

République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université M'Hamed Bougara – Boumerdès  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur

## **Mémoire**

En vue de l'obtention du diplôme de magister  
En Energétique  
Post Graduation Thermique et Combustion

## **THEME**

# ***SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT TRANSSONIQUE A TRAVERS UN STATOR D'UNE TURBINE AXIALE***

Présenté par : M<sup>elle</sup> Anissa TALAMALI

Soutenu le : 28/06/2008

Jury composé de :

<b>LIAZID Abdelkarim</b>	<b>Professeur</b>	<b>ENSET–Oran</b>	<b>Président</b>
<b>BOUZIT Mohamed</b>	<b>Maître de Conférences</b>	<b>USTO</b>	<b>Examineur</b>
<b>HACHEMI Madjid</b>	<b>Docteur des Universités</b>	<b>UMBB</b>	<b>Examineur</b>
<b>BRACHEMI Belaid</b>	<b>Docteur des Universités</b>	<b>UMBB</b>	<b>Examineur</b>
<b>BALISTROU Mourad</b>	<b>Maître de Conférences</b>	<b>UMBB</b>	<b>Rapporteur</b>

**Année universitaire : 2007 / 2008**

*Je dédie ce modeste travail à mes chers  
parents, mes chers frères et chères sœurs.  
À toute personne que j'aime et que je  
respecte.*

# Remerciements

*Ce projet a été réalisé en vue de l'obtention du diplôme de Magister dans la spécialité « Thermique et Combustion », au sein du département « Energétique » de l'université de Boumerdes. Je remercie en premier lieu « Dieu » pour m'avoir donné la chance et la force à arriver à ce niveau d'études. Je tiens à remercier mes très chers parents qui m'ont toujours encouragé et appuyé dans mes projet.*

*Je remercie aussi tous mes frères et toutes mes sœurs ainsi que tous mes amis pour leurs constants encouragements tout au long de ma maîtrise. Je remercie aussi M. Boussaid Mohamed qui m'a accueilli au sein de sa Post Graduation et pour ses connaissances précieuses qu'il m'a transmis. Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de mémoire M. Balistrou Mourad et mon co-encadreur M. Hachemi Madjid pour leur disponibilité, leurs judicieux conseils et la rigueur scientifique, qu'ils m'ont transmis ainsi que pour leurs qualités humaines.*

*Je remercie les membres de jury pour avoir accepté de soutenir mon travail: Pr. A. Liarid, Dr. M. Bexit, Dr. B. Brachemi et Dr. M. Hachemi.*

*Je n'oublie pas de remercier tout le personnel de la bibliothèque du département « Génie mécanique » en particulier: M<sup>lle</sup> Kacimi Hamida, M. Djebili Omar, M. Rial Rabah et M<sup>lle</sup> Caural Fehra.*

*Je remercie tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à accomplir ce travail dans des meilleures conditions.*

# SOMMAIRE

<b>Remerciements</b>	i
<b>Sommaire</b>	ii
<b>Résumé</b>	iv
<b>Nomenclature</b>	vi
<b>Introduction</b>	
• Etat de l'art	01
• Formulation du problème	06
• Organisation de la thèse	06
<b>Chapitre 1 : Modélisation des écoulements internes dans les turbomachines</b>	
• Introduction	08
• Projet des turbomachines	08
• Equations générales de base	11
○ Equation de continuité et équations dynamiques	12
○ Equations sous forme conservative	13
○ Equations particulières dans les turbomachines	19
▪ Equations dans le repère relatif	24
▪ Ecoulement aube à aube	26
▪ Solution tridimensionnelle	27
▪ Equations moyennées en azimut	30
• Conclusion	
<b>Chapitre 2 : Théorie de la turbulence</b>	
• Introduction	36
• Notions sur les écoulements turbulents	36
○ Qu'est ce que la turbulence ?	37
○ Propriétés essentielles de la turbulence	37
○ Conséquences pratiques	40
○ Configurations fondamentales	41
▪ Ecoulements de paroi	41
▪ Ecoulements libres	41
○ Exemples de domaines où la turbulence apparaît	42
• Description expérimentale et statistique de la turbulence	44
○ Les deux point de vue de la turbulence	44
○ Quantification expérimentale de la turbulence	45
○ Moyens de mesure	46
○ Outils statistiques	46
▪ Rappels	46
▪ Quelques propriétés	48
➤ Stationnarité statistique	48
➤ Homogénéité statistique	49
▪ Décomposition de Reynolds	49
• Equations de Navier – Stocks moyennées	50
○ En incompressible	50
○ En compressible	58

▪ Formulation conservative	59
▪ Les modèles de turbulence	61
➤ Problème de fermeture des équations	62
✓ Bilan des équations et des inconnues	62
✓ Classification des modèles	63
▪ Les lois de parois	72
➤ Problématique	72
➤ Rappel des propriétés des couches limites turbulente 2D incompressible	73
➤ Effet de compressibilité	74
➤ Principe	74
• Ondes de choc	75
○ Définition	75
○ Formation des ondes de choc	76
○ Equations de conservation	76
▪ Conservation de la masse	76
▪ Conservation de la quantité de mouvement	77
▪ Conservation de l'énergie	78
• Conclusion	79
<b>Chapitre 3 : Simulation numérique</b>	
• Outils numériques	80
○ La méthode des volumes finis	80
○ La simulation avec ANSYS	82
• Génération du maillage	85
• Conditions aux limites	87
• Résultats et interprétations	90
○ Résultats de simulation pour MUR 228	90
▪ Vitesse/nombre de Mach	90
▪ Pression/température	91
▪ Y plus	93
○ Résultats de simulation pour MUR 221	94
○ Résultats de simulation pour MUR 222	95
○ Validation expérimentale	97
○ Influence de la turbulence sur le transfert de chaleur	99
<b>Conclusion générale</b>	98
<b>Bibliographie</b>	10
	1
<b>Annexes</b>	
• Annexe 1 : La géométrie	
• Annexe 2 : Résultats expérimentaux	
○ Mur 228	
○ Mur 222	
○ Mur 221	
○ Mur 230	
• Annexe 3 : Visualisation de l'écoulement	

## Résumé

La prédiction des champs de vitesses, de pression et de température dans un écoulement turbulent est importante pour de nombreux systèmes industriels à savoir l'étude des performances des éoliennes, des aubages de turbomachines, des ailes d'avions et des hélices propulsives. Les fluctuations aléatoires de ces champs sollicitent les structures et peuvent avoir une influence néfaste sur ces dernières, en particulier la fatigue du matériau utilisé. Il est donc important de connaître ces fluctuations qui sont à l'origine de ces phénomènes. Les écoulements considérés sont souvent de nature complexe à cause de l'interaction des processus physiques présents (écoulements bi- ou tridimensionnels, turbulents, ondes de choc, phénomènes de décollement de couches limites etc....).

Dans la présente recherche, on s'intéresse à la simulation numérique de l'écoulement transsonique et de transfert de chaleur turbulents tridimensionnels autour du profil **VKI-CT2** situé dans un stator d'une turbine axiale.

La simulation numérique de l'écoulement et du transfert de chaleur turbulents est réalisée à l'aide du logiciel CFX à partir des équations de Navier Stokes. La turbulence est prise en compte à l'aide des modèles de turbulence du premier ordre ainsi que du deuxième ordre ( $k-\omega$ , S.S.t, et R.S.M). La méthode numérique utilisée est celle des volumes finis, le maillage non structuré de type tétraédral a été adopté pour un système de coordonnées cartésiennes généralisées.

Les résultats obtenus ont été satisfaisants, en les comparant avec les résultats expérimentaux, ces résultats montrent l'influence de la turbulence sur le transfert thermique, on a constaté que ce dernier favorise la turbulence et ça était claire dans la courbe montrant la croissance du coefficient d'échange thermique avec l'augmentation du taux de la turbulence. Une zone de transition du laminaire au turbulent était détectée sur l'extrados en une abscisse proche du bord de fuite, sur la même abscisse on a marqué l'apparition d'une onde de choc qui est due à la nature transsonique de l'écoulement.

## Abstract

Prediction of the velocity, pressure and temperature fields in a turbulent flow is important for many industrial systems namely the study of the performance of wind turbines, blading turbo machinery, aircraft wings and propellers propelling. Random fluctuations of these fields solicit structures and can have an adverse influence on these latest, in particular fatigue of the material used. It is therefore important to know these fluctuations that are at the origin of these phenomena. The considered flows are often of complex nature because of the interaction of the present physical processes (bidirectional or three dimensional turbulent flows, shockwaves, phenomena of detached boundary layers etc...).

In this research we are looking for the numeric simulation of turbulent three dimensional transonic flows and heat transfer around the profile **VKI-CT2** located in the stator of an axial turbine.

Numerical simulation of turbulent flow and heat transfer is performed using software CFX from the equations of NAVIER STOCKES. The turbulence is taken into account using turbulence models of the first order and the second order ( $k-\omega$ , S.S.t, and R.S.M). The numerical method used is that of the finite volumes, the unstructured mesh of tetrahedral type was adopted for a system of generalized Cartesian coordinates.

Numerical results compared to experimental ones was satisfactory, these results show the influence of turbulence on the heat transfer which is shown by a figure showing that the heat transfer coefficient increase as the turbulence rate go up. A transition zone was detected on the suction side of the blade, on an abscise near the downstream, on the same abscise we observe the apparition of a shock wave due to the transonic nature of the flow.

## المخلص

إن تحديد حقول كل من السرعة، الضغط و درجة الحرارة على مستوى تدفق سائل هام جدا بالنسبة للعديد من الميادين الصناعية مثل دراسة الهوائيات، أجنحة الطائرات، الآلات العنفيه و محركات الدفع. إن الاضطرابات العشوائية لهذه الحقول تؤثر على الأنظمة من الاحتمال إن تكون لها تأثير سلبي على هذه الأخيرة، خاصة تعب المواد المستعملة. إذن من الهام جدا معرفة هذه الاضطرابات التي هي مصدر هذه الظواهر. إن تدفق دائما لديه طبيعة معقدة وهذا راجع لتجاذب الظواهر الحاضرة في هذه الأنظمة (تدفق مستوي، تدفق فضائي، تدفق مضطرب، موجة اصطدام...الخ).

في هذا العمل نهتم بالدراسة الرقمية لتدفق سائل و حراري بحيث نعتبرهما ذوي طبيعة مضطربة وثلاثية الأبعاد، حول مقطع شفرة من نوع VKI CT2.

الدراسة الرقمية لهذا التدفق تمت عن طريق برنامج CFX الذي يأخذ بعين الاعتبار معادلات NAVIER-STOCKS. الاضطراب اخذ بعين الاعتبار بواسطة نماذج من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية نذكر على سبيل المثال (SST, k-w, RMS). المنهجية الرقمية المستعملة هي منهجية الحجم المتناهية، الشبكة المستعملة من نوع ثلاثية الأبعاد الغير مشكلة في معلم ذو إحداثيات ديكارتية. النتائج الرقمية المحصل عليها كانت مرضية مقارنة مع النتائج التجريبية، هذه النتائج تدل على تأثير الاضطراب على التدفق الحراري وهذا ما يشير إليه بيان تغير معامل التدفق الحراري الذي يزداد كلما ازداد مقدار الاضطراب، ومنه يمكن القول بان التدفق الحراري يفضل الاضطراب. لاحظنا أيضا منطقة انتقالية من التدفق الهادئ إلى المضطرب في إحداثية قريبة من منطقة النهاية، وعلى مستوى نفس الإحداثية لاحظنا وجود موجة الاصطدام راجعة إلى الطبيعة شبه صوتية للتدفق.

# Nomenclature

## 1. Symboles latins

a: Vitesse du son	[m/s]
$C_x$ : Coefficient de traînée	
$C_p$ : Chaleur massique du fluide	[J/kg.K]
h: Enthalpie	[J]
H: Coefficient d'échange thermique	[W/m <sup>2</sup> .K]
k: Energie cinétique turbulente	[J]
K: Energie cinétique du fluide	[J]
l: Longueur du mélange	[m]
M: Nombre de Mach	
p: Pression	[bar]
$q_i$ : Flux thermique	[W/m <sup>2</sup> ]
R: Constante des gaz parfaits	
$R_{ij}$ : Tenseur des contraintes de Reynolds	
T: Température	[K]
V ou U: Vitesse du fluide	
$U_x, U_y, U_z$ ou $V_x, V_y, V_z$ ou $U_i, V_i$ : Composantes de la vitesse selon x, y, z	[m/s]
x, y, z: Coordonnées cartésiennes	[m]
$y^+$ : Distance proche de la paroi	

## 2. Symboles grecs

$\mu$ : Viscosité dynamique du fluide
$\mu_t$ : Viscosité turbulente de l'écoulement
$\rho$ : Masse volumique du fluide
$\lambda$ : Conductivité thermique
$\psi$ : Fonction de courant
$\phi$ : Fonction de potentiel
$\varepsilon$ : Fonction de dissipation
$\kappa$ : Constante de Von KARMAN

# Introduction

## Introduction

Les problèmes de la dynamique des fluides sont généralement difficiles à résoudre car les équations de base sont non linéaires. Il est donc impossible de trouver les solutions exactes, sauf dans quelques cas très simples. Pourtant, l'évolution de la science de la dynamique des fluides a porté ses fruits. Ceci est démontré par l'avancement spectaculaire des secteurs technologiques dans lesquels la qualité et l'originalité des solutions des problèmes d'écoulement ont joué un rôle primordial, par exemple dans le secteur du transport (avions, bateaux, voitures, etc.) et de la production d'énergie (turbines, compresseurs, réacteurs, etc.). Dans une grande mesure, ces réussites sont dues aux échanges étroits entre la théorie, la simulation numérique et l'expérience en dynamique des fluides. D'une part, l'expérience est indispensable pour vérifier les hypothèses et les résultats qui ressortent de la théorie ; et d'autre part, la théorie est nécessaire pour expliquer les résultats obtenus par l'expérience et pour faciliter le travail à l'avenir. La simulation numérique est née pour ce faire, mais cette dernière reste indépendante de l'expérience pour la validation des résultats obtenus. Les bases de la science de la dynamique des fluides ont pu être fondées et développées sur des observations expérimentales.

### Etat de l'art

La "performance" d'une turbomachine dépend à la fois de sa conception (géométrie, aérodynamique, température de fonctionnement, etc.), et de la nature des matériaux compatibles avec ses caractéristiques. La recherche de performances et d'efficacité conduit à l'utilisation d'une géométrie performante d'où notre intérêt à la recherche d'un profil aérodynamique optimisé pour les aubes de la turbine.

Suite à un projet portant sur l'étude du transfert thermique lors d'un écoulement à travers un diffuseur d'une turbine transsonique, une première

étude expérimentale à été effectuée à l'institut belge VKI "Von Kermân Institute", suivie d'une simulation numérique du phénomène [2].

Des mesures aérodynamiques ont été obtenues pour une turbine à haute pression, en s'intéressant à l'influence de la turbulence, du nombre de Mach et du nombre de Reynolds. Les mesures ont été effectuées en utilisant un profil de type VKI-CT2 [1], et ont été comparées avec les résultats numériques [2].

Le but de cette investigation était de fournir des informations détaillées sur l'écoulement dans des conditions similaires à celles observées dans des machines réelles afin de permettre l'évaluation des méthodes de calcul dans les turbomachines dans les cas visqueux et parfait.

Dans le cadre de l'étude des écoulements et des transferts thermiques dans les turbomachines, plusieurs autres travaux ont été réalisés :

J. FORT, J.FÜRST, J. HALAMA, K. KOZEL et Praha [3], [5] ont mené une solution numérique pour un écoulement tridimensionnel à travers une grille d'aubes dans une turbine axiale. La méthode numérique utilisée était celle des volumes finis basée sur les deux schémas numériques TDV Mac Cormack à cellules centrées, et celui à cellules – vertex de Ni. Des maillages quadrilatérales et triangulaires ont été aussi utilisés. L'étude a été faite pour un stator et un rotor afin de permettre une comparaison entre les résultats obtenus dans les deux cas.

Cristian Wollblade [4], s'intéressait lui aussi aux écoulements dans les turbomachines et plus précisément aux interactions onde de choc – couche limite. Pour cela, il a tenté de résoudre le système RANS (Reynolds Averaged Navier Stocks Equations) par une simulation LES (Large Eddy Simulation). Un schéma semi – implicite a été développé ; il permet de réduire le temps de calcul à 60% sans que ça influe sur la précision du calcul. Il est montré que la grande échelle du mouvement à travers le choc n'est pas un phénomène local. Pour les grands chocs, une fuite elliptique peut faire déclencher le mouvement d'une partie du choc au voisinage de la paroi ; cependant ce mouvement n'a pas une relation directe avec l'enlèvement de la couche limite près du choc. Il est aussi

illustré qu'une grande séparation apparaît sans déclenchement d'aucun mouvement de choc.

Une méthode hybride de calcul a été développée, les réseaux de neurones ont été appliqués.

Zoran Dimitrijevic, Guy Daniel Mortchéléwicz, et Fabrice Poirion [6] ont travaillé sur la détermination des bifurcations de Hopf d'un profil bidimensionnel soumis à un écoulement transsonique en présence d'un jeu. Un modèle d'état décrivant les forces aérodynamiques acquises dans le domaine fréquentiel par un code Euler linéarisé modélisant l'écoulement de fluide parfait est utilisé pour analyser le comportement dynamique d'un profil d'aile bidimensionnel comportant une non-linéarité concernée de type jeu. Cette formulation des équations aéroélastiques par variables d'état permet de déterminer numériquement l'existence de points de bifurcation de Hopf et de cycles limites d'oscillations. Des comparaisons entre les solutions des équations d'Euler couplées aux équations du mouvement de la structure et les solutions du modèle d'état sont réalisées.

A. Kourta et al [7] ont montré qu'en écoulement transsonique, l'interaction onde de choc/couche limite turbulente et les décollements qui en découlent sur l'extrados d'une aile induisent des instabilités appelées tremblement et provoquent des vibrations de la structure. Ce phénomène peut notablement influencer les performances aérodynamiques. Ces excitations auto-entretenues peuvent produire suffisamment d'énergie pour exciter l'aile. Cette étude porte sur la simulation du tremblement aérodynamique (buffet) sans aborder les aspects aéroacoustiques (buffeting). L'objectif est de prédire correctement ce phénomène en utilisant les équations de Navier–Stokes instationnaires moyennées avec un modèle de turbulence à concept de viscosité turbulente ( $k-\varepsilon$ ) adapté à cette situation. Ce modèle utilise un coefficient de viscosité turbulente  $C_\mu$  fonction des taux de déformation et de rotation. Pour valider ce modèle, on calcule tout d'abord l'écoulement sur une plaque plane à

un nombre de Mach de 0,6. La comparaison avec les résultats analytiques montre un bon accord. Le profil transsonique ONERA OAT15A est choisi pour décrire le tremblement. Les résultats montrent la capacité du modèle à prédire ce phénomène instationnaire. L'interaction onde de choc/couche limite est analysée et caractérisée.

Le dessin et l'optimisation des aubes de turbines, soumises à des écoulements à hautes températures, nécessitent la prédiction des caractéristiques aérodynamiques et thermiques de l'écoulement. Une méthode de calcul des écoulements visqueux aérothermiques a été développée par Pascal Kulisa et Jean-Michel Fougères [8]. Elle est basée sur une approche de couche limite compressible. Différents tests incluent la majeure partie des difficultés que l'on peut rencontrer dans la réalité : transition laminaire – turbulent, décollement, fortes accélérations, ondes de choc. Une prédiction satisfaisante du transfert de chaleur est observée.

Jan Halama, Tony Arts et Jaroslav Fort [9] ont présenté une simulation numérique des écoulements transitoires et permanents, les effets de la qualité du maillage, la dissipation numérique et des conditions aux limites sur la solution numérique ont été discutés. L'étude a été portée sur un profil d'aube de type VKI.

A. EZZARFI, B. KHARBOUCH, A. MAALOUF et A. MIMET [10] se sont intéressés à la modélisation et à la simulation de l'écoulement turbulent et bidimensionnel avec transfert de chaleur autour du profil NACA12. La simulation numérique a été réalisée à partir des équations de Navier Stokes. La turbulence a été prise en compte à l'aide d'un modèle algébrique non linéaire. La méthode utilisée est celle des volumes finis et le maillage de type collocatif pour un système de coordonnées curvilignes ; le couplage pression – vitesse est réalisé par la méthode de substitution de pression (PSM).

M. Hachemi, L. Merahi et M. Abidat [11] ont présenté une simulation numérique de l'écoulement bidimensionnel stationnaire et incompressible autour

d'un profil NACA32012, en résolvant les équations moyennées de Navier Stokes par la méthode des volumes finis. Deux codes de calcul sont utilisés pour cette simulation, l'un utilise une grille structurée (hexahedral) et l'autre utilise un maillage non structuré (tetrahedral). Les termes des flux à travers les faces du volume de contrôle sont exprimés en utilisant un schéma hybride centré. Le couplage vitesse–pression est réalisé en utilisant la procédure d'interpolation de Rhie et Chow. L'influence de l'angle d'incidence ainsi que le nombre de Reynolds sur les performances du profil sont étudiés. Des résultats numériques sont comparés avec des résultats expérimentaux obtenus d'une soufflerie de petite vitesse d'écoulement. Les résultats montrent qu'il existe un angle d'incidence optimal correspondant à une valeur maximale du coefficient de qualité du profil.

Xavier Toussaint [12] dans son projet de DEA a traité par simulation instationnaire un écoulement transsonique et turbulent autour d'un profil supercritique. L'objectif de ce travail était de tester quelques modèles de turbulence du type RANS pour la prévision du tremblement, en vue du développement futur d'une méthode hybride RANS/LES. Les modèles Spalart–Allmaras de Jones – Launder ont été testés au préalable en stationnaire, et le modèle de Spalart est apparu le plus apte aux calculs instationnaires du tremblement. Les calculs instationnaires ont révélé que la viscosité turbulente était surévaluée par le modèle de Spalart dans la zone de décollement et dans la zone de sillage, ce qui conduit à l'amortissement du tremblement.

En se référant aux articles cités ci-dessus, on se propose de faire une simulation numérique d'un écoulement transsonique à travers un stator d'une turbine axiale ; l'écoulement sera supposé permanent, compressible et turbulent. L'intérêt du travail est d'étudier le transfert thermique autour des aubes. La simulation est faite à l'aide d'un logiciel utilisant la méthode des volumes finis et un maillage non–structuré tetrahedral.

## **Formulation du problème**

La formulation mathématique du problème passe d'abord par sa description.

### **1. Description du problème**

On considère le profil aérodynamique VKI-CT2 autour duquel s'écoule un fluide. Le profil aérodynamique est utilisé comme une aube dans une turbine axiale. On se propose d'étudier l'écoulement autour de ce profil placé dans le stator de la turbine. Le travail consiste à construire d'abord la géométrie et le domaine de l'écoulement à l'aide d'un générateur de maillage associé au code de calcul CFX (ICEM).

### **2. Hypothèses simplificatrices**

On pose les hypothèses suivantes :

- Ecoulement permanent
- Avec transfert de chaleur
- Compressible et visqueux.
- D'autres hypothèses seront automatiquement prises en considération au sein du code CFX concernant les propriétés physiques du fluide et la nature de l'écoulement (tridimensionnel, turbulent, etc.).

### **3. Organisation de la thèse**

Le mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des écoulements dans les turbomachines.

Le deuxième chapitre traite de la turbulence, de ses propriétés principales et la description statistique et expérimentale de la turbulence. Dans ce chapitre, nous avons montré l'influence de la turbulence sur les équations de Navier–Stokes et l'apparition du problème de fermeture. Ensuite, nous avons énuméré et discuté la classification des modèles de turbulence utilisés.

Dans le troisième chapitre, une simulation numérique de l'écoulement autour du profil VKI-CT2 est réalisée. La géométrie, le maillage et les conditions aux limites ainsi que les méthodes numériques sont développés dans cette partie. Les étapes de résolution en utilisant le code CFX (méthodes des volumes finis) sont présentées. Enfin, les résultats obtenus par la simulation numérique sont validés avec les résultats expérimentaux obtenus par T. Arts, Lambert de Rouvroit, and A.W. Rutherford.

A la lumière de ces résultats, nous terminons par une conclusion générale.

# Chapitre 1

Modélisation des écoulements internes dans les  
turbomachines

## **Introduction**

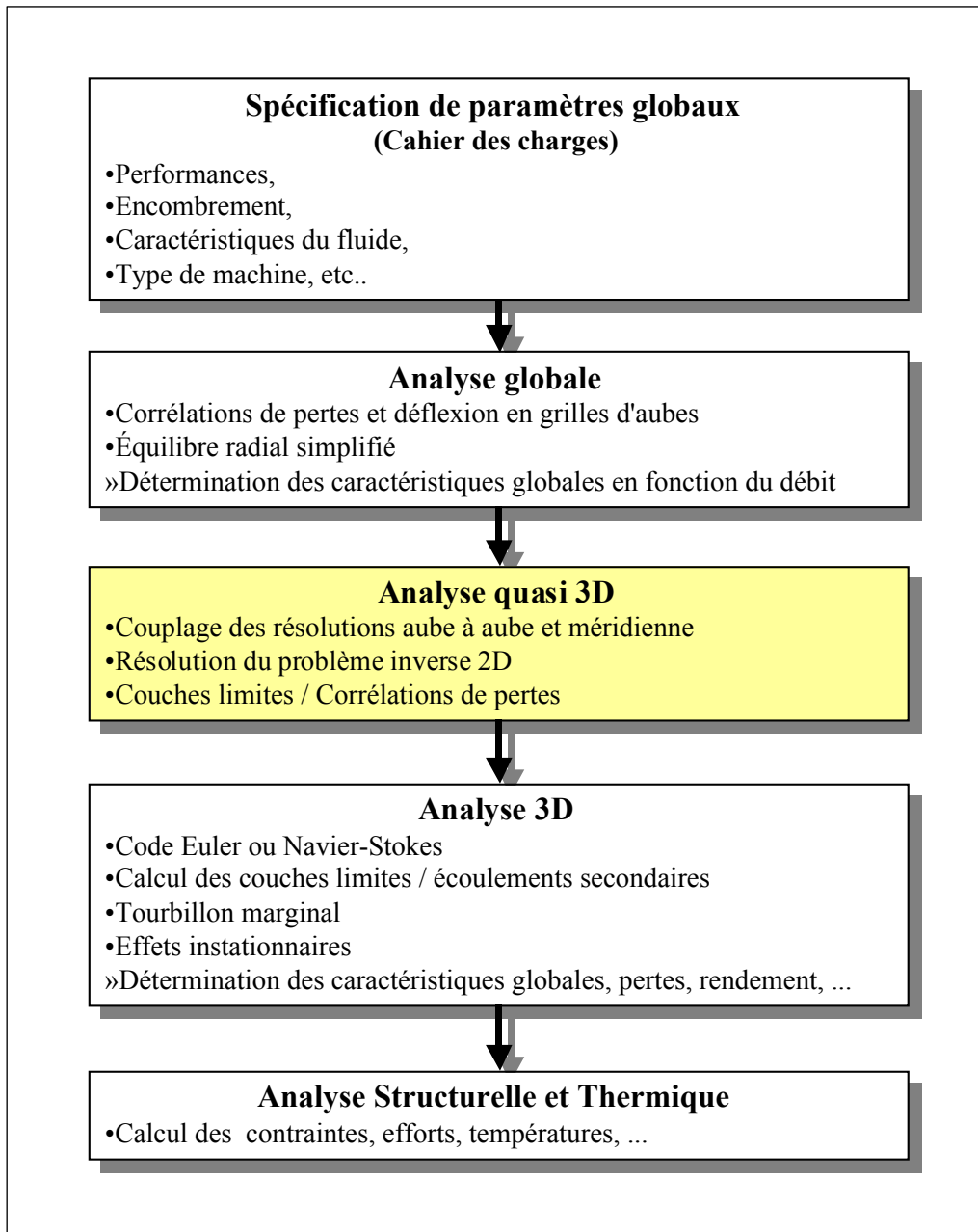
On présentera tout d'abord une approche générale du processus de conception des turbomachines en indiquant les différents types de modélisations utilisées. On détaillera, ensuite, cette démarche qui ressemble, en ses étapes générales, à l'évolution qu'a subie la démarche de modélisation des turbomachines au cours du temps. Après un bref aperçu des équations générales qui régissent les écoulements internes en turbomachines, les différents types de solutions et leurs hypothèses simplificatrices, on présentera les différentes méthodes spécifiquement adaptées à l'analyse de ces écoulements par ordre de complexité croissante : les méthodes unidimensionnelles, bidimensionnelles, quasi et tridimensionnelles.

### **1. Projet des turbomachines**

De très importants progrès ont été accomplis dans le domaine de la conception des turbomachines ces dernières années et l'éventail des méthodes et des outils à la disposition du concepteur a subi un important développement. Parmi toutes ces possibilités, les ingénieurs chargés de ces tâches doivent savoir choisir l'outil le mieux adapté à chaque étape du projet. La plupart des industries ont leurs propres schémas de conception, leurs codes ou leurs méthodes de calcul. Par exemple, dans la série publiée par l'AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) en 1989 [13], plusieurs auteurs ont décrit des méthodes avancées et exhaustives pour le projet de divers types des turbomachines : compresseurs (Stow, Meauzé), turbines (Bry, Hourmouziadis), aubages bidimensionnels (Starken), pour n'en citer que quelques-uns. D'autre part, Howard et al. [14] présentent une méthode pour la conception aérodynamique et thermique des turbines. Nojima [15] montre une description similaire pour la conception de compresseurs centrifuges industriels. La méthodologie de conception des turbomachines dépend de l'application, de la géométrie et du domaine industriel d'application ; par conséquent, il n'existe pas d'approche unifiée.

Une démarche méthodologique générale peut cependant être retenue concernant la conception des turbomachines, elle est présentée en figure I.1. La spécification des paramètres globaux (cahier des charges) comprend le débit, l'élévation de pression, le rendement souhaité, les dimensions globales de la machine ou l'espace disponible pour la loger, les caractéristiques du fluide de travail et le type de machine en fonction de la tâche qui lui est destinée. Parmi d'autres paramètres qui sont aussi acquis au début du projet, on peut considérer les bases de données contenant les géométries des profils, les corrélations pour le calcul des pertes sur les aubages et les flasques, les fuites par jeux radiaux et les modèles pour le calcul des angles de déflexion.

La première étape du calcul consistera en une analyse globale faite à l'aide de modèles simplifiés de type unidimensionnel portant généralement sur le tube de courant moyen et utilisant l'équation d'Euler des turbomachines combinée avec les lois de l'équilibre radial simplifié (Noguera et al [16]). Dans cette étape, nous ferons appel à de nombreuses corrélations définissant les angles de déflexion (Rey [17]) et les pertes en grilles d'aubes (Bakir [18]). Les résultats les plus importants de cette première étape seront les caractéristiques globales en fonction du débit et surtout une première approximation de la géométrie de la machine (notamment les profils des pales) qui servira à initialiser les autres étapes de la démarche.



**Fig.1.1.** Projet des turbomachines

La deuxième phase, plus évoluée dans cette progression, est représentée par l'analyse dite quasi-tridimensionnelle ; le présent travail s'inscrit plus particulièrement dans ce domaine. Ces méthodes ont en commun l'idée de décomposer l'écoulement tridimensionnel qui se produit à l'intérieur de la machine en deux écoulements bidimensionnels couplés : l'écoulement aube à aube et l'écoulement méridien. Pour ces deux types de calcul, il existe plusieurs méthodes de modélisation et de résolution. On n'en verra que quelques-unes parmi les principales. A cette étape de la conception, il est fréquent de faire appel aux

méthodes ou corrélations pour prendre en compte les effets des couches limites, écoulements secondaires, fuites dans les jeux et pertes visqueuses.

Dans le processus de conception des turbomachines, l'étape la plus évoluée et la plus complexe celle qui demande le plus de moyens, aussi bien matériels qu'intellectuels, est sans doute l'analyse tridimensionnelle. Cette partie constitue la phase finale de la conception hydraulique ou aérodynamique proprement dite. Elle est normalement accomplie à l'aide de codes de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes dans tout le domaine concerné. Ces codes donnent un aperçu de l'évolution et de l'effet des couches limites, des écoulements secondaires ou des écoulements dans les jeux radiaux. Les effets instationnaires peuvent aussi être pris en compte par des logiciels spécialement conçus pour cette tâche. Le principal résultat de cette étape est une connaissance détaillée de l'écoulement à l'intérieur de la machine qui permettra de contrôler ses caractéristiques et de réaliser d'éventuelles modifications de la géométrie. Il est évident que ces codes très lourds ne sont pas adaptés aux premières étapes de la conception. Néanmoins, ces logiciels ont évolué aussi bien dans le domaine de la convivialité et facilité d'utilisation que dans le domaine algorithmique. Par conséquent, ils trouvent une place de plus en plus importante dans les étapes amont de la conception.

La dernière étape avant de passer aux essais indispensables pour le développement de toute nouvelle machine, consiste à calculer et à contrôler ses caractéristiques structurelles et thermiques. Bien entendu, cette étape est l'objectif du présent travail.

Il faut noter que dans chaque phase du projet, les paramètres géométriques peuvent être modifiés jusqu'à ce que les objectifs soient atteints. De même, il est souvent possible et parfois nécessaire, de revenir sur les étapes déjà accomplies pour effectuer les modifications nécessaires.

## **2. Equations générales de base**

Les équations utilisées pour résoudre les écoulements dans les turbomachines dérivent, généralement des équations de Navier-Stokes et sont accompagnées d'hypothèses simplificatrices, associées à des considérations sur la

géométrie, les bilans énergétiques ou la séparation des vitesses en une valeur moyenne et une partie fluctuante. En dehors du repère absolu, les équations peuvent aussi s'exprimer dans le repère relatif, en termes de la fonction de courant ou encore des variables exprimant sa courbure.

Nous présenterons ensuite l'ensemble des équations générales de la mécanique des fluides sur lesquelles sont basées les équations régissant l'écoulement dans les turbomachines.

### 2.1. Equation de continuité et équations dynamiques (Navier–Stokes)

Les formes différentielles de l'équation de continuité et l'équation de conservation des quantités de mouvement peuvent être obtenues à partir des relations intégrales sur un volume de contrôle et par l'application du théorème de la divergence. Si le fluide considéré est newtonien et la pesanteur est la seule force de volume agissant sur le domaine considéré (Schlichting [19]; White, 1991 [20]), les équations régissant l'écoulement peuvent être exprimées ainsi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{(3)} \right] = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{(4)} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{(5)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \underbrace{\mu}_{(6)} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right\} + \underbrace{\delta_{ij} \lambda}_{(7)} \operatorname{div} \vec{V} \right] \quad (1.2)$$

Les termes 1, 2, et 3 de l'équation 1.2 représentent l'accélération totale, convective, et locale. Le terme 4 représente la force de pression, le terme 5 la force de la pesanteur, les termes 6 et 7 les effets visqueux, où normalement la viscosité de dilatation est considérée comme nulle (c'est-à-dire  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  d'après l'hypothèse de Stokes). Une discussion détaillée des termes visqueux peut être trouvée dans les travaux de White. Pour les écoulements laminaires incompressibles, la densité et la viscosité sont supposées constantes dans les équations 1.1 et 1.2. Ces équations représentent un ensemble complet de quatre équations pour quatre inconnues, à savoir, la pression et les trois composantes de la vitesse. Pour des écoulements non visqueux, les deux derniers termes dans l'équation 1.2 sont nuls. Dans la plupart des écoulements internes, le cinquième terme de l'équation 1.2,  $\rho g$  est négligé.

L'équation de l'énergie est basée sur l'équation thermodynamique, elle s'utilise sous la forme:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \Phi \quad (1.3)$$

Où  $\Phi$  est la fonction de dissipation, représentant l'équivalent thermique de l'énergie mécanique liée à la dissipation visqueuse et les efforts de cisaillement :

$$\Phi = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tau_{ij} = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2$$

Le premier terme de gauche de l'équation 1.3 représente la variation d'enthalpie ;  $Dp/Dt$  et  $\Phi$  sont les taux de travail des efforts de pression et de cisaillement.  $\nabla(k\nabla T)$  représente le transfert de chaleur par conduction dans le fluide où  $k$  est le coefficient de conductivité thermique.

Pour des écoulements compressibles, le transport et la génération d'énergie sont couplés à la dynamique du mouvement du fluide, et donc l'équation d'énergie (Eq. 1.3) doit être résolue en même temps que les équations de continuité et de quantité de mouvement. En outre, une équation complémentaire associant la densité à la pression et à la température est nécessaire. Pour un gaz idéal, l'équation d'état est donnée par

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.4)$$

Les équations 1.1 à 1.4 fournissent six équations (dans l'écoulement tridimensionnel) pour six inconnues :  $\vec{V}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ .

## 2.2. Equations sous forme conservative

Dans beaucoup de cas (telle que la résolution numérique des équations de Navier-Stokes), les équations exprimées en termes de variables "conservatives" sont très utiles. Ces variables telles que  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $\rho w$ ,  $\rho h_o$ ,  $\rho e$ , qui incluent la masse volumique s'appellent variables conservatives. Quand des variables "conservatives" sont utilisées dans un schéma de différences finies, les équations discrétisées conservent d'une façon plus précise la masse, la quantité de

mouvement et l'énergie. Ceci peut être un avantage dans des écoulements hypersoniques, parce que les équations sous forme conservative satisfont les relations de Rankine - Hugoniot et produiront les conditions correctes de saut à travers les chocs. Un autre avantage est que la forme de différences finies de ces équations peut être interprétée en tant que lois intégrales sur le volume de contrôle des mailles de calcul (Hirsch, 1990 [21]).

Les équations de quantité de mouvement sous forme conservative peuvent être dérivées en combinant 1.1 et 1.2 pour donner, par exemple, l'équation de quantité de mouvement suivant l'abscisse x (supposant l'hypothèse de Stokes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_x V_z) = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} V \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

L'équation de l'énergie (1.3) peut également être exprimée en termes d'enthalpie totale et de variables conservatives. Une telle forme est extrêmement utile dans la dynamique des fluides et les turbomachines dans les situations où les changements d'enthalpie totale sont faibles (par exemple, dans le cas d'un redresseur). L'équation de quantité de mouvement peut être transformée en:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} p \cdot \vec{V} + \rho \mathbf{g} \cdot \vec{V} + (\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}) \cdot \vec{V}$$

En combinant cette équation avec 1.3 et 2.4, on obtient :

$$\rho \frac{D(H)}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau_{ij} \cdot \vec{V})$$

Avec  $H = h + u_i u_i / 2 = h + (u^2 + v^2 + w^2) / 2$ . Cette équation peut être combinée avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} H = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau_{ij} \cdot \vec{V})$$

Ainsi, les équations conservatives peuvent être écrites comme suit (voir Peyeret et Taylor, 1983, pour une dérivation détaillée de ces équations [22]) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{R_e} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right] + S \quad (1.6)$$

où  $q$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $Q$ , et  $S$  sont données par

$$\begin{aligned}
 q &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \\ \rho e_o \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + p \\ \rho V_x V_y \\ \rho V_x V_z \\ \rho H V_x \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho V_y \\ \rho V_x V_y \\ \rho V_y^2 + p \\ \rho V_y V_z \\ \rho H V_y \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho V_z \\ \rho V_x V_z \\ \rho V_y V_z \\ \rho V_z^2 + p \\ \rho H V_z \end{bmatrix} \\
 T &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ -Q_z + \Phi_1 \end{bmatrix} \\
 P &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ -Q_y + \Phi_2 \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ -Q_z + \Phi_3 \end{bmatrix} \\
 S &= \left( 0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho g_x V_x, \rho g_y V_y, \rho g_z V_z \right)^T
 \end{aligned}$$

où  $Q_x$ ,  $Q_y$ , et  $Q_z$ , sont des taux de transfert de chaleur et  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , et  $\Phi_3$  sont les termes de dissipation visqueuse:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= 2\mu V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu V_x \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \mu V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \mu V_z \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\
 \Phi_2 &= 2\mu V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \mu V_x \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \mu V_z \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\
 \Phi_3 &= 2\mu V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu V_z \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \mu V_x \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mu V_y \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\
 \rho e_o &= \rho H - p = \rho h + \rho \frac{V^2}{2} - p
 \end{aligned}$$

### 2.3. Equations simplifiées du mouvement

Les équations qui régissent l'écoulement peuvent souvent être simplifiées pour fournir des formes plus appropriées pour le traitement analytique ou numérique. Certaines de ces simplifications seront décrites par la suite.

#### a. Equation d'Euler

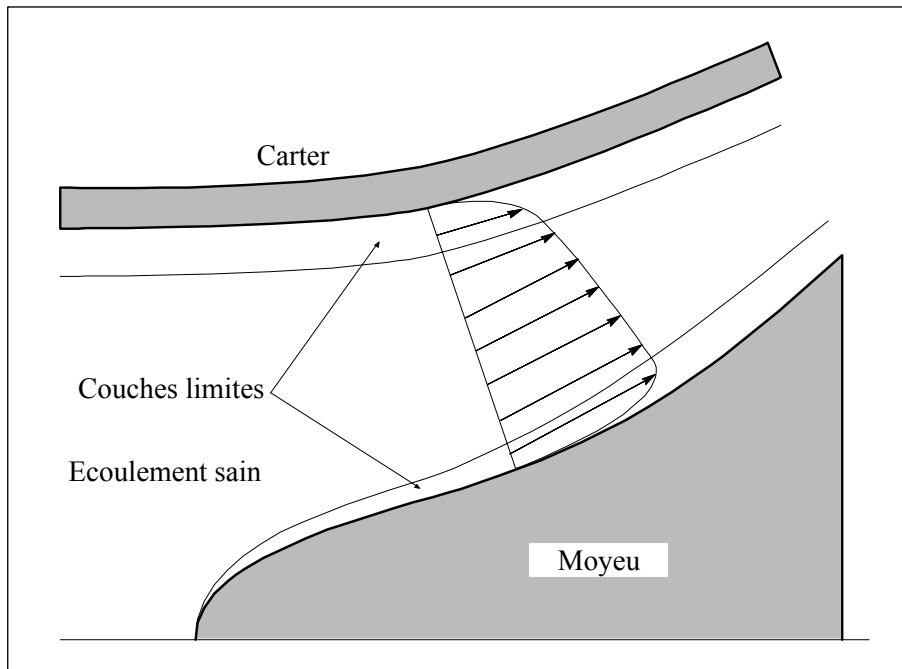
Pour les écoulements non visqueux ( $\mu = 0$ ), l'équation 1.2 est connue comme l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} \quad (1.7)$$

Où  $\vec{F}$  représente les forces externes de volume, comme par exemple l'accélération de la pesanteur ou les forces d'aubages dans l'hypothèse de symétrie axiale dans les turbomachines.

Cette hypothèse est pleinement justifiée dans beaucoup de cas d'importance par la séparation des écoulements en deux zones : une zone dite visqueuse près des parois où les effets dus aux gradients de vitesses sont importants et une zone dite saine dont les effets visqueux sont négligeables (figure 1.2). Dans la zone visqueuse, ce sont les équations de Navier–Stokes qui régissent l'écoulement, souvent sous une forme simplifiée adaptée au rapport des échelles longitudinales et transversales qui

caractérisent les couches limites. Dans la zone saine, on peut utiliser les équations d'Euler avec un important gain en simplicité et temps de calcul.



**Fig.1.2.** Modèle de l'écoulement en trois zones

b. Equation de l'écoulement incompressible

Dans beaucoup d'écoulements, le fluide est incompressible et les gradients de viscosité sont faibles. Les termes visqueux des équations de quantité de mouvement peuvent alors être simplifiés et l'équation d'énergie n'est pas prise en compte. Dans ce dernier cas, l'équation de continuité est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.8)$$

Et l'équation de quantité de mouvement, négligeant les effets de la pesanteur, par :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.9)$$

c. Equations liées aux écoulements potentiels

Un autre niveau d'approximation est constitué par le principe d'irrotationnalité,  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \mathbf{0}$ . Pour le vecteur vitesse dont le rotationnel est nul, on démontre que la vitesse dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (1.10)$$

En substituant cette équation dans l'équation de continuité et en éliminant  $\rho$  dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient :

$$dp = -\rho d \left[ \frac{(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)}{2} \right] \quad (1.11)$$

Qui mène à l'équation suivante dans un système cartésien (Anderson, 1982 [23]):

$$(1 - M_x^2)\phi_{xx} + (1 - M_y^2)\phi_{yy} + (1 - M_z^2)\phi_{zz} - 2M_x M_y \phi_{xy} - 2M_x M_z \phi_{xz} - 2M_y M_z \phi_{yz} = 0 \quad (1.12)$$

Où 
$$\begin{cases} M_x = \frac{V_x}{a}, & M_y = \frac{V_y}{a}, & M_z = \frac{V_z}{a} \\ \phi_x = V_x, & \phi_y = V_y, & \phi_z = V_z \end{cases}$$

Et  $a$  est la vitesse du son dans le milieu. Cette équation est hyperbolique pour les écoulements supersoniques et elliptiques pour des écoulements subsoniques. Beaucoup d'autres simplifications peuvent être faites (Lakshminarayana 1995 [24]), notamment si l'écoulement est incompressible, l'équation 1.11 se réduit à:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (1.13)$$

L'écoulement représenté par ces équations a été, historiquement, le champ le plus largement exploré dans le domaine de la mécanique de fluides. Les solutions de l'écoulement autour d'une aile d'avion dans une grille d'aubes et l'écoulement autour d'autres corps profilés ont pu être obtenus. Robertson [25], Milne-Thompson [26] et Karamachetti [27] fournissent une couverture très bonne de ce domaine pour les cas de corps isolés.

#### d. Equations en terme de fonction de courant

Dans l'écoulement potentiel stationnaire et bidimensionnel, l'équation d'Euler peut être simplifiée en définissant une nouvelle fonction en liaison avec le champ de vitesses. La fonction de courant pour l'écoulement stationnaire et bidimensionnel peut être définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\rho_0}{\rho} \psi_y = V_x \\ \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\rho_0}{\rho} \psi_x = -V_y \end{aligned}$$

En adoptant ces équations, on satisfait automatiquement l'équation de continuité, équation. 1.1.

Si l'écoulement est incompressible, l'équation précédente peut être simplifiée pour donner :

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (1.14)$$

qui est l'équation de Laplace pouvant être résolue sur un domaine par diverses techniques standard. Dans un écoulement bidimensionnel, il est avantageux de résoudre une équation aux dérivées partielles comme 1.13 en  $\psi$  plutôt que de résoudre deux équations en  $V_x$  et  $V_y$ . Cette approche est donc largement répandue pour les écoulements bidimensionnels. L'approche fonction de courant peut également être utilisée dans l'analyse des écoulements visqueux. Les équations en fonction de courant sont largement répandues dans les domaines suivants:

- ✓ Les écoulements non visqueux et incompressibles bidimensionnels ;
- ✓ Écoulements compressibles non visqueux et irrotationnels bidimensionnels ( $\omega = 0$ ) ;
- ✓ Couches limites bidimensionnelles.

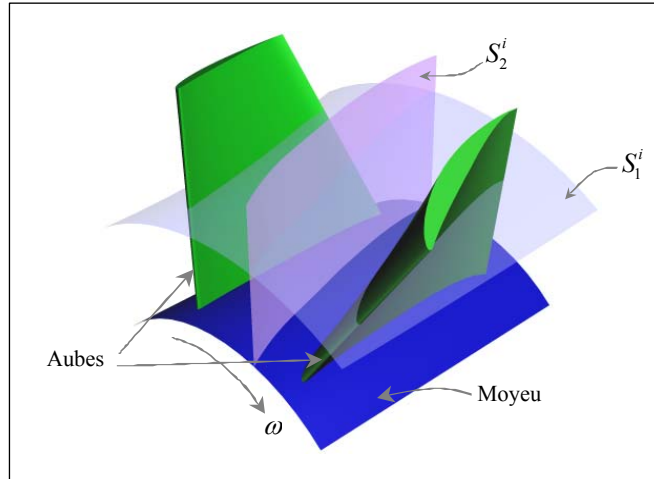
### 3. Equations particulières pour les turbomachines

D'une manière générale, les écoulements dans les turbomachines sont tridimensionnels, instationnaires, visqueux, turbulents et compressibles.

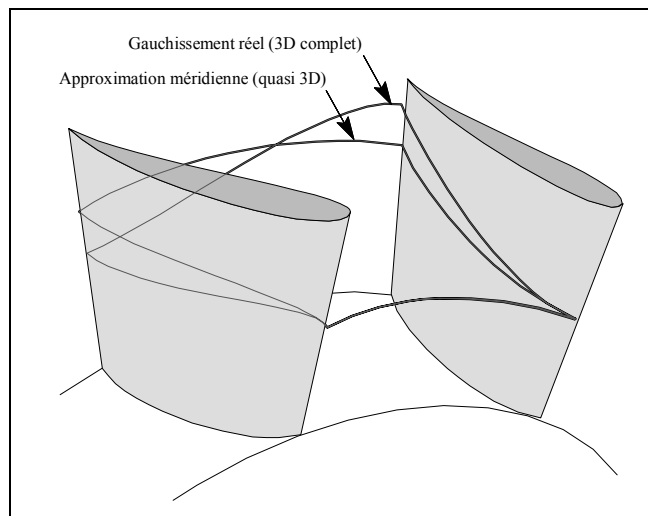
Parmi les approches simplificatrices, on trouve l'hypothèse d'Euler supposant un nombre infini d'aubages. Cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse de symétrie axiale de l'écoulement à condition d'être accompagnée d'un champ de forces d'aubages équivalent.

Depuis longtemps, les concepteurs ont traité l'écoulement tridimensionnel complexe dans les machines comme la superposition d'un certain nombre d'écoulements bidimensionnels. La première formalisation de cette idée a été proposée par Wu en 1952 [13]. Ceci a permis une démarche simplifiée du tracé des pales ou des techniques de sélection de profils. Wu a démontré qu'en combinant les différentes composantes des équations dynamiques qui régissent l'écoulement, on peut obtenir des systèmes d'équations pour les deux types de surfaces définies en figure 1.3. Cette décomposition est à l'origine de deux types d'écoulements : l'écoulement "méridien" et l'écoulement "aube à aube". C'est ainsi que ces deux types des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont appelées, respectivement, surfaces aube à aube et surfaces méridiennes. On peut définir un nombre arbitraire de surfaces de chaque type, mais les méthodes les plus utilisées considèrent une seule surface méridienne

moyenne. Cette simplification équivaut à négliger les différences induites par la proximité des pales sur les surfaces aube à aube (figure 1.4). Néanmoins, la méthode proposée par Hirsch et Warzee [28] prend en compte ces différences par les moyennes azimutales des équations dynamiques.



**Fig.1.3.** Surfaces de courant au sein d'une turbomachine



**Fig.1.4.** Surfaces de courant 3D au sein d'une turbomachine

Sur la figure 2.5, on a représenté une de ces surfaces  $S_1$  sous l'hypothèse de symétrie axiale. On voit ici l'intersection de la surface avec les pales et les lignes de courant moyennes. En outre, on peut apprécier les vecteurs représentant la vitesse absolue d'une particule de fluide  $\vec{V}$  et ses composantes  $V_r$ ,  $V_\theta$  et  $V_z$  ; la vitesse relative (dans le repère relatif tournant avec la machine à vitesse angulaire  $\Omega$ )  $\vec{W}$  et ses composantes  $W_r$ ,  $W_\theta$  et  $W_z$ , et la vitesse d'entraînement  $\vec{U} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ .

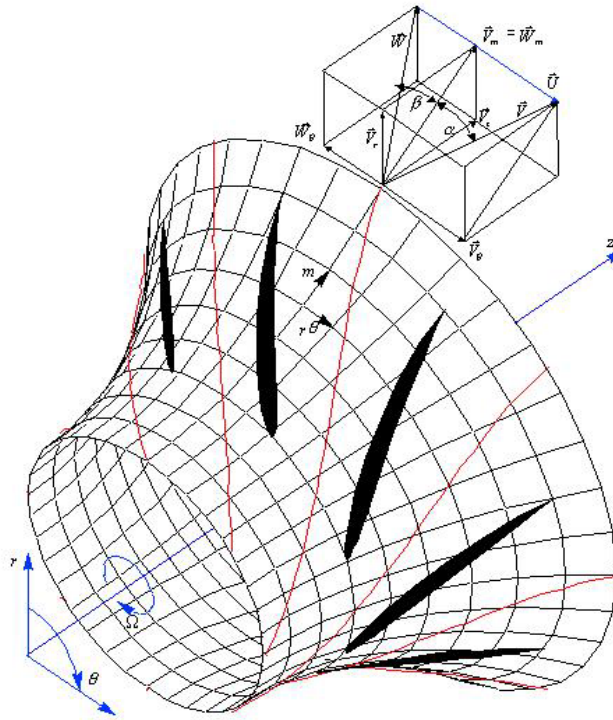
Un paramètre d'importance capitale apparaît sur cette figure la vitesse méridienne  $\vec{V}_m = \vec{V}_r + \vec{V}_z$ . On peut ainsi écrire les relations suivantes :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} \Rightarrow \begin{cases} V_z = W_z, \\ V_r = W_r, \\ V_\theta = W_\theta + \Omega r. \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\tan \alpha = \frac{V_\theta}{V_m} \quad (1.16)$$

$$\tan \beta = \frac{W_\theta}{W_m} \quad (1.17)$$

Où les angles  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les directions absolues et relatives de la vitesse d'écoulement.



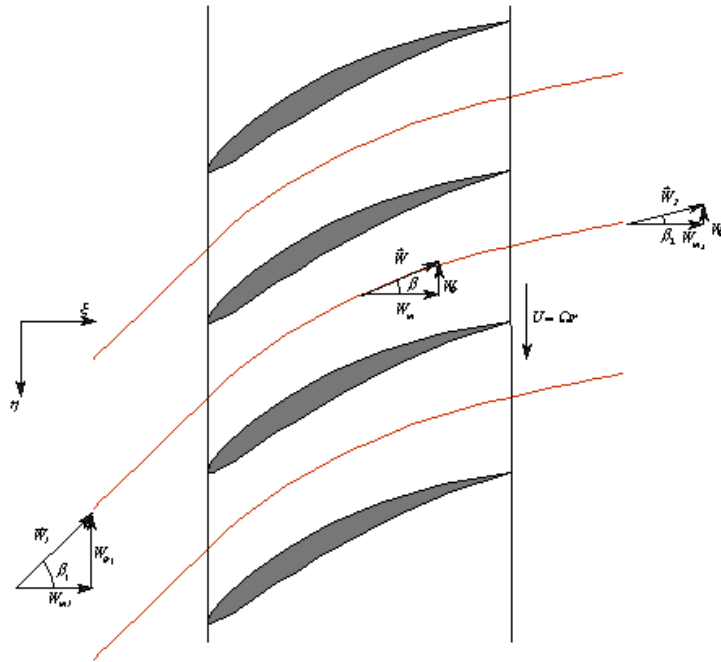
**Fig.1.5.** Définition des paramètres de l'écoulement dans une turbomachine

Chaque surface de courant interceptera la grille en formant une grille circulaire de profils. L'écoulement qui se développe sur chaque surface  $S_1$  peut être étudié à l'aide de la transformation conforme [29] [30] [31] en écrivant :

$$\eta = \frac{t N_a}{2\pi} \int \frac{dm}{r} \quad (1.18)$$

$$\xi = \frac{t N_a}{2\pi} \theta \quad (1.19)$$

Qui transforme le système de coordonnées  $(m, r\theta)$  en  $(\xi, \eta)$  et qui permet de ramener la grille circulaire de la figure 1.5 à la grille plane de la figure 1.6.



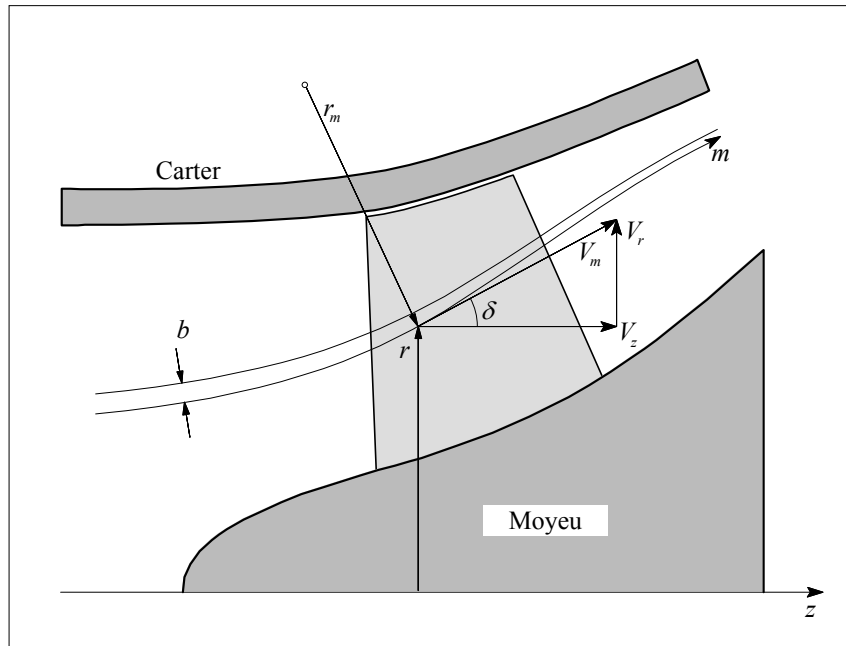
**Fig.1.6.** Définition des paramètres de l'écoulement dans le plan aube à aube transformé

L'écoulement tridimensionnel complet peut donc être modélisé par une série de grilles planes bidimensionnelles, chacune correspondant à une surface  $S_1$  axisymétrique, plus ou moins régulièrement distribuées dans l'espace annulaire. Normalement, six à dix sections seront suffisantes pour représenter correctement l'écoulement dans une machine classique.

L'avantage de cette approche simplifiée réside dans le fait que l'équation d'Euler peut être appliquée à chaque section de façon indépendante pour déterminer les triangles de vitesse à l'entrée et à la sortie de chaque section. La tâche du concepteur consiste à sélectionner la forme du profil pour obtenir la déflexion requise entre l'angle  $\beta_1$  à l'entrée et l'angle  $\beta_2$  à la sortie tout en limitant les pertes d'énergie par frottement.

Sur la figure 1.7, on montre le plan méridien permettant de définir le rayon de courbure des lignes de courant méridiennes  $r_m$  et son angle de conicité  $\delta$ . D'autre part, on introduit, sur la même figure, l'épaisseur relative des tubes de courant  $b$  qui avec la relation  $\rho_o b_o r_o V_{m_o} = \rho b r V_m = cte.$ , issue de l'équation de continuité (le

premier terme correspond aux valeurs à l'infinie amont), permet de compléter les calculs impliqués par la transformation conforme.



**Fig.1.7** Définition des paramètres de l'écoulement dans le plan méridien

Les équations du mouvement régissant les écoulements turbulents en turbomachines sont fortement non linéaires et la plupart des solutions analytiques disponibles sont pour des écoulements très simples. La résolution implique plusieurs hypothèses selon le type de machine, la géométrie des aubages et les conditions d'écoulement. Les premières tentatives pour résoudre numériquement ces équations sont apparues vers la fin des années 60 (Cooper et Bosch, 1966 [32]; Marsh, 1968 [33]). L'analyse tridimensionnelle classique est basée sur une résolution itérative des équations axisymétriques de l'écoulement méridien et des formulations aube à aube (solution en grilles d'aubes). Les techniques suivantes peuvent être classées comme des solutions axisymétriques :

- L'équilibre radial simplifié ;
- Théorie des disques actuateurs ;
- Equations moyennées et leurs solutions.

Les solutions non axisymétriques sont généralement classées ainsi :

- Méthode des lignes et surfaces de portance ;
- Méthodes quasi-tridimensionnelles ;

- Solutions numériques des équations tridimensionnelles (Euler et Navier Stokes).

Les solutions axisymétriques sont employées pour prédire globalement les variations radiales des propriétés de l'écoulement. Ces solutions sont strictement valables loin en amont et en aval des pales, mais certaines hypothèses, comme celle d'Euler, permettent de les utiliser à l'intérieur de la zone aubée. Une fois que les valeurs locales des paramètres de l'écoulement sont connues, les modèles aube à aube peuvent être utilisés pour prévoir les variations azimutales de la vitesse et de la pression. Cette technique de combiner les théories axisymétriques avec la théorie des grilles d'aubes est limitée normalement aux turbomachines axiales. Les théories de lignes de portance et de surfaces de portance sont principalement utilisées pour l'analyse axiale, notamment des hélices propulsives. Ces deux méthodes sortent du cadre de notre travail et par conséquent elles ne seront pas exposées.

### 3.1. Equations dans le repère relatif

Il est souvent plus utile, pour ce qui concerne l'étude des turbomachines, d'exprimer les équations régissant l'écoulement en termes de la vitesse relative  $\vec{W}$  et ses composantes  $W_r$ ,  $W_\theta$  et  $W_z$ , ce qui revient à les exprimer dans le repère relatif. En mouvement relatif, l'équation de continuité devient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (1.24)$$

En introduisant la vitesse relative dans l'équation d'Euler (1.7), et après un certain nombre de manipulations, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \times \vec{\nabla} \times \vec{W} + 2\vec{\Omega} \times \vec{W} = -\vec{\nabla} I + T \vec{\nabla} S + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (1.25)$$

Où  $T$  et  $S$  représentent respectivement la température et l'entropie pour les écoulements compressibles, et la quantité

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}$$

est appelée rothalpie. Il s'avère qu'elle est approximativement constante le long les lignes de courant.

Il convient aussi de rappeler la relation définissant l'enthalpie :

$$h = \int \frac{dp}{\rho} + \int TdS$$

L'équation (1.25), sous cette forme, est connue comme l'équation de Croco ou forme énergétique de l'équation dynamique. Le terme  $\vec{\nabla} S$ , généralement négligé en fluide incompressible, est associé aux pertes génératrices d'entropie et aux échanges de chaleur avec l'extérieur.

En négligeant la pesanteur, le terme de forces de volume peut être séparé en forces d'aubages et forces de dissipation :

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_d \quad (1.26)$$

En l'absence de décollements ou de régimes fortement désadaptés aux pales, les forces d'aubage sont perpendiculaires à la vitesse relative :

$$\vec{F}_b \cdot \vec{W} = 0 \quad (1.27)$$

D'autre part, les forces de dissipation sont souvent modélisées par des corrélations impliquant sa proportionnalité au carré de la vitesse relative et de sens opposé :

$$\vec{F}_d = -f_d \vec{W} |\vec{W}| \quad (1.28)$$

La projection de l'équation dynamique (1.25) dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$  ainsi que celle de continuité peuvent être aussi écrites sous forme conservative (Fan et Lakshminarayana 1991 [34]) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rF)}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{L}{r} + M \quad (1.29)$$

Avec :

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho W_r \\ \rho W_\theta \\ \rho W_z \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \rho W_r \\ p + \rho W_r^2 \\ \rho W_r W_\theta \\ \rho W_r W_z \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho W_\theta \\ \rho W_r W_\theta \\ p + \rho W_\theta^2 \\ \rho W_\theta W_z \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho W_z \\ \rho W_r W_z \\ \rho W_z W_\theta \\ p + \rho W_z^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ p + \rho(W_\theta + \Omega r)^2 \\ -\rho W_r (W_\theta + 2\Omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho [F_r - F_d \cos \beta \sin \delta] \\ \rho [F_\theta - F_d \sin \beta] \\ \rho [F_z - F_d \cos \beta \cos \delta] \end{bmatrix}$$

La première ligne de ces vecteurs correspond à l'équation de continuité, les trois lignes suivantes sont les projections de l'équation dynamique dans l'ordre  $z$ ,  $r$  et  $\theta$ .

### 3.2 Ecoulement aube à aube

Bien qu'il s'agisse de solutions proprement bidimensionnelles, elles sont citées ici car elles constituent un des socles fondamentaux pour les solutions quasi-tridimensionnelles.

Nous avons vu que lorsque l'écoulement est incompressible et irrotationnel, l'écoulement aube à aube est régi par les équations suivantes qui correspondent à l'écoulement potentiel :

$$\begin{aligned}\psi_{xx} + \psi_{yy} &= 0 \\ \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0\end{aligned}$$

Les conditions aux limites à satisfaire par ces équations sont que la vitesse et la pression à l'infini amont correspondent aux valeurs de l'écoulement libre non perturbé (par conséquent,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  ou  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  sont spécifiés en amont) et que les surfaces des pales sont des lignes de courant.

Les méthodes disponibles pour résoudre l'écoulement potentiel traversant une grille d'aubes (problème direct) ou pour concevoir une grille d'aubes susceptible de satisfaire une distribution donnée de pression (problème inverse) peuvent être brièvement classées comme suit :

- 1. Méthode de la transformation conforme :** Dans cette méthode, l'écoulement autour d'une grille d'aubes est obtenu par transformation de l'écoulement autour d'un cylindre, écoulement parfaitement connu.
- 2. Méthode des singularités :** C'est une méthode d'approche où la pale est remplacée par un ensemble de singularités comme des sources, des puits ou des tourbillons.
- 3. Méthode Numérique :** Dans cette méthode, les équations sont résolues numériquement sur un maillage en utilisant un schéma de relaxation. La technique des différences finies ou la méthode des éléments finis est utilisée.

4. **Méthode globale** : Dans la méthode développée par Wislicenus (1965) [35], la déviation entre la ligne moyenne des profils et la ligne de courant moyenne est obtenue empiriquement en utilisant des données aube à aube expérimentales. Les effets dus à la cambrure et à l'épaisseur des profils sont déterminés à partir d'une distribution de pression donnée.
5. **Méthode de l'hodographe** : Dans cette méthode, on ramène l'écoulement en grille d'aubes à une fraction de l'écoulement potentiel source–puits. Cette méthode tombée en désuétude mérite une attention particulière dans le cadre de l'avant-projet. C'est une des rares méthodes inverses qui contrôle, au stade de la conception, le champ de vitesses en tout point d'un écoulement bidimensionnel incompressible : écoulement inter–aubages ou entre parois solides. Son handicap majeure est qu'elle est inopérante dans les zones à forts gradients proches du bord d'attaque et du bord de fuite, particulièrement importantes au demeurant (Weiss 1996 [36]).

Une bonne description des deux premières méthodes appliquées aux écoulements autour des corps isolés (aile, cylindre, etc.) est donnée par Robertson (1965).

Les méthodes décrites ci-dessus peuvent être utilisées pour la conception d'un profil ou pour l'analyse de l'écoulement autour d'un profil donné (problème direct). La méthode de singularités est l'une des techniques les plus largement répandues en raison de sa précision et de la facilité avec laquelle elle peut être programmée dans les ordinateurs actuels. Parmi les principaux travaux de référence, on citera : Scholz (1965) [37], Gostelow (1984) [38], Borisenko (1962) [39], Robertson (1965), et John Sen et Bullock (1965) [40].

### 3.3. La solution tridimensionnelle

La simulation numérique des écoulements (en anglais CFD, pour Computational Fluid Dynamics) a stimulé une approche unifiée allant de l'analyse à la conception des turbomachines. La pratique de traiter les turbines hydrauliques et à vapeur, pompes, et compresseurs à gaz et d'autres turbomachines séparément a laissé sa place à une approche plus intégrée. Ces développements sont facilités par un dénominateur commun : les équations qui les régissent sont les mêmes pour

toutes les turbomachines, avec en plus des équations de comportement supplémentaires utilisées pour manipuler les cas spéciaux (par exemple, écoulements bi phasiques). Les conditions aux limites rencontrées dans les turbomachines sont parmi les plus complexes concernant le domaine de la simulation numérique des écoulements.

L'apparition de la simulation numérique des écoulements dans les années 70 a fourni une impulsion importante pour résoudre les équations d'Euler et de Navier – Stokes régissant écoulements externes et internes. Le progrès principal a été ultérieurement accompli dans le développement des techniques numériques, de la génération de maillage, de la modélisation de la turbulence, de l'application des conditions aux limites, pré et post-traitement des données et de l'architecture des ordinateurs. La plupart des techniques utilisées pour la résolution des équations de Navier–Stokes peuvent être classées en différences finies, surfaces ou volumes finis, éléments finis et méthodes spectrales. Seulement les deux premières techniques sont largement répandues dans le domaine des turbomachines. Les techniques de calcul numérique fournissent une méthode efficace pour l'analyse et la conception de turbomachines. L'utilisation de la CFD par les constructeurs de turbomachines a augmenté sensiblement pendant la décennie passée, ayant pour résultat un cycle de développement plus court de leurs produits. Combinée avec des mesures, la CFD fournit un outil complémentaire pour la simulation, la conception, l'optimisation et, d'une manière primordiale, l'analyse des écoulements tridimensionnels complexes jusqu'ici inaccessibles à l'ingénieur. Dans beaucoup de cas, la simulation numérique des écoulements fournit le seul moyen pour accéder aux informations détaillées du champ étudié, car les essais réels des turbomachines, avec des mesures détaillées dans les canaux tournants sont difficiles, coûteux et, dans beaucoup de cas, impossibles.

Les éléments essentiels pour une résolution précise et efficace de l'écoulement peuvent être résumés comme suit:

1. Équations régissant l'écoulement, y compris les équations de transport de turbulence (avec validation des approximations faites)

2. Application des conditions aux limites appropriées
3. Résolution et orthogonalité adéquate du maillage
4. Modélisation de la turbulence
5. Techniques numériques ; dissipation artificielle optimale, discrétisation précise, bon historigramme de convergence et évaluation appropriée
6. Développement efficace du code et des algorithmes, y compris la vectorisation
7. Architecture de l'ordinateur, y compris le traitement parallèle
8. Évaluation des techniques de calcul par étalonnage et validation expérimentale

Les techniques de calcul largement répandues dans la pratique en matière de turbomachines peuvent être classifiées comme suit:

1. Solveurs non visqueux (Euler) pour écoulements bidimensionnels
2. Techniques quasi-tridimensionnelles
3. Calcul de couches limites y compris les techniques intégrales de quantité de mouvement
4. Techniques de Navier–Stokes parabolisées / space marching
5. Solutions d'Euler et de Navier–Stokes complètes pour des écoulements compressibles et incompressibles

Adler (1980) [41], McNally et Sockol (1981) [42], et Lakshminarayana (1991) [43] ont présenté des articles de synthèse de ces méthodes de calcul pour les écoulements en turbomachines. Lakshminarayana (1986) [44] a passé en revue les modèles de turbulence adaptés. Les sujets concernant la transition en général et l'application aux turbomachines en particulier, ont été résumés par Narasimha (1985) [45] et Mayle (1991) [46], respectivement. Bien que la modélisation de la transition soit importante pour la simulation de l'écoulement, l'état actuel des connaissances sur ce sujet est insuffisant pour réaliser une bonne prévision de la transition pour les turbines, les compresseurs et les pompes.

Dans le domaine du projet des turbomachines, les équations de Navier–Stokes sont employées dans les étapes finales de la conception pour contrôler les problèmes éventuels (par exemple, séparation laminaire et turbulente, zones de gradient de pression adverse, localisation d'ondes de choc, jeux radiaux et autres

perthes) ; ils ont aussi commencé à trouver une place intéressante dans les premières étapes de la conception.

### 3.4. Equations moyennées en azimut

En raison des grandes difficultés rencontrées dans la résolution des équations du mouvement, de l'énergie et d'état, plusieurs simplifications ont été proposées pour la résolution de l'écoulement méridien. L'une des techniques les plus rapides consiste à résoudre, pour un écoulement "moyen en azimut " (propriétés moyennes en  $\theta$ ), les équations d'une façon globale. Dans cette technique, les équations du mouvement sont ramenées à une moyenne dans le plan aube à aube éliminant les termes en  $\partial / \partial \theta$ . L'élimination de cette variable indépendante simplifie considérablement les équations.

L'une des premières approches est due à Smith (1966) [47], qui a adopté cette technique des moyennes pour développer une forme approximative de l'équation de l'équilibre radial. Les extensions successives de ce concept sont dues à Horlock et Marsh (1971) [48], à Hirsch et Warzee (1976) [54] (1979) [49], Sehra et Kerrebrock (1981) [50], Jennions et Stow (1985, 1986) [51], Adamczyk (1985) [52], et Hirsch et Dring (1987) [53].

Dans la pratique, il y a trois techniques pour moyenniser les équations de l'écoulement en turbomachines. Elles peuvent être classées comme suit:

- **Moyenne algébrique.** Elle est similaire à la moyenne de Reynolds utilisée pour l'équation de Navier-Stokes avec turbulence.
- **Moyenne pondérée en densité ( $\rho$ ).** Elle est similaire à la moyenne de Favre utilisée pour l'équation de Navier–Stokes avec turbulence.
- **Moyenne pondérée en masse ( $\rho V_z$ ):** Cette approche introduit le facteur de blocage dû à l'épaisseur des pales aussi bien qu'aux couches visqueuses (couches limites et sillages des pales) sur la zone d'écoulement ; elle est utilisée dans le processus de conception.

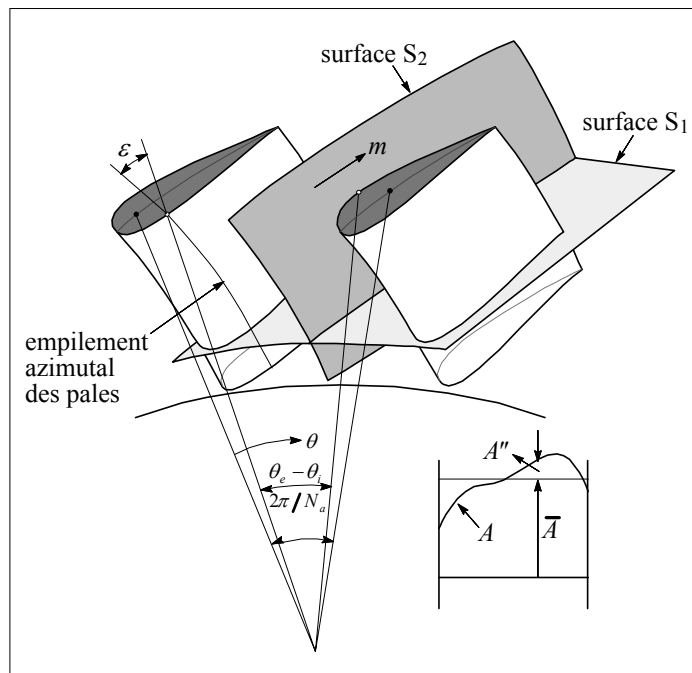
Les deux premières moyennes présentent des corrélations ou des termes d'interaction liés à l'asymétrie dans la direction tangentielle. Dans le dernier cas, les

termes sont issus de la moyenne temporelle, alors que dans le premier cas, les termes de corrélation apparaissent en raison de la moyenne spatiale aube à aube.

Le concept est illustré sur la figure 1.8. Le champ d'écoulement peut être divisé en une série de surfaces aube à aube ( $S_1$ ) et une surface méridienne ( $S_2$ ).

Les techniques quasi-tridimensionnelles, utilisant les équations moyennées en azimut, impliquent la résolution de l'équation de l'équilibre radial moyennée en azimut sur une surface  $S_2$  moyenne et la solution exacte des équations tangentielles et axiales de quantité de mouvement sur plusieurs surfaces aube à aube  $S_1$ .

Dans ce qui suit, on décrira l'approche originale de Hirsch et Warzee (1976) [54]. La machine à un nombre de pales  $N_a$  qui présentent un angle d'empilement azimutal  $\varepsilon(r,z)$ . La différence angulaire entre les surfaces intrados et extrados forment l'un des canaux d'écoulement et  $\theta_e - \theta_i$  est une fonction de  $r$  et  $z$ .



**Fig.1.8.** Surfaces de courant  $S_1$ - $S_2$  et notations utilisées pour les moyennes.

Pour une variable  $A$  quelconque de l'écoulement ( $W_r$ ,  $W_\theta$ ,  $W_z$ ,  $I$ ,  $p$ ,  $s$ ,  $T$  ou  $\rho$ ), on peut définir la moyenne algébrique  $\bar{A}$  et la moyenne pondérée par la densité  $\hat{A}$  comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + A'' & \text{avec } \overline{A''} &= 0 \\ A &= \hat{A} + A' & \text{avec } \overline{A'} &\neq 0; \overline{\rho A'} = 0 \end{aligned}$$

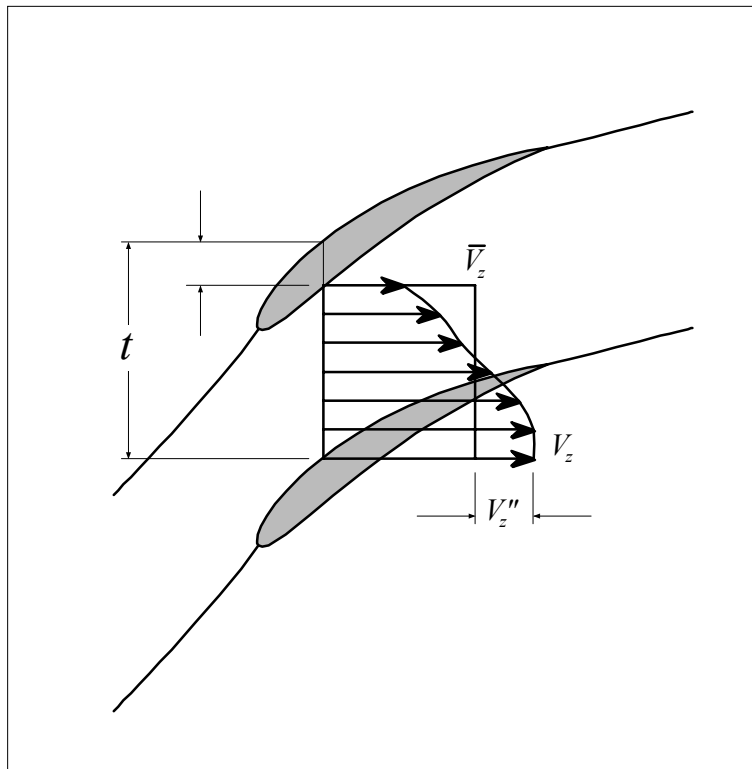
Où

$$\bar{A} = \frac{\int_{\theta_i}^{\theta_e} A d\theta}{\theta_e - \theta_i}, \quad \hat{A} = \frac{\int_{\theta_i}^{\theta_e} \rho A d\theta}{\int_{\theta_i}^{\theta_e} \rho d\theta} = \frac{\overline{\rho A}}{\bar{\rho}}$$

La différence angulaire entre l'extrados et l'intrados des pales peut être exprimée par l'expression :

$$\theta_e - \theta_i = \frac{2\pi}{N_a} b = \frac{2\pi}{N_a} \left(1 - \frac{e}{t}\right)$$

Où  $b$  est le facteur de blocage qui exprime le rapport entre la surface disponible pour le passage du fluide et la surface totale imposée par la machine,  $e$  l'épaisseur et  $t$  le pas des pales (figure 1.9). Ces trois termes sont fonctions de  $z$  et  $r$ . Le facteur de blocage ainsi défini prend en compte seulement la géométrie aube à aube, mais il peut être généralisé pour inclure l'épaisseur de déplacement des couches limites.



**Fig.1.9.** Définition des variations dans le plan aube à aube

On peut démontrer les relations suivantes :

$$\hat{A} - \bar{A} = \overline{\rho' A''} / \bar{\rho} = -\bar{A}'$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho A})}{\partial r} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial r} (b \rho \hat{A}) - \frac{N}{2\pi b} \left[ (\rho A)_e \frac{\partial \theta_e}{\partial r} - (\rho A)_i \frac{\partial \theta_i}{\partial r} \right]$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho A})}{r \partial \theta} = \frac{N}{2\pi b r} \left[ (\rho A)_e - (\rho A)_i \right]$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho A})}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \rho \hat{A}) - \frac{N}{2\pi b} \left[ (\rho A)_e \frac{\partial \theta_e}{\partial z} - (\rho A)_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right]$$

Par application de ces relations à l'équation de continuité, on obtient son équivalent moyenné :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r b \bar{\rho} \hat{W}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r b \bar{\rho} \hat{W}_z) = 0$$

En moyennant l'équation de quantité de mouvement radiale qui est la principale équation régissant l'écoulement méridien, on obtient après un certain nombre de transformations (Hirsch et Warzee (1976) [54]) :

$$\hat{W}_z \left( \frac{\partial \hat{W}_r}{\partial z} - \frac{\partial \hat{W}_z}{\partial r} \right) - \frac{\hat{W}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{V}_\theta) = \hat{T} \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{I}}{\partial r} + \frac{\bar{F}_r}{\bar{\rho}} + \frac{F_{b,r}}{\bar{\rho}} - \sum_{i=1}^5 G_i / \bar{\rho}$$

Où le terme

$$F_{b,r} = \frac{p_e - p_i}{b t} \tan \varepsilon_m$$

est la composante radiale de la force d'aubage apparue comme une conséquence du processus de moyenne des équations. L'angle  $\varepsilon_m$  représente le dévers ou l'inclinaison de la pale dans le sens tangentiel (figure 2.10). D'autres termes apparaissent de la même façon à cause des variations azimutales :

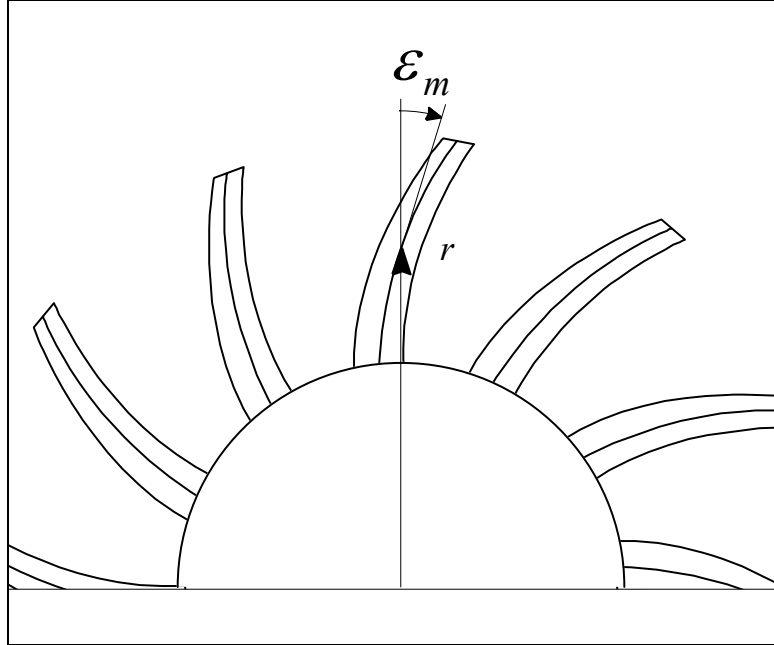
$$G_1 = \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial r} (b r \bar{\rho} \overline{W'_r W'_r})$$

$$G_2 = \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial z} (b r \bar{\rho} \overline{W'_r W'_z})$$

$$G_3 = -\frac{1}{r} \bar{\rho} \overline{W'_\theta W'_\theta}$$

$$G_4 = -\frac{1}{2b} \frac{\partial b}{\partial z} \left[ (\hat{T} s'_e - h'_e) \rho_e + (\hat{T} s'_i - h'_i) \rho_i \right]$$

$$G_5 = -\left( h' - \hat{T} s' \right) \frac{\partial \rho}{\partial r} - \rho T' \frac{\partial s'}{\partial r}$$



**Fig.1.10.** Définition de l'angle d'empilement azimuthal

Après introduction de la fonction de courant méridienne  $\psi_m$  définie par :

$$\hat{W}_z = \frac{1}{\bar{\rho} r b} \frac{\partial \psi_m}{\partial r}$$

$$\hat{W}_r = -\frac{1}{\bar{\rho} r b} \frac{\partial \psi_m}{\partial z}$$

On obtient l'équation moyennée pour l'écoulement méridien :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r b \bar{\rho}} \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r b \bar{\rho}} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \right) = \frac{1}{\hat{W}_z} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} - \hat{T} \frac{\partial \hat{s}}{\partial r} - \frac{\hat{W}_\theta}{r} \frac{\partial (r \hat{V}_\theta)}{\partial r} - \frac{F_{b,r}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{F}_r}{\bar{\rho}} + \sum_{i=1}^5 \frac{G_i}{\bar{\rho}} \right)$$

Cette démarche présente un avantage par rapport aux équations en termes cinématiques (1.20-23, 1.25 ou 1.29), car elle présente une seule équation pour l'écoulement méridien pour laquelle il est possible d'utiliser des techniques standard de résolution. Le nécessaire couplage avec le calcul aube à aube se fait par le terme qui contient  $\hat{V}_\theta$  (ou  $\hat{W}_\theta$ ). Les pertes peuvent être introduites dans le terme  $\bar{F}_r$ , par le biais d'une loi établissant l'opposition de ces forces visqueuses avec la vitesse relative ( $\bar{F} \propto -\bar{W}$ ). Enfin, cette équation présente l'inconvénient de

contenir l'inverse de la vitesse relative axiale, ce qui empêche son utilisation dans les machines radiales ou dans les écoulements avec recirculations. Ces problèmes seront résolus en prenant en compte la composante axiale de la quantité de mouvement moyennée ou à partir d'une formulation complète en termes de fonction de courant.

Les équations obtenues dans le processus de moyenne en azimut présentent la vitesse tangentielle relative  $W_\theta$  dans le seconde membre ou terme source, ce qui implique le couplage avec un calcul aube à aube explicite ou, comme a montré récemment Bergeron (1994) [55], par une résolution de l'équation de la pression sur les aubages (Larrey 1991 [56]).

Les équations moyennées peuvent aussi être utilisées pour les calculs aube à aube (Hirsch et Warzee, 1979 [49]).

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche générale du processus de conception des turbomachines en indiquant les différents types de modélisations utilisées et cela dans la perspective de simuler l'écoulement dans un stator d'une turbine.

Donc, le développement des équations de mouvement et de conservation ainsi que d'autres paramètres de l'écoulement est nécessaire pour bien choisir la géométrie, le maillage, les conditions aux limites ainsi que les différents modèle utilisés dans la simulation.

# Chapitre 2

Théorie de la turbulence

## **Introduction**

La complexité de la turbulence, pendant des siècles, a attiré l'intérêt des scientifiques, des philosophes et des poètes. Les images et les métaphores de la turbulence et des fleuves impétueux de la mer orageuse, sont omniprésents dans la littérature, et les dessins et écritures de Leonardo da Vinci peuvent être considérés comme les premières études scientifiques sur la turbulence, avec certains détails réalistes du problème.

De l'autre main, l'intérêt pour la turbulence est clairement compréhensible en raison de son intérêt pratique dans des applications allant de l'aéronautique navale et du génie à l'étude du climat et la météo.

Au siècle dernier, les oeuvres de L. Euler, Navier LMH, GG Stokes, O. Reynolds, ont donné la base d'un domaine de recherche qui est encore ouvert aujourd'hui. Même si les équations qui régissent le comportement turbulent sont bien connues, la compréhension globale de la question fait encore défaut.

### **1. Notions sur les écoulements turbulents**

#### **Qu'est ce que la turbulence ?**

La turbulence est une propriété d'un écoulement, non du fluide utilisé. Il n'existe pas de véritable définition de la turbulence car il est difficile de définir la turbulence par des critères simples. On la caractérise par ses propriétés.

La turbulence apparaît lorsque la source d'énergie qui met le fluide en mouvement est suffisamment intense devant les effets visqueux que le fluide oppose pour se déplacer.

Une possibilité consiste à qualifier un écoulement de turbulent dès que le champ de vitesse présente un caractère chaotique (absence de toute périodicité) dans l'espace ou le temps. Mais il existe des écoulements "déterministes" qui présentent des caractères chaotiques, comme ceux dans les turbomachines. Le caractère aléatoire de l'écoulement n'est qu'une des facettes de la turbulence. Il impose de traiter les écoulements turbulents par des méthodes statistiques.

Quand l'écoulement est turbulent, les grandeurs physiques macroscopiques (vitesse, pression) varient de façon rapide et aléatoire.

Un écoulement turbulent est nécessairement rotationnel. La turbulence se caractérise aussi par une diffusivité élevée (température, quantité de mouvement, etc.). Un écoulement turbulent est donc un écoulement à grand nombre de Reynolds.

Une des manifestations spectaculaires du caractère chaotique est la sensibilité aux conditions initiales : un système dynamique complexe placé dans des conditions initiales extrêmement peu différentes peut évoluer au cours du temps de façons très différentes. Ainsi, les prévisions météorologiques qui sont initiées avec un état approximatif de l'atmosphère (faute de pouvoir mesurer vitesse, température, pression et humidité en tous points) s'écartent progressivement de la situation réelle. Au delà d'une dizaine de jours, les dépressions et anticyclones de la simulation n'ont plus rien de commun avec ceux de l'atmosphère réelle. Henri Poincaré avait découvert dès la fin du dix-neuvième siècle que trois corps en interaction gravitationnelle pouvaient avoir un comportement chaotique. Il fallut attendre les années soixante et les simulations numériques du météorologue Edward Lorenz pour que les idées de Poincaré soient appliquées au chaos en mécanique des fluides.

Un autre aspect essentiel de la turbulence est sa capacité à mélanger rapidement que ce soit la quantité de mouvement, la chaleur ou la masse. Les fluctuations du champ de vitesse se produisent sur une large gamme d'échelles spatiales et assurent très efficacement la production de forts gradients de concentration qui sont finalement atténués par les mécanismes de diffusion moléculaire. L'existence de "tourbillons" à toutes les échelles spatiales, depuis la plus grande dimension de l'écoulement jusqu'à une échelle assez petite pour la viscosité.

### **Propriétés essentielles**

1. Phénomènes instationnaires : les écoulements turbulents sont fortement irréguliers : température, vitesse, pression, et parfois masse volumique sont instationnaires.

2. Phénomènes non linéaires : les équations de Navier Stokes ont des termes non linéaires à l'origine de la création d'harmonique supérieure et inférieure.
  - a. Ce caractère non linéaire est associé à la coexistence au sein de l'écoulement de mouvement à des échelles (ou à des longueurs d'onde) très différentes.
  - b. L'énergie est transférée entre ces diverses échelles.
  - c. La répartition d'énergie s'effectue depuis les plus grosses structures (grandes longueurs d'onde) jusqu'aux plus petites.
  - d. L'énergie de grosses structures provient quand à elle de l'écoulement moyen.
  - e. La taille des grosses structures est limitée par l'étendue spatiale des phénomènes (dimension d'un canal, dimension de la couche limite...).
  - f. La limite des plus petites structures est liée au caractère dissipatif des écoulements turbulents (échelle de Kolmogorov).
3. Phénomène dissipatif : la viscosité du fluide est à l'origine de la dissipation de l'énergie cinétique produite aux grandes longueur d'onde. Cette énergie se transforme en énergie interne.
  - a. En l'absence d'apport d'énergie (par gradient de l'écoulement moyen ou par agitation imposé), l'énergie cinétique turbulente décroît rapidement dans le temps.
  - b. Certains écoulements de caractère aléatoire ne présente pas d'effets dissipatifs ; ils ne rentrent pas dans le cas des écoulements turbulents (ondes acoustiques aléatoires par exemple).
  - c. Les écoulements turbulents se rencontrent seulement en fluide visqueux.

4. Phénomènes relevant de la mécanique des milieux continus :

Dans le cas général, les écoulements turbulents relèvent de la mécanique des milieux continus. Il suffit pour cela de comparer la longueur caractéristique des plus petits phénomènes au libre parcours moyen des molécules.

On considère par exemple le cas d'une couche limite à pression et à température constantes.

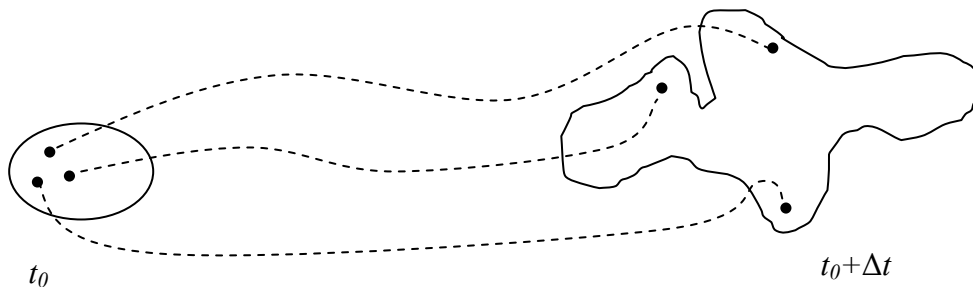
- a. Dimensions des plus petites échelles dissipatives (échelle de Kolmogorov) est de l'ordre de  $1/10$  mm ; les fluctuations de vitesse sont de l'ordre de 10% de la vitesse extérieure et leur fréquence maximale est de quelques dizaines de kHz.
- b. Le libre parcours moyen est par contre de l'ordre de  $10^{-4}$  mm, la vitesse d'agitation thermique est voisine de 500 m/s, la fréquence des collisions est de l'ordre de  $5 \times 10^6$  kHz.

⇒ On est bien dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus.

#### 5. Phénomènes tridimensionnels et rotationnels :

L'écoulement moyen peut être bidimensionnel, voire monodimensionnel, mais il apparaît des fluctuations de vitesse selon les trois directions. De plus, le champ de vitesse est rotationnel.

6. Phénomènes diffusifs : les écoulements turbulents ont des propriétés de diffusion qui assure le mélange de quantité de mouvement, de chaleur et de masse au sein du fluide. Particularité intéressante pour la dispersion des contaminants et le mélange des composants (chimie, combustion).



**Fig.2.1**

#### 7. Phénomènes liés à la nature de l'écoulement :

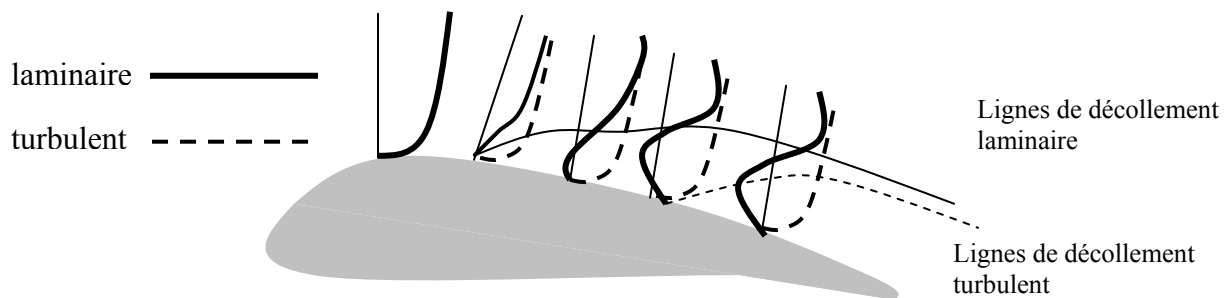
La turbulence est un phénomène lié à la nature de l'écoulement et non celle du fluide. Ainsi les écoulements turbulents se rencontre aussi bien dans les gaz que les fluides.

8. Phénomènes imprédictibles :

- a. Mathématiquement, on ne sait pas démontrer l'unicité de la solution des équations de Navier Stokes.
- b. De plus, le caractère non linéaire des équations conduit à une amplification des perturbations.
- c. Dans le cas d'une méthode de calcul supposée parfaite, les conditions initiales doivent être déterminées avec précision.
- d. Cette détermination est impossible compte tenu des échelles très diverses au sein de l'écoulement.

**Conséquences pratiques**

- Augmentation du coefficient de frottement pariétal (pente de la vitesse plus forte au voisinage de la paroi).
- Retardement du point de décollement sur les ailes en incidence : la diffusion turbulente transporte la quantité de mouvement vers les zones très ralenties

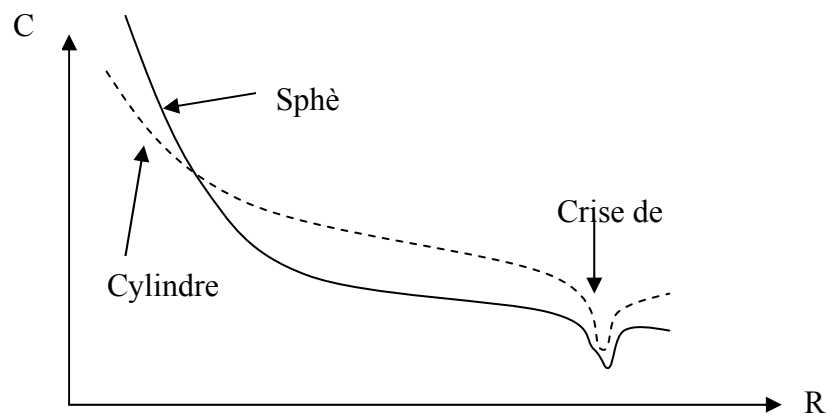


**Fig.2.2**

Une des conséquences du retard au décollement est une diminution de la traînée

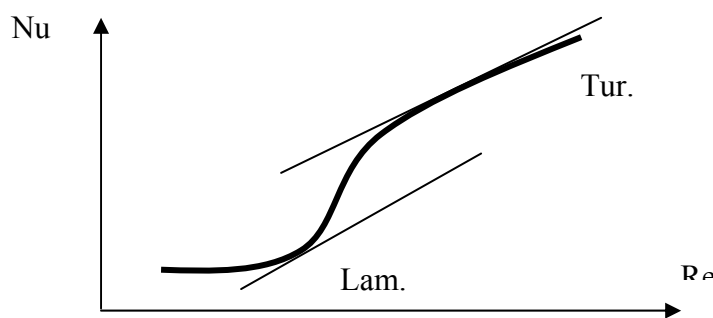
globale ( $C_x = \frac{2F_x}{\rho U^2 S}$ ).

Remarque : s'il n'y a pas de décollement, la traînée est plus faible en régime laminaire.



**Fig.2.3**

- Augmentation de l'épaisseur de la couche limite.
- Augmentation du flux de chaleur (nombre de Nusselt plus important).



**Fig.2.4**

### Configurations fondamentales

#### 1. Les écoulements de paroi

- Ecoulement en conduite, couche limite, parois lisses ou rugueuses...
- Ils représentent de très nombreuses applications pratiques.
- La présence d'une paroi soulève de nombreux problèmes à son voisinage.

#### 2. Les écoulements libres

Sans frontières matérielles, on distingue deux catégories :

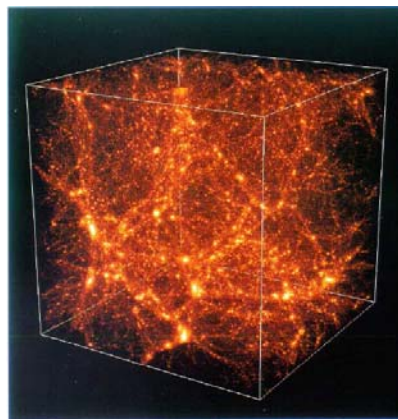
- Ecoulement où les contraintes de cisaillement existent dans toute la partie utile. Il s'agit de Jets, sillage, couche de mélange. Ce type d'écoulement présente toujours un point d'inflexion du profil des vitesses (caractère instable).

- Ecoulement où la production d'énergie due au cisaillement est localisée dans l'espace. Il s'agit par exemple de turbulence de grille. Leur intérêt est plutôt fondamental.

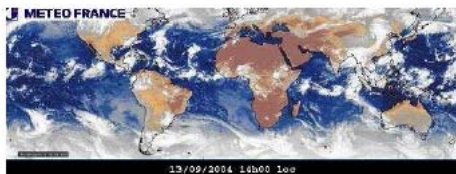
### Exemples de domaines où la turbulence est présente

- Astrophysique, écoulements géophysiques, aéronautique, transports terrestres, production d'énergie, génie des procédés,...
- Source de bruit (aéroacoustique), propagation des ondes, couplage fluide – structure, ...

Voici quelques figures illustratifs de ces domaines :



**Fig.2.5.** morceau d'univers simuler de 500 millions d'années lumières de coté.



**Fig.2.6.** Images satellites : météorologie.



**Fig.2.7.** Cyclone menaçant Cuba et la Floride progressant à une vitesse de 14km/h avec des vent à 260 km/h et des rafales à plus de 354 km/h.



**Fig.2.8.** Eruption volcanique (Tavurvur, Papouasie-Nouvelle-Guinée, 8 Août 1996)



**Fig.2.9.** Hydrodynamique.



**Fig.2.10.** Aérodynamique.

## 2. Description expérimentale et statistique de la turbulence

### **Les deux points de vue sur la turbulence**

Et pourtant, certaines grandeurs macroscopiques sont bien reproductibles.

Par exemple :

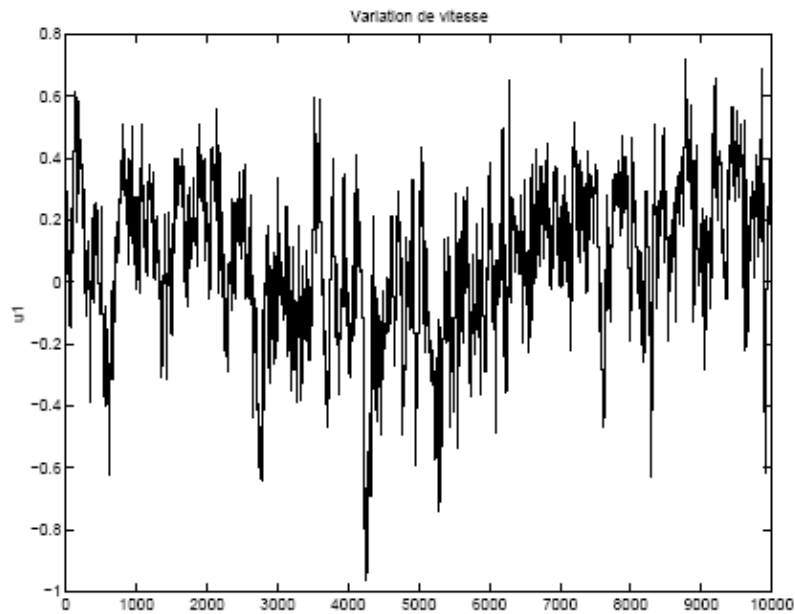
- Traînée et portance d'une voiture dans une soufflerie donnée
- Débit d'une conduite à haut Reynolds
- Puissance d'un moteur à combustion
- Température maximale des disques de frein
- Durée de persistance du sillage d'un avion de ligne
- Portance et traînée d'un avion

Les scientifiques ont alors deux points de vue possibles :

- ✓ Soit : chercher à moyenniser directement la turbulence, à lisser le phénomène : c'est le point de vue statistique. On cherche uniquement les grandeurs moyennes, et l'énergie cinétique turbulente moyenne. C'est une vision "figée" ou "rationnelle" de la turbulence, souvent celle des numériciens.
- ✓ Soit chercher à extraire la cohérence dans la turbulence : c'est le point de vue des "structures cohérentes". On cherche alors l'évolution des structures qui persistent au milieu du chaos, celles qui vont déterminer la physique de l'écoulement. C'est une vision instationnaire, fluctuante et plus expérimentaliste de la turbulence.

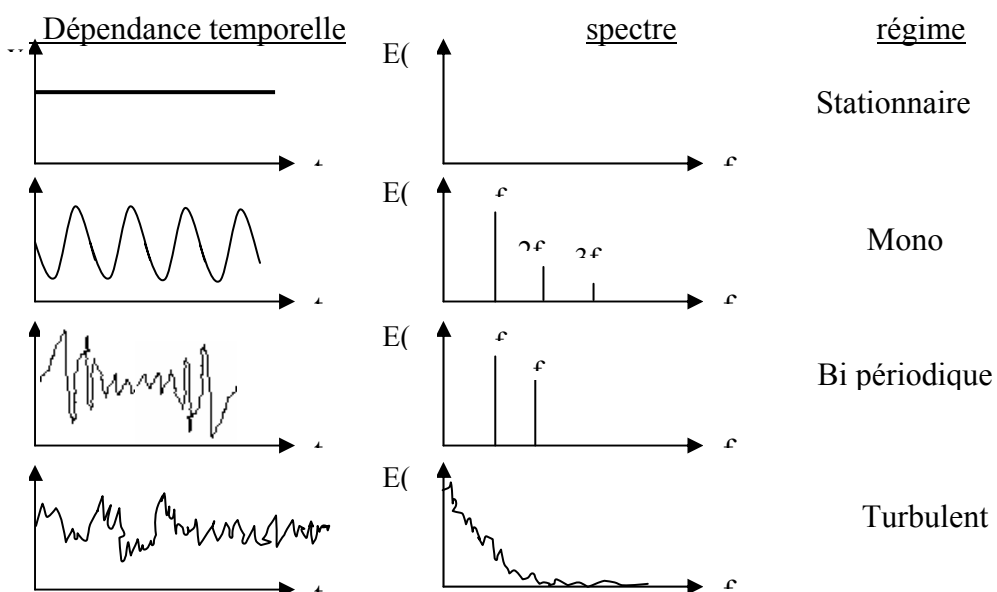
## Quantification expérimentale de la turbulence

Expérimentalement, quand on dit qu'un écoulement est turbulent à 4%, cela signifie simplement que l'écart type des fluctuations de vitesse est de 4% de la vitesse moyenne.



**Fig.2.11.** Evolution temporelle de la vitesse longitudinale autour de sa valeur moyenne (obtenus par la technique du fil chaud).

La turbulence se caractérise par ces grandeurs fluctuantes aléatoires, les moyens de mesures et outils de calcul doivent donc s'adapter à cette particularité.



**Fig.2.12.** Types de signaux enregistrés, Bergé & Pommeau, 1980.

## Moyens de mesure

Remarque : La grandeur la plus accessible en turbulence est la vitesse.

1. Anémométrie à fil chaud
2. Anémométrie Doppler Laser
3. Capteurs de température
4. Capteurs de pression

## Outils statistiques

Aussi bien pour le traitement des données expérimentales que pour les calculs théoriques, les outils statistiques sont indispensables.

*Densité de probabilité :*

La probabilité pour qu'une variable aléatoire  $G$  soit comprise entre  $g$  et  $g+dg$  est  $P(g)dg$ . La normalisation est telle que : 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(g)dg = 1 \quad (2.1)$$

*Probabilité jointe :*

La probabilité pour que deux variables aléatoires  $G_1$  et  $G_2$  soient comprises respectivement entre  $g_1$  et  $g_1+dg_1$ ,  $g_2$  et  $g_2+dg_2$  est  $P(g_1, g_2)dg_1dg_2$ . La normalisation est telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(g_1, g_2)dg_1dg_2 = 1, \quad (2.2)$$

On peut généraliser sur  $n$  variables aléatoires.

$G_1$  et  $G_2$  sont statistiquement indépendantes si  $P(g_1, g_2) = P(g_1) \cdot P(g_2)$ , on a

$$\text{alors } \int_{-\infty}^{+\infty} P(g_1, g_2)dg_2 = P(g_1). \quad (2.3)$$

*Fonction de répartition  $F$  :*

La probabilité pour qu'une variable aléatoire  $G$  soit inférieure à  $g$  est  $F(g_1) = \int_{-\infty}^{g_1} P(g)dg$ . La probabilité pour qu'une variable aléatoire  $G$  soit

$$\text{supérieure à } g_1 \text{ est } \int_{g_1}^{+\infty} P(g)dg = 1 - F(g_1). \quad (2.4)$$

### 1. Moyenne statistique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} gP(g)dg = \bar{g} \quad (2.5)$$

### 2. Moyenne d'ensemble

- On réalise N expériences indépendantes portant sur le même écoulement.
- On enregistre à la i<sup>ème</sup> expérience la valeur d'une même quantité à la même position au bout du même temps (à partir d'un évènement déterminé, démarrage de la soufflerie par exemple), soit  $f^{(i)}(\vec{x}, t)$ .

La moyenne d'ensemble de la quantité  $f$  à la position  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  est définie par :

$$\overline{f(\vec{x}, t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\vec{x}, t) \quad (2.6)$$

La moyenne d'ensemble est généralement appelée *moyenne de Reynolds*.

Remarque : si on fait tendre N vers l'infini, la moyenne d'ensemble tend vers la moyenne statistique.

Les moyennes d'ensemble vérifient les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \text{ avec } \alpha = cte \\ \overline{f} = \bar{f} \\ \overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

### 3. Moyenne temporelle

La moyenne temporelle est définie pour une seule expérience, une seule quantité et une seule position fixée :

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{x}, s) ds \quad (2.8)$$

Cette condition est directement accessible à l'expérience.

4. Moyenne spatiale

La moyenne spatiale est définie par :

$$\overline{f(t)} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V f(\vec{s}, t) d\vec{s} \quad (2.9)$$

Quelques propriétés

1. Stationnarité statistique

Un écoulement turbulent est dit statistiquement stationnaire si toutes les moyennes d'ensemble ( $f_1, f_2, \dots, f_n$ ) associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une translation dans le temps, soit :

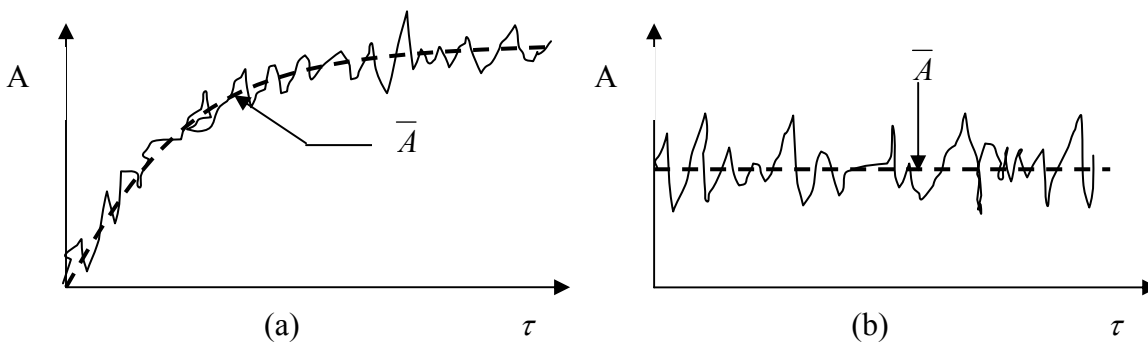
$$\overline{f_1(\vec{x}_1, t_1) f_2(\vec{x}_2, t_2) \dots f_n(\vec{x}_n, t_n)} = \overline{f_1(\vec{x}_1, t_1 + \tau) f_2(\vec{x}_2, t_2 + \tau) \dots f_n(\vec{x}_n, t_n + \tau)} \quad \forall \tau, n \quad (2.10)$$

On a en particulier :

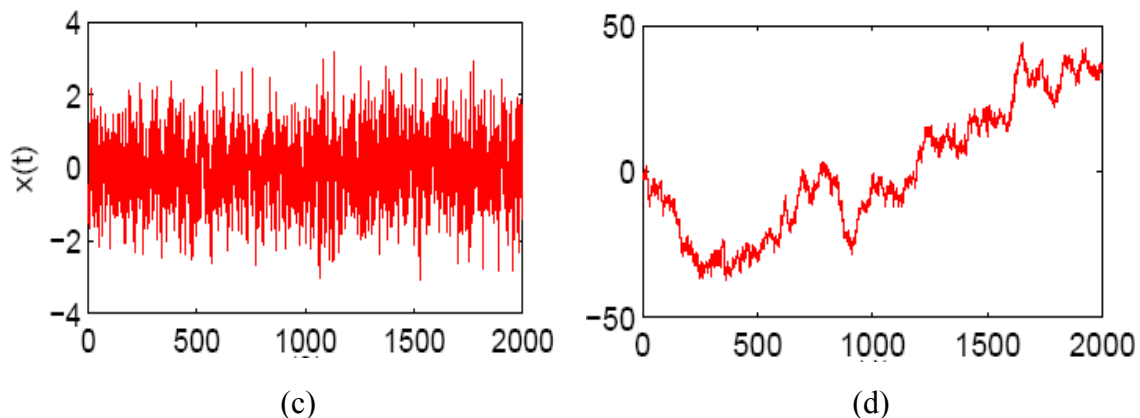
$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = 0$$

Et  $\overline{f(\vec{x})} = \langle f(\vec{x}) \rangle$  égalité de la moyenne d'ensemble et de la moyenne temporelle (ergodicité).

Dans notre étude, l'écoulement sera considéré statistiquement stationnaire.



**Fig.2.13.** Grandeur statistiquement instationnaire (a) et stationnaire (b).



**Fig.2.14.** Exemple de grandeur statistiquement stationnaire c) et instationnaire d).

## 2. Homogénéité statistique

Un écoulement turbulent est dit statistiquement homogène selon une direction  $\vec{e}$  si toutes les moyennes d'ensemble  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une translation dans cette direction, soit :

$$\overline{f_1(\vec{x}_1, t_1) f_2(\vec{x}_2, t_2) \dots f_n(\vec{x}_n, t_n)} = \overline{f_1(\vec{x}_1 + \vec{y}, t_1) f_2(\vec{x}_2 + \vec{y}, t_2) \dots f_n(\vec{x}_n + \vec{y}, t_n)} \quad \forall \vec{y}, \vec{e}, \forall n \quad (2.11)$$

Si cette propriété est vérifiée dans toutes les directions, on parle de la turbulence homogène.

Dans le cas d'une turbulence homogène on a en particulier :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = 0$$

Et  $\bar{f}(t) \Rightarrow f(t)$  : égalité de la moyenne d'ensemble et de la moyenne spatiale (ergodicité).

Un écoulement turbulent est dit statistiquement isotrope si toutes les moyennes d'ensemble associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une rotation quelconque.

### La décomposition de Reynolds [59]

La quantité  $f(\vec{x}, t)$  est décomposée en deux parties distinctes

$$\begin{cases} f = \bar{f} + f' \\ \bar{f} \text{ est la partie moyenne (d'ensemble)} \\ f' \text{ est la partie fluctuante} \end{cases}$$

Remarques :

- La partie fluctuante est centrée  $\bar{f}' = 0$
- La moyenne d'ensemble d'un produit peut se décomposer en deux termes :

$$\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'}$$

Définition :

- Ecart quadratique moyen ou amplitude RMS (Root Means Square) :  $\sigma = \sqrt{\overline{f'^2}}$
- Energie cinétique turbulente :  $k = \frac{1}{2}(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$

## 3. Equation de Navier – Stokes moyennées :

Principe :

- La résolution directe des équations de Navier – Stokes ne peut se faire que pour des cas simples et des nombres de Reynolds relativement faible. Elle nécessite de plus une puissance de calcul considérable.
- Une alternative consiste à s'intéresser seulement aux quantités moyennes (vitesse, pression, température...etc.) et à obtenir des équation vérifiées par ces quantités (à priori plus facile à résoudre).
- On applique pour cela l'opérateur «moyenne d'ensemble» aux équations de mouvement en pratiquant une décomposition de Reynolds sur les inconnus du problème.
- Les nouvelles équations obtenues sont qualifiées au terme «moyennées » par opposition aux équations du mouvement dites «instantanées ».
- Le sigle anglo-saxon désignant les équations de Navier – Stokes moyennées s'écrit R.A.N.S.E (quelque fois R.A.N.S) pour « Reynolds averaged Navier – stocks equations ».

**Rappel des équations instantanées :**

Equations principales

A. En incompressible :

- Incompressibilité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.12}$$

- Navier– Stokes

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{instationnaire}} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{convectif}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{pression}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{visqueux}} \tag{2.13}$$

Remarque : le terme visqueux peut s'écrire comme la divergence du tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  dont l'expression est simplifiée en utilisant la condition d'incompressibilité, soit

$$\tau_{ij} \stackrel{\text{définition}}{=} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ et } \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}$$

● Equation de l'énergie :

$$\text{Enthalpie } \underbrace{h}_{\text{enthalpie massique}} = \underbrace{e}_{\text{énergie interne massique}} + \frac{p}{\rho}$$

$$\underbrace{\frac{\partial(C_p T)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(C_p T)}{\partial x_j}}_{\text{variation totale de l'enthalpie}} = \underbrace{\frac{\nu}{2} C_p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{diffusion moléculaire}} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \quad (2.14)$$

Equations dérivées

● Equations de Poisson

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Navier – Stocks, on

$$\text{obtient : } \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

● Equations du tourbillon

$$\underbrace{\frac{\partial w_i}{\partial t}}_{\text{instationnaire}} + \underbrace{u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}}_{\text{convectif}} = \underbrace{w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{étirement}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{visqueux}} \quad (2.15)$$

● Equation de l'énergie cinétique

L'équation de l'énergie cinétique s'obtient en multipliant l'équation de Navier – stocks par la vitesse :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial t} + u_i \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.16)$$

Elle s'écrit également sous une forme différente en utilisant l'équation d'incompressibilité (3.12) :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial t}}_{\text{variation locale d'énergie cinétique}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u_i \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right\}}_{\text{variation du transport convectif par le travail de la pression}} + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}}_{\text{travail des forces visqueuses}} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{dissipation}}$$

### Les équations du mouvement moyen

Les équations moyennées s'obtiennent en introduisant la décomposition de Reynolds dans les équations instantanées puis en prenant la moyenne.

a. Incompressibilité du champ moyen

En introduisant la décomposition de Reynolds dans l'équation de continuité (3.12), on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \text{ et } \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17)$$

La partie moyenne et la partie fluctuante vérifient toutes les deux la condition de continuité.

b. Navier – Stocks moyennés

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.18)$$

Remarque : la dérivée temporelle de la valeur moyenne de la vitesse n'est pas forcément nulle (moyenne d'ensemble  $\neq$  moyenne temporelle). De même, la moyenne de d'un produit de valeurs fluctuantes n'est pas nulle :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{u'_i} = 0 \\ \overline{u'_j} = 0 \end{array} \right\} \text{ et } \overline{u'_i u'_j} \neq 0$$

La condition d'incompressibilité implique  $\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ . On définit alors le

tenseur de Reynolds :  $R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$

L'équation de Navier – Stocks moyenné s'écrit finalement :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\tau_{ij}} + R_{ij}) \quad (2.19)$$

Les composantes  $R_{ij}$  sont appelées **contraintes de Reynolds**, elles sont analogues à des contraintes supplémentaires issues du mouvement d'agitation (analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses).

Remarque :

- La forme (3.19) de l'équation de Navier–Stokes moyennée diffère de l'équation de Navier–Stokes instantanée par présence d'un terme supplémentaire représentant l'effet du champ fluctuant sur le champ moyen.

→ Loi de comportement traduisant l'aspect "non–Newtonien" du mouvement moyen.

$$\begin{array}{l} T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{loi de Newton} \\ \neq \\ \overline{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \overline{\tau}_{ij} + R_{ij} \quad \text{aspect non Newtonien} \end{array}$$

- Le tenseur de Reynolds est symétrique :

$$R_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Il introduit 6 équations supplémentaires dont il n'est pas possible d'obtenir les équations sans introduire encore de nouvelles inconnues.

→ Problème de fermeture des équations (modèle de turbulence)

- En situation de turbulence développée (loin de paroi), le tenseur de Reynolds est prépondérant devant le tenseur des contraintes visqueuses :  $R_{ij} \gg \tau_{ij}$

→ Forte influence des tensions de Reynolds sur le champ moyen.

c. Equation de l'énergie :

La décomposition de Reynolds peut s'appliquer à l'équation de l'énergie (3.14).

$$\begin{array}{l} \underbrace{\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}}_{\text{variation totale de l'enthalpie}} + \underbrace{\frac{\partial u_j' T'}{\partial x_j}}_{\text{analogie à la tension de Reynolds}} = \underbrace{\frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2}_{\text{dissipation moyenne}} + \underbrace{\frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)^2}_{\text{dissipation turbulente}} \\ + \underbrace{a \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{diffusion moléculaire}} + \frac{1}{\rho C_p} \left( \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j}}_{\text{variation de la pression moyenne}} + \underbrace{\frac{\partial u_j' p'}{\partial x_j}}_{\text{corrélation entre les fluctuations de pression et de vitesse}} \right) \end{array} \quad (2.21)$$

Remarque : les fluctuations de vitesse sont couplées à celles de la température. Les problèmes "dynamique et thermique" ne peuvent pas être résolus séparément sauf dans le cas d'un écoulement incompressible (comme c'est le cas en régime laminaire).

d. Equation du tourbillon moyen

L'équation du tourbillon (2.15) devient :

$$\underbrace{\frac{\partial \Omega_i}{\partial t}}_{\text{instationnaire}} + \underbrace{U_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j}}_{\text{convectif}} = \underbrace{\Omega_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{étirement}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_i x_j}}_{\text{visqueux}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underbrace{\overline{w_j' u_i'}}_{\text{convectif}} - \underbrace{\overline{w_i' u_j'}}_{\text{étirement}} \right) \quad (2.22)$$

e. Equation de l'énergie cinétique moyenne

Soit  $K = \frac{U_i U_i}{2}$  l'énergie cinétique moyenne. L'équation de l'énergie cinétique (2.16)

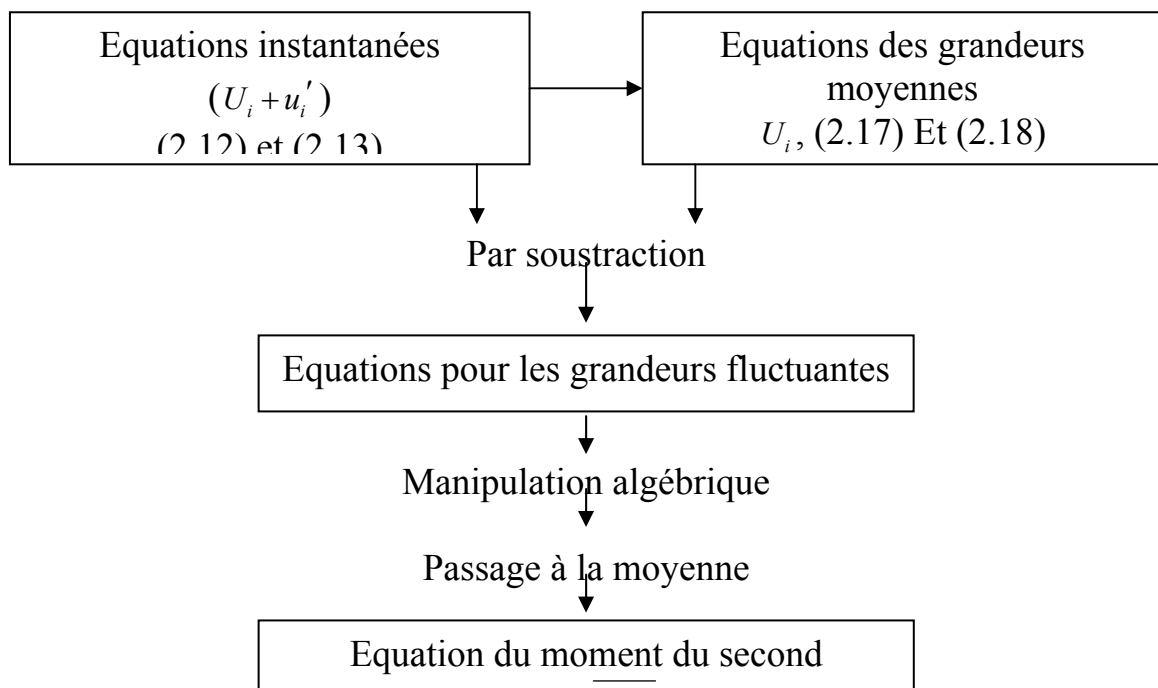
$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_i \frac{\partial K}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_i' u_j' U_i} \right) + \underbrace{\overline{u_i' u_j'}}_{-P_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} + \underbrace{\nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)}_{\epsilon} \quad (2.23)$$

### Equations des grandeurs fluctuantes

Les équations des grandeurs fluctuantes s'obtiennent en introduisant la décomposition de Reynolds dans les équations instantanées et en soustrayant les équations moyennes correspondantes. Toutefois, il est plus intéressant d'obtenir de nouvelles équations pour les contraintes de Reynolds  $\overline{u_i' u_j'}$  (moment d'ordre 2) que les fluctuations elles-mêmes ( $u_i'$ ). **On travaille avec des moyennes statistiques.**

a. Equation de transport de tension de Reynolds

Les équations de départ sont les équations (2.12) et (2.13) où on a introduit la décomposition de Reynolds.



### Détail du calcul

On part de l'équation (2.13) :

$$\frac{\partial(U_i + u_i')}{\partial t} + (U_k + u_k') \frac{\partial(U_i + u_i')}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(U_i + u_i')}{\partial x_k \partial x_k} \quad (2.24)$$

On fait la différence (3.24)-(3.18) en tenant compte de (3.17) :  $\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k' u_i' - \overline{u_k' u_i'})}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} \quad (2.25)$$

On peut écrire l'équation (3.25) pour l'indice  $j$  :

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k' u_j' - \overline{u_k' u_j'})}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k \partial x_k} \quad (2.26)$$

On multiplie (2.25) par  $u_j'$  et (2.26) par  $u_i'$  et on somme les deux équations obtenues. En regroupant certains termes, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k} + u_k' u_j' \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u_k' u_i' \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i' u_j' u_k'}{\partial x_k} - u_j' \frac{\partial u_i' u_k'}{\partial x_k} - u_i' \frac{\partial u_k' u_j'}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \left( u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) \\ & + \nu \left( u_j' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} + u_i' \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned}$$

Le passage à la moyenne dans cette équation fait disparaître les termes de la

$$\text{forme : } u_i' \frac{\partial u_j' u_k'}{\partial x_k} = \overline{u_i' \frac{\partial u_j' u_k'}{\partial x_k}} = 0$$

On obtient alors une équation pour le moment d'ordre 2 ( $\overline{u_i' u_j'}$ ) qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} = P_{ij}'' + T_{ij}'' + \Pi_{ij}'' + D_{ij}'' - \varepsilon_{ij}'' \quad (2.27)$$

Cette équation est appelée **équation des tensions de Reynolds** ou **équation de transport des tensions de Reynolds**. Le membre de gauche de l'équation (2.27) représente la variation totale des contraintes de Reynolds  $\overline{u_i' u_j'}$ .

Le membre de droite se décompose en différents termes :

$$\begin{aligned}
 P_{ij}'' &= - \left( \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) && \text{Production} \\
 T_{ij}'' &= - \overline{\frac{\partial u_i' u_j' u_k'}{\partial x_k}} && \text{Transport turbulent} \\
 \Pi_{ij}'' &= - \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) && \text{Gradient de pression – vitesse} \\
 D_{ij}'' &= \overline{\frac{\partial^2 u_i' u_j'}{\partial x_k \partial x_k}} && \text{Diffusion visqueuse} \\
 \varepsilon_{ij}'' &= 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} && \text{Tenseur de dissipation}
 \end{aligned}$$

Remarque

On a donc introduit des équations supplémentaires pour les contraintes de Reynolds (2.20). Cependant le système des équations de Navier stocks moyennées n'est toujours pas fermé. En effet, l'équation (2.27) fait apparaître de nouvelles inconnues :

- corrélation triple :  $\overline{u_i' u_j' u_k'}$
- corrélation pression – vitesse :  $\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}}$
- corrélation gradient de vitesse :  $\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$

Le problème de fermeture est alors repoussé et reste entier.

b. Equation de l'énergie fluctuante

Elle s'obtient en soustrayant l'équation moyenne (2.21) de l'équation instantanée.

c. Equation de tourbillon fluctuant

En utilisant une démarche analogue à celle pour l'équation des tensions de Reynolds. On peut trouver une équation pour le moment d'ordre 2 du vecteur tourbillon  $\overline{w_i' w_i'}$ .

A partir des équation (2.15) e (2.22), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\overline{w'_i w'_i}}{2} \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\overline{w'_i w'_i}}{2} \right) = P_i^w + T_i^w + S_i^w + D_i^w - \varepsilon_i^w \quad (2.28)$$

Avec :

$$\begin{cases} P_i^w = -\overline{u'_j w'_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_j} & \text{Production} \\ T_i^w = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_i \frac{w'_i w'_i}{2}} \right) & \text{Transport turbulent} \\ S_i^w = \Omega_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \overline{w'_i} + \overline{w'_i w'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{w'_i w'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} & \text{Etirement} \\ D_i^w = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{\overline{w'_i w'_i}}{2} \right) & \text{Diffusion visqueuse} \\ \varepsilon_{ij}^w = \nu \frac{\partial w'_i}{\partial x_j} \frac{\partial w'_i}{\partial x_j} & \text{Dessipation visqueuse} \end{cases}$$

Comme pour l'équation des tensions de Reynolds, l'équation du tourbillon fluctuant introduit de nouvelles inconnues.

#### d. Equation de l'énergie cinétique fluctuante

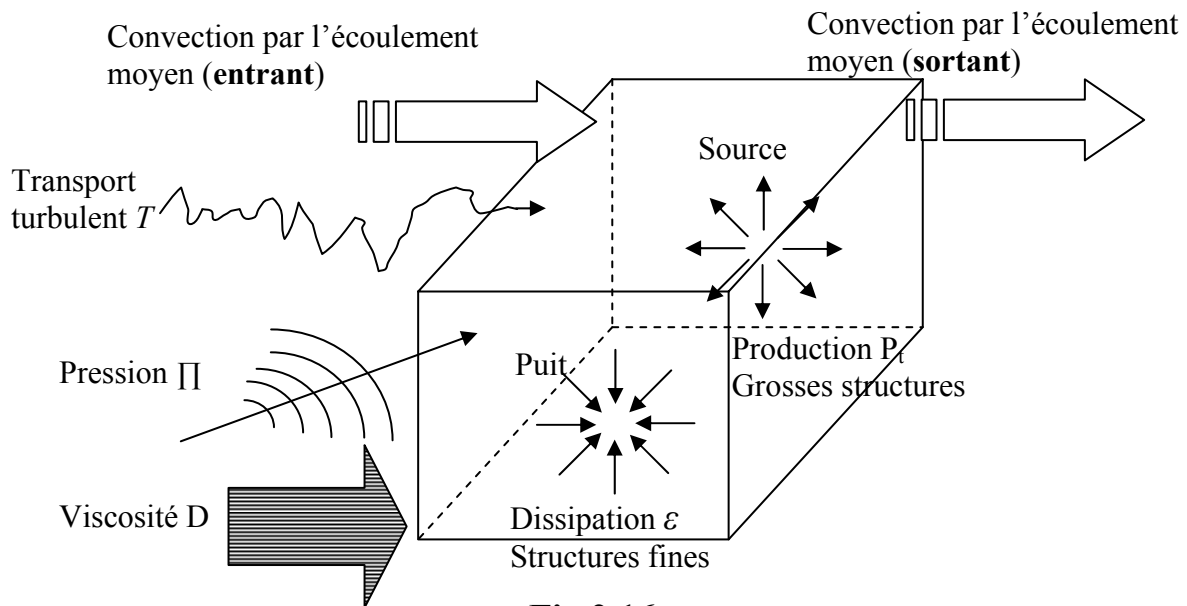
Celle-ci est obtenue à partir de l'équation (2.27) :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \overbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}^{P_t} - \overbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}}^T - \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_k p'}}{\partial x_k}}^{\Pi} + \overbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k}}^D - \overbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}^{\varepsilon} \quad (2.29)$$

La variation totale de l'énergie turbulente (membre de gauche) est balancée par :

- $P_t$  appelé terme de production turbulente. Il caractérise les échanges d'énergie par interaction avec le mouvement moyen. On a déjà rencontré ce terme dans l'équation de l'énergie cinétique moyenne (2.23) mais avec un signe opposé. Cette énergie est en général cédée par l'écoulement moyen  $P_t > 0$ .
- $T$ , transport turbulent. Il s'agit d'une diffusion  $k$  par effet des fluctuations de la vitesse.
- $\Pi$ , transfert de l'énergie cinétique par l'interaction pression – vitesse.
- $D$ , diffusion visqueuse, transfert d'énergie cinétique par viscosité.

- $\varepsilon$ , dissipation turbulente. L'énergie cinétique est dissipée sous forme de chaleur. Ce terme conduit toujours à une décroissance de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon > 0$ .



**Fig.2.16.**

## B. En compressible [57]

Le traitement statistique des équations instantanées conduit à décomposer chaque grandeur, selon la formulation de Reynolds, en une partie moyenne et une partie fluctuante. Pour les écoulements compressibles, on utilise une moyenne pondérée par la masse volumique (moyenne de Favre). Cette moyenne est définie par  $\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\rho}$ . Son utilisation évite l'apparition des fluctuations de masse volumique dans les équations. On néglige les fluctuations de la viscosité moléculaire  $\mu$ . Pour simplifier les notations nous noterons en majuscule les grandeurs moyennes.

Remarque : La moyenne pondérée par la masse est un outil mathématique et non une simplification physique. Même si la fluctuation de la masse volumique a disparu des équations, cela n'élimine pas pour autant son effet sur la turbulence.

Morkovin [58] a émis l'hypothèse que, dans une couche limite, les effets de masse volumique sur la turbulence restent négligeable en comparaison de ceux de la masse volumique moyenne sous condition que le nombre de Mach

reste inférieur à 5. La turbulence conserve ainsi un comportement incompressible.

### Formulation conservative

Le système des équations de Navier–Stokes moyennées avec un modèle de turbulence à deux équations de transports  $(k, \Psi)$  s'écrit, sous forme conservative :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(F_c(w) - F_d(w, w_x, w_y, w_z)) = S(w) \quad (2.30)$$

Où  $w$  désigne le vecteur des variables conservatives :

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \bar{V} \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \Psi \end{pmatrix}$$

$F_c$  les densités de flux conservatif :

$$F_c = \begin{pmatrix} \rho \bar{V} \\ \rho(\bar{V} \otimes \bar{V}) + p \bar{I} \\ \rho E \bar{V} + p \bar{V} \\ \rho k \bar{V} \\ \rho \Psi \bar{V} \end{pmatrix}$$

$F_d$  les densités de flux diffusif :

$$F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau^v + \tau^t} \\ (\overline{\tau^v + \tau^t}) \cdot \bar{V} - \bar{q}^v - \bar{q}^t \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \overline{\text{grad} k} \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\Psi}) \overline{\text{grad} \Psi} \end{pmatrix}$$

Le vecteur terme source  $S$  ne concerne que les équations de transport de la turbulence :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \\ 0 \\ S_k \\ S_\psi \end{pmatrix}$$

$E$  désigne l'énergie totale (énergie cinétique + énergie interne). L'énergie de cinétique turbulence  $k$  est définie par  $\frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$ . Les composantes  $S_k$  et  $S_\psi$  dépendent du modèle de turbulence. Les coefficients  $\sigma_k$  et  $\sigma_\psi$  sont des constantes.

Les modèles de turbulence utilisés dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq (1897, c'est une hypothèse, pas un modèle) et font intervenir la notion de viscosité turbulente  $\mu_t$ . Cette hypothèse permet de relier les tensions turbulentes inconnues aux gradients de vitesse moyenne par une relation analogue à la loi de comportement liant les contraintes visqueuses au tenseur des taux de déformation. Le flux de chaleur turbulent est relié au gradient de température moyenne via la viscosité turbulente et un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  par une relation analogue à la loi de Fourier. La modélisation du tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds) et du vecteur flux de chaleur turbulent est remplacée par celle de la viscosité turbulente selon la formulation suivante :

$$\overline{\tau}^i = \mu_t \left[ \overline{\text{grad} \vec{V}} + (\overline{\text{grad} \vec{V}})^t - \frac{2}{3} (\text{div} \vec{V}) \overline{I} \right] - \frac{2}{3} k \overline{I}$$

$$\overline{q}^i = - \frac{\mu_t}{Pr_t} Cp \overline{\text{grad} T}$$

Cette relation signifie que la turbulence régit instantanément à une modification du champ de vitesse moyenne, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet de mémoire de la turbulence.

Le terme  $(2/3)k$  s'apparente à une pression dynamique turbulente due aux mouvements d'agitation. Il est souvent associé à la pression modifiée  $P^* = P + \frac{2}{3}\rho k$ . Il est négligeable devant  $P$  en régime subsonique.

Les densités des flux diffusif sont évaluées en utilisant la loi des fluides newtoniens, l'hypothèse de Boussinesq et la loi de Fourier. Le tenseur des contraintes (somme de contraintes visqueuses et des contraintes turbulentes)  $\overline{\tau} = \overline{\tau}^v + \overline{\tau}^t$  et le vecteur flux de chaleur  $\overline{q} = \overline{q}^v + \overline{q}^t$  s'écrivent alors :

$$\overline{\tau}^t = (\mu + \mu_t) \left[ \overline{\text{grad} \vec{V}} + (\overline{\text{grad} \vec{V}})^t - \frac{2}{3} (\text{div} \vec{V}) \overline{I} \right] - \frac{2}{3} k \overline{I} \quad (2.31)$$

$$\overline{q}^t = - \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) C_p \overline{\text{grad} T} \quad (2.32)$$

Où les nombres de Prandtl moléculaire et turbulent sont pris constants :  $\text{Pr}=0.72$  et  $\text{Pr}_t=0.9$  pour l'air.

L'air est considéré comme un gaz parfait avec  $\gamma=1.4$ . La viscosité moléculaire est évaluée par la loi Sutherland et ne dépend que de la température moyenne :

$$\mu(T) = \mu_{ref} \sqrt{\frac{T}{T_{ref}} \frac{1 + S/T_{ref}}{1 + S/T}}$$

Avec  $T_{ref} = 273.16K$ ,  $\mu_{ref} = 1.711 \cdot 10^{-5} \text{ kg / m.s}$  et  $S = 110.4K$

## Les modèles de turbulence

Les différences entre les modèles de turbulence résident dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes configurations, dont les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans les codes de calcul. **Aucun modèle n'est satisfaisant pour tous les types de configurations.** Le choix du modèle de turbulence est donc fonction des applications visées ainsi que de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

\*\* Les problèmes de fermeture des équations

1. Bilan des équations et des inconnues

La décomposition de Reynolds dans les équations de Navier – Stokes a permis de trouver un certain nombre d'équations pour les inconnues du problème. Cependant, à chaque étape, on introduit des inconnues supplémentaires. Le nombre d'inconnues est toujours supérieur au nombre des équations disponibles. Il s'agit du problème de **fermeture** des équations.

Inconnues à calculer	Equations disponibles	Nombre d'équations	Inconnus supplémentaires	Nombre total d'inconnues
* Champ moyen de vitesse $U_i$ <b>(3)</b> * Pression moyenne $P$ <b>(1)</b>	(1) continuité (3) N.S moyennées	<b>4</b>	* Tensions de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ <b>(6)</b>	<b>10</b>
Champ moyen de vitesse $U_i$ <b>(3)</b> Pression moyenne $P$ <b>(1)</b> Tensions de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ <b>(6)</b>	(1) continuité (3) N.S moyennées (6) équations des tensions de Reynolds	<b>10</b>	* Corrélations triples $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ <b>(10)</b> * Corrélations pression – vitesse $\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}}$ <b>(9)</b> * Corrélations gradient de vitesse $\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$ <b>(6)</b>	<b>35</b>

- On pourrait suivre la démarche, on trouverait de nouvelles équations qui introduiraient à leur tour de nouvelles inconnues. Ainsi, l'équation exactes d'un moment d'ordre n ( $\overline{u'_i u'_i u'_i \dots u'_i}$ ) implique nécessairement un moment d'ordre supérieur.

- Il est donc nécessaire de « modéliser » les inconnues supplémentaires à l'aide de « lois » complémentaires n'introduisant de nouvelles inconnues : modèles de fermeture.

## 2. Classification des modèles de la turbulence

On distingue deux catégories de modélisation :

- Modèles à viscosité turbulente (modèles du 1<sup>er</sup> ordre) basés sur l'hypothèse de Boussinesq qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide de la viscosité turbulente  $\mu_t$ . Relativement facile à utiliser mais la qualité de modélisation de  $\mu_t$  influe directement sur la qualité de l'écoulement moyen.
- Modèles du 2<sup>nd</sup> ordre : les tensions de Reynolds sont calculées directement, la modélisation se porte alors sur des moments d'ordre supérieur. La mise en œuvre est plus délicate mais les résultats sont de meilleure qualité.

On pratique également selon le nombre d'équations d'évolution supplémentaires du modèle (n'introduisant pas de nouvelles inconnues).

$$\begin{array}{l}
 - 0 \text{ équation (longueur de mélange)} \\
 - 1 \text{ équation (} k, \text{ énergie cinétique turbulente)} \\
 - 2 \text{ équations (} k - \varepsilon, k - \omega, SST, \dots)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Modèles du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}$$
  

$$- 7 \text{ équations (} R_{ij} - \varepsilon, R_{ij} - \omega, \dots) \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \end{array}} \right\} \text{Modèles du 2}^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

### \*\*\* La viscosité turbulente

Les modèles utilisant la notion de viscosité turbulente reposent sur l'existence, au sein des couches cisailées à grand nombre de Reynolds, d'une région assez étendue d'équilibre approximatif entre la production d'énergie turbulente (extraite des grosses structures) et la dissipation turbulente (dissipée aux petites échelles), échanges entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant :

$$\frac{\text{production}}{\text{dissipation}} \square 1$$

Cet équilibre production – dissipation justifie localement la notion de viscosité turbulente (argument d’isotropie locale) correspondant en fluide compressible à :

$$\tau' = 2\mu_t S$$

Avec  $\tau'$  le tenseur de Reynolds et  $S$  le tenseur des taux de déformation, dont les composantes sont définies par :  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ .

A l’équilibre strict *Production/Dissipation* = 1, dans une région de l’espace, l’expression de  $\mu_t$  peut être établie de façon assez sûre. Au voisinage de *Production/Dissipation* = 1, il est toujours possible d’utiliser une modélisation plus complexe (comme le modèle  $k - \varepsilon$ ) mais sa validité est moins certaine.

Pour *Production/Dissipation*  $\neq 1$ , tout devient compliqué !! Non seulement la possibilité de calculer simplement la valeur de  $\mu_t$  disparaît, mais en plus la notion même d’une viscosité turbulente  $\mu_t$  scalaire est perdue (d’où le développement de modèles plus sophistiqués avec transport de composantes du tenseur de Reynolds : les modèles RSM).

Cette viscosité turbulente est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d’une échelle de vitesse  $u$  et d’une échelle de longueur  $l$ , caractéristiques de la turbulence. Elle peut s’obtenir à partir d’une relation algébrique, d’une ou plusieurs équations de transport.

Pour l’échelle de vitesse, comme une part importante de l’énergie des fluctuations de vitesse est contenue dans les grosses structures, il est naturel de prendre une grandeur relative à l’énergie cinétique de turbulence  $k$ , soit  $u \propto \sqrt{k}$ .

Pour l’échelle de longueur  $l$ , plusieurs choix de variables transportées sont possibles :

- le taux de dissipation  $\varepsilon$ ,  $l \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$
- la dissipation spécifique  $\omega$ ,  $l \propto \frac{\sqrt{k}}{\omega}$
- directement l’échelle de longueur  $l$

\*\*\* Modèles algébriques

La viscosité turbulente est définie algébriquement d'après d'une longueur de mélange. Ces modèles ont l'avantage d'une relative robustesse et de l'économie en temps de calcul. Leur valeur prédictive est limitée mais les modèles plus précis sont complexes et coûteux.

L'échelle de longueur servant à exprimer la viscosité turbulente tend à représenter des tourbillons porteurs d'énergie, c'est pourquoi elle est souvent proportionnelle à la distance à la paroi  $d$ . La détermination de l'échelle, appelée longueur de mélange « $l$ », est basée sur une analogie avec le libre parcours moyen dans la théorie cinétique des gaz.

L'échelle de vitesse  $u$ , pour un écoulement turbulent cisailé en couche mince, est fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement :  $u = l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ .

Citons le modèle de Michèle – Quémard – Durant (1969) où la viscosité turbulente, fonction de la vortacité de l'écoulement moyen  $\omega$  et des grandeurs caractéristiques de la couche limite, suit l'équation suivante :

$$\mu_t = \rho l^2 D^2(\mu_t) \omega \quad \text{avec } l = 0.085 \delta \tanh\left(\frac{\kappa}{0.085} \frac{d}{\delta}\right)$$

Où  $l$  est la longueur de mélange,  $\kappa$  la constante de Von Karman=0.41,  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite,  $d$  est la distance de la paroi et  $D$  est une fonction d'amortissement traduisant la décroissance rapide de la turbulence au voisinage de la paroi.

Un autre modèle algébrique souvent utilisé est le modèle de Baldwin – Lomax (1978). La viscosité turbulente s'écrit :

$$\nu_t = \min(\nu_{t_i}, \nu_{t_e})$$

$$\nu_{t_i} = (\kappa d D(d))^2 \omega$$

$$\nu_{t_e} = C_{Clauser} C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(d)$$

Avec  $F_{wake}$  une fonction de sillage,  $D(d)$  la fonction d'amortissement de Van Driest,  $C_{Clauser}$  la constante de Clauser=0.0168,  $C_{cp}$  une constante=1.6 et  $F_{Kleb}(d)$  la fonction de Klebanoff. Ce modèle peut générer des oscillations numériques.

\*\*\* Modèle à une équation de transport : Modèle de Spalart – Allmaras (1992)

Ce modèle utilise une seule équation de transport pour la quantité  $\tilde{\nu}$  qui, loin des parois, se confond avec la viscosité turbulente  $\nu_t$ . L'équation pour  $\tilde{\nu}$  résulte d'une construction pas à pas par ajout des termes destinés à prendre en compte des plus en plus de phénomènes physiques. Partant d'une forme « convection = production + diffusion » pour les écoulements libres, Spalart ajoute les termes nécessaires pour obtenir une région logarithmique dans les profils de vitesse puis les termes nécessaires de correction de faible nombre de Reynolds de turbulence pour la région de proche paroi.

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \text{div} \left[ \bar{V} \rho \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \right] = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \overline{\text{grad}} \rho \tilde{\nu} - \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \rho \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2}$$

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad ; \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad ; \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu}$$

$$\tilde{S} = \left| \overline{\text{rot}} \bar{V} \right| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad ; \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad ; \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2)$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right) \quad ; \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad ; \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}$$

Les constantes :

$$c_{b1} = 0.1355 \quad ; \quad c_{b2} = 0.622 \quad ; \quad \sigma = \frac{2}{3} \quad ; \quad \kappa = 0.41$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + (1 + c_{b2}) / \sigma \quad ; \quad c_{w2} = 0.3 \quad ; \quad c_{w3} = 2$$

$$c_{v1} = 7.1 \quad ; \quad c_{t3} = 1.1 \quad ; \quad c_{t4} = 2$$

\*\*\* Modèles à 2 équations de transport

Actuellement, ces modèles sont les plus répandus dans les codes RANS. Dans ces équations, la variable  $d$  désigne la plus petite distance à la paroi. Dans le sillage d'un profil,  $d$  est la distance au bord de fuite.

On ne détaillera dans ce qui suit que les modèles qui ont été utilisés dans ce présent travail :

a. Le modèle  $k - \omega$  de Wilcox (1988)

Ce modèle présente le grand avantage de ne pas comporter de fonction d'amortissement dans le second membre des équations de transport ni dans l'expression de la viscosité turbulente. Par contre, il est très sensible à la condition limite à imposer sur  $\omega$  aux frontières des couches limites et des sillages.

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \overline{\text{grad } k} \right] = P_k - \beta^* \rho k \omega$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \overline{\text{grad } \omega} \right] = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2$$

$$\text{Avec } \mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$$

Les constantes :

$$\alpha = \frac{5}{9} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{40} \quad ; \quad \beta^* = 0.09 \quad ; \quad \sigma = \sigma^* = 0.5$$

La condition limite à la paroi pour la dissipation spécifique est :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$$

b. Le modèle  $k - \omega$  de Menter avec correction SST (1992)

Il s'agit d'un modèle bicouche,  $k - \omega$  de Wilcox et  $k - \varepsilon$  de Launder - Sharma, développé pour remédier au problème de sensibilité à la valeur de  $\omega_e$  à l'extérieur des couche limites. Menter espère ainsi conserver le bon comportement du modèle de Wilcox dans la région interne des couche limites et obtenir une condition limite insensible au niveau de  $\omega_e$ . Ceci constitue le modèle BSL de Menter :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \overline{\text{grad } k} \right] = P_k - \beta^* \rho k \omega$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \overline{\text{grad } \omega} \right] = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + 2 \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \overline{\text{grad } k} \cdot \overline{\text{grad } \omega}$$

Menter ajoute en plus une correction dite SST pour « Shear Stress Transport ». Elle repose sur la constatation que pour les modèles de turbulence à

deux équations de transport utilisant la notion de viscosité turbulente, le rapport de cisaillement  $\tau$  à la valeur de  $\rho k$  est égale à :

$$\frac{\tau}{\rho k} = \sqrt{C_\mu \frac{P_k}{\varepsilon}} \quad ; \quad C_\mu = 0.09$$

Alors qu'expérimentalement ce rapport est plutôt  $\tau / \rho k \approx \sqrt{C_\mu} = 0.3$  dans une grande partie de la couche limite. Dans le cas d'écoulements en présence de gradients de pression positifs, le rapport production sur dissipation peut être nettement supérieur à 1 ce qui conduit à surestimer la contrainte de cisaillement et donc, indirectement, à sous-estimer l'effet des gradients de pression positifs.

Pour pallier cette incohérence, Menter propose de limiter le coefficient de viscosité turbulente dans la région externe des couches limites :

$$\mu_t = \frac{\rho k / \omega}{\max\left(1, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega}\right)}$$

La fonction  $F_1$  permet de passer du modèle  $k-\omega$  à la paroi ( $F_1 = 1$ ) au modèle  $k-\varepsilon$  à l'extérieur ( $F_1 = 0$ ) et la fonction  $F_2$  limite la valeur de la viscosité turbulente. Elles sont données par :

$$F_1 = \tanh(\zeta^4) \quad \text{avec} \quad \zeta = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{D_\omega y^2}\right]$$

$$\text{et} \quad D_\omega = \max\left(\frac{\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \overline{\text{grad } k} \cdot \overline{\text{grad } \omega}; 10^{-20}\right)$$

$$F_2 = \tanh(t^4) \quad \text{avec} \quad t = \min\left(2\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right)$$

Les constantes, indicées 1 pour le modèle de Wilcox et 2 pour le modèle de Launder – Sharma s'écrivent :

$$\phi = F_1\phi_1 + (1-F_1)\phi_2$$

$$\sigma_1^* = 0.5 \quad ; \quad \sigma_1 = 0.5 \quad ; \quad \beta_1 = 0.075 \quad ; \quad \sigma_{\omega 1} = 0$$

$$\sigma_2^* = 0.85 \quad ; \quad \sigma_2 = 0.856 \quad ; \quad \beta_2 = 0.0828 \quad ; \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856$$

$$\kappa = 0.41 \quad ; \quad a_1 = \sqrt{\beta^*} = 0.3 \quad ; \quad \gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta^*} - \sigma_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Remarque : la correction SST de Menter peut être appliquée à n'importe quel modèle de turbulence à deux équations.

- Formules de conversion

Elles reposent sur la définition de la viscosité turbulente pour chacun des modèles, en négligeant les corrections de faible nombre de Reynolds de turbulence :

$$k - \varepsilon : \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$$

$$k - \omega : \mu_t = \rho k / \omega$$

$$Spalart - Allmaras : \mu_t = \rho \tilde{\nu}$$

\*\*\* Modèles au second ordre – RSM

Les modèles RSM (Reynolds Stress Models) reposent sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces équations de transport sont obtenues en soustrayant de l'équation de  $u'_i u'_j$  l'équation  $U_i U_j$  et en prenant la moyenne de Reynolds (ou de Favre) du résultat. L'équation s'écrit alors (comme est expliqué précédemment) sous forme compacte :

$$C_{ij} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + Dt_{ij} + Dv_{ij}$$

Cette équation comprend deux types de termes : ceux exprimables sous forme de divergence de tenseurs qui représentent le transport d'une quantité (termes  $Dt_{ij}$ ,  $Dp_{ij}$  et  $Dv_{ij}$  dont l'intégrale reste nulle sur l'ensemble de l'écoulement) et ceux qui jouent le rôle de source et de puits (termes  $P_{ij}$ ,  $\phi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  dont l'intégrale est non nulle).

Les différents termes sont :

- $C_{ij}$  : terme de convection
- $P_{ij}$  : production résultant du travail des tensions de Reynolds.
- $\phi_{ij}$  : terme de redistribution par la pression.
- $\varepsilon_{ij}$  : terme de dissipation due à la viscosité du fluide.
- $Dt_{ij}$  : diffusion turbulente qui est une convection au niveau des agitations turbulentes.

- $Dp_{ij}$ : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
- $Dv_{ij}$ : diffusion moléculaire.

A part la production, tous ces termes nécessitent d'être modélisés. Il est aussi nécessaire de résoudre l'équation de transport exacte pour  $\varepsilon$  et d'introduire des modèles à bas nombre de Reynolds (fonction d'amortissement de la turbulence).

Les principales qualités d'un modèle RSM sont ses capacités à prédire des écoulements différents les uns des autres (plus grande universalité). Il permet d'une meilleure modélisation physique de l'écoulement puisqu'il prend en compte l'anisotropie au voisinage de la paroi.

L'inconvénient majeur de ces modèles est le coût en temps de calcul et en mémoire car ils requièrent la résolution de 6 nouvelles équations. Un autre défaut est le manque de robustesse dans la résolution numérique.

Une alternative pourrait être l'utilisation des modèles ARSM (Algebraic Reynolds Stress Models) où les tensions de Reynolds sont obtenues d'expressions algébriques déduites de leurs équations de transports.

### \*\*\* Aspects thermiques

Il existe différentes modélisations de flux de chaleur turbulent. Deux démarches sont principalement utilisées :

- La première est basée sur l'hypothèse de Boussinesq et permet de relier le flux de chaleur turbulent au gradient de température moyenne par une loi de type Fourier (modèles algébriques ou à équations de transport). Les composantes du vecteur flux de chaleur vérifient la relation :  $q'_i = -C_p \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i}$

Où  $\alpha_t$  est la diffusivité thermique turbulente (de même dimension que la viscosité turbulente  $\mu_t$ ). Il reste alors à modéliser le scalaire  $\alpha_t$ .

Les codes du commerce utilisent principalement une modélisation algébrique de  $\alpha_t$  basée sur une analogie avec les phénomènes nucléaires où la diffusivité est proportionnelle à la viscosité  $\mu$  selon l'expression  $P_r = \frac{\mu}{\alpha}$  où  $P_r$

désigne le nombre de Prandtl moléculaire. Une loi analogue est utilisée pour lier  $\alpha_t$  et  $\mu_t$  dont le facteur de proportionnalité est appelé nombre de Prandtl turbulent  $P_{r_t}$  : 
$$P_{r_t} = \frac{\mu_t}{\alpha_t}$$

Généralement, le nombre de  $P_{r_t}$  est pris égale à 0.9 pour l'air. Cette relation que les phénomènes cinématiques et thermiques possèdent la même échelle de vitesse. Ceci semble cohérent puisque les grosses structures porteuses de l'énergie cinétique turbulente transportent également l'énergie thermique turbulente.

Remarque : des résultats expérimentaux ont montré que le nombre  $P_{r_t}$  n'était pas constant et pouvait varier fortement près des parois dans des cas avec transferts de chaleur. Un modèle plus sophistiqué peut s'avérer nécessaire pour des calculs présentant de forts gradients thermiques (paroi chauffée par exemple).

Pour s'affranchir d'une analogie complète entre les champs cinématique et thermique, les échelles de vitesse et de temps servant à construire le scalaire  $\alpha_t$  seront bâties à la fois sur des grandeurs cinématiques et thermiques turbulentes. Comme les structures porteuses de l'énergie cinétique de turbulente sont aussi celles qui transportent l'énergie thermique turbulente, on choisit la même échelle pour ces phénomènes à savoir  $u \propto \sqrt{k}$ . Par conséquent, il est nécessaire de résoudre les équations de transport pour  $k$  et  $\varepsilon$ .

L'échelle de temps choisie tient à la fois de l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs cinématiques :  $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$  et de l'échelle

de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs thermiques :  $\tau_\theta = \frac{\overline{T'^2}}{2\varepsilon_\theta}$ . On

note  $\theta$  les fluctuations de la température  $T'$  et la quantité  $\overline{\theta^2}$  s'appelle la variance de la fluctuation de température. Le temps  $\tau_\theta$  représente le temps mis pour dissiper la variance de la fluctuation de température. Son taux de

dissipation  $\varepsilon_\theta$  est définie par : 
$$\rho\varepsilon_\theta = \alpha \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}$$

Les échelles  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_\theta$  apparaissent avec les poids respectifs  $m$  et  $p$  dans l'expression de la diffusivité thermique turbulente :  $\alpha_t = C\rho k\mathcal{T}^m(2\mathcal{T}_\theta)^p$

Avec  $m+p=1$ . Les valeurs de  $m$  et  $p$  diffèrent selon les modèles, ce qui permet de donner plus ou moins de poids à l'un des deux phénomènes. Cette relation implique la résolution de deux nouvelles équations de transport : celles de  $\overline{\theta^2}$  et de  $\varepsilon_\theta$  (soit au total 4 équations de transport avec  $k$  et  $\varepsilon$ .)

Il existe plusieurs modélisations de ces équations de transport qui nécessitent, comme pour la modélisation cinématique, des termes à bas nombre de Reynolds de turbulence.

- L'autre démarche consiste à résoudre les équations de transport du flux de chaleur de turbulent (modèles au second ordre équivalent aux modèles RSM).

### 3. Les lois de parois

#### 3.1. Problématique

Pour bien prendre en compte toute la physique d'un écoulement turbulent, il est nécessaire d'utiliser un maillage très raffiné près des parois. En effet, la région interne de couche limite turbulente est le siège de forts gradients de la vitesse, de la température et des grandeurs turbulentes, suivant la direction  $y$  perpendiculaire à la paroi. Au proche voisinage de la paroi, l'énergie cinétique de turbulence  $k$  évolue comme  $y^2$ . Elle présente un pic autour de  $y^+ \approx 10 \approx 20$  comme la production de  $k$ . La contrainte de cisaillement turbulente évolue comme  $y^3$ . La sous-couche visqueuse est le siège d'une forte dissipation liée à la présence des petites structures dissipatives ; la dissipation  $\varepsilon$  varie rapidement tout près de la paroi et atteint son maximum à la paroi.

Aussi le maillage doit absolument comporter des points de la sous-couche visqueuse. Usuellement, les maillages pour des calculs RANS ont une hauteur de première maille  $h_1^+$  autour de (0.3). Une telle condition impose des contraintes sévères pour la construction du maillage. De plus, le respect de la condition CFL

entraîne un pas de temps d'intégration local très petit dans les mailles les plus fines, ce qui ralentit fortement la vitesse de convergence des méthodes de résolution non totalement implicites.

### 3.2. Rappel des propriétés des couches limites turbulentes 2D incompressibles

La principe de base du traitement de paroi repose sur l'existence, bien établie pour les couches limites turbulentes bidimensionnelles incompressibles pas trop près du décollement, d'une relation universelle reliant la vitesse de paroi et la longueur de paroi, grandeurs adimensionnelles par les échelles de paroi :

$$U^+ = U/U_\tau \quad ; \quad y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_p} \quad ; \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$$

Selon l'importance relative des composantes laminaire et turbulente du tenseur des contraintes, la région interne de la couche limite se sépare en trois zones distinctes :

- La zone sous-couche visqueuse :  $y^+ < 5$

Il s'agit une zone de faible épaisseur où l'action de la viscosité prédomine. Dans ce film visqueux, le profil de vitesse de paroi suit une loi linéaire :

$$U^+ = y^+$$

- La zone turbulente développée :  $40 < y^+$  et  $y/\delta < 0.2$

Dans cette région, les effets turbulents prédominent sur les effets visqueux. Il est difficile de déterminer avec précision l'étendue de cette zone, son épaisseur varie en fonction du nombre de Reynolds et du gradient de pression.

Dans cette zone, le profil de vitesse suit une loi logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

Les constantes  $\kappa$  et  $C$ , déterminées expérimentalement, sont indépendantes du nombre de Reynolds. La constante  $\kappa$ , appelée constante de Von Kermân, est très proche de 0.41 et  $C \approx 5.25$ .

Cette loi s'obtient par l'analyse dimensionnelle soit par la théorie des développements asymptotiques raccordés. Elle reste même pour des gradients de pression positifs intenses conduisant au voisinage du décollement de la couche limite. Dans une zone décollée, cette loi n'est plus valide.

- La zone tampon :  $5 < y^+ < 40$

C'est la zone de raccord entre les deux régions précédentes où coexistent les propriétés de la sous-couche visqueuse logarithmique.

Dans la région interne, pour  $y/\delta < 0.2$ , le profil des vitesses suit donc une loi  $U^+ = f(y^+)$ , propriété fondamentale de la couche limite turbulente. Cette loi, dite « universelle », est indépendante de toutes les conditions dans lesquelles peut se développer la couche limite.

### 3.3. Effets de compressibilité

Pour les écoulements compressibles, on utilise la vitesse transformée  $\bar{U}$  de Van Driest définie par :

$$\bar{U} = \int_0^{U_t} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_P}} dU_t$$

L'indice 't' désigne la composante tangentielle dans le repère paroi. Pour intégrer le rapport  $\frac{\rho}{\rho_P}$ , il faut connaître l'évolution de la température dans la région de paroi. L'évolution du flux de chaleur local, dans le repère paroi, peut s'obtenir par exemple en négligeant la convection dans l'équation de l'énergie. On obtient alors une équation différentielle pour la température en fonction de la vitesse.

### 3.4. Principe

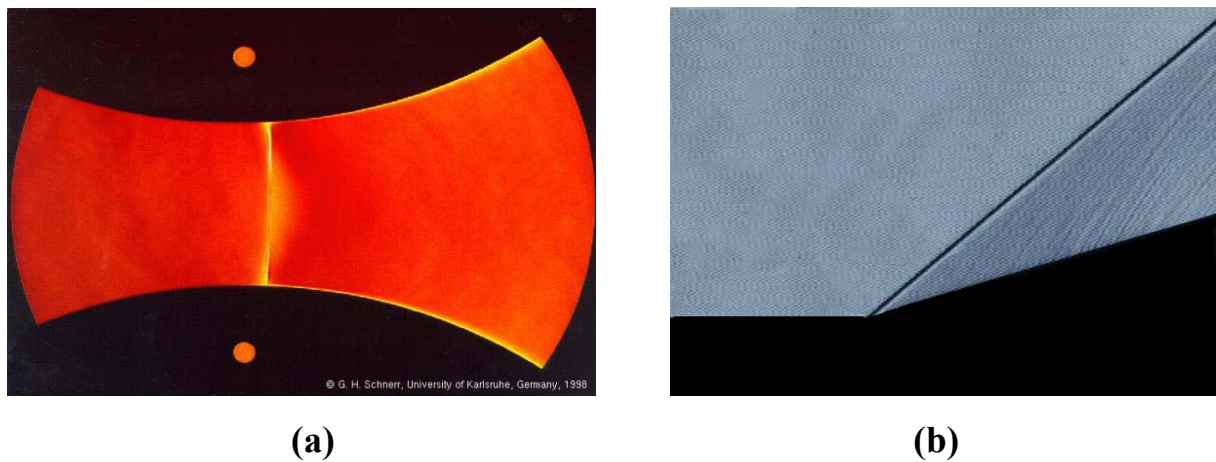
Le principe des lois de paroi est ainsi de remplacer le calcul des densités de flux diffusif et des grandeurs turbulentes transportées dans la première cellule du maillage, dont l'évaluation précise exige un fort raffinement du maillage, par un autre calcul reposant sur des propriétés de la couche limite turbulente. Ceci

permet d'utiliser un maillage moins raffiné près de la paroi avec des hauteurs de maillage  $y^+$  comprise entre 50 et 150.

## 4. Ondes de choc

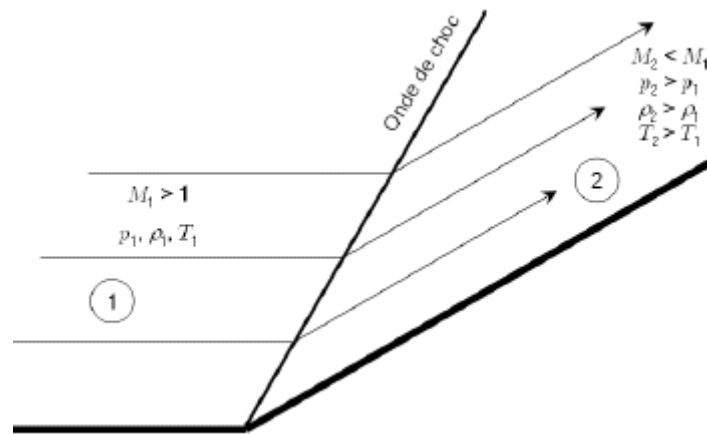
### 4.1. Définition

Une onde de choc est une région de l'écoulement où de fortes variations des grandeurs physiques apparaissent sur de très faibles longueurs caractéristiques. L'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un choc est celui du libre parcours moyen des atomes ou molécules du fluide, soit environ  $10^{-7}$ m aux conditions normales. Comme ces zones sont très minces, nous pouvons les idéaliser comme des surfaces de discontinuité dans l'espace. Par suite, les grandeurs physiques sont elles-mêmes discontinues à travers cette surface, ce qui n'est évidemment pas le cas dans la réalité. Plusieurs types de chocs peuvent apparaître mais nous pouvons d'ores et déjà distinguer deux catégories.



**Fig.2.17.** Classification des ondes de choc : a. choc droit au col d'une tuyère, b. choc oblique dans une rampe de compression.

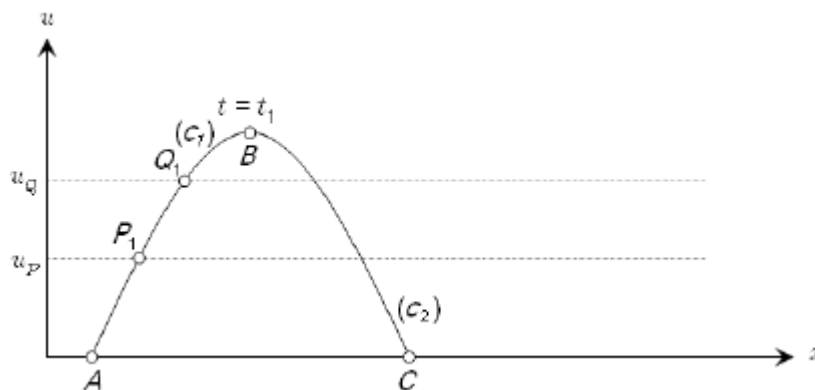
La première est celle des ondes droite pour lesquels la vitesse à l'amont du choc est normale à sa surface. La seconde catégorie est celle des chocs obliques pour lesquels la vitesse à l'amont n'est pas orthogonale à la surface du choc. La figure (2.18) montre une idéalisation du choc attache à un changement brusque de direction d'une paroi plane, dispositifs appelé rampe de compression.



**Fig.2.18.** Onde de choc dans une rampe de compression

#### 4.2. Formation des ondes de choc

Afin d'appréhender la manière dont se forme les ondes de choc, supposant que nous soyons capable de générer, dans un domaine monodimensionnel, une perturbation de vitesse  $u(x)$  au temps initial  $t=t_1$  telle que celle représentée par la figure (2.19). Étudiant la propagation de cette perturbation en supposant que l'évolution thermodynamique du gaz soit isentrope.



**Fig.2.19.** Profil de vitesse  $u(x)$  d'une perturbation au temps  $t=t_0$

#### 4.3. Equations de conservation pour les ondes de choc

L'écoulement à travers un choc doit satisfaire les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'application de ces conditions sous forme intégrale conduira à un ensemble d'équations qui sont les équations du choc ou condition du choc.

##### 4.3.1. Conservation de la masse

Comme la masse  $m = \int_V \rho dV$ . En utilisant l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v \cdot n dS = 0 \quad (2.33)$$

Nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Dm}{Dt} = \int_{S_0} \rho [w_n] dS \quad (2.34)$$

Puis, comme  $S_0$  est arbitraire :

$$[\rho w_n] = 0 \quad (2.35)$$

#### 4.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Comme la quantité de mouvement. En utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v dV + \int_S (\rho v \cdot n dS) v = - \int_S p n dS \quad (2.36)$$

Nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{DP}{Dt} = \left[ \int_{S_0} \rho v w_n dS \right] + \left[ \int_{S_0} p n dS \right] = 0 \quad (2.37)$$

Puis comme  $S_0$  est arbitraire :

$$[\rho v w_n + \rho n] = 0 \quad (2.38)$$

En ajoutant à cette relation  $-u \rho [w_n] = 0$  (2.35), il vient :

$$[\rho v w_n + \rho n] - u \rho [w_n] = 0 \quad (2.39)$$

Qui après réarrangement des termes, s'écrit :

$$[\rho(v-u)w_n + \rho n] = 0 \quad (2.40)$$

Soit, par définition de la vitesse relative  $w$  :

$$[\rho w w_n + \rho n] = 0 \quad (2.41)$$

En fin, en projetant sur  $n$  et  $t$ , nous obtenons les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$[p + \rho w_n^2] = 0 \quad \text{et} \quad [w_t] = 0 \quad (2.42)$$

### 4.3.3. Conservation de l'énergie

Comme l'énergie  $E = \int_V \rho e_0 dV$ . En utilisant l'équation de conservation de l'énergie dans la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_V \nabla \cdot (\rho e_0 v) dV = - \int_S p v \cdot n dS \quad (2.43)$$

Nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{DE}{Dt} = \left[ \int_{S_0} \rho e_0 w_n \right] dS + \left[ \int_{S_0} p v \cdot n \right] dS = 0 \quad (3.44)$$

Puis, comme  $S_0$  est arbitraire et en utilisant la définition de l'énergie interne totale :

$$\left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) w_n + \rho v \cdot n \right] = 0 \quad (2.45)$$

En ajoutant la quantité  $[-\rho u \cdot n]$  à chaque membre de l'équation, nous avons la formulation :

$$\left[ \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) w_n \right] = \left[ \rho \left( h + \frac{v^2}{2} \right) w_n \right] = [-\rho u \cdot n] \quad (2.46)$$

Avec la conservation de la quantité de mouvement (2.41), nous obtenons le résultat :

$$[\rho w w_n u] = [-\rho u \cdot n] \quad (2.47)$$

Qui permet d'écrire (2.42) sous la forme :

$$\left[ \rho \left( h + \frac{v^2}{2} \right) w_n \right] = [\rho w w_n u] \quad (2.48)$$

Que nous divisons par  $[\rho w_n]$  pour obtenir :

$$\left[ h + \frac{v^2}{2} \right] = [w u] \quad (2.49)$$

Comme  $u$  est égal de part et d'autre du choc, ceci s'écrit de la manière suivante :

$$[h] + \left[ \frac{v^2}{2} \right] - u[v] = 0 \quad (2.50)$$

En fin, en remarquant que :

$$\begin{cases} (v_1 - u)^2 = v_1^2 - 2v_1 \cdot u + u^2 = w_{n,1}^2 + w_{t,1}^2 \\ (v_2 - u)^2 = v_2^2 - 2v_2 \cdot u + u^2 = w_{n,2}^2 + w_{t,2}^2 \end{cases} \quad (2.51)$$

Nous pouvons écrire la relation :

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} - u(v_2 - v_1) = \left[ \frac{v_2^2}{2} \right] - u[v] = \frac{w_{n,2}^2}{2} - \frac{w_{t,2}^2}{2} = \frac{[w_n^2]}{2} \quad (2.52)$$

Où le troisième membre est obtenu à l'aide de la conservation de la quantité de mouvement (2.42). La relation (2.50) devient ainsi :

$$\left[ h + \frac{w_n^2}{2} \right] = 0 \quad (2.53)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une brève introduction aux concepts de base et de la phénoménologie de la théorie classique de la turbulence, avec une attention particulière au cas de la turbulence compressible, en soulignant les différences et les similitudes avec les cas en incompressible. L'objectif était simplement d'introduire, par souci d'auto-cohérence, les termes et les concepts qui seront utilisés dans la thèse tels que les modèles de la turbulence qu'on a choisi. Nous avons introduit la notion des ondes de choc et les équations de conservation régissant ce phénomène.

# Chapitre 3

Simulation numérique

1. Outils numériques

1.1. La méthode des volumes finis

1.1.1. Discrétisation spatiale des flux convectifs

La formulation en volumes finis consiste à intégrer le système (2.30) sur une cellule de volume  $\Omega$ , de surface  $\Sigma$ , et de normale extérieure  $\vec{n}$ . Le théorème d'Ostogradski conduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F_c \cdot \vec{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma} F_d \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (3.1)$$

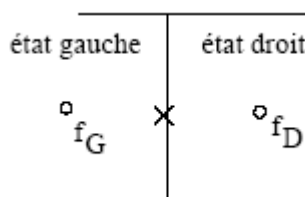
La discrétisation en espace revient à calculer le bilan des flux numériques sur une cellule élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions de chaque face de la cellule. Les densités de flux son supposées constantes sur chaque facette. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} (F_c - F_d) \cdot \vec{n} d\Sigma = \sum_{\text{facettes}} (F_c - F_d)_{\text{facettes}} \vec{n}_{\text{facettes}} d\Sigma_{\text{facettes}}$$

Avec un schéma centré, la densité de flux sur une facette est égale à la demi – somme des densités de flux évaluées au centre des cellules adjacentes à cette (voir fig.3.1) :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2} (F(w_G) + F(w_D))$$

Où  $w_G$  et  $w_D$  sont des vecteurs des variables conservatives des cellules gauche et droite.



**Fig.3.1.** Interface entre deux cellules

L'utilisation d'un tel schéma entraîne une erreur de troncature d'ordre 2 en espace. Cette erreur dégénère d'un ordre sur les frontières. Ce schéma est instable et nécessite l'introduction d'une dissipation artificielle pour le stabiliser.

Il est possible d'employer le schéma décentré de Roe (1981) pour le calcul des densités de flux convectif. Ce schéma est de type "flux difference splitting". Il consiste à résoudre de façon approchée un problème de Riemann à l'interface de deux états distincts. La densité de flux sur une facette, suivant les notations de la figure (fig.5.1), est définie par :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2} \left[ F(w_G) + F(w_D) - |\tilde{A}| (w_D - w_G) \right]$$

Où  $\tilde{A}$  est une matrice évaluant la matrice jacobienne 'A' des flux convectif sur l'interface, calculée à partir des variables obtenues par la moyenne de Roe. En appelant  $diag(\lambda_{\tilde{A}})$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{T}$  : la matrice des vecteurs propres à droite, la densité du flux s'écrit :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2} \left[ F(w_G) + F(w_D) - \tilde{T} diag(|\lambda_{\tilde{A}}|) \tilde{T}^{-1} (w_D - w_G) \right]$$

Ce schéma est précis au premier ordre. D'autre part, sa forme initiale autorise la création de détente et il n'est donc pas entropique. Une correction d'entropie, de type Harten peut être ajoutée pour remédier à ce problème. Elle consiste à remplacer le module des valeurs propres lorsqu'elles se rapprochent de zéro par une fonction parabolique non nulle. Ainsi, pour chaque valeur propre  $\lambda_i$ , on utilise le module défini par :

$$|\lambda_i|_{Harten} = \begin{cases} |\lambda_i| & \text{si } \lambda_i < -\delta \\ 0.5 \left( \frac{\lambda_i^2}{\delta} + \delta \right) & \text{si } -\delta \leq \lambda_i < \delta \\ |\lambda_i| & \text{si } \lambda_i > \delta \end{cases}$$

Où  $\delta$  est un coefficient numérique qui doit être ajusté en fonction des conditions d'écoulement. Cette dissipation supplémentaire nuit à la précision des résultats, notamment dans la zone de couche limite dominée par les effets visqueux. Il est donc souhaitable de réduire le plus possible ce paramètre.

### 1.1.2. Dissipation artificielle

Pour stabiliser le schéma centré, l'introduction d'une dissipation artificielle est nécessaire. La formulation de Jameson–Schmidt–Turkel est donc la plus couramment utilisée. Le terme de dissipation est divisé en deux parties :

- Un terme de différence quatrième des grandeurs conservatives dans le but d'amortir les instabilités numériques engendrées par la non-linéarité des équations. On peut le manipuler par le coefficient  $\chi_4$  pris usuellement entre 0.008 et 0.064.
- Un terme de différence seconde pour capter correctement des discontinuités de l'écoulement, comme une onde de choc. On fait varier ce terme par l'intermédiaire d'un coefficient  $\chi_2$  compris entre 0 (pour les configurations sans choc) et 1.

L'addition des termes de dissipation ne déduit pas la précision numérique sauf près des discontinuités où le schéma est localement précis à l'ordre 1.

### 1.1.3. Discrétisation spatiale des termes visqueux

La discrétisation des flux visqueux consiste à approximer les variables dérivées des variables par rapport aux directions  $x$  et  $y$  (en écoulement 2D). Par exemple, à l'interface  $(i+1/2, j)$ , pour toute quantité  $f$  :

$$-f_{i+1/2,j} = \frac{f_{i,j} + f_{i+1,j}}{2}$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1} + f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{4\Delta y}$$

Ces discrétisations sont du second ordre.

## 1.2. La simulation avec ANSYS

La compréhension du comportement des fluides est bien souvent un facteur important dans le développement de produit et de process.

Grâce à la capacité de calcul disponible toujours plus grande, l'analyse des écoulements a de plus en plus tendance à quitter le laboratoire pour entrer dans le monde de la simulation numérique. Des interfaces conviviales et intuitives ainsi que son intégration dans le processus de développement élargissent continuellement la palette d'utilisateurs de calcul fluide. Le rôle central pour ce type de calcul est détenu comme auparavant par l'ingénieur calcul spécialiste en CFD, mais les environnements de nouvelle génération comme ANSYS Workbench donnent un accès à certaines applications aux ingénieurs sans connaissance détaillée de la CFD. Avec l'importance croissante des calculs couplés (interaction fluide/structure), cet aspect déjà très implanté dans la palette de produits ANSYS prend toute son importance.

Les applications fluides interviennent sous différentes formes dans de nombreux domaines : depuis la climatisation de grands bâtiments jusqu'à la simulation d'essais en soufflerie pour l'industrie automobile, en passant par l'optimisation de turbines, de pompes et par les calculs d'écoulements dans les domaines micro- et nanoscopiques.

### 1.2.1. ANSYS CFX

Afin d'anticiper l'importance croissante des applications CFD dans le département R&D des entreprises, ANSYS Inc. a étendu en 2003 sa palette de produits avec le code CFX. CFX fait partie depuis 20 ans parmi les solutions dominantes dans le domaine de la simulation de fluides. ANSYS propose ANSYS CFX aussi bien comme solution indépendante dédiée au calcul fluide, que comme application intégrée dans les solutions de mécanique des structures pour des utilisations couplées.

Les applications fluides d'ANSYS, "**Solution Computational Fluid Dynamics**", se base sur le logiciel ANSYS CFX.

ANSYS CFX-5 est un paquet complet qui offre une palette exhaustive des applications nécessaires au calcul d'écoulements. **ANSYS CFX BladeGen** est

une solution complète incluant des fonctions de modélisation spécialement conçues pour couvrir les besoins des concepteurs de turbines. **ANSYS CFX TurboGrid** permet dans ce même secteur d'activité d'obtenir rapidement un maillage fin et de qualité, un des facteurs décisifs quant à la fiabilité des résultats.

On peut encore citer dans la famille de produits ayant trait au calcul d'écoulement les solutions **ANSYS ICEM CFD** (mailleur leader dans le calcul d'écoulement, mais tout aussi efficace pour le calcul de structures) et **ANSYS Multiphysics**, dans lequel le module fluide ANSYS CFX Flow est intégré.

### **1.2.2. ANSYS CFX-5**

Il est présenté comme l'un des codes les plus puissants du marché dédié au calcul d'écoulements. Des solutions spécifiques pour le développement de turbines sont également disponibles avec ANSYS CFX-BladeGen et ANSYS CFX TurboGrid.

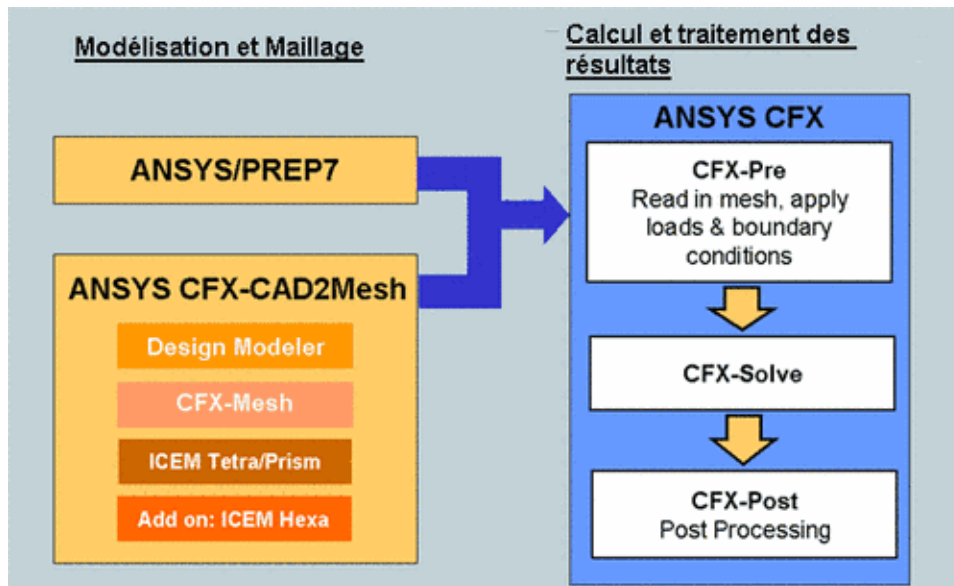
### **1.2.3. ANSYS ICEM CFD**

C'est un logiciel de génération de maillage dédié à la mécanique des fluides, mais également aux applications de mécanique de structures.

### **1.2.4. Solution de calcul complète en CFD**

Le logiciel de calcul CFX est utilisé dans le développement de produits ou l'analyse de processus de fabrication quand un écoulement, un transfert de chaleur ou une réaction chimique joue un rôle important.

CFX est un outil de simulation 3D efficace permettant de répondre rapidement à des problèmes d'écoulements et de trouver des solutions adéquates. Il en découle un nombre plus restreint de prototypes et donc un gain de productivité.



**Fig.3.2.** Les étapes de simulation avec CFX

## ANSYS ICEM CFD

Dans le domaine de la mécanique des fluides, ANSYS/ICEM CFD s'est imposé comme le module de pré-processing le plus utilisé, que ce soit dans l'industrie automobile, aéronautique, aérospatiale, chimique, des turbomachines, électrotechnique ou médicale. Ce module est également de plus en plus employé comme pré-processeur dans le calcul de structure.

ANSYS / ICEM CFD représente un pont entre la construction et le calcul, le système est ouvert, permettant de lire aussi bien des formats CAD, STL ou simplement des points et de créer un maillage destiné à la plupart des codes CFD/CAE du marché.

### 2. Génération du maillage

Pendant la génération de maillage, au niveau de la couche limite, il faut satisfaire la condition sur  $y^+$  selon le modèle de turbulence et la loi de paroi utilisé. Pour notre cas, cette condition a été vérifiée ( $y^+ < 5$ ) pour les modèles de turbulence choisis. Une étude de sensibilité du maillage par rapport à la solution a été faite. Le maillage obtenu à l'aide du générateur de maillage ICEM, est choisi pour un nombre de Reynolds environ de  $10^5$  et pour un écoulement visqueux (couche limite) ; il contient 28945 nœuds et 90750 éléments (fig.3.3 et fig.3.4).

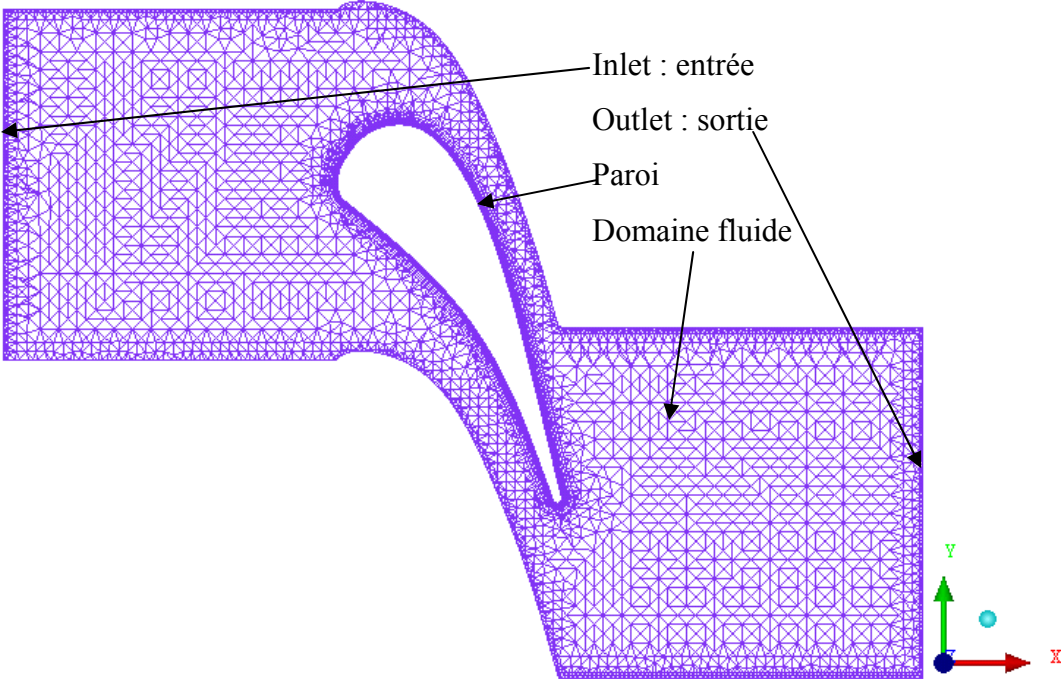


Fig.3.3. Le maillage adapté pour  $Re \approx 10^5$ .

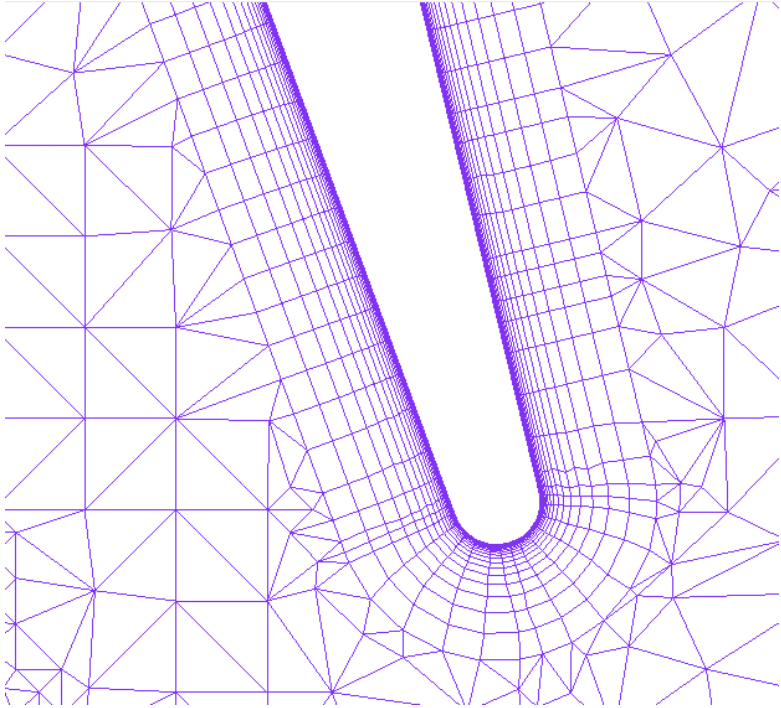


Fig.3.4. La couche limite autour de la paroi.

### 3. Conditions aux limites

#### 3.1. Rappel sur les conditions aux limites

##### 3.1.1. Les conditions aux limites à l'infini

###### a. Champ moyen

La méthode de traitement des conditions aux limites à l'infini repose sur l'utilisation des relations caractéristiques associée aux équations d'Euler. Elle est basée sur les propriétés des systèmes hyperboliques en fonction du temps.

Malgré le caractère non hyperbolique du système des équations de Navier–Stokes stationnaires, cette approche est appliquée sur les frontières situées dans des régions de l'écoulement où les effets visqueux sont en grande partie négligeable.

Les relations caractéristiques sont utilisées uniquement dans le cas où l'information se propage depuis l'intérieur du domaine de calcul vers l'extérieur de manière à compléter les conditions aux limites physiques.

Les différents types de conditions aux limites sont :

- Entrés subsonique

Cette condition correspond au cas où l'écoulement entre dans le domaine de calcul avec vitesse normale subsonique. Il y a alors quatre caractéristiques entrantes. Par exemple, les quatre variables choisies à imposer peuvent être la pression d'arrêt, la température d'arrêt et direction de la vitesse (deux angles, le dérapage et l'incidence). Pour compléter, une relation de compatibilité discrétisée peut être utilisée.

Les quantités turbulentes déterminées par une équation de transport sont par définition associées à la caractéristique  $\vec{V} \cdot \vec{n}$  et par conséquent doivent être imposées en tout point d'une frontière entrante subsonique.

- Sortie subsonique – pression imposée

Il n'y a qu'une seule courbe caractéristique entrante, donc une seule variable à imposer sur la frontière. Usuellement, on choisit la pression statique. Pour compléter, deux relations de compatibilité discrétisées peuvent être utilisées.

- Entrée supersonique

Toutes les caractéristiques sont entrantes, il faut donc imposer complètement le vecteur  $w$ .

- Sortie supersonique

Il n'y a qu'une caractéristique entrante. On utilise une extrapolation des variables au bord du domaine.

b. Champ turbulent

Pour le champ turbulent, les grandeurs transportées doivent être imposées à l'infini. Elles peuvent être calculées en fonction du taux de turbulence  $T_u$  et de la viscosité turbulente à l'infini  $\mu_{t\infty}$ , selon les formulations suivantes :

$$(\rho k)_\infty = \frac{3}{2} T_u^2 \rho_\infty U_\infty^2$$

$$(\rho \varepsilon)_\infty = C_\mu \frac{(\rho k)_\infty^2}{\mu_{t\infty}}$$

$$(\rho \omega)_\infty = \frac{(\rho k)_\infty}{\mu_{t\infty}}$$

$$(\rho \nu)_\infty = \mu_{t\infty}$$

Généralement, la valeur de  $\mu_{t\infty}$  est prise égale à une certaine fraction de  $\mu_\infty$ .

3.1.2. Les conditions aux limites de paroi

a. Champ moyen

Les conditions aux limites sur une paroi traduisent l'adhérence du fluide à la paroi et la caractéristique thermique de cette paroi. Cette dernière condition est de deux types :

- adiabatique avec un flux de chaleur à la paroi nul.
- Isotherme avec une température en tout point de la paroi.

b. Champ turbulent

À la paroi, on impose la valeur des quantités turbulente :

- pour l'énergie cinétique de turbulence :  $\rho k = 0$
- pour le taux de dissipation modifiée :  $\rho \tilde{\varepsilon} = 0$

- pour la dissipation spécifique :  $\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$

Selon la façon de coder "l'infini" à la paroi, on obtient des résultats différents.

### 3.1.3. Les conditions initiales

Pour un calcul stationnaire, les conditions initiales n'ont pas d'influence sur la solution. Le champ moyen est généralement initialisé avec un état uniforme correspondant au champ infini amont.

L'initialisation avec modèle de turbulence à équations de transport peut s'avérer délicate. Un calcul conduit parfois à une convergence vers une solution laminaire ou une divergence. La raison essentielle de ce comportement provient du fait que les équations de transport ont souvent comme solution triviale un champ turbulent nul (sauf pour  $k - \omega$ ).

Une solution envisageable consiste à effectuer quelques itérations en laminaire avant d'initialiser le champ des grandeurs turbulentes. Certains modèles ne nécessitent aucun traitement particulier et les variables turbulentes sont initialisées aux valeurs à l'infini. La viscosité turbulente est prise égale à un certain rapport de la viscosité moléculaire. Il est possible de fixer l'énergie cinétique de turbulence  $k$  en utilisant l'hypothèse de Bradshaw :  $k = \mu_t \left| \text{rot} \vec{V} \right| / 0.3$

Pour d'autres modèles, le champ turbulent doit être développé afin que le calcul ne reste pas laminaire. L'initialisation est alors effectuée à partir d'une solution convergente obtenue avec un autre modèle.

### 3.2. Simulation du profil VKI-CT2

Dans le cas de notre géométrie, les conditions aux limites sont saisies au niveau du "pre-processing" du logiciel CFX. A l'entrée, on impose la vitesse et la température statique du fluide et à la sortie la pression statique du fluide. Quand à la paroi, on choisit une condition aux limites pour le transfert de chaleur du premier type c-à-d : la température est connue.

Les valeurs de la vitesse, la température et la pression sont prises des cas tests suivants : MUR228, MUR221 et MUR222 (Voir annexe 2) afin de faire apparaître l'effet de la turbulence sur le transfert de chaleur.

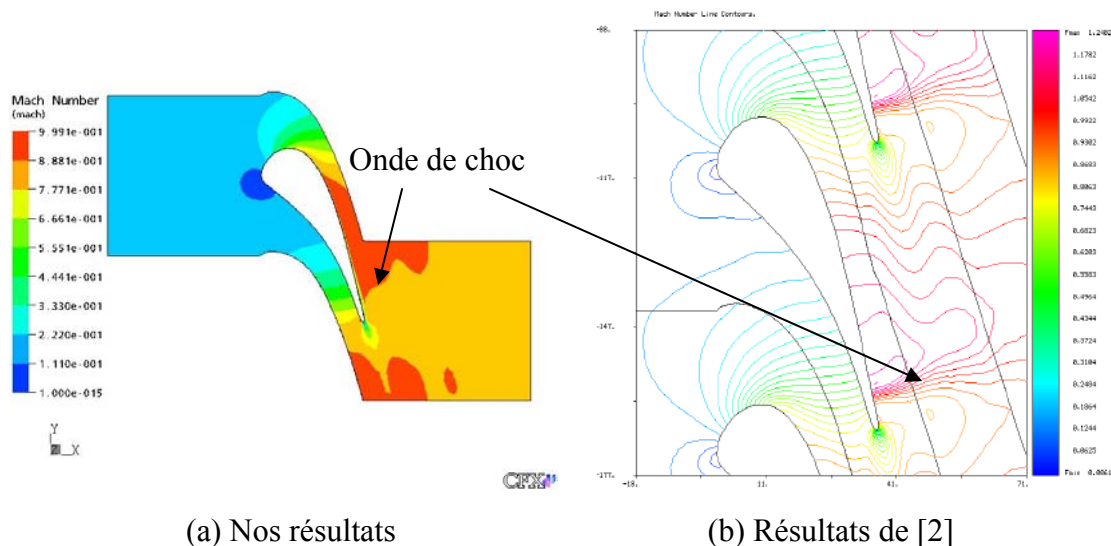
#### 4. Résultats et interprétations

Les résultats ont été obtenus en utilisant trois modèles de turbulence : deux du premier ordre (SST, k-oméga) et un du deuxième ordre.

L'écoulement est supposé permanent, compressible et visqueux. Dans ce qui suit on va représenter et interpréter les résultats obtenus pour le cas test MUR 228, les mêmes remarques faites pour ce cas test sont aussi faites pour les deux autres cas test (MUR221 et MUR222) (Voir paragraphe 4.2 et 4.3).

##### 4.1. Résultats de la simulation pour le cas test MUR228

###### a. Nombre de Mach (vitesse)



**Fig.3.5.** Distribution du nombre de Mach obtenu par le modèle SST  
- MUR 228 -

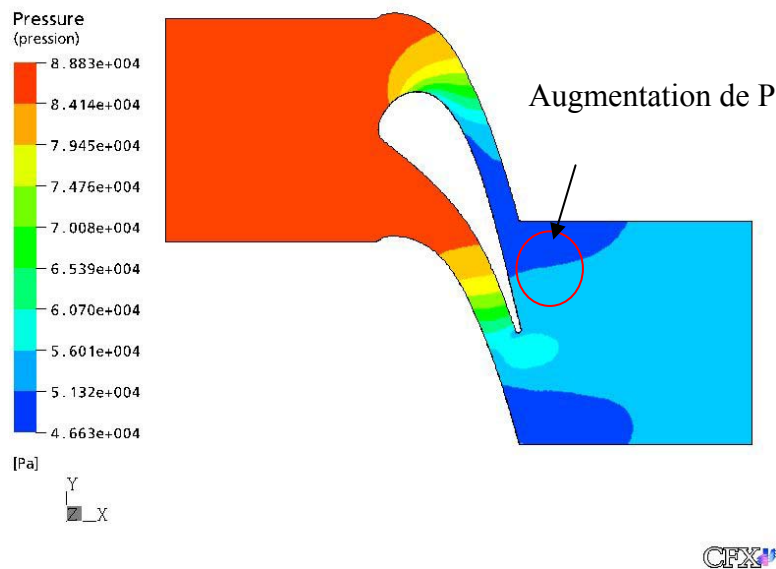
On remarque qu'à l'entrée du domaine, le fluide s'écoule à une faible vitesse, l'écoulement du fluide est ralenti au voisinage du bord de fuite, puis il accélère dans l'espace inter-aube. L'écoulement est perturbé sur l'extrados par la présence d'une onde de choc située près du bord de fuite, cela est représenté sur le contour de nombre de Mach. Les résultats qu'on a obtenus sont similaires à ceux trouvés par Lefebvre et Arts [2] (fig.3.5 – b). Au niveau du bord de fuite, on constate une diminution brusque de la vitesse et l'apparition d'une zone

tourbillonnaire due à la différence entre la quantité de mouvement du fluide provenant du coté extrados et celle du fluide provenant du coté intrados.

Cette interprétation logique et attendue valide les équations RANS utilisée ainsi que les modèles de turbulence utilisés. Ce contour de Nombre de Mach est validé expérimentalement dans [2] (figure dans l'annexe 3).

Les mêmes remarques sont faites pour les autres applications et modèles. Les résultats de la simulation concernant ces derniers figurent dans l'annexe 3.

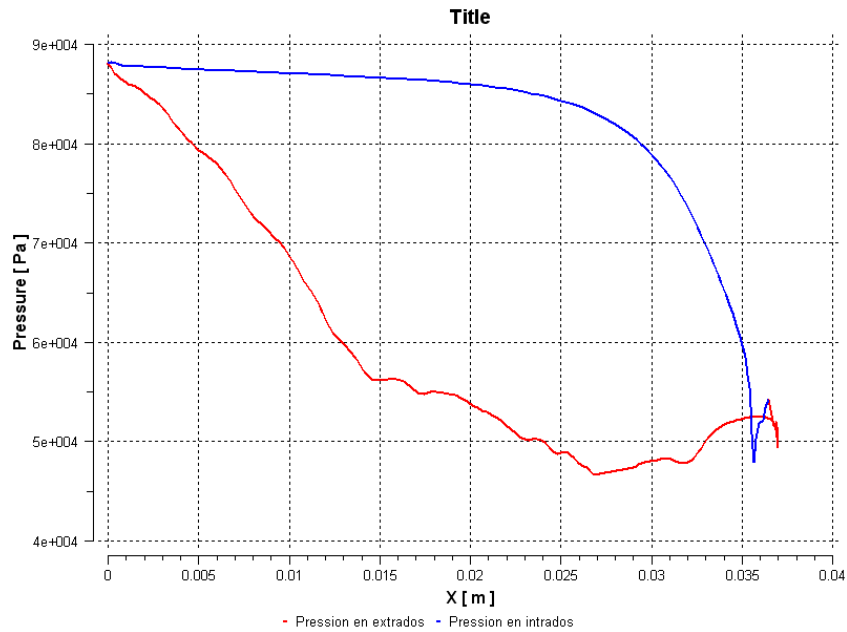
### b. Pression / température



**Fig.3.6.** Distribution de la pression obtenue par le modèle SST

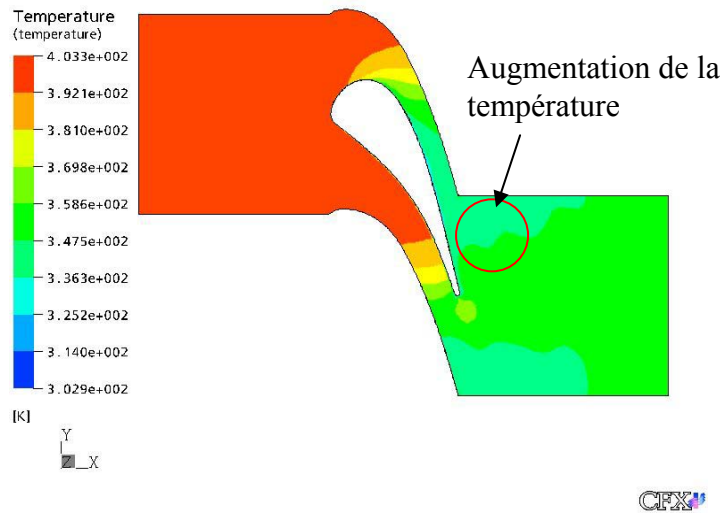
-MUR228-

De même, la validation du modèle utilisé et des équations RANS est réalisée. La pression à l'entrée du domaine est très élevée, elle diminue dans le domaine inter-aube. On remarque ici que la pression chute plus vite sur l'extrados que sur l'intrados. Sur l'extrados, on observe une diminution brusque de la pression sur l'abscisse proche du bord de fuite par la présence de l'onde de choc qui est une instabilité due à la nature transsonique de l'écoulement où il passe du sonique ( $M < 1$ ) au supersonique ( $M > 1$ ). Si on trace la distribution de la pression sur le profil, on remarque que sa variation suit celle de la pression dans le domaine fluide (voir fig.3.7).



**Fig.3.7.** Courbe de Pression le long de l’aube MUR228.

De même pour la température, le résultat confirme l’efficacité du modèle ainsi que l’utilisation des équations RANS et de même l’efficacité du solveur utilisé (CFX 5.6) (voir fig.3.8).



**Fig.3.8.** Distribution de la température

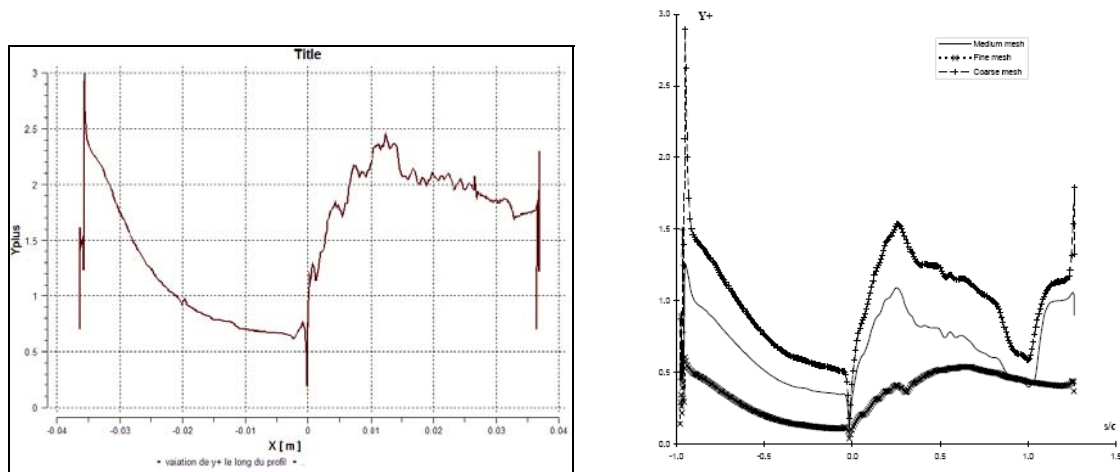
c.  $y^+$  plus

Tant que la couche limite est une sous couche limite visqueuse, la valeur de  $y^+$  doit être inférieure à 5 sur tout le profil, ce qui est vérifié avec les résultats

obtenus (voir fig.3.9). La figure 3.10 a montré que le contour est identique à celui trouvé par Lefebvre et Arts [2] (Fig.3.10-b)



Fig.3.9. Y plus



a) Nos résultats

b) Résultats de LEFEBVRE et Arts [2]

Fig.3.10. Variation de Y plus le long du profil

On va maintenant présenter les résultats obtenus pour les deux cas tests MUR221 et MUR 228, ces résultats sont obtenus en utilisant le modèle ORS, les mêmes remarques sont faites que pour le cas test MUR228.

4.2. Résultats de la simulation pour le cas test MUR221

a. Le nombre de Mach (MUR221)

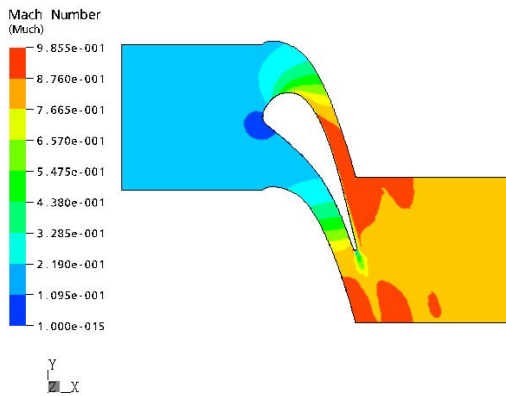


Fig.3.11. Contour de nombre de Mach.

b. La pression (MUR221)

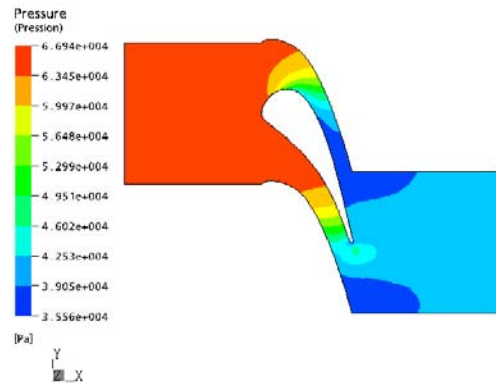


Fig.3.12. Contour de pression.

c. La température

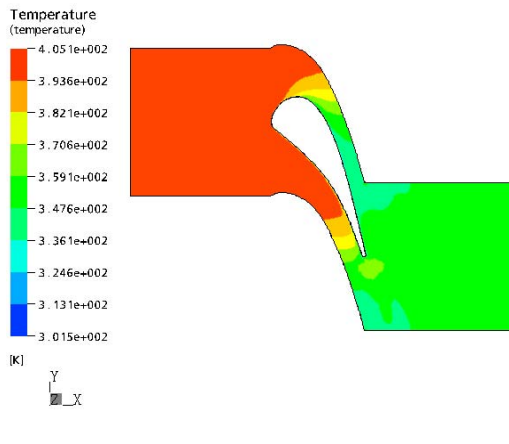


Fig.3.13. Contour de température (MUR221).

d. La courbe de Pression

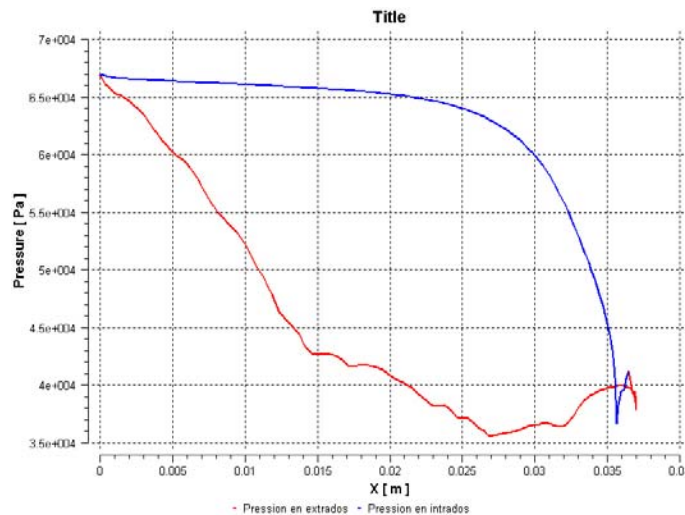


Fig.3.14. Distribution de pression le long de l'aube (MUR221)

Dans ce test cas la condition de  $Y^+ < 5$  est vérifiée aussi (voir fig.3.15).

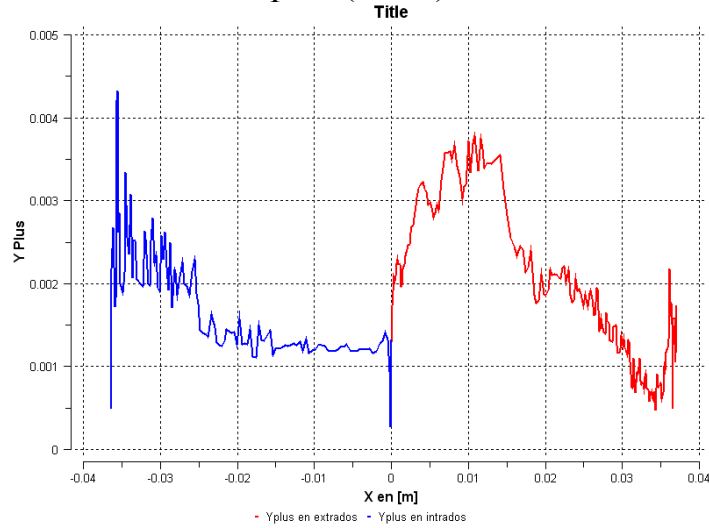


Fig.3.15. Variation de Y plus le long du profil

### 4.3. Résultats de la simulation pour le cas test MUR222

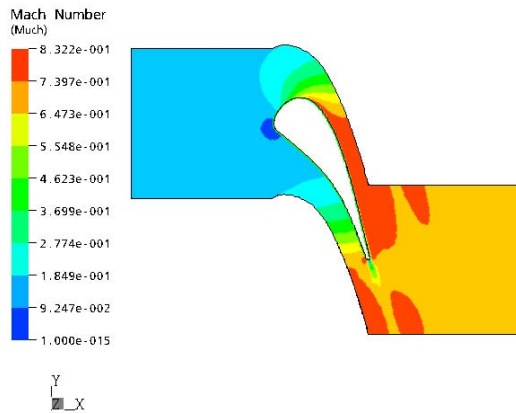


Fig.3.16. Contour de nombre de Mach (MUR222).

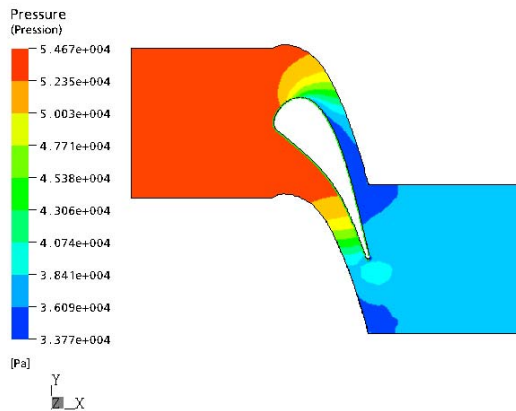
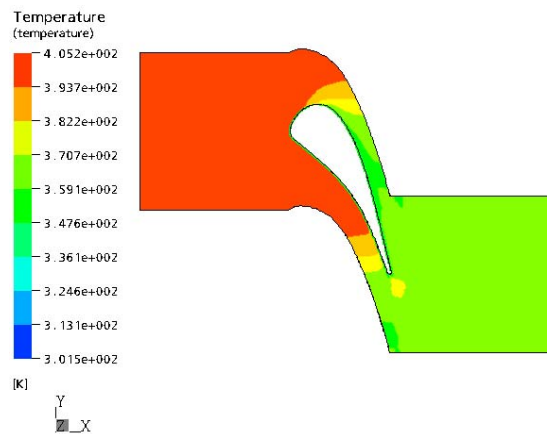
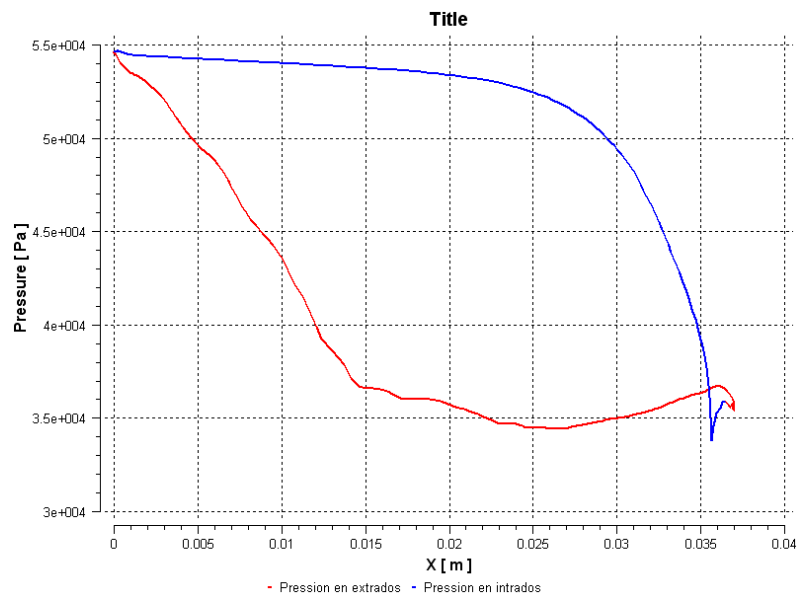


Fig.3.17. Contour de pression (MUR222) .

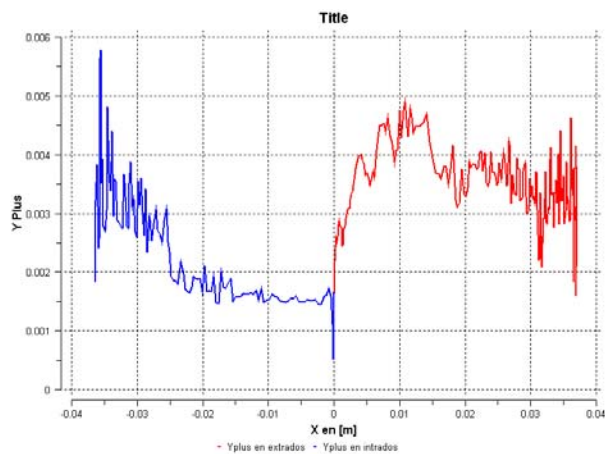


CFX

**Fig.3.18.** Contour de température (MUR222)  
Distribution de pression le long de l'aube :



**Fig.3.19.** Distribution de la pression le long de l'aube pour le test cas MUR222.  
Courbe de Y plus pour MUR22 : ( $Y^+ < 5$ )



**Fig.3.20.** Variation de Y plus le long du profil

4.4. Validation expérimentale

Les différents résultats obtenus à travers une étude de simulation numérique sont comparés avec les résultats expérimentaux de la littérature. Les résultats sont présentés en terme de distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de l'extrados et de l'intrados.

La figure 3.21 représente les résultats correspondants au cas test MUR228, les calculs effectués à l'aide des trois modèles de turbulence (SST, k-oméga et Oméga Reynolds Stress), sont comparés aux résultats expérimentaux. On constate ici que les modèles choisis fournissent de bons résultats par rapport à ceux trouvés par Lefebvre et Arts [2].

A partir de la courbe obtenue, on constate que le coefficient de transfert thermique (h) décroît à partir du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite (le long de l'intrados), ce qui veut dire que l'écoulement est laminaire le long de l'intrados. Par contre, on constate une zone de transition sur l'extrados à partir de l'abscisse (s/c=1) où l'écoulement devient turbulent, ce qui est traduit par une augmentation du coefficient de transfert thermique h. Ce résultat est confirmé par Lefebvre et Arts [2] (fig.3.22).

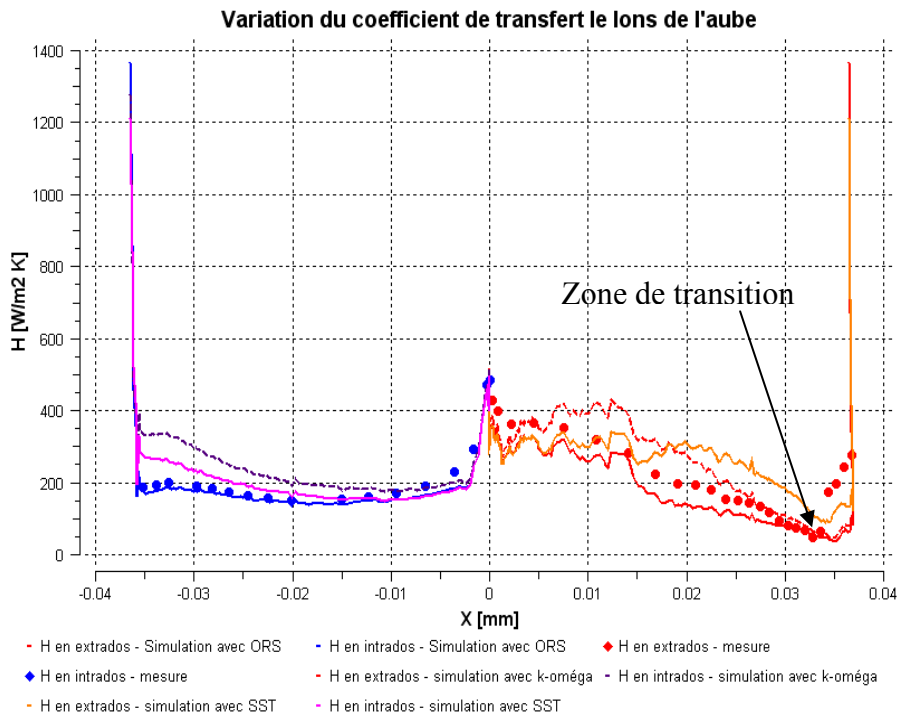
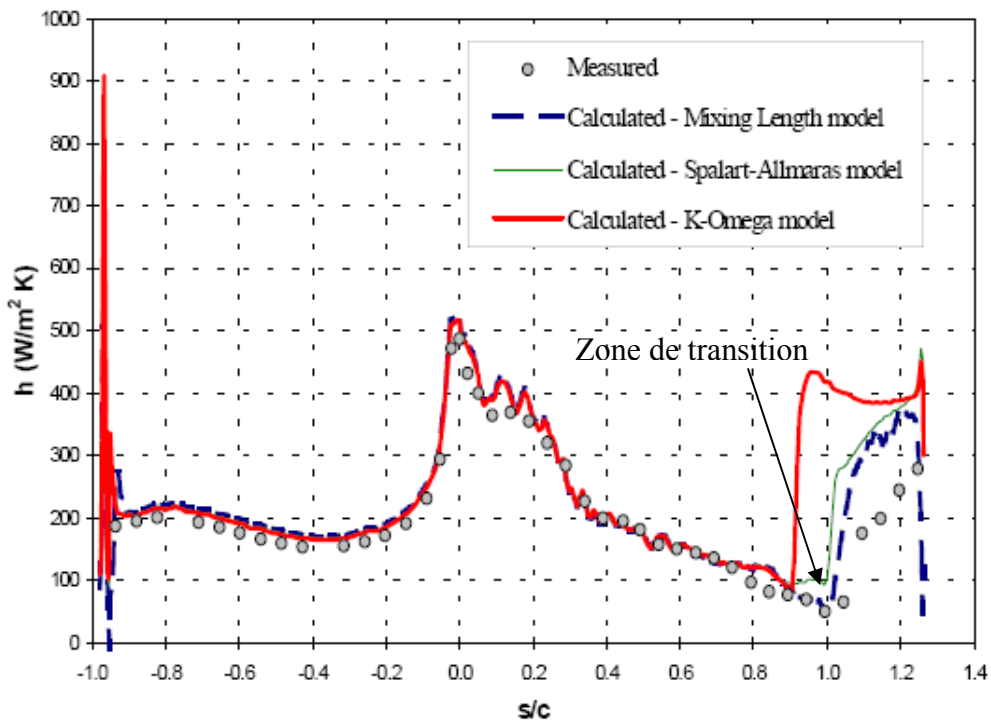


Fig.3.21. Coefficient de transfert thermique 'h', Cas test MUR228

On voit que les courbes représentant les résultats fournis par ces trois modèles suivent globalement l'allure de la courbe expérimentale. On constate une légère différence de temps de calcul pour la convergence. On trouve que le modèle k-oméga converge au bout de 1h13min, temps CPU après 379 itérations or le modèle SST prend 1h18min, temps CPU après 375 itérations. Ce modèle qui est considéré comme une correction pour le modèle k-oméga, donne des résultats meilleurs que ceux du modèle k-oméga. Le modèle ORS prend 1h33min (la convergence est atteinte après 362 itérations). Ce dernier donne des résultats plus proches des résultats expérimentaux. Cela est dû au fait qu'il prend en considération l'anisotropie du milieu voisin de la paroi contrairement aux deux autres modèles travaillant avec l'hypothèse de Boussinesq qui considère le tenseur de contrainte de Reynolds comme étant une matrice symétrique (fig.3.21).

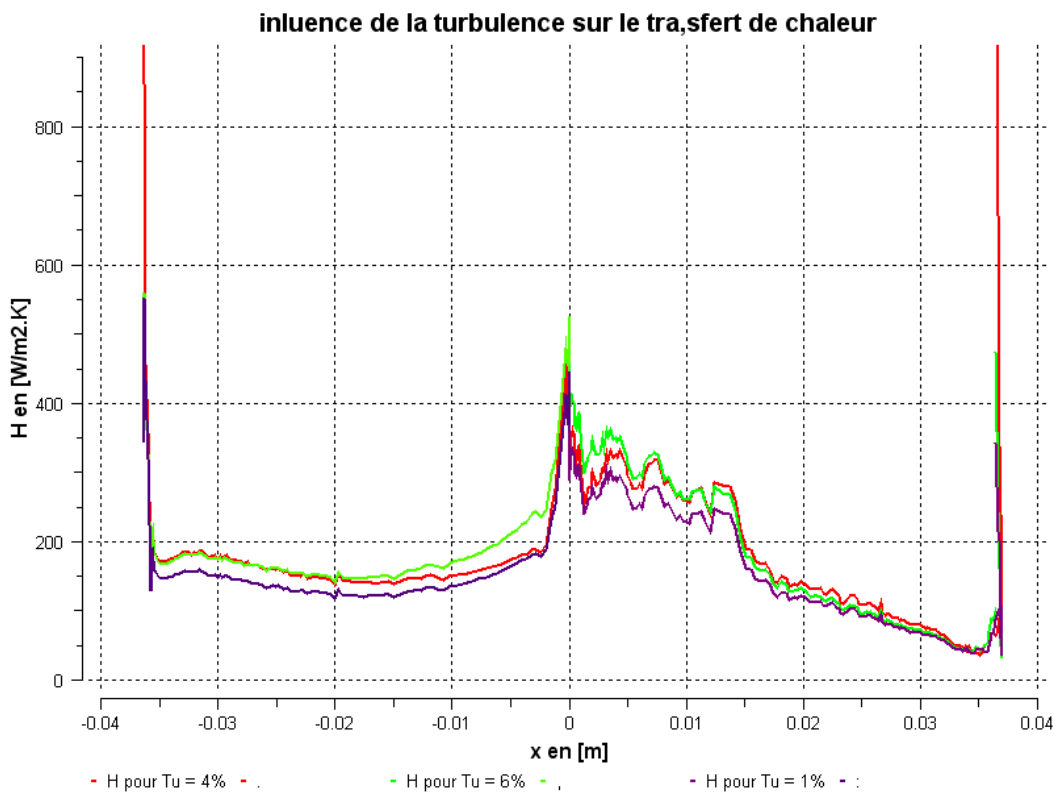
On remarque à partir de cette figure que les trois modèles présentent une difficulté dans la détection de la zone de transition. Cette détection était faite après l'abscisse de transition montrée par les valeurs expérimentales sauf que le modèle SST prédit mieux cette zone de transition (fig.3.21).

Ces résultats sont semblables aux résultats numériques donnés par Lefebvre et Arts [2] (fig.3.22) et obtenus en utilisant les modèles (k-oméga, Spalart allmaras et celui du longueur de mélange). Ces derniers montrent que la zone de transition est bien détectée, le modèle k-oméga la prédit avant l'abscisse réduite ( $s/c = 1$ ) alors que pour les deux autres modèles sa prédiction était à cette abscisse ( $s/c = 1$ ). Cela veut dire que sur la majorité du profil, l'écoulement était laminaire jusqu'à l'abscisse ( $s/c = 1$ ) ; il devient turbulent et cela s'explique par l'augmentation du coefficient de transfert "h".



**Fig.3.22.** Résultats pour MUR 228 [2]

4.3. Influence de la turbulence sur le transfert de chaleur



**Fig.3.23.** l'influence de la turbulence sur le transfert de chaleur

Pour faire apparaître l'influence de la turbulence sur le transfert thermique dans le stator d'une turbine axiale, on a choisi des cas test à taux de turbulence différents (1% 'faible intensité' (MUR228), 4% 'moyenne intensité' (MUR221) et 6% 'haute intensité' (MUR222)), la figure 3.23 montre que le coefficient de transfert thermique  $h$  augmente avec la turbulence.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

La concordance des résultats de l'étude expérimentale et des résultats numériques, en utilisant un maillage non structuré et trois modèles de turbulence, valide la méthode numérique adoptée. Le calcul visqueux et turbulent était capable de prédire les propriétés aérodynamique (nombre de Mach, pression,...) et thermique (coefficient de transfert de chaleur) de l'écoulement autour du profil VKI-CT2 considéré placé dans un diffuseur d'une turbine axiale. Le modèle ORS du deuxième ordre est le plus capable à prédire ces propriétés et ça revient à ce qu'il n'utilise pas l'hypothèse de Boussinesq pour le calcul des composantes du tenseur de Reynolds, mais il les calcul directement ce qui donne plus de précision pour les calculs. Les deux autres modèles SST et k-oméga sont des modèles du premier ordre à deux équations de transport, ils sont identiques et on peut dire que le modèle SST est le modèle k-oméga corrigé.

Enfin, on admet que la qualité de tout calcul obtenu dépend fortement de la bonne connaissance de la transition et du phénomène lui-même. Donc, afin d'améliorer la prédiction du transfert de chaleur, il est très utile et nécessaire de bien localiser la transition dans l'écoulement. Dans ce présent travail, nous avons pu prédire la zone de transition de l'écoulement pour le profil étudié, ainsi que la validation des modèles utilisée et des méthodes adaptées. De meilleurs résultats pourraient être obtenus en construisant un maillage plus fin qui dépend essentiellement des moyens utilisés (puissance du calculateur).

# Bibliographie

## Bibliographie

- [1]. T. Arts, Lambert de Rouvroit, and A.W. Rutherford: *Aero thermal investigation of a highly loaded transonic turbine guide vane cascade*. Von Kerman Institute – Belgium, September 1990.
- [2]. Michael LEFEBVRE, T. Arts: *Numerical aero-thermal prediction of laminar/turbulent flows in a two dimensional high pressure turbine linear cascade*. ONERA Chatillon, France; Von Kerman Institute for fluid dynamics, Belgium, Mars 1997.
- [3]. J. FORT, J.FÜRST, J. HALAMA, K. KOZEL, and Praha: *Numerical simulation of 3D transonic flow through cascades*. MATHEMATICA BOHEMICA, 2000
- [4]. Cristian Wollblade: *Transonic flow: Large eddy simulation, numerical methods, and sub grid modelling*. Chalmers University of Technology Sweden, 2006.
- [5]. J. FORT, J.FÜRST, K. KOZEL, and Praha: *Numerical solution of inviscid and viscous flows using modern schemes and quadrilateral or triangular mesh*.
- [6]. Zoran Dimitrijevic, Guy Daniel Mortchéléwicz, et Fabrice Poirion : *Nonlinear dynamcs of o two dimensional airfoil with freeplay in an invisid compressible flow*. ONERA, France – Janvier 2000.
- [7]. A. Kourta et al : *Prédiction du tremblement en écoulement transsonique*. Elsevier, Septembre 2005.
- [8]. Pascal Kulisa et Jean-Michel Fougères : *Heat transfert prediction on transonic turbine blade*. Laboratoire de mécanique des fluides et d’acoustique, Ecole centrale de Lyon, France ; 1997.
- [9]. Jan Halama, Tony Arts et Jaroslav Fort: *Numérical solution of unsteady and steady transonic flow in turbine cascade and stages*. Elsevier 2003
- [10]. A. EZZARFI, B. KHARBOUCH, A. MAALOUF et A. MIMET : *Modélisation et simulation de l’écoulement et du transfert de chaleur turbulents*. Maroc, Novembre 2005.
- [11]. M. Hachemi, L. Merahi et M. Abidat : *Numerical determination of The Performance of a NACA23012 airfoil*. Laboratoire de mécanique des fluides appliquée – USTO.

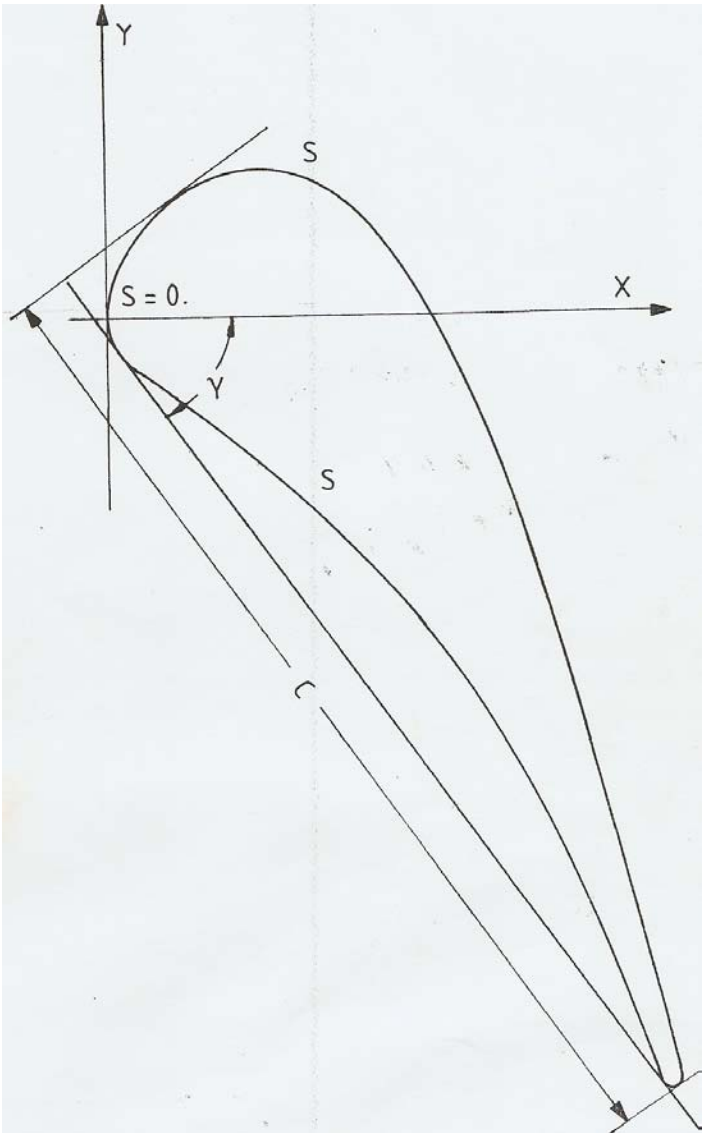
- [12]. Xavier Toussaint: *Simulation instationnaire d'un écoulement transsonique turbulent autour d'un profil supercritique*. E.S.M.2 – France ; Septembre 2002.
- [13]. AGARD, 1989, *Blading Design for Axial Flow Turbomachines*, AGARD LS 167.
- [14]. Howard, M. A., Walton, J. H., et Uppington, D. C., 1987, "*Computer System Aerodynamic and Thermal Design of Turbines*," Institute of Mechanical Engineers, London, Pa C33/187.
- [15]. Nojima et al., 1988, "*Development of Aerodynamic Design System for Centrifugal Compressors*," Mitsubishi Heavy Industries, Technical Review, Vol. 25, No. 1.
- [16]. Noguera, R., Bakir, F. et Rey, R., 1998, *Dimensionnement des turbomachines*, Tome II, ENSAM - Paris.
- [17]. Rey, R., 1981, *Méthode générale de détermination d'un étage de turbomachine axiale de compression*, Th. d'Etat. Paris VI.
- [18]. Bakir, F., 1992, "*Méthode de dimensionnement et d'analyse des machines de compression hélico-centrifuges en régime incompressible*", Th. Méc., ENSAM - Paris.
- [19]. Schlichting, H., 1979, *Boundary Layer Theory*, 7<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, New York.
- [20]. White, F., 1991, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York. (1974)
- [21]. Hirsch, C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vols. 1 ET 2, John Wiley & Sons, New York.
- [22]. Peyeret, R., et Taylor, T. D., 1983, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, New York.
- [23]. Anderson, J. D., 1982, *Modern Compressible Flow with Historical Perspectives*, 'McGraw-Hill, New York.
- [24]. Lakshminarayana, B., 1995, "*Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*". A Wiley-Interscience Publication, New York.
- [25]. Robertson, J. M., 1965, *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- [26]. Milne-Thompson, L. M., 1960, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan, New York.
- [27]. Karamachetti, K., 1966, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, John Wiley & Sons, New York.
- [28]. Hirsch, C., et Warzee, G., 1976, "A Finite Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines," J. Fluids Eng., Vol. 98, 403-421.
- [29]. Young, L., 1958, Runners of experimental turbo-machines, 185, 376, Engineering, London.
- [30]. Preston, J.H., 1961, *The non-steady irrotational flow of an inviscid, incompressible fluid, with special reference to change in total pressure through flow machines*, The Aeronautic Quaterly, 1961, 2, 4, 343-36
- [31]. Jarenczak, M., 1992, *Analyse théorique et expérimentale du bruit hydraulique des pompes centrifuges*, Th. Méc. Université de Lille, 925.
- [32]. Cooper, P., et Bosch, H., 1966, "Three-Dimensional Analysis of Inducer Flow," NASA CR 54836.
- [33]. Marsh, H., 1968, "A Computer Program for the Through Flow Fluid Mechanics in an Arbitrary Turbomachine Using a Matrix Method," British ARC R & M 3509.
- [34]. Fan, S., Lakshminarayana, B., 1996, *Computation and simulation of wake-generated unsteady pressure and boundary layers in cascades: Part 1 - Description of the approach and validation*, J. of Turbomachinery, Janvier 1996, 118, 96-108.
- [35]. Wislicenus, G. F., 1965, *Fluid Mechanics of Turbomachinery*, Dover, New York.
- [36]. Weiss, P., 1996, *Etude théorique et expérimentale de la compression diphasique. Application au pompage de liquides aérés*, Th. Méc., ENSAM - Paris.
- [37]. Scholz, N., 1965, *Aerodynamik der Schaufelgitter*, Band I, Vrelag G. Braun, Karlsruhe (traduit par A. Klein, AGARDograph No. AG 220, 1977).
- [38]. Gostelow, J. P. 1984, *Cascade Aerodynamics*, Pergamon Press. Elmsford, NY.

- [39]. Borisenko, A. I., 1962, *Gazovaya Dynamika Dvigatelye*, Gosudarstvennoye, *Gas Dynamics of Engines*, translated into English DDC-AD 609-452 23315 disponible en anglais d'après NASA Scientific and Information Facility).
- [40]. Johnsen, I. A., ET Bullock, R. O. (Eds) 1965, "*Aerodynamic Design of Axial Flow Compressors*", NASA SP 36.
- [41]. Adler, D., 1980, "*Status of Centrifugal Impeller Internal Aerodynamics, Part I: Inviscid Flow Prediction Methods*," J. Eng. Power, Vol. 102, pp. 728-737; "Part II: Experiments and Influence of Viscosity," J. Eng. Power, Vol. 102, pp. 738-746.
- [42]. McNally, W. D., et Sockol, P. M., 1981, "*Computational Methods for Internal Flows with Emphasis on Turbomachinery*," NASA TM82764 (condensed version in J. Fluids Eng., Vol. 107, 1985).
- [43]. Lakshminarayana, B., 1991, *an Assessment of Computational Fluid Dynamics Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery*, J. of Fluids Eng., v. 113, 315.
- [44]. Lakshminarayana, B., 1986, "*Turbulence Modelling for Complex Shear Flows*," AIAA J., Vol. 24, No. 12, pp. 1900-1917.
- [45]. Narashima, R., 1985, "*The Laminar-Turbulent Zone in the Boundary Layer*," Prog. Aerospace Sci., Vol. 22, p. 29.
- [46]. Mayle, R. E., 1991, "*The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines*," J. Turbomachinery, Vol. 113, p. 509.
- [47]. Smith, L.H.Jr., 1966 "*The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery*," Trans ASME, J. Eng. Power 88, 1-12.
- [48]. Horlock, J. H., et Marsh, H., 1971, "*Flow Models for Turbomachines*," J. Mech. Eng. Sci., Vol. 13, p. 358.
- [49]. Hirsch, C., et Warzee, G., 1979, "*An Integrated Quasi Three-Dimensional Finite Element Calculation Program for Turbomachinery Flows*," J. Eng. Power, Vol. 101, pp. 141-148.

- [50]. Sehra, A., Kerrebrock, 1981, *Blade-to-blade Effects on Mean Flow in Transonic Compressors*, AIAA J., v. 19, 476-483.
- [51]. Jennions, I. Y., Stow, P., 1985, "A Quasi Three-Dimensional Turbomachine Blade Design System, Parts I and II," J. Eng. for Gas Turbines and Power, Vol., 107, pp. 301-316.
- [52]. Adamczyk, J. J., 1985, "Model Equations for Simulating Flows in Multistage Turbomachinery," ASME Paper 85-GT-226.
- [53]. Hirsch, C., ET Dring, R. P., 1987, "Throughflow Models for Mass and Momentum Averaged Variables," ASME Paper 87-GT-52.
- [54]. Hirsch, C., et Warzee, G., 1976, "A Finite Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines," J. Fluids Eng., Vol. 98, 403-421.
- [55]. Bergeron, O., 1994, *Développement d'un calcul méridien appliqué aux écoulements incompressibles en turbomachine multiétagée*, Th. Méc. LMFA - URA CNRS 263, Ecole Centrale de Lyon.
- [56]. Larrey, E., 1991, *Résolution de l'équation de pression par la méthode des éléments de frontières : applications aux turbomachines multi étagées*, Th. Ecole Centrale de Lyon.
- [57]. E. GONCALVES, *Généralités sur les codes RANS en écoulements compressibles*, Institut National Polytechnique Grenoble, septembre 2004,
- [58]. M. V. Morkovin. *Effects of compressibility on turbulent flows*. Colloque International CNRS.
- [59]. Laurent KEIRSBULCK. *Turbulence D.E.A.* Université de Valenciennes, France, 2004

# Annexes



Géométrie utilisée

Annexe 1 : Géométrie

\* Points de la géométrie :

X mm	Y mm	S mm	S/SSS -	S/C -	X mm	Y mm	S mm	S/SPS -	S/C -
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	× 0.000	0.000	0.000	0.000
0.185	1.554	1.565	0.018	0.023	0.185	-0.913	0.932	0.014	0.014
0.371	2.349	2.381	0.028	0.035	0.371	-1.513	1.560	0.024	0.023
0.556	2.850	2.916	0.034	0.043	0.556	× -1.858	1.951	0.030	0.029
0.742	3.298	3.401	0.039	0.050	0.742	-2.086	2.245	0.034	0.033
0.927	3.662	3.809	0.044	0.056	0.927	-2.278	2.512	0.038	0.037
1.113	3.982	4.179	0.048	0.062	1.113	-2.467	2.777	0.042	0.041
1.298	4.267	4.519	0.052	0.067	1.298	× -2.649	3.037	0.046	0.045
1.484	4.548	4.856	0.056	0.072	1.484	-2.810	3.283	0.050	0.049
1.669	4.825	5.189	0.060	0.077	1.669	-2.963	3.523	0.054	0.052
1.855	5.099	5.520	0.064	0.082	1.855	-3.112	3.761	0.058	0.056
2.040	5.366	5.845	0.068	0.086	2.040	-3.260	3.998	0.061	0.059
2.226	5.618	6.158	0.071	0.091	2.226	-3.407	4.235	0.065	0.063
2.411	5.859	6.462	0.075	0.096	2.411	× -3.554	4.471	0.068	0.066
2.597	6.095	6.762	0.078	0.100	2.597	-3.703	4.710	0.072	0.070
2.782	6.326	7.058	0.082	0.104	2.782	-3.852	4.947	0.076	0.073
2.968	6.549	7.349	0.085	0.109	2.968	-4.001	5.186	0.079	0.077
3.153	6.765	7.633	0.088	0.113	3.153	-4.150	5.423	0.083	0.080
3.339	6.971	7.911	0.091	0.117	3.339	-4.299	5.661	0.087	0.084
3.524	7.166	8.179	0.095	0.121	3.524	-4.448	5.899	0.090	0.087
3.710	7.351	8.442	0.098	0.125	3.710	-4.596	6.137	0.094	0.091
3.895	7.524	8.695	0.101	0.129	3.895	-4.746	6.375	0.098	0.094
4.081	7.688	8.943	0.103	0.132	4.081	-4.895	6.613	0.101	0.098
4.266	7.843	9.184	0.106	0.136	4.266	-5.044	6.851	0.105	0.101
4.452	7.987	9.420	0.109	0.139	4.452	-5.194	7.090	0.108	0.105
4.637	8.122	9.649	0.112	0.143	4.637	-5.343	7.327	0.112	0.108
4.822	8.251	9.874	0.114	0.146	4.822	-5.493	7.565	0.116	0.112
5.008	8.372	10.096	0.117	0.149	5.008	-5.643	7.804	0.119	0.115
5.193	8.486	10.313	0.119	0.152	5.193	-5.793	8.043	0.123	0.119
5.379	8.594	10.528	0.122	0.156	5.379	-5.944	8.282	0.127	0.122
5.564	8.698	10.741	0.124	0.159	5.564	-6.094	8.520	0.130	0.126
5.750	8.798	10.952	0.127	0.162	5.750	-6.245	8.760	0.134	0.129
5.935	8.895	11.161	0.129	0.165	5.935	-6.396	8.999	0.138	0.133
6.121	8.987	11.368	0.131	0.168	6.121	-6.547	9.238	0.141	0.137
6.306	9.077	11.574	0.134	0.171	6.306	-6.699	9.478	0.145	0.140
6.492	9.164	11.779	0.136	0.174	6.492	-6.851	9.718	0.149	0.144
6.677	9.248	11.983	0.139	0.177	6.677	-7.003	9.957	0.152	0.147
6.863	9.326	12.184	0.141	0.180	6.863	-7.156	10.198	0.156	0.151
7.048	9.400	12.383	0.143	0.183	7.048	-7.309	10.438	0.160	0.154
7.234	9.469	12.582	0.146	0.186	7.234	-7.463	10.680	0.163	0.158
7.419	9.533	12.778	0.148	0.189	7.419	-7.616	10.920	0.167	0.161
7.605	9.591	12.972	0.150	0.192	7.605	-7.771	11.162	0.171	0.165
7.790	9.644	13.165	0.152	0.195	7.790	-7.926	11.403	0.174	0.169
7.976	9.691	13.357	0.154	0.197	7.976	-8.081	11.645	0.178	0.172
8.161	9.732	13.546	0.157	0.200	8.161	-8.237	11.887	0.182	0.176

Table 1

Annexe 1 : Géométrie

X mm	Y mm	S mm	S/SSS -	S/C -	X mm	Y mm	S mm	S/SPS -	S/C -
8.347	9.770	13.736	0.159	0.203	8.347	-8.393	12.130	0.186	0.179
8.532	9.804	13.924	0.161	0.206	8.532	-8.550	12.373	0.189	0.183
8.718	9.833	14.112	0.163	0.209	8.718	-8.707	12.616	0.193	0.186
8.903	9.859	14.299	0.165	0.211	8.903	-8.865	12.859	0.197	0.190
9.089	9.880	14.486	0.168	0.214	9.089	-9.023	13.103	0.201	0.194
9.274	9.898	14.672	0.170	0.217	9.274	-9.182	13.347	0.204	0.197
9.460	9.912	14.859	0.172	0.220	9.460	-9.342	13.593	0.208	0.201
9.645	9.923	15.044	0.174	0.222	9.645	-9.502	13.837	0.212	0.205
9.830	9.931	15.229	0.176	0.225	9.830	-9.663	14.083	0.216	0.208
10.016	9.936	15.415	0.178	0.228	10.016	-9.824	14.329	0.219	0.212
10.201	9.938	15.600	0.180	0.231	10.201	-9.987	14.575	0.223	0.215
10.387	9.936	15.786	0.183	0.233	10.387	-10.149	14.822	0.227	0.219
10.572	9.932	15.971	0.185	0.236	10.572	-10.313	15.069	0.231	0.223
10.758	9.923	16.158	0.187	0.239	10.758	-10.476	15.316	0.234	0.226
10.943	9.910	16.343	0.189	0.242	10.943	-10.642	15.565	0.238	0.230
11.129	9.893	16.530	0.191	0.244	11.129	-10.809	15.815	0.242	0.234
11.314	9.871	16.716	0.193	0.247	11.314	-10.978	16.065	0.246	0.237
11.500	9.846	16.904	0.196	0.250	11.500	-11.148	16.317	0.250	0.241
11.685	9.816	17.091	0.198	0.253	11.685	-11.320	16.570	0.254	0.245
11.871	9.783	17.280	0.200	0.255	11.871	-11.491	16.823	0.257	0.249
12.056	9.744	17.469	0.202	0.258	12.056	-11.664	17.076	0.261	0.252
12.242	9.701	17.660	0.204	0.261	12.242	-11.837	17.330	0.265	0.256
12.427	9.652	17.852	0.206	0.264	12.427	-12.010	17.583	0.269	0.260
12.613	9.598	18.045	0.209	0.267	12.613	-12.184	17.838	0.273	0.264
12.799	9.538	18.241	0.211	0.270	12.799	-12.358	18.093	0.277	0.267
12.984	9.473	18.437	0.213	0.273	12.984	-12.534	18.348	0.281	0.271
13.169	9.403	18.635	0.216	0.275	13.169	-12.709	18.603	0.285	0.275
13.355	9.331	18.834	0.218	0.278	13.355	-12.885	18.859	0.289	0.279
13.540	9.253	19.035	0.220	0.281	13.540	-13.062	19.115	0.293	0.283
13.726	9.170	19.238	0.223	0.284	13.726	-13.240	19.372	0.296	0.286
13.911	9.082	19.443	0.225	0.287	13.911	-13.418	19.629	0.300	0.290
14.097	8.987	19.652	0.227	0.291	14.097	-13.597	19.887	0.304	0.294
14.282	8.884	19.864	0.230	0.294	14.282	-13.776	20.145	0.308	0.298
14.467	8.774	20.079	0.232	0.297	14.467	-13.956	20.403	0.312	0.302
14.653	8.660	20.297	0.235	0.300	14.653	-14.137	20.662	0.316	0.305
14.838	8.541	20.517	0.237	0.303	14.838	-14.318	20.921	0.320	0.309
15.024	8.417	20.741	0.240	0.307	15.024	-14.501	21.182	0.324	0.313
15.209	8.289	20.966	0.242	0.310	15.209	-14.686	21.444	0.328	0.317
15.395	8.154	21.196	0.245	0.313	15.395	-14.872	21.707	0.332	0.321
15.580	8.013	21.428	0.248	0.317	15.580	-15.058	21.969	0.336	0.325
15.766	7.866	21.665	0.251	0.320	15.766	-15.247	22.234	0.340	0.329
15.951	7.713	21.905	0.253	0.324	15.951	-15.436	22.499	0.344	0.333
16.137	7.554	22.150	0.256	0.327	16.137	-15.627	22.765	0.348	0.337
16.322	7.392	22.396	0.259	0.331	16.322	-15.819	23.032	0.352	0.340
16.508	7.226	22.645	0.262	0.335	16.508	-16.012	23.300	0.357	0.344

Table 1

Annexe 1 : Géométrie

X mm	Y mm	S mm	S/SSS -	S/C -	X mm	Y mm	S mm	S/SPS -	S/C -
16.693	7.053	22.899	0.265	0.339	16.693	-16.208	23.569	0.361	0.348
16.879	6.874	23.157	0.268	0.342	16.879	-16.405	23.840	0.365	0.352
17.064	6.686	23.420	0.271	0.346	17.064	-16.603	24.111	0.369	0.356
17.250	6.490	23.691	0.274	0.350	17.250	-16.803	24.384	0.373	0.360
17.436	6.287	23.966	0.277	0.354	17.436	-17.005	24.659	0.377	0.365
17.621	6.078	24.245	0.280	0.358	17.621	-17.208	24.934	0.382	0.369
17.806	5.864	24.528	0.284	0.363	17.806	-17.412	25.209	0.386	0.373
17.992	5.645	24.815	0.287	0.367	17.992	-17.619	25.487	0.390	0.377
18.177	5.422	25.105	0.290	0.371	18.177	-17.828	25.766	0.394	0.381
18.363	5.190	25.402	0.294	0.376	18.363	-18.038	26.047	0.399	0.385
18.548	4.951	25.705	0.297	0.380	18.548	-18.250	26.328	0.403	0.389
18.734	4.705	26.013	0.301	0.385	18.734	-18.465	26.613	0.407	0.393
18.919	4.452	26.326	0.304	0.389	18.919	-18.681	26.897	0.412	0.398
19.105	4.195	26.644	0.308	0.394	19.105	-18.899	27.184	0.416	0.402
19.290	3.933	26.964	0.312	0.399	19.290	-19.120	27.472	0.420	0.406
19.475	3.665	27.290	0.316	0.403	19.475	-19.342	27.761	0.425	0.410
19.661	3.392	27.620	0.319	0.408	19.661	-19.567	28.053	0.429	0.415
19.846	3.112	27.956	0.323	0.413	19.846	-19.794	28.346	0.434	0.419
20.032	2.824	28.299	0.327	0.418	20.032	-20.022	28.640	0.438	0.423
20.217	2.528	28.648	0.331	0.423	20.217	-20.254	28.937	0.443	0.428
20.403	2.226	29.003	0.335	0.429	20.403	-20.488	29.235	0.447	0.432
20.588	1.917	29.363	0.340	0.434	20.588	-20.724	29.535	0.452	0.437
20.774	1.602	29.729	0.344	0.439	20.774	-20.963	29.838	0.457	0.441
20.959	1.282	30.098	0.348	0.445	20.959	-21.204	30.142	0.461	0.446
21.145	0.956	30.474	0.352	0.450	21.145	-21.447	30.448	0.466	0.450
21.330	0.623	30.854	0.357	0.456	21.330	-21.694	30.757	0.471	0.455
21.516	0.284	31.241	0.361	0.462	21.516	-21.943	31.067	0.475	0.459
21.701	-0.062	31.634	0.366	0.468	21.701	-22.195	31.380	0.480	0.464
21.887	-0.415	32.033	0.370	0.474	21.887	-22.449	31.695	0.485	0.469
22.073	-0.772	32.435	0.375	0.479	22.073	-22.707	32.013	0.490	0.473
22.258	-1.135	32.842	0.380	0.485	22.258	-22.966	32.331	0.495	0.478
22.444	-1.503	33.255	0.385	0.492	22.444	-23.229	32.653	0.500	0.483
22.629	-1.880	33.675	0.389	0.498	22.629	-23.496	32.978	0.505	0.488
22.814	-2.266	34.103	0.394	0.504	22.814	-23.764	33.304	0.510	0.492
23.000	-2.663	34.541	0.399	0.511	23.000	-24.036	33.633	0.515	0.497
23.185	-3.068	34.986	0.405	0.517	23.185	-24.312	33.966	0.520	0.502
23.371	-3.480	35.439	0.410	0.524	23.371	-24.591	34.301	0.525	0.507
23.556	-3.896	35.894	0.415	0.531	23.556	-24.872	34.637	0.530	0.512
23.742	-4.314	36.351	0.420	0.537	23.742	-25.157	34.978	0.535	0.517
23.927	-4.735	36.811	0.426	0.544	23.927	-25.445	35.320	0.540	0.522
24.112	-5.163	37.277	0.431	0.551	24.112	-25.737	35.666	0.546	0.527
24.298	-5.598	37.751	0.437	0.558	24.298	-26.032	36.014	0.551	0.532
24.483	-6.043	38.232	0.442	0.565	24.483	-26.331	36.366	0.556	0.538
24.669	-6.501	38.727	0.448	0.572	24.669	-26.634	36.722	0.562	0.543
24.854	-6.971	39.232	0.454	0.580	24.854	-26.941	37.080	0.567	0.548

Table 1

Annexe 1 : Géométrie

X mm	Y mm	S mm	S/SSS -	S/C -	X mm	Y mm	S mm	S/SPS -	S/C -
25.040	-7.448	39.744	0.460	0.588	25.040	-27.250	37.441	0.573	0.553
25.225	-7.929	40.259	0.466	0.595	25.225	-27.562	37.803	0.578	0.559
25.411	-8.417	40.781	0.472	0.603	25.411	-27.877	38.169	0.584	0.564
25.596	-8.911	41.309	0.478	0.611	25.596	-28.197	38.539	0.590	0.570
25.782	-9.415	41.846	0.484	0.619	25.782	-28.521	38.912	0.595	0.575
25.967	-9.929	42.392	0.490	0.627	25.967	-28.850	39.290	0.601	0.581
26.153	-10.453	42.949	0.497	0.635	26.153	-29.185	39.673	0.607	0.586
26.338	-10.988	43.515	0.503	0.643	26.338	-29.525	40.060	0.613	0.592
26.524	-11.532	44.090	0.510	0.652	26.524	-29.869	40.451	0.619	0.598
26.710	-12.085	44.673	0.517	0.660	26.710	-30.215	40.844	0.625	0.604
26.895	-12.647	45.265	0.524	0.669	26.895	-30.567	41.242	0.631	0.610
27.081	-13.217	45.864	0.530	0.678	27.081	-30.921	41.642	0.637	0.616
27.266	-13.798	46.474	0.538	0.687	27.266	-31.280	42.045	0.643	0.622
27.451	-14.389	47.093	0.545	0.696	27.451	-31.643	42.453	0.650	0.628
27.637	-14.986	47.719	0.552	0.705	27.637	-32.012	42.866	0.656	0.634
27.822	-15.591	48.351	0.559	0.715	27.822	-32.385	43.282	0.662	0.640
28.008	-16.202	48.990	0.567	0.724	28.008	-32.763	43.704	0.669	0.646
28.193	-16.821	49.636	0.574	0.734	28.193	-33.145	44.128	0.675	0.652
28.379	-17.445	50.287	0.582	0.743	28.379	-33.532	44.557	0.682	0.659
28.564	-18.076	50.945	0.589	0.753	28.564	-33.924	44.991	0.688	0.665
28.750	-18.713	51.608	0.597	0.763	28.750	-34.322	45.430	0.695	0.672
28.935	-19.358	52.279	0.605	0.773	28.935	-34.724	45.873	0.702	0.678
29.120	-20.009	52.956	0.612	0.783	29.120	-35.133	46.322	0.709	0.685
29.306	-20.665	53.638	0.620	0.793	29.306	-35.546	46.775	0.716	0.691
29.491	-21.327	54.325	0.628	0.803	29.491	-35.964	47.232	0.723	0.698
29.677	-21.992	55.016	0.636	0.813	29.677	-36.387	47.694	0.730	0.705
29.862	-22.664	55.713	0.644	0.824	29.862	-36.816	48.161	0.737	0.712
30.048	-23.344	56.418	0.653	0.834	30.048	-37.250	48.633	0.744	0.719
30.233	-24.034	57.132	0.661	0.845	30.233	-37.690	49.111	0.752	0.726
30.419	-24.735	57.857	0.669	0.855	30.419	-38.136	49.594	0.759	0.733
30.604	-25.445	58.591	0.678	0.866	30.604	-38.586	50.080	0.766	0.740
30.790	-26.162	59.332	0.686	0.877	30.790	-39.042	50.573	0.774	0.748
30.975	-26.886	60.079	0.695	0.888	30.975	-39.506	51.072	0.782	0.755
31.161	-27.615	60.831	0.704	0.899	31.161	-39.978	51.580	0.789	0.762
31.347	-28.347	61.587	0.712	0.910	31.347	-40.456	52.093	0.797	0.770
31.532	-29.083	62.346	0.721	0.922	31.532	-40.938	52.609	0.805	0.778
31.718	-29.823	63.109	0.730	0.933	31.718	-41.422	53.127	0.813	0.785
31.903	-30.566	63.874	0.739	0.944	31.903	-41.909	53.648	0.821	0.793
32.089	-31.312	64.643	0.748	0.956	32.089	-42.398	54.171	0.829	0.801
32.274	-32.064	65.418	0.757	0.967	32.274	-42.890	54.697	0.837	0.809
32.459	-32.820	66.196	0.766	0.979	32.459	-43.387	55.227	0.845	0.816
32.645	-33.585	66.983	0.775	0.990	32.645	-43.891	55.765	0.853	0.824
32.830	-34.362	67.782	0.784	1.002	32.830	-44.395	56.301	0.862	0.832
33.016	-35.130	68.572	0.793	1.014	33.016	-44.901	56.841	0.870	0.840
33.201	-35.897	69.361	0.802	1.025	33.201	-45.405	57.377	0.878	0.848

Table 1

Annexe 1 : Géométrie

X mm	Y mm	S mm	S/SSS -	S/C -	X mm	Y mm	S mm	S/SPS -	S/C -
33.387	-36.665	70.151	0.811	1.037	33.387	-45.911	57.917	0.886	0.856
33.572	-37.432	70.940	0.820	1.049	33.572	-46.416	58.454	0.895	0.864
33.757	-38.198	71.728	0.830	1.060	33.757	-46.920	58.991	0.903	0.872
33.943	-38.966	72.518	0.839	1.072	33.943	-47.426	59.530	0.911	0.880
34.128	-39.732	73.306	0.848	1.084	34.128	-47.930	60.067	0.919	0.888
34.314	-40.501	74.098	0.857	1.095	34.314	-48.436	60.606	0.927	0.896
34.499	-41.267	74.886	0.866	1.107	34.499	-48.940	61.143	0.936	0.904
34.685	-42.036	75.677	0.875	1.119	34.685	-49.446	61.682	0.944	0.912
34.870	-42.802	76.465	0.884	1.130	34.870	-49.950	62.219	0.952	0.920
35.056	-43.571	77.256	0.894	1.142	35.056	-50.457	62.759	0.960	0.928
35.241	-44.337	78.044	0.903	1.154	35.241	-50.961	63.296	0.969	0.936
35.427	-45.103	78.832	0.912	1.165	35.427	-51.465	63.833	0.977	0.944
35.612	-45.872	79.623	0.921	1.177	35.612	-51.829	64.221	0.983	0.949
35.798	-46.637	80.411	0.930	1.189	35.612	-51.958	64.360	0.985	0.951
35.984	-47.406	81.202	0.939	1.200	35.715	-52.087	64.525	0.987	0.954
36.169	-48.172	81.990	0.948	1.212	35.882	-52.235	64.748	0.991	0.957
36.355	-48.941	82.781	0.957	1.224	36.075	-52.312	64.956	0.994	0.960
36.540	-49.707	83.569	0.967	1.235	36.268	-52.344	65.152	0.997	0.963
36.726	-50.476	84.360	0.976	1.247	36.461	-52.305	65.349	1.000	0.966
36.975	-51.508	85.422	0.988	1.263		-51.365			
36.985	-51.637	85.551	0.989	1.265					
36.975	-51.765	85.680	0.991	1.267					
36.898	-51.958	85.887	0.993	1.270					
36.814	-52.087	86.041	0.995	1.272					
36.654	-52.228	86.255	0.998	1.275					
36.461	-52.305	86.462	1.000	1.278					

## Annexe 2 : Résultats expérimentaux

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur221

Measured parameters:

Total temperature [K]:	405.30
Total inlet pressure [bar]:	0.818
Static inlet pressure [bar]:	0.805
Static outlet pressure [bar]:	0.367
Wall temperature [K]:	301.55
Free stream turbulence (%):	4.0
Incidence angle [degr.]:	0.0

Free stream conditions

	Inlet	Outlet
Total temperature [K]:	405.30	
Total pressure [bar]:	0.818	
Mach number:	0.150	1.134
Reynolds number:	1.2131E05	5.5165E05
Temperature [K]:	403.48	322.39
Pressure [bar]:	0.805	0.367
Density [kg/m**3]	0.695	0.397
Velocity [m/s]	60.41	408.21
Dynamic viscosity [kg/m.s]	2.3421E-05	1.9862E-05
Cinematic viscosity [m2/s]	3.3684E-05	5.0058E-05

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur221

Wall heat flux distribution

			Suction side			Pressure side		
	S	Q	H	S	Q	H		
	mm	W/cm2	W/m2K	mm	W/cm2	W/m2K		
	0.000	5.025	484.3	1.515	4.869	469.3		
	1.521	4.482	432.0	3.500	3.101	298.9		
	3.506	4.176	402.5	6.000	2.500	241.0		
	6.002	3.812	367.4	9.821	2.128	205.1		
	9.410	3.847	370.8	13.641	1.944	187.4		
	12.810	3.662	353.0	17.460	1.862	179.5		
	16.220	3.265	314.7	21.279	1.803	173.8		
	19.630	2.858	275.5	25.101	0.000	0.0		
	23.042	2.262	218.0	28.920	1.848	178.1		
	26.440	1.995	192.3	32.741	1.940	187.0		
	29.849	1.947	187.7	36.559	2.012	193.9		
	33.261	1.825	175.9	40.380	2.156	207.8		
	36.659	1.611	155.3	44.200	2.247	216.6		
	40.068	1.204	116.0	48.019	2.326	224.2		
	43.478	1.188	114.5	51.841	0.000	0.0		
	46.879	1.205	116.1	55.661	2.375	228.9		
	50.291	1.142	110.1	59.480	2.262	218.0		
	53.699	1.076	103.7	63.299	2.131	205.4		
	57.098	0.997	96.1					
	60.510	0.948	91.4					
	63.921	0.737	71.0					
	67.330	0.352	33.9					
	70.730	0.257	24.8					
	74.140	0.465	44.8					
	77.548	1.521	146.6					
	80.948	3.654	352.2					
	84.360	5.404	520.9					

## Annexe 2 : Résultats expérimentaux

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur222

Measured parameters:

Total temperature [K]:	409.20
Total inlet pressure [bar]:	0.822
Static inlet pressure [bar]:	0.809
Static outlet pressure [bar]:	0.369
Wall temperature [K]:	301.95
Free stream turbulence (%):	6.0
Incidence angle [degr.]:	0.0

Free stream conditions

	Inlet	Outlet
Total temperature [K]:	409.20	
Total pressure [bar]:	0.822	
Mach number:	0.150	1.135
Reynolds number:	1.2048E05	5.4770E05
Temperature [K]:	407.37	325.37
Pressure [bar]:	0.809	0.369
Density [kg/m**3]	0.692	0.395
Velocity [m/s]	60.41	410.45
Dynamic viscosity [kg/m.s]	2.3581E-05	2.0000E-05
Cinematic viscosity [m2/s]	3.4079E-05	5.0596E-05

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur222

Wall heat flux distribution

			Suction side			Pressure side		
	S	Q	H	S	Q	H		
	mm	W/cm2	W/m2K	mm	W/cm2	W/m2K		
	0.000	5.734	534.6	1.515	5.570	519.3		
	1.521	5.180	483.0	3.500	3.662	341.4		
	3.506	4.860	453.1	6.000	3.002	279.9		
	6.002	4.440	414.0	9.821	2.571	239.7		
	9.410	4.463	416.1	13.641	2.381	222.0		
	12.810	4.202	391.8	17.460	2.298	214.3		
	16.220	3.710	345.9	21.279	2.224	207.4		
	19.630	3.227	300.9	25.101	0.000	0.0		
	23.042	2.528	235.7	28.920	2.262	210.9		
	26.440	2.217	206.7	32.741	2.358	219.9		
	29.849	2.157	201.1	36.559	2.459	229.3		
	33.261	2.026	188.9	40.380	2.566	239.3		
	36.659	1.757	163.8	44.200	2.652	247.3		
	40.068	1.379	128.6	48.019	2.713	253.0		
	43.478	1.352	126.1	51.841	0.000	0.0		
	46.879	1.345	125.4	55.661	2.727	254.3		
	50.291	1.278	119.2	59.480	2.592	241.7		
	53.699	1.202	112.1	63.299	2.401	223.9		
	57.098	1.122	104.6					
	60.510	1.030	96.0					
	63.921	0.987	92.0					
	67.330	0.794	74.0					
	70.730	0.346	32.3					
	74.140	0.350	32.6					
	77.548	1.397	130.3					
	80.948	4.435	413.5					
	84.360	5.286	492.9					

## Annexe 2 : Résultats expérimentaux

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur228

Measured parameters:

Total temperature [K]:	403.30
Total inlet pressure [bar]:	0.915
Static inlet pressure [bar]:	0.901
Static outlet pressure [bar]:	0.522
Wall temperature [K]:	302.85
Free stream turbulence (%):	1.0
Incidence angle [degr.]:	0.0

Free stream conditions

	Inlet	Outlet
Total temperature [K]:	403.3	
Total pressure [bar]:	0.915	
Mach number:	0.150	0.932
Reynolds number:	1.3650E05	5.9554E05
Temperature [K]:	401.49	343.61
Pressure [bar]:	0.901	0.522
Density [kg/m**3]	0.782	0.530
Velocity [m/s]	60.26	346.36
Dynamic viscosity [kg/m.s]	2.3338E-05	2.0833E-05
Kinematic viscosity [m2/s]	2.9863E-05	3.9343E-05

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur228

Wall heat flux distribution

			Suction side			Pressure side		
	S	Q	H	S	Q	H		
	mm	W/cm2	W/m2K	mm	W/cm2	W/m2K		
	0.000	4.888	486.6	1.515	4.743	472.2		
	1.521	4.331	431.2	3.500	2.954	294.1		
	3.506	4.015	399.7	6.000	2.322	231.2		
	6.002	3.653	363.7	9.821	1.922	191.3		
	9.410	3.706	368.9	13.641	1.734	172.6		
	12.810	3.571	355.5	17.460	1.630	162.3		
	16.220	3.221	320.7	21.279	1.559	155.2		
	19.630	2.855	284.2	25.101	0.000	0.0		
	23.042	2.274	226.4	28.920	1.540	153.3		
	26.440	2.008	199.9	32.741	1.596	158.9		
	29.849	1.960	195.1	36.559	1.667	166.0		
	33.261	1.816	180.8	40.380	1.767	175.9		
	36.659	1.575	156.8	44.200	1.854	184.6		
	40.068	1.513	150.6	48.019	1.941	193.2		
	43.478	1.452	144.5	51.841	0.000	0.0		
	46.879	1.361	135.5	55.661	2.015	200.6		
	50.291	1.212	120.7	59.480	1.962	195.3		
	53.699	0.970	96.6	63.299	1.879	187.1		
	57.098	0.821	81.7					
	60.510	0.776	77.3					
	63.921	0.692	68.9					
	67.330	0.506	50.4					
	70.730	0.660	65.7					
	74.140	1.756	174.8					
	77.548	2.000	199.1					
	80.948	2.450	243.9					
	84.360	2.800	278.7					

## Annexe 2 : Résultats expérimentaux

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur230

Measured parameters:

Total temperature [K]:	402.30
Total inlet pressure [bar]:	0.824
Static inlet pressure [bar]:	0.811
Static outlet pressure [bar]:	0.377
Wall temperature [K]:	303.95
Free stream turbulence (%):	1.0
Incidence angle [degr.]:	0.0

Free stream conditions

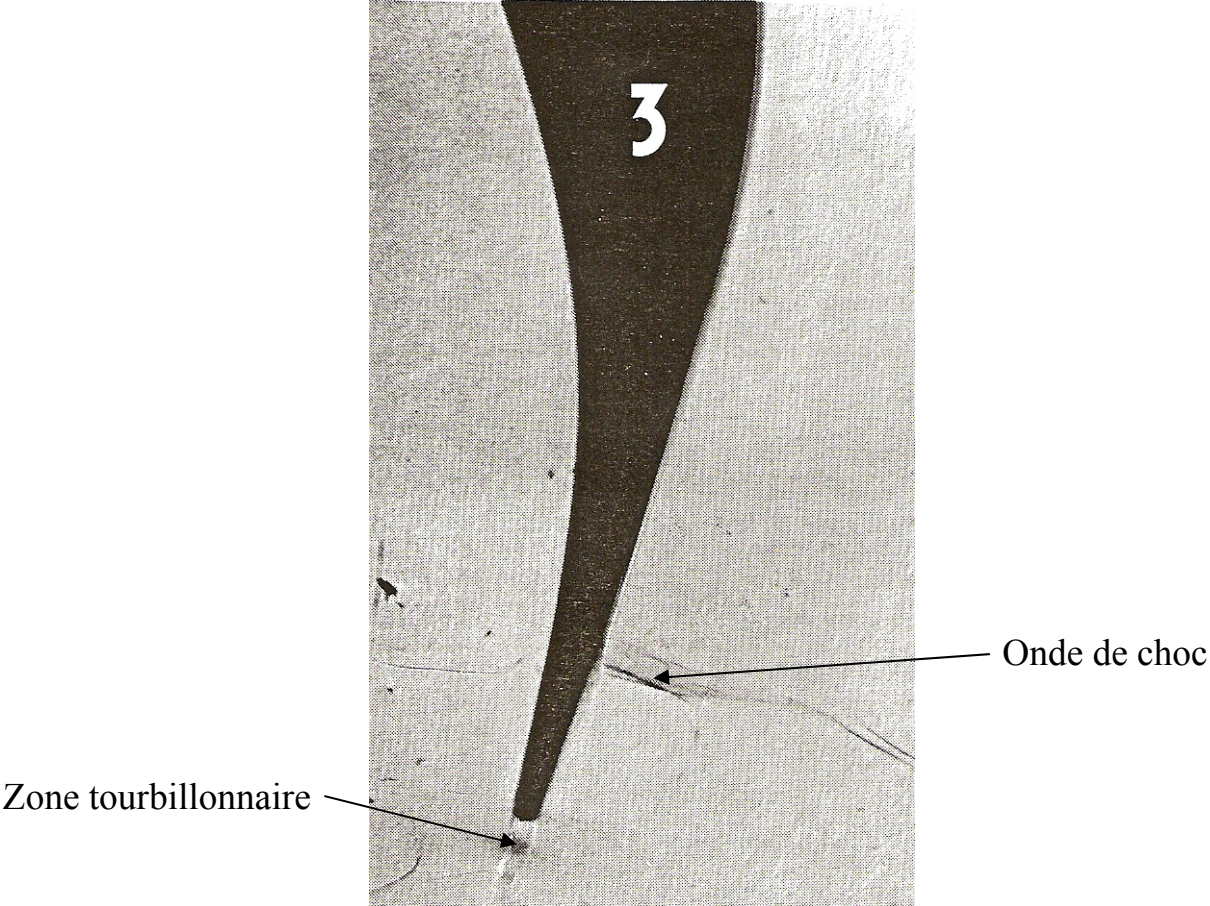
	Inlet	Outlet
Total temperature [K]:	402.3	
Total pressure [bar]:	0.824	
Mach number:	0.150	1.118
Reynolds number:	1.2331E05	5.6017E05
Temperature [K]:	400.50	321.84
Pressure [bar]:	0.811	0.377
Density [kg/m**3]	0.706	0.408
Velocity [m/s]	60.18	402.11
Dynamic viscosity [kg/m.s]	2.3297E-05	1.9837E-05
Cinematic viscosity [m2/s]	3.3016E-05	4.8560E-05

### LS1989 NOZZELE BLADE TEST RESULTS

Test number: Mur230

Wall heat flux distribution

			Suction side			Pressure side		
	S	Q	H	S	Q	H		
	mm	W/cm2	W/m2K	mm	W/cm2	W/m2K		
	0.000	4.627	470.5	1.515	4.492	456.7		
	1.521	4.100	416.9	3.500	2.791	283.8		
	3.506	3.801	386.5	6.000	2.196	223.3		
	6.002	3.454	351.2	9.821	1.818	184.9		
	9.410	3.513	357.2	13.641	1.635	166.2		
	12.810	3.376	343.3	17.460	1.539	156.5		
	16.220	3.036	308.7	21.279	1.473	149.8		
	19.630	2.682	272.7	25.101	0.000	0.0		
	23.042	2.137	217.3	28.920	1.458	148.2		
	26.440	1.890	192.2	32.741	1.512	153.7		
	29.849	1.845	187.6	36.559	1.570	159.6		
	33.261	1.730	175.9	40.380	1.666	169.4		
	36.659	1.533	155.9	44.200	1.749	177.8		
	40.068	1.131	115.0	48.019	1.823	185.4		
	43.478	1.125	114.4	51.841	0.000	0.0		
	46.879	1.140	115.9	55.661	1.898	193.0		
	50.291	1.081	109.9	59.480	1.828	186.9		
	53.699	1.013	103.0	63.299	1.719	174.8		
	57.098	0.936	95.2					
	60.510	0.904	91.9					
	63.921	0.664	67.5					
	67.330	0.324	32.9					
	70.730	0.326	33.1					
	74.140	0.510	51.9					
	77.548	1.227	124.8					
	80.948	3.750	381.3					
	84.360	4.719	479.8					



Visualisation de l'écoulement