.487	1.465	1.442	1.420	1.397	1.374	1.352	1.328	1.305	1.282	1.258	1.235	1.211	1.187
150	1.720	1.706	1.693	1.679	1.666	1.652	1.638	1.624	1.609	1.595	1.580	1.566	1.551	1.536	1.521	1.506	1.491	1.476	1.461	1.445	1.430	1.414
200	1.759	1.748	1.738	1.728	1.718	1.708	1.697	1.687	1.676	1.666	1.655	1.644	1.633	1.622	1.611	1.600	1.589	1.578	1.567	1.556	1.544	1.533

قانون دربن واتسون (تابع)

(حالة نموذج انحدار خطي بدون حد ثابت عند مستوى معنوية 5 %، حالة ارتباط سالب بين الأخطاء)

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	1.988	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	2.761	0.994	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	2.871	1.836	0.582	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	2.857	2.178	1.267	0.380	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	2.844	2.320	1.655	0.917	0.266	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	2.828	2.398	1.871	1.283	0.690	0.197	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	2.805	2.453	2.008	1.521	1.017	0.537	0.151	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	2.783	2.483	2.110	1.687	1.251	0.823	0.429	0.120	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	2.762	2.501	2.181	1.816	1.427	1.044	0.678	0.350	0.097	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	2.742	2.511	2.231	1.913	1.569	1.218	0.881	0.567	0.291	0.080	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	2.723	2.516	2.268	1.987	1.682	1.364	1.049	0.752	0.481	0.245	0.068	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	2.705	2.518	2.296	2.044	1.771	1.484	1.193	0.911	0.649	0.413	0.210	0.058	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	2.688	2.517	2.316	2.090	1.843	1.582	1.316	1.051	0.797	0.565	0.358	0.181	0.050	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	2.672	2.515	2.332	2.126	1.902	1.664	1.419	1.172	0.931	0.703	0.497	0.314	0.158	0.043	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	2.657	2.512	2.344	2.155	1.950	1.732	1.506	1.276	1.049	0.829	0.624	0.439	0.277	0.139	0.038	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	2.644	2.508	2.353	2.179	1.990	1.789	1.580	1.367	1.153	0.944	0.743	0.557	0.391	0.246	0.124	0.034	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	2.631	2.504	2.359	2.199	2.024	1.838	1.644	1.445	1.244	1.045	0.852	0.669	0.501	0.351	0.220	0.110	0.030	-----	-----	-----	-----	-----
19	2.618	2.499	2.364	2.215	2.053	1.880	1.699	1.513	1.324	1.136	0.951	0.773	0.605	0.452	0.316	0.198	0.099	0.027	-----	-----	-----	-----
20	2.607	2.494	2.368	2.228	2.077	1.916	1.747	1.573	1.395	1.216	1.040	0.868	0.704	0.550	0.410	0.286	0.179	0.090	0.025	-----	-----	-----
21	2.596	2.489	2.370	2.239	2.098	1.947	1.789	1.625	1.457	1.289	1.120	0.955	0.796	0.644	0.502	0.373	0.260	0.162	0.081	0.022	-----	-----
22	2.585	2.484	2.372	2.249	2.116	1.974	1.825	1.671	1.513	1.353	1.193	1.034	0.880	0.731	0.591	0.460	0.341	0.238	0.148	0.074	0.020	-----
23	2.575	2.479	2.373	2.257	2.131	1.998	1.858	1.712	1.563	1.411	1.258	1.107	0.957	0.813	0.674	0.544	0.422	0.313	0.218	0.136	0.068	0.019
24	2.566	2.474	2.373	2.263	2.145	2.019	1.886	1.749	1.607	1.463	1.318	1.172	1.029	0.888	0.753	0.623	0.502	0.389	0.289	0.201	0.125	0.062
25	2.557	2.470	2.373	2.269	2.156	2.037	1.912	1.782	1.647	1.510	1.371	1.232	1.094	0.958	0.826	0.699	0.578	0.465	0.360	0.267	0.185	0.115
26	1.073	1.004	0.934	0.863	0.792	0.722	0.652	0.584	0.518	0.454	0.394	0.336	0.283	0.233	0.189	0.148	0.113	0.083	0.057	0.037	0.022	0.011
27	1.089	1.023	0.955	0.886	0.817	0.749	0.681	0.614	0.549	0.486	0.426	0.368	0.314	0.264	0.218	0.176	0.138	0.105	0.077	0.053	0.034	0.020
28	1.105	1.040	0.974	0.908	0.841	0.774	0.708	0.643	0.579	0.517	0.457	0.400	0.345	0.294	0.247	0.204	0.164	0.129	0.098	0.071	0.050	0.032
29	1.120	1.057	0.993	0.929	0.864	0.798	0.734	0.670	0.607	0.546	0.487	0.430	0.376	0.324	0.276	0.232	0.191	0.154	0.120	0.091	0.067	0.046
30	1.134	1.073	1.011	0.948	0.885	0.822	0.759	0.696	0.635	0.574	0.516	0.460	0.405	0.354	0.305	0.260	0.217	0.179	0.144	0.113	0.086	0.062
31	1.147	1.088	1.028	0.967	0.905	0.844	0.782	0.721	0.661	0.602	0.544	0.488	0.434	0.383	0.334	0.288	0.244	0.205	0.168	0.135	0.106	0.080
32	1.160	1.103	1.044	0.985	0.925	0.865	0.805	0.745	0.686	0.628	0.571	0.516	0.462	0.411	0.362	0.315	0.271	0.230	0.193	0.158	0.127	0.100
33	1.173	1.117	1.060	1.002	0.944	0.885	0.826	0.768	0.710	0.653	0.597	0.542	0.489	0.438	0.389	0.342	0.298	0.256	0.218	0.182	0.149	0.120
34	1.185	1.130	1.075	1.018	0.961	0.904	0.847	0.790	0.733	0.677	0.622	0.568	0.516	0.465	0.416	0.369	0.324	0.282	0.243	0.206	0.172	0.141
35	1.196	1.143	1.089	1.034	0.978	0.923	0.867	0.811	0.755	0.700	0.646	0.593	0.541	0.491	0.442	0.395	0.350	0.308	0.268	0.230	0.195	0.163
36	1.207	1.155	1.102	1.049	0.995	0.940	0.886	0.831	0.777	0.723	0.669	0.617	0.566	0.516	0.467	0.421	0.376	0.333	0.292	0.254	0.218	0.185
37	1.217	1.167	1.116	1.063	1.010	0.957	0.904	0.850	0.797	0.744	0.692	0.640	0.590	0.540	0.492	0.446	0.401	0.358	0.317	0.278	0.241	0.207
38	1.228	1.178	1.128	1.077	1.026	0.974	0.921	0.869	0.817	0.765	0.713	0.663	0.613	0.564	0.516	0.470	0.425	0.382	0.341	0.302	0.265	0.230
39	1.237	1.189	1.140	1.090	1.040	0.989	0.938	0.887	0.836	0.785	0.734	0.684	0.635	0.587	0.540	0.494	0.449	0.406	0.365	0.325	0.288	0.252
40	1.247	1.200	1.152	1.103	1.054	1.004	0.954	0.904	0.854	0.804	0.754	0.705	0.657	0.609	0.562	0.517	0.473	0.430	0.388	0.349	0.311	0.275
45	1.289	1.247	1.204	1.160	1.116	1.071	1.026	0.981	0.936	0.890	0.845	0.800	0.755	0.710	0.666	0.623	0.581	0.539	0.499	0.459	0.421	0.384
50	1.325	1.287	1.248	1.208	1.168	1.128	1.087	1.046	1.004	0.963	0.921	0.880	0.838	0.797	0.756	0.715	0.675	0.636	0.597	0.559	0.521	0.485
55	1.356	1.321	1.286	1.250	1.213	1.176	1.139	1.101	1.063	1.025	0.987	0.948	0.910	0.872	0.833	0.796	0.758	0.721	0.684	0.647	0.611	0.576
60	1.383	1.351	1.319	1.285	1.252	1.218	1.183	1.149	1.114	1.078	1.043	1.008	0.972	0.936	0.901	0.865	0.830	0.795	0.760	0.725	0.691	0.657
65	1.408	1.378	1.348	1.317	1.286	1.254	1.222	1.190	1.158	1.125	1.092	1.059	1.026	0.993	0.960	0.927	0.894	0.861	0.828	0.795	0.762	0.730
70	1.429	1.401	1.373	1.345	1.316	1.286	1.257	1.227	1.197	1.166	1.136	1.105	1.074	1.043	1.012	0.981	0.950	0.919	0.888	0.857	0.826	0.795
75	1.448	1.423	1.396	1.369	1.342	1.315	1.287	1.260	1.231	1.203	1.174	1.146	1.117	1.088	1.058	1.029	1.000	0.971	0.941	0.912	0.883	0.854
80	1.466	1.442	1.417	1.392	1.367	1.341	1.315	1.289	1.262	1.236	1.209	1.182	1.155	1.127	1.100	1.072	1.045	1.017	0.989	0.962	0.934	0.907
85	1.482	1.459	1.436	1.412	1.388	1.364	1.340	1.315	1.290	1.265	1.240	1.214	1.189	1.163	1.137	1.111	1.085	1.059	1.033	1.006	0.980	0.954
90	1.497	1.475	1.453	1.431	1.408	1.385	1.362	1.339	1.315	1.292	1.268	1.244	1.220	1.195	1.171	1.146	1.121	1.097	1.072	1.047	1.022	0.997
95	1.510	1.490	1.469	1.448	1.426	1.405	1.383	1.361	1.338	1.316	1.293	1.271	1.248	1.225	1.201	1.178	1.155	1.131	1.108	1.084	1.060	1.037
100	1.523	1.503	1.483	1.463	1.443	1.422	1.402	1.381	1.359	1.338	1.317	1.295	1.273	1.251	1.229	1.207	1.185	1.162	1.140	1.118	1.095	1.072
150	1.611	1.598	1.585	1.571	1.558	1.544	1.530	1.516	1.502	1.488	1.474	1.460	1.445	1.431	1.416	1.402	1.387	1.372	1.357	1.342	1.327	1.312
200	1.664	1.654	1.644	1.634	1.624	1.613	1.603	1.593	1.582	1.572	1.561	1.551	1.540	1.529	1.519	1.508	1.497	1.486	1.475	1.464	1.453	1.442