الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès

Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales et des Sciences De Gestion

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية و علوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

دروس وتمارين
في الإحصاء I

موجهة لطلبة : السنة الأولى LMD

تخصص: جذع مشترك

اعداد الدكتور : بن نعمان جمال

قســم: العلوم التجارية

السنة الجامعية : 2020 -2021

مقدّمة

تقدم هذه المطبوعة عرضا مبسطا للموضوعات الأساسية في الإحصاء الوصفي، بما يتماشى مع محاور البرنامج الرسمي الموحد الموضوع من قبل اللجنة البيداغوجية الوطنية لميدان التكوين في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، الخاص بالسداسي الأول جذع مشترك في مادة الإحصاء، والمعتمد من قبل وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

وقد تم اتباع التسلسل المنطقي في عرض الموضوعات المختلفة. وتتميز هذه المطبوعة بعدد وافر من التمارين في نهاية كل فصل، والتي تم اختيارها بعناية لتسهم في توضيح الأفكار والمفاهيم، وليطبق عليها الطالب ما اكتسبه من معارف. كما تضمنت المطبوعة مجموعة من التمارين المحلولة.

واشتملت المطبوعة على خمسة فصول حيث تمحور الفصل الأول حول التعريف بالإحصاء والمفاهيم الأساسية، أما الفصل الثاني تضمن أساليب عرض البيانات الإحصائية، بينما الفصل الثالث خصصناه لموضوع مقاييس النزعة المركزية(المتوسطات)، أما الفصل الرابع فتضمن مقاييس التشتت المطلق والنسبي، وفي الفصل الأخير خصصناه لمقاييس الشكل (العزوم، الالتواء، التفرطح). كما تم ذكر مجموعة من المراجع التي استخدمت في اعداد هذه المطبوعة التي يمكن للطالب الرجوع إليها.

وأرجو في الأخير أن يكون مضمون هذه المطبوعة ذا فائدة لطلبتنا في مسعاهم لتحقيق ما يتطلعون اليه.

د. بن نعمان جمال

الفصل الأول
الإحصاء والمفاهيم الأساسية

1. التعريف بالإحصاء وبعض المفاهيم الإحصائية العامة
2. المتغيرات وانواعها
3. القياس ومستوياته
4. جمع البيانات
5. أنواع العينات وطرائق اختيارها
6. أسئلة وتمارين محلولة

أسئلة وتمارين

الفصل الأول

الإحصاء والمفاهيم الأساسية

1. التعريف بالإحصاء وبعض المفاهيم الإحصائية العامة

1.1 التعريف بالإحصاء

ارتبط علم الإحصاء في بداية نشأته بعمليات العد التي كانت تقوم بها الدولة في العصور الوسطى للتعرف على قدرتها البشرية والمادية حتى تتمكن من الهجوم على دولة أخرى أو الدفاع عن أراضيها أو تحصيل الضرائب. أي أن هذا العلم كان قاصرا في نشأته على الأعمال الخاصة بشؤون الدولة.

وتم اشتقاق كلمة إحصاءات" Statistics"من المصطلح اللاتيني الحديث Statisticum Collegium(أي مجلس الدولة)، ومن الكلمة الإيطالية Statista (أي رجل الدولة أو السياسي). وقد استخدمت كلمة" Statistics " لوصف الشخص المتمرس في شؤون الدولة، الذي يتمتع بمعرفة سياسية وقوة ونفوذ. كما استخدمت عبارة "حساب سياسي"Political Arithmetic " لتعني فن التفكير باستخدام الأرقام في الأشياء المتعلقة بالحكومة للتعبير عن كلمة "إحصاءات أو " Statistics".

فكلمة "الإحصاء" لها مدلولين رئيسين: الأول يتصل بفكرة الأرقام أو الأعداد وهو مدلول الذي يخطر مباشرة في أذهان الناس عند الحديث عن الإحصاء ويتمثل هذا المدلول وصفا عدديا للجوانب الكمية للأشياء المدروسة، فهو يدل على المعلومات الكمية والبيانات العددية المتعلقة بموضوع أو شيء معين. أما المدلول الثاني، فهو مدلول علمي يدل على المبادئ أو الطرق العلمية التي تتبع للحصول على المعلومات الكمية ودراسة خصائصها من أجل الوصول إلى نتائج صحيحة وقرارات حكيمة لإزالة الشك ولمواجهة المستقبل المجهول المتعلق بموضوع ما.

ويمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الأساليب الإحصائية وهي:

1.1.1 الإحصاء الوصفي : يلتزم حدود البيانات المتاحة ولا يتخطاها بأي حال من الأحوال، بمعنى أنه يقتصر على جمع البيانات وتصنيفها وعرضها بيانيا، بغرض تلخيصها وتحليلها ثم استخدامها.

2.1.1 الإحصاء الإستدلالي : هو ذلك الإحصاء الذي لا يلتزم حدود البيانات المتاحة والمعلومة للباحث، لكنه يحاول الإستدلال بالبيانات المتاحة على صفات البيانات غير المتاحة.

3.1.1الإحصاء التنبؤى : هو ذلك الإحصاء الذي يتخطى حدود الزمن في محاولة للاستدلال على شكل الظاهرة في المستقبل اعتمادا على البيانات المتاحة عن الحاضر.

2.1 بعض المفاهيم الإحصائية العامة

1.2.1المجتمع الإحصائي : تدعى المجموعة محل الدراسة الإحصائية بالمجتمع الإحصائي وعناصرها بالأفراد (أو الوحدات الإحصائية). ويرجع استعمال هاتين الكليمتان، مجتمع وفرد، بدل مجموعة وعنصر إلى تاريخ الإحصاء الذي أهتم في بداية نشأته بالمجموعات البشرية وعندما انتقل الى العلوم الأخرى حافظ على مصطلحاته الأساسية. ومن ثم أصبح يستخدم هذا المصطلح ليعني مجموعة من الأشياء المنتهية أو غير المنتهية.

وعليه، يعرف المجتمع الإحصائي بأنه مجموعة من العناصر المشتركة في الصفة التي تهم الباحث، فمثلا عند دراسة ظاهرة الحوادث في مدينة بومرداس فإن المجتمع الإحصائي هو جميع الأفراد الذين تعرضوا أو ارتكبوا حوادث في مدينة بومرداس.

ويمكن تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين رئيسيين هما:

1.1.2.1 المجتمع الإحصائي المحدود : هو ذلك المجتمع الإحصائي الذي يمكن معرفة عدد مفرداته، فمثلا عدد الطلبة أحد التخصصات يمثل مجتمع محدود لأنه يمكن حصر مفرداته.

2.1.2.1 المجتمع الإحصائي الغير محدود : هو ذلك المجتمع الإحصائي الذي لا يمكن معرفة حجمه أو عدد مفرداته، ومن الأمثلة عن ذلك مجتمع: الطيور، الأسماك، لاستحالة المسح الشامل معها.

2.2.1 العينة : هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع الإحصائي، التي تم اختيارها بطريقة معينة، وذلك قصد دراسة خصائص المجتمع الإحصائي.

3.2.1 المعلمة والإحصاء

1.3.2.1 المعلمة : هي قيمة عددية تستخدم لوصف خاصية معينة في المجتمع الإحصائي، وغالبا ما تكون مجهولة. فمثلا متوسط الدخل الفرد في بلد ما يعتبر معلمة وذلك لأنه يعكس المستوى المعيشي لأفراد ذلك البلد، نسبة المصابين بالأمراض المعدية في بلد ما تُعد معلمة، لأنها تعبر عن مدى انتشار الوعي الصحي بذلك البلد. وجرت العادة أن يرمز للمعلمة بحروف كبيرة أو بحروف يونانية مثل المتوسط الحسابي يرمز له (μ)(ميو) والانحراف المعياري (σ) (سڤما)

1.3.2.1 الإحصاءة : هي خاصية وصفية لعينة ويرمز لها عادة بحروف صغيرة أو بحروف رومانية مثل المتوسط الحسابي يرمز ($\overline{x}$) (bar X) ، والإنحراف المعياري S.

4.2.1 المتغير الإحصائي : يشير إلى أي خاصية يمكن قياسها وتتباين قيمها من فرد إلى أخر، فهو يُعبر عن اختلاف الأفراد في قيم خاصية معينة.

5.2.1 القيمة الإحصائية: هي القيمة التي تعبر عنها المفردة بالنسبة لصفة أو خاصية معينة.

2. المتغيرات وانوعها

يمكن تصنيف أنواع المتغيرات الإحصائية وفق ما يلي:

1.2 تصنيف المتغيرات من وجهة نظر القياس: يتم تصنيف المتغيرات وفق لطبيعية البيانات المتجمّعة من عملية القياس إلى:

1.1.2 المتغيرات الكيفية (الوصفية): هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها رقميا، أي تلك المتغيرات التي يتم التعبير عنها بالوصف وليس بالأرقام مثل: الجنسية، لون السيارة، مكان الولادة، التخصص. الجنس ...الخ.

2.1.2 المتغيرات الكمية: هي تلك المتغيرات التي يمكن التعبير عنها أو قياسها رقميا مثل الطول، الوزن، عدد الطلبة، درجة الحرارة،...الخ. وتنقسم المتغيرات الكمية بدورها إلى:

1.2.1.2 المتغيرات الكمية المنفصلة: هي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة لا يمكن تجزئتها مثل عدد الأطفال في العائلة، عدد السيارات، عدد الأبواب، عدد المساكن...الخ.

2.2.1.2 المتغيرات الكمية المستمرة: هي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة مثلا: الوزن، العمر، علامات التحصيل الدراسي، الزمن، ...الخ.

2.2: تصنيف المتغيرات من وجهة النظر الإحصائية: يتم تصنيف المتغيرات التي تحتويها أي دراسة علمية إلى:

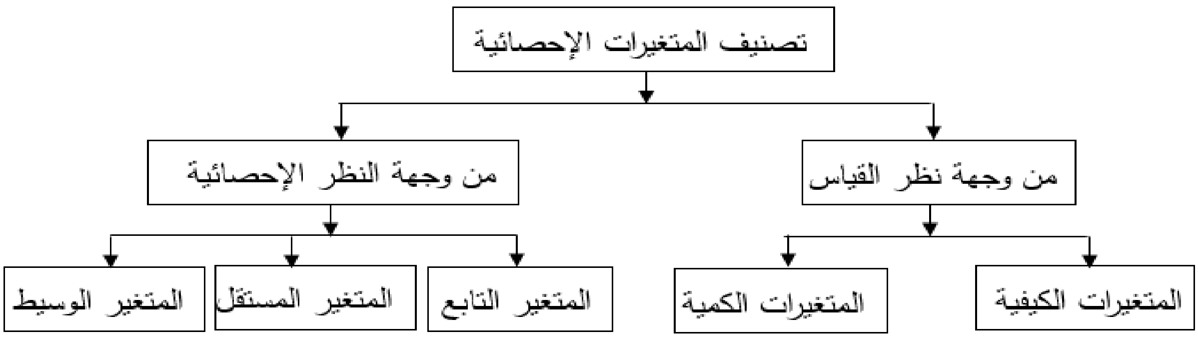
1.2.2المتغير المستقل: وهو المتغير الذي يستطيع الباحث أن يعالجه ويغيره وفقا لطبيعة البحث، أي أن المتغير المستقل يخضع لسيطرة الباحث فمثلا إذا كان الباحث مهتما بتأثير عدد مرات التدريب على الأداء لبعض المهمات فان الباحث يغير مستويات التدريب (عدد مرات التدريب) ومن ثم يلاحظ تأثير المستويات المختلفة على الأداء. وتسمى المتغيرات المستقلة بالعوامل(Facteurs) وتبايناتها بمستويات، وعلى سبيل المثال عامل الجنس يصنف إلى مستويين: ذكر، أنثى.

2.1.2 المتغير التابع: هو الذي يتأثر بالمتغير المستقل فكلما تغير أو عدل المتغير المستقيل فان الباحث يلاحظ التغيرات التي تحدث للمتغير التابع. فإذا أراد الباحث أن يكشف عن أثر درجات الحرارة على الانتباه فدرجات الحرارة هنا متغير مستقل والانتباه متغير تابع. بمعنى أخر أن المتغير

المستقل هو السبب والمتغير التابع هو النتيجة، ومن الأمثلة عن ذلك: ميزانية الإشهار والمبيعات، الدخل والاستهلاك، عدد مرات التدريب والأداء، المناخ التنظيمي والأداء، الإبداع والأداء.

3.1.2 المتغير الوسيط: هو نوع خاص من المتغيرات المستقلة يتم اختياره من قبل الباحث لمعرفة أثره على العلاقة بين المتغير المستقيل والتابع. فالمتغيرات الديمغرافية كالجنس والعمر مثلا قد يتم استخدامها كمتغيرات وسيطة عند دراسة العلاقة بين التدريب وأداء الموظف. وأيضا يمكن أن نعتبر المتغيرات المتعلقة بالمنظمة كسنة التأسيس وحجم المنظمة ونوعها كمتغيرات وسيطه عند دراسة تأثير الإبداع على أداء المؤسسة. فالمتغير الوسيط هو المتغير الذي يملك تأثير على العلاقة بين المتغير المستقل بالمتغير التابع، إذ يعمل على تعديل أو تأثير على العلاقة المتوقعة بين المتغير المستقل والتابع.

يمكن تلخص أنواع المتغيرات الإحصائية في الشكل التالي:



شكل رقم(01): تصنيف أنواع المتغيرات الإحصائية

3. القياس ومستوياته

1.3 مفهوم القياس: يعرف بأنه " العملية التي تحدد بواسطتها كمية ما يوجد في الشيء من الخاصية أو الصفة المراد قياسها، بمعنى تمثيل للصفات أو الخصائص بالأرقام".

2.3 أنواع القياس: وهناك نوعين من القياس هما:

1.1.3 قياس مباشر: وهذا النوع يقيس الخاصية أو الصفة نفسها، ومثال ذلك قياس طول الإنسان، وزن شيء ما بالكيلوجرام... إلخ.

2.1.3 قياس غير مباشر: ويمكن أن يلاحظ هذا حين نقيس مدى التحصيل لدى الطلبة بواسطة الأسئلة أو حين نقيس درجة الحرارة بارتفاع عمود الزئبق في الترمومتر. حيث هذا النوع لا يقيس الخاصية أو الصفة نفسها بطريقة مباشرة كما هو في النوع الأول، وإنما يقيس الآثار المترتبة عليها لأجل

الوصول إلى كمية تلك الخاصية أو الصفة؛ فالخاصية أو الصفة المقاسة تتأثر بالمقياس المستخدم، ثم يتم اصدار الحكم في ضوء حجم الأثر الذي أثرت به، أو تأثرت به الوسيلة المستخدمة.

3.3 مستويات القياس: هناك أربعة أنواع من مستويات القياس هي: الإسمي، الترتيبي، المجالي، والنسبي وهي على النحو التالي:

1.3.3 القياس الاسمي: وفق هذا المقياس يتم تقسيم أو تصنيف المتغير المدروس أو الصفة المدروسة عن بعضها البعض بالاسم فقط دون أن يعني ذلك الأفضلية ومن بين الأمثلة على ذلك تصنيف الكتب حسب الموضوع (كتب اقتصاد، كتب رياضيات، كتب فلسفة)، تصنيف الأشخاص حسب الجنس (ذكور، إناث)، تصنيف القطاعات الاقتصادية (خدمات، صناعة، زراعة). وقد جارت العادة على استخدام الأرقام للتمييز بين الصفات بدلا من إعطائها تسمية معينة، غير أن هذه الأرقام مجردة من معناها كمي وانما تؤدي دور التصنيف فقط مثل تصنيف قاعات التدريس بالأرقام أو ترميز (تشفير) للذكور بالرقم "1 "والإناث بالرقم "2" وهذا لا يعني أن رقم "2" (رمز الإناث) هو ضعف رقم" 1 " (رمز الذكور).

2.3.3 القياس الترتيبي: يفيد هذا المقياس التصنيف والترتيب في نفس الوقت، من الأمثلة على ذلك: تقديرات الطلبة (ممتاز، جيد حدا، جيد، مقبول، ضعيف)، توزيع السكان حسب الحالة التعليمية (أمي، ابتدائي، ثانوي، جامعي، دكتوراه)، مستوى المعيشي (مرتفع، متوسط، متدن). وما يتميز هذا المقياس عن المقياس السابق أنه يمكننا ترتيب مستويات القياس ترتيبا تصاعديا أو تنازليا مما يسمح بإجراء مقارنات. كما تشير الأرقام في هذا المقياس إلى التفضيل والأهمية كما هو الحال عندما يطلب منك الإجابة عن سؤال من استبيان الذي يدور حول" ترتيب نوع الخدمة المقدمة لك وفقا لأهميتها" مستخدما في ذلك الرقم"1" للأكثر أهمية والرقم "2" الذي يليه في الأهمية، وهكذا".

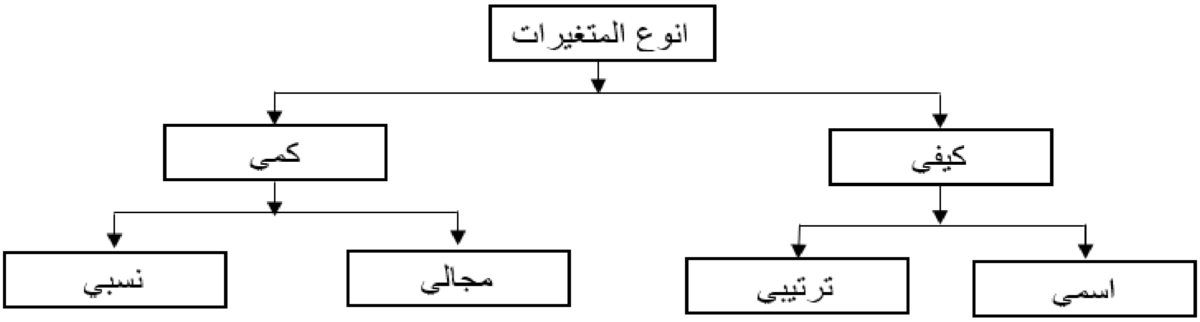
الخدمة سريعة ☐ الخدمة جيدة ☐ الأسعار الرخصة ☐ استخدام بطاقة الائتمان ☐

3.3.3 القياس المجالي: أن هذا المقياس يسمح لنا بتحديد الفروق بين القيم المتتالية، غير انه لا نستطيع إجراء النسبة بين القيم نظرا لانعدام نقطة الصفر المطلق، بمعنى أن الصفر لا يقيس حالة غياب الظاهرة أو الخاصية المدروسة. ومن الأمثلة المألوفة على هذا المقياس درجة الحرارة، فصفر درجة لا تعني انعدام درجة الحرارة، وأيضا لا نستطيع القول إن درجة الحرارة "20" تساوي ضعف درجة الحرارة "10" نتيجة عدم وجود الصفر المطلق (الحقيقي) . نفس الشيء يقال إذا كنا نتعامل مع علامات الطلبة، فطالب المتحصل على علامة "15من 20 " لا يعني أن مستواه التحصيل الدراسي يساوي ثلاثة أضعاف الطالب الذي تحصل على علامة" 5 من20"، فالطالب الذي تحصل على علامة صفر لا يعني لا يعرف

شيئا مطلقاً في تلك المادة لان الامتحان يقيس مالا يدركه الفرد وليس ما يدركه الفرد، ومن ثم الصفر في هذه الحالة لا يعبر عن انعدام الخاصية المدروسة.

4.3.3 القياس النسبي: يمتاز هذا المقياس بكل مزايا المقاييس السابقة بالإضافة إلى وجود الصفر الحقيقي ـ فالصفر الحقيقي يكون عندما تنعدم قيمة الشيء المقاس ـ وبالتالي يُعد أقوى مستويات القياس مما يسمح بإجراء النسب ومن الأمثلة على ذلك عدد الأبناء بالأسرة، عدد الطلاب بالقسم...الخ.

ويمكن تلخص أنواع المتغيرات وفق سلم القياس في الشكل التالي:



شكل رقم (02): تصنيف المتغيرات من وجهة نظر مستوى القياس

4. جمع البيانات

هناك فرقا جوهريا بين البيانات والمعلومات فالبيانات هي عبارة عن أرقام يتم تجميعها على شكل مادة خام قبل المعالجة. أما المعلومات فهي عبارة عن البيانات التي تم تصنيفها وترتيبها ومعالجتها.

1.4 مصادر جمع البيانات: يمكن تقسيم مصادر البيانات الإحصائية إلى قسمين رئيسيين:

1.1.4 المصادر غير المباشرة (التاريخية): وتشمل البيانات التي يكون مصدرها الوثائق والمطبوعات والنشرات الإحصائية والتقارير والدوريات التي تصدرها الحكومات والهيئات في البلدان المختلفة، مثل الديون الوطني للإحصاءات(ONS) في الجزائر، وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة ومنظماتها المختلفة، بالإضافة ما يتوفر في المكتبات من مؤلفات ومطبوعات تضم معطيات إحصائية.

2.1.4المصادر المباشرة (الميدانية): يتم جمع البيانات من وحدات المجتمع الإحصائي ميدانيا بمعنى أن الباحث نفسه يقوم بجمع البيانات ومن بين وسائل جمع البيانات نجد: **المقابلة الشخصية** حيث يتم فيها تفاعل لفظي بين الباحث والمفحوص في مواقف مواجهة حيث يمكن استثارة بعض المعلومات من الباحث للمفحوص ويقدم المفحوص بياناته شفويا بدلا من كتابتها. كما يتم جمع البيانات عن طريق **الاستبيان** حيث يصمم تبعا لكل مشكلة ونوع البيانات المطلوبة والمستوى التعليمي للأفراد الذين

تجمع منهم المعلومات، يرسل عن طريق البريد أو البريد الإيكتروني E-mail أو يسلم باليد. كما يتم جمع البيانات ايضا عن طريق **الملاحظة** حيث تفيد في جمع البيانات التي تتصل بسلوك الأفراد. وأخيرا **الاختبارات** وتستخدم في قياس قدرة الفرد في مجال معين أو تهدف إلى تحديد خصائصه، بالإضافة الى **التجارب المعلمية أو الحقلية** كما هو الحال في العلوم التطبيقية بمجالاتها المختلفة.

2.4.أساليب جمع البيانات: يتم جمع البيانات الإحصائية بإحدى الأسلوبين:

1.2.4 أسلوب الحصر الشامل: وهنا تجمع البيانات الإحصائية من جميع أفراد المجتمع بدون استثناء أي منها وذلك بهدف الحصول على معلومات إحصائية شاملة وبالتالي لا تكون هناك أخطاء سببها استثناء بعض عناصر المجتمع الإحصائي. ويستخدم هذا الأسلوب غالبا في الحالات التالية:

- إذا كان المجتمع قيد الدراسة صغيرا.
- إذا تعذر الحصول على إطار لمفردات المجتمع، (الإطار هو عبارة عن قوائم أو خرائط دالة لعناصر المجتمع قيد الدراسة).
- إذا كان المطلوب الحصول على بيانات على مستوى عالي من الدقة أو معلومات أكثر تفصيلا عن مفردات المجتمع المدروس، كما هو الحال في التعدادات العامة سواء كانت زراعية أو إقتصادية أو سكانية، التي تجرى عادة لأغراض التخطيط الوطني أومن اجل تحديد الإمكانيات المتاحة للبلد. ومثل هذه البحوث تتم خلال فترة زمنية طويلة نسبيا لأنها تتطلب ميزانيات ضخمة لتوفير شروط الضرورية من أجل انجزها.

2.2.4 أسلوب المعاينة: إن دراسة جزء من المجتمع يطلق عليها عملية المعاينة. وتسمى جميع الوحدات المختارة من المجتمع الإحصائي بالعينة وعددها يدعى بحجم العينة ودراسة المجتمع الإحصائي بأسلوب العينة تسمى عملية المعاينة (Echantillonnage). فالمعاينة هي عملية اختيار عدد كاف من عناصر المجتمع بحيث يتمكن الباحث من خلال دراسة العينة من فهم خصائصها وتعميم هذه الخصائص على جميع عناصر المجتمع. وتظهر أهمية هذا الأسلوب في:

1) اختصار الكثير من الوقت والجهد اللازمين لعملية البحث الشامل، مما ينعكس هذا بشكل إيجابي على ميزانية البحث. لذا يتم عادة اجراء تعدد للسكان بين فترة أخرى (كل خمسة سنوات أو عشرة سنوات مثلا) وخلال هذه الفترة تجرى سنويا بحوث إحصائية على السكان عن طريق العينات وذلك لمعرفة تطور عدد السكان.

2) السرعة في إظهار النتائج ودقتها نتيجة انجازها من قبل ذوي خبرة مما يقلل الكثير من الأخطاء على عكس الحصر الشامل الذي يتطلب استخدام أعداد كبيرة من العاملين مما قد يؤدي إلى تراكم

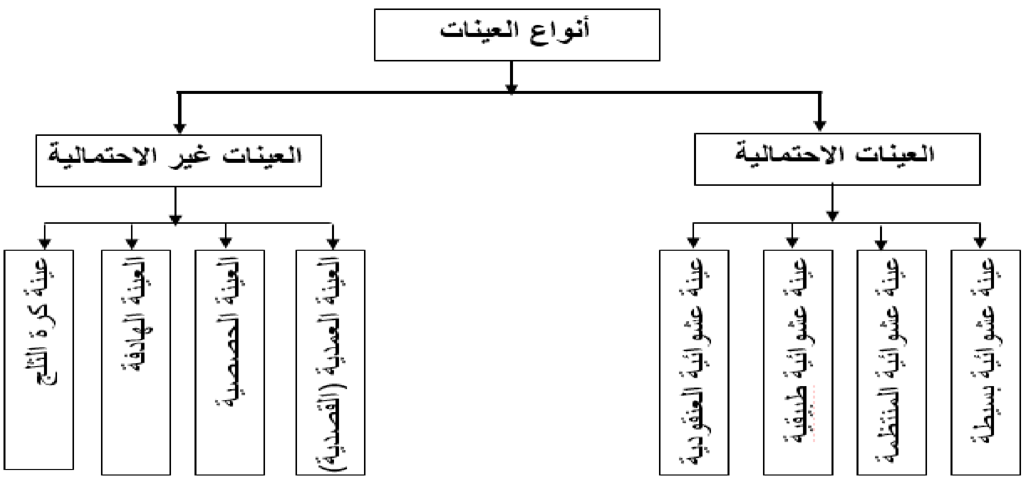
اخطائهم نتيجة لتباين كفاءتهم ومستوى تدريبهم، وصعوبة متابعتهم.

3) يفيد هذا الأسلوب في تصحيح معلومات البحث الشامل عندما تكون نسبة الأخطاء فيه كبيرة أو عندما لا نتمكن من دراسة جزء ما من مفردات المجتمع المدروس، كما أنه يفيدنا في معرفة الدقة المتوفرة في معلومات الحصر الشامل. وايضا اقتصار الدراسة على عدد قليل نسبيا من مفردات المجتمع المدروس يُمكن الباحث من جمع عدد أكبر من البيانات وأكثر تفصيلا.

4) يُعد هذا الأسلوب الأمثل في بعض الدراسات التي لا نتمكن فيها من الحصر الشامل للمجتمع المدروس وذلك لتعذر أو استحالة اجراء البحث الشامل، كما هو الحال عند دراسة خصائص الأسماك في بحيرة ما أو طيور في منطقة ما أو حيوانات المفترسة في غابة ما ...إلخ. أو عند ما يؤدي أسلوب الحصر الشامل الى اتلاف أو تخريب مفردات المجتمع مثل التأكد من سلامة أحد المنتجات الزراعية أو صناعية أو مراقبة السلع المستوردة. كما يعتبر هذا الأسلوب في بعض الأحيان أسلوبا وحيدا فمثلا عندما يكون هناك تجانس في مجتمع الدراسة، يمكن أن تُعبر العينة عنه بكفاءة مثل أخذ عينة من دم المريض أو عندما نريد معرفة ملوحة البحر لا يمكننا اجراء تحليل كيميائي لكل هذا البحر.

5.أنواع العينات وطرائق اختيارها

هناك عدة طرائق لإختيار مفردات العينة منها ما ينطوي تحت العينات العشوائية(الإحتمالية)، ومنها ما ينطوي تحت العينات غير العشوائية والتي يمكن تلخص بعضها في الشكل التالي:



شكل رقم (03): أنواع العينات

1.5العينات الإحتمالية (العشوائية) : نقول بإن العينة احتمالية إذا كان لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي المدروس نفس الفرصة لأن تكون مختارة ضمن العينة. أو بعبارة أخرى لا يمكن معرفة مفردات العينة قبل السحب؛ أي أن الباحث لا يتدخل بأي شكل من الأشكال في تعين مفردات العينة. وتقسم العينات العشوائية إلى عدة أنوع منها:

1.3.5 العينة العشوائية البسيطة: هو إعطاء فرصة متكافئة أو متساوية لكل فرد من افرد المجتمع في أن يختار ضمن افرد العينة، وتستعمل في المجتمعات المتجانسة من حيث الخاصية المدروسة.

2.3.5 العينة العشوائية المنتظمة (الدورية) :وفق هذه الطريقة يتم سحب مفردات العينة بتحديد شيئين أساسيين: الأول مجال السحب والثاني نقطة البداية ويتحدد مجال السحب بقسمة حجم المجتمع على حجم العينة. أما نقطة البداية فهي أي رقم عشوائي نختاره يكون محصور بين "1"وطول الدورة (مجال السحب). فمثلا إذا كان المجتمع الإحصائي يتألف من 35 مفردة وأردنا اختيار عينة حجمها 5 فان طول الدورة = حجم المجتمع ÷ حجم العينة =35÷5=7، ثم نحدد نقطة البداية أي المفردة الأولى بالعينة المحصورة بين "1"و"7"بطريقة عشوائية وبعد ذلك نقوم بإضافة العدد 7 حتى نصل إلى حجم العينة المحددة. وتستخدم في حالة المجتمعات الكبيرة الحجم غير أنه يشترط تجانس عناصر المجتمع وعدم اتصافها بصفة الإنتظام أو الدورية. أي إذا كان ترتيب وحدات المجتمع موضع الدراسة ترتيبا دوريا فلا يصلح الإستعانة بهذا النوع من العينات.

3.3.5العينة العشوائية الطبقية: تتعلق بالمجتمعات غير المتجانسة، بحيث يقسم المجتمع إلى مجتمعات جزئية غير متداخلة تتصف بتجانس داخلياً، وتسمى المجتمعات الجزئية طبقات. ويرجع فائدة هذه الطريقة أنها تضمن أن تكون كل طبقة من المجتمع ممثلة في العينة. وتستخدم هذه الطريقة بصورة مكثفة في الدراسات الإنسانية حيث يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات تبعا للخواص مختلفة مثل: السن، الدخل، مناطق السكن...الخ.

4.3.5العينة العنقودية: تستخدم في حالة ما إذا كانت مفردات العينة على هيئة مجموعات (عناقيد) موزعة على مناطق جغرافية متباعدة مثل المدن، الشوارع، الكليات، المدارس، الجامعات، المصانع، المستشفيات...الخ. أما خطوات اختيار العينة العنقودية لا تختلف كثيرا عن العينة العشوائية، فالإختلاف الرئيسي يكمن في أن العينة العنقودية تجرى على مجموعات في حين أن العينة العشوائية تجرى على الأفراد.

2.5العينات غير الإحتمالية(الشخصية): وفيها يختار الباحث مفردات العينة على أساس ما يراه هو شخصيا محققا لأهداف بحثه في إطار فهمه لطبيعة مجتمع المدروس. فالباحث هو الذي يختار مفردات العينة وفق معايير معينة يضعها الباحث، وذلك لتعذر تعيين أو تحديد أفراد المجتمع الدراسة، كمجتمع المتهربون من الضرائب، المدمنون، المنحرفون...إلخ. كما تسمي العينات غير العشوائية أيضا بالعينات الشخصية وهذا لا يعني أن العينات غير العشوائية لا تمثل مجتمع الدراسة، أو أنها تتصف بالضعف أو عدم إمكانية تعميم نتائجها، بل على العكس من ذلك فقد تكون العينات غير الإحتمالية وفي بعض البحوث ممثلة لمجتمع الإحصائي، وتعطي نتائج جيدة، وتخدم أهداف البحث بصورة أفضل من العينة العشوائية، خصوصا إذا ما تم اختيارها بشكل دقيق ومدروس. حتى أنه في بعض الحالات يكون مقدار التحيّز في المعاينة غير العشوائية أقل من الخطأ العشوائي الناجم عن طريقة المعاينة العشوائية.

وتقسم العينة غير العشوائية إلى عدة أنواع من بينها:

1.2.5 العينة العمدية (القصدية): وفي هذه الحالة يختار الباحث مفردات العينة بطريقة تجعلها تمثل في نظره المجتمع الإحصائي تمثيلا صحيحا ومن أمثلة ذلك:

1) في بحوث الرأي العام وجد القائمون بالاستفتاءات أن الاكتفاء ببعض المناطق تعطي نتائج قريبة جدا للمجتمع الأصلي، وفي هذه الحالة يتعمد كثير من الباحثين أن تكون العينة مكونة من هذه الوحدات طالما أنهم يعلمون بخبرتهم السابقة أنها تعطى صورة صحيحة للمجتمع بأكمله.

2) دراسة المواقف السياسية لجمهور في حالة مظاهرة فإننا نتجه مباشرة إلى قادة المظاهرة لتجمع باعتبار أن الجمهور انتخب هؤلاء لكي يقودهم في تظاهراتهم، فتجمع المعلومات منهم وتعمم على الجمهور المتظاهر. هذا من جهة، ومن جهة أخرى لتعذر الحصول على قائمة أسماء المتظاهرين وسحب عينة منها.

2.2.5 العينة الحصصية: وفيها يقوم الباحث بتقسيم المجتمع الإحصائي موضوع الدراسة إلى طبقات أو فيئات بالنسبة إلى الخاصية المدروسة، ثم يعمل على تمثيل كل فيئه منها في العينة بنسبة وجودها في المجتمع الإحصائي المدروس، ثم يترك حرية اختيار مفردات العينة لجامعي البيانات في حدود المواصفات الموضوعة لكل فئة أو طبقة. إلا أن الاختلاف بينها وبين العينة العشوائية الطبقية يكمن في طريقة اختيار المفردات الأولى يكون فيها حرية التدخل لاختيار مفردات العينة بينما الثانية يتم بطريقة عشوائية.

3.2.5 العينة الهادفة: تستخدم للحصول على معلومات من شريحة محددة قادرة على توفير المعلومات، إما بسبب موقعهم، أو لأن بعض المعايير التي وضعها الباحث تتوفر فيهم؛ لأنهم أفضل الأشخاص القادرين على توفير المعلومات. وتستخدم في الغالب عندما نتعامل مع عينات صغيرة، أو نتعامل مع حالات نريد منها معلومات خاصة. ومثال على ذلك لو أردنا الوصول إلى إجابة السؤال التالي: ماذا يلزم المديرة للوصول إلى القمة؟ فإن العينة الهادفة المناسبة هنا هي مجموعة النساء التي احتلت مراكز عليا، إذ يكون لديهن معرفة متخصصة في ذلك الموضوع نتيجة الخبرة.

4.2.5 عينة كرة الثلج: تستخدم كرة الثلج عندما نواجه صعوبة في تحديد مفردات المجتمع المرغوب دراسته، حيث يبدأ الباحث بعينة صغيرة ميسرة ثم تبدأ العينة بالكبر شيئا فشيئا مع سير الدراسة. وفي هذه الحالة نحتاج إلى الخطوات التالية:

1) الإتصال بواحد أو اثنين من حالات المجتمع المرغوب دراسته.
2) نسأل هؤلاء لتحديد حالات أخرى يمكن الرجوع إليها لتوفر المعلومات لديهم.
3) نسأل الحالات الجديدة لتحديد حالات أخرى جديدة وهكذا.
4) التوقف عندما لا نستطيع الوصول إلى حالات جديدة أو الوصول إلى حجم عينة مقبول.

ومثال على ذلك إذا أرد باحث أن يدرس واقعة أو ظاهرة حدثت قبل ثورة التحرير 1954عن طريق المقابلات مع الأفراد الذين عايشوا الحدثة أو الظاهرة. نلاحظ في هذه الحالة أن الأفراد الذين عايشوا الحدث ولازالوا على القيد الحياة قد يكون عدهم قليل، ولذلك يقوم الباحث بتحديد والإتصال بواحد أو الاثنين من هؤلاء الأفراد، ثم يقوم بالإستدلال منهم على أفراد آخرين وهكذا حتى لا نستطيع الوصول إلى أفراد جدد أو يكون قد استوفى البيانات التي يرغب جميعها. ووفق هذه الطريقة فأن أفراد مجتمع البحث هم الذين سيساعدوننا في بداية العينة.

6أسئلة وتمارين محلولة

1) ما الفرق بين العينة العشوائية المنتظمة والعينة العشوائية البسيطة؟

الجواب:

تختلف العينة المنتظمة عن العينة البسيطة فيما يلي:

1.في العينة العشوائية يتم اختيار جميع المفردات العينة عشوائيا بينما في العينة المنتظمة يتم اختيار المفردة الأولى فقط بطريقة عشوائية.

2.عند اختيار المفردة الأولى في العينة المنتظمة يتحدد اختيار بقية مفردات العينة بينما في العينة العشوائية البسيطة فإن اختيار كل مفردة من مفردات العينة مستقلا عن اختيار المفردات الأخرى.

3.في العينة العشوائية يمكن أن يحدث أن يتم اختيار رقمين متتالين بينما هذا لا يحدث مطلقا في العينة العشوائية المنتظمة.

2) ضع دائرة حول الجواب الصحيح

1. إذا أراد باحث دراسة العلاقة بين عدد الساعات الدراسية ومعدل الطالب في مادة معينة، فإن معدل الطالب في هذه المادة يعتبر المتغير

أ المتغير التابع

ب–المتغير المستقل

ج–المتغير الوسيط

2. المتغير الذي يملك تأثير غير متوقع على العلاقة المتغير المستقل بالمتغير التابع، إذ يعمل على تعديل العلاقة المتوقعة بين المتغير المستقل والمتغير التابع هو:

أ–المتغير التابع

ب–المتغير المستقل

ج المتغير الوسيط

3) إليك العبارات التالية، على ضوئها حدد كل من: المجتمع الإحصائي، الوحدة لإحصائية، نوع المتغير الإحصائي، مستوى قياسه.

1.طول 50 قضيبا من الحديد صنعت من قبل الشركة (س).

2.تصف الولايات حسب درجة الحرارة المسجلة خلال شهر أوت

3.وزن صناديق البرتقال المعدة للتصدير.

4.حجم 100 قارورة من الغاز.

5.ترتيب الولايات حسب البلديات.

6.تصنيف العمال حسب عدد الأطفال لكل عامل

7.ترتيب السيارات حسب العلامة

8. تسجيل السياح حسب الجنسية

9.تصنيف الطلاب حسب التقديرات

الحل:

نكون الجدول التالي:

رقم العبارة	العبارة	المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوع المتغير الاحصائي	مستوى القياس
01	طول 50 قضيبا من الحديد صنعت من قبل الشركة (س).	50 قضيب	قضيب	الطول	كمي مستمر	نسبي
02	ترتيب الولايات حسب درجة الحرارة المسجلة في شهر أوت	الولايات	ولاية	درجة الحرارة	كمي مستمر	مجالي
03	وزن صناديق البرتقال المعدة للتصدير	صناديق البرتقال	صندوق	الوزن	كمي، مستمر	نسبي
04	حجم 100 قارورة من الغاز	100 قارورة	قارورة	الحجم	كمي، منقطع	نسبي
05	ترتيب الولايات حسب البلديات	الولايات	ولاية	عدد البلديات	كيفي	اسمي
06	تصنيف العمال حسب عدد الأطفال لكل عامل	العمال	عامل	عدد الأطفال	كمي، منقطع	نسبي
07	ترتيب السيارات حسب العلامة	السيارات	سيارة	العلامة	كيفي	اسمي
08	تسجيل السياح حسب الجنسية	السياح	سائح	الجنسية	كيفي	اسمي
09	تصنيف الطلاب حسب التقديرات	الطلاب	طالب(ة)	التقديرات	كيفي	ترتيبي

أسئلة وتمارين

1) ما أنواع الأساليب الإحصائية؟

2) ما الفرق بين البيانات والمعلومات؟

3) ما الفرق بين المعلمة والإحصاءه؟

4) قارن بين المفاهيم التالية:

1. مجتمع احصائي محدود ومجتمع احصائي غير محدود
2. المتغيرات الكمية والكيفية .
3. المتغيرات المستمرة والمنقطعة.
4. المقياس النسبي والمجالي.
5. المقياس الإسمي والمقياس الترتيبي.
6. المتغير التابع والمتغير المستقل.
7. المتغير المستقل والمتغير الوسيط.

5) ما الفرق بين المعاينة العشوائية والمعاينة غير العشوائية؟

6) حدد المتغير المستقل والتابع في الدراسات التالية:

1. قام باحث بإجراء دراسة حول أثر التدريب على الأداء.
2. قامت شركة أدوية بعمل دراسة لبحث تأثير نوع الدواءA، B، C على ضغط الدم والحالة النفسية للمريض.
3. خلال دراسة عن استخدام الهاتف النقال، أن عدد المكلمات التي تتم، ومتوسط المدة المستغرقة في كل مكالمة، يعتمدان على المرحلة العمرية لمستخدم الهاتف المحمول.
4. قام باحث بإجراء دراسة حول أثر طريقة التدريس على التحصيل العلمي لدى الطلاب السنة الثالثة ثانوي.
5. قام باحث بإجراء دراسة حول تأثير لون التغليف والسعر على حجم المبيعات
6. قام باحث بإجراء دراسة حول أثر ميزانية الإشهار على حجم المبيعات.

7) بين أي الحالات التي تتضمن معلمة وأي منها تتضمن إحصاءه: ـ نتائج التعداد الفلاحي في كافة انحاء الجزائر. ـ نتائج عينة لدراسة ميزانية الأسرة. ـ نتائج المسح الشامل للصناعات اليدوية في الجزائر. نسبة المصابين بالأمراض المعدية في بلد ما. ـ متوسط دخل الفرد في بلد ما.

8) هناك أسلوبان لتوفير المعطيات ميدانيا من وحدات المجتمع الإحصائي هما: المسح الشامل

وبالعينة. فما المقصود بكل منهما، أذكر ثلاثة أمثلة لمجتمعات إحصائية لا يمكن دراستها إلا عن طريق المعاينة، مع ذكر السبب.

9) إليك العبارات التالية، على ضوئها حدد كل من: المجتمع الإحصائي، الوحدة لإحصائية، المتغير الإحصائي، نوع المتغير.

ـ لون محافظ الطلاب أحد الأفواج. ـ عدد الأولاد في كل عائلة لأحد الأحياء السكنية.

ـ عدد السكان في مجموع دوائر ولاية بومرداس. ـ عدد العمال في مصنع حسب المهنة.

ـ تصنيف الأحزاب السياسية في الانتخابات حسب عدد الأصوات.

10) هل المجتمعات التالية معرفة بدقة لغاية إجراء دراسات عليها:

ـ طلبة السنة الثالثة بقسم العلوم التجارية. ـ سكان منطقة بومرداس.

ـ الأشخاص ذوي الجنسية الجزائرية. ـ مؤسسات قطاع النقل في الجزائر.

ـ البطالين في الجزائر لغاية 2019/12/31. ـ أساتذة التعليم الثانوي.

11) صنف المتغيرات التالية حسب نوع المتغير: ـ منطقة الإقامة. ـ أعمار الأساتذة. ـ لون السيارة. ـ الحالة العائلية ـ عدد الأطفال في الأسرة ـ الحالة الاجتماعية. ـ أسماء الشوارع ـ الجنس. ـ التخصص. ـ الجنسية.

12) ما هو أنسب سلم قياس لكل من المتغيرات الآتية: ـ عدد الحوادث على الطريق الصحراوي. ـ علامات الطلبة. ـ رواتب الموظفين. ـ ملاحظات حول عمل معين. ـ الحرارة المسجلة في الظل. ـ أسماء الطلبة. ـ أرقام قاعات التدريس. ـ الرتب العسكرية. ـ أرقام لوحات السيارات. ـ عدد الأطفال في الأسرة ـ مكان الولادة. ـ الإنفاق الأسبوعي على الطعام. ـ السلوك الصحي. ـ مستوى المسكن الأسري.

13) قدم مثالين حول المتغيرات الكمية والكيفية في كل من الميادين التالية:

الميدان الصحي. ـ الميدان النفسي. ـ الميدان الاجتماعي. ـ الميدان الرياضي. ـ الميدان العسكري. ـ الميدان الاقتصادي. ـ الميدان الزراعي.

_

الفصل الثاني

أساليب عرض البيانات الإحصائية

1. العرض الكتابي
2. العرض شبه الجدولي
3. العرض بالطريقة الصور والأشكال
4. العرض الجدولي
5. العرض البياني
6. أسئلة وتمارين محلولة

أسئلة وتمارين

الفصل الثاني

أساليب عرض البيانات الإحصائية

بعد الإنتهاء من عملية جمع البيانات سواء من المصادر التاريخية أو المصادر الميدانية، تأتي مرحلة تصنيف وتلخيص البيانات الإحصائية. وتستخدم في ذلك: الجداول تكرارية، الرسومات البيانية، الأشكال الهندسية، الصور المعبرة، وغيرها من الأساليب العرض. وتتوقف عملية اختيار الأسلوب المناسب لعرض البيانات الإحصائية إلى: طبيعة المتغيرات المدروسة، اهداف البحث، النتائج التي نرغب في استخلاصها. وسوف نتطرق الي شرح بعض هذه أساليب في النقاط التالية:

1. العرض الكتابي

تعتبر هذه الطريقة من ابسط طرق عرض البيانات، وهي عبارة عن دمج الأرقام في سياق الكتابة، حيث يقوم الباحث أو الإحصائي بعرض المعلومات الإحصائية الهامة ضمن النص الكتابي للافت التركيز وانتباه القارئ. والمثال التالي هو مقطع من التقرير البنك الدولي افريل 2020 حول الجزائر:

" تواجه الجزائر صدمات انخفاض أسعار النفط إلى النصف وأزمة الصحة العامة وعواقب الاضطرابات الاقتصادية العالمية الناشئة عن جائحة كورونا. سيقلل سعر النفط عند 30 دولارًا للبرميل في 2020 من إجمالي الإيرادات المالية للجزائر بنسبة 21.2 في المائة. وعلى الرغم من خفض الاستثمار العام (−9.7%) والاستهلاك العام (−1.6%) حسبما ينص قانون المالية لعام 2020، فإن عجز الموازنة سيرتفع إلى 16.3% من إجمالي الناتج المحلي. وفي الوقت نفسه، سيؤدي الانخفاض الحاد في عائدات التصدير (−51%) إلى زيادة العجز التجاري إلى 18.2% من إجمالي الناتج المحلي وعجز الحساب الجاري إلى ذروته عند 18.8% من إجمالي الناتج المحلي في عام 2020، على الرغم من الجهود المبذولة لاحتواء الواردات وضعف الطلب المحلي. بدون اتخاذ مزيد من التدابير، ستنخفض الاحتياطيات إلى 24.2 مليار دولار أو حوالي 6.1 أشهر من الواردات في نهاية 2020".

غير أن هذه الطريقة تفقد جدوها عندما يراد عرض عدد كبير من الأرقام. كما أن هذه الطريقة تحتاج إلى وقت طويل في القراءة.

2. العرض شبه الجدولي

هذه الطريقة تشبه الطريقة الأولى، وتتمثل في فصل الأرقام عن الكتابة وعرضها في مكان بارز في الصفحة بشكل منطقي، وبالتالي فان ظهور الأرقام منفصلة قد تكون افصل من العرض الكتابي. وتستعمل هذه الطريقة عندما تكون لدينا ارقام قليلة وهامة جدا أو صادمة، كما الحال عند عرض نتائج الانتخابات أو

عند عرض ارقام انتشار فيروس كورنا كوفيد 19 في بلد ما، فيلجأ إلى هذا الأسلوب من أجل جذب انتباه القارئ أكثر الى هذه الأرقام.

3. العرض بالطريقة التصويرية والأشكال الهندسية

وهي من أكثر الطرق استعمالا عندما يهدف الباحث إلى جذب انتباه القارئ وينقل إليه الفكرة بصورة واضحة لا تحتاج إلى مستوى علمي معين. فباستخدام الصور أو الأشكال الهندسية يمكن إيصال البيانات الى جميع فئات المجتمع في صورة مبسطة سهلة الفهم، جذابة للنظر. وكثير ما تستخدم في التقارير الاقتصادية، الزراعية، الاجتماعية، العسكرية، وغيرها من التقارير. إذ يتم تمثل الظواهر كميا برسم صورة صغيرة تدل على البيانات نفسها فترمز مثلا للقوة الجوية بطائرة، وللجيش بجندي، ولإنتاج السيارات بسيارة، وللأسطول البحري ببارجة، ولإنتاج القطن بحزمة قطن...إلخ. كما يمكن تمثل الكميات برموز تتناسب مساحتها أو شكلها مع الكميات المراد توضيحها مثل المربعات، المثلثات، الدوائر، الأهرامات وغيرها من الأشكال المعبرة.

مثال (01): الجدول الآتي يبيّن المساحات المزروعة بالقمح، الشعير، الذرة في احدى الشركات الزراعية والمطلوب: قارن بين المساحات المزروعة بواسطة المربعات

الجدول رقم (01): مساحات المزروعة بالقمح والشعير والذرة

نوع الزراعة	القمح	الشعير	الذرة
المساحة المزروعة	250000	160000	90000

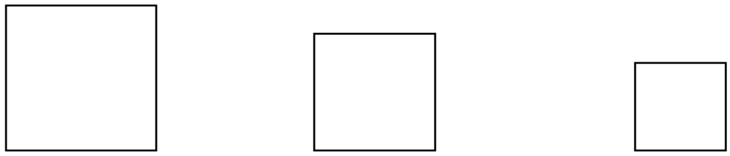
الحل:

نكون الجدول التالي:

الجدول رقم (02): مقارنة مساحات المزروعة بالقمح والشعير والذرة

نوع الزراعة	القمح	الشعير	الذرة
المساحة المزروعة	250000	160000	90000
الجذع التربيعي	500	400	300
الضلع	5	4	3

نرسم ثلاثة مربعات بحيث يكون طول اضلاعها 5 سم و4 سم و3سم على التوالي أو 2,5 سم و2 سم و1,5 سم، ونضعها بجوار بعضها البعض على مستوى افقي واحد كما يتبين في الشكل أدناه



الشكل رقم (01): مقارنة المساحات بواسطة المربعات

4. العرض الجدولي

هذه الطريقة شائعة الإستخدام وتستخدم عندما يكون حجم البيانات كبير، وذلك قصد ترتيبها وتنظيمها وتصنيفها(تبويبها)، من أجل ابراز أكبر ما يمكن من المعلومات وفي اضيق مساحة ممكنة، مع مراعاة أن تكون هذه الجداول واضحة وبسيطة، وسهلة الإستيعاب، وفهم محتويتها بسرعة، من اجل تحليلها وتفسيرها.

1.4 أسس تصنيف البيانات الإحصائية في الجداول

يتم عرض المعلومات الإحصائية، باستخدام الجداول وفق لبعض خواصها. ولإنجاز الجدول يجب مراعاة بعض النقاط أهمها: إعطاء رقم للجدول، عنوان الجدول، ذكر المصدر، تقريب الأعداد لأجل تجنب الالتباس والتطويل وتسهيل المقارنة، المجاميع، وحدة القياس، إرشاد العين؛ من المستحسن ترك فارغ بعد كل ثلاثة أو أربعة أو خمسة أرقام حتى لا تختلط الأرقام ويكون من سهل على العين قراءتها، الهوامش تذكر في أسفل الجدول وتحت المصدر والغرض منها هو تفسير بعض الصفات أو للإشارة إلى الأشياء الي حذفت من الجدول أو لتوضيح معلومات جديدة لم تذكر في الجدول أو معلومات غير عادية.

ويتم ترتيب المعلومات الإحصائية في الجدول بإحدى الطرق التالية:

1) الترتيب التاريخي (الزمني) أو حسب الترتيب الأبجدي أو حسب أهميتها.

2) التصنيف الكيفي ومعناه تقسيم البيانات الإحصائية إلى مجموعات تشترك مفردات كل منها في صفة معينة لها علاقة بموضوع البحث مثل تصنيف العمال إلى نقيين وغير نقيين، تقسيم الأشخاص حسب الوضعية الإجتماعية: أعزب، متزوج، أرمل، مطلق.

3) الترتيب الكمي ويتم ذكر المعلومات الإحصائية في الجدول بصورة تصاعدية أو تنازليا.

4) الترتيب الجغرافي وتصنف البيانات الإحصائية حسب القارات أو البلدان أو الولايات أو البلديات.

5) الترتيب التقليدي وهذا النوع من الترتيب لبس له من أساس عملي ويتبع بحكم التقليد كما هو في حالة تصنيف السكان حسب الجنس نبدأ بذكر الذكور ثم الإناث.

2.4 الجداول(التوزيعات) التكرارية: هناك عدة أنواع من الجداول، وتختلف باختلاف نوع البيانات من ناحية والغرض من الدراسة من ناحية أخرى. ومن بين الجداول التكرارية نجد: الجداول التكرارية البسيطة،

الجداول التكرارية ذات فئات، الجداول التكرارية النسبية والمئوية، الجداول التكرارية التجميعية، الجداول التكرارية المزدوجة.

1.2.4الجداول البسيطة يستخدم هذا النوع من الجداول لوصف وتلخيص بيانات تتعلق بظاهرة واحدة فقط سواء كانت تلك الظاهرة كمية أو كيفية وهو أسهل الجداول تركيبا ومفهوما.

مثال (02): البيانات التالية تمثل الحالة الإجتماعية لمجموعة من العمال في أحد المؤسسات الإنتاجية. والمطلوب كون جدول توزيع تكراري بسيط للحالة الاجتماعية للعمال.

أعزب	أعزب	متزوج	أعزب	أعزب	أعزب	متزوج	أرمل	أرمل	مطلق
مطلق	أعزب	متزوج	مطلق	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج	متزوج	أعزب
مطلق	أعزب	متزوج	مطلق	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب	أرمل
متزوج	أعزب	مطلق	متزوج	متزوج	أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	متزوج

الحل:

جدول رقم(03): جدول التفريغ والتوزيع التكراري للحالة الاجتماعية لمجموعة من العمال

الحالة الإجتماعية	التفريغ	التكرار
اعزب	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
متزوج	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
أرمل	||||	4
مطلق	~~||||~~ |	6
	المجموع	40

2.2.4 الجداول التكرارية ذات فئات: هناك ثلاثة أنواع من الجداول التكرارية ذات فئات وهي:

1.2.2.4الفئات غير منتظمة (غير متساوية): بصفة عامة يفضل عند اعداد الجدول التكراري، أن تكون الفئات منتظمة، بمعنى أن تكون الفئات متساوية الطول، ومع ذلك فإن بعض الظواهر يصبح معها استخدام الفئات غير منتظمة أكثر ملائمة لعرض الظاهرة ومثال على ذلك عند دراسة اعمار حالات الوفيات من الأطفال الأقل من سنة حيث يكون عدد الوفيات اللحظات الأولى من الولادة كبيرا ثم يقل هذا العدد تدريجيا بزيادة عمر الطفل، وحتى يكون الجدول التكراري معبراً عن حقيقة الظاهرة، فإنه يفضل تخصيص الفئة الأولى لحالات الوفيات الذين تتراوح أعمارهم بين صفر يوم واحد ويوم ، والفئة الثانية من يومين إلى ثلاثة أيام ، ولا يكون ملائم على أي حال جعل الفئة يوم واحد بطريقة منتظمة، إذ يصبح عدد الفئات مساويا لعدد أيام السنة، ولذلك فإن طول الفئة نجعله يزداد تدريجيا ليصبح ملائما مع الظاهرة المدروسة.

2.2.2.4الفئات المفتوحة: هي الفئات التي يكون أحد حديها الأعلى والأدنى غير محدد، وتستخدم في حالة عدم إمكانية تحديد أحد حدي الفئات، ومثال على ذلك أجور العمال. فالحد الأدنى غير محدد (أو غير معروف) والأجر الأعلى غير محدد أيضا لذا من أنسب أن تكون الفئات على النحو التالي:

الفئة الأولى: أقل 25000 دج **الفئة الثانية:** من 25000 وأقل من30000 دج

الفئة الثالثة: من 30000 وأقل من40000 دج، وهكذا......

إلى غاية الفئة الأخيرة التي تتضمن أجور العمال التي تتجاوز أجورهم 100000 دج. ومثل هذا التوزيع في الواقع لا يخضع لأية قاعدة بل تقسم المفردات إلى مجموعات نعتقد أنها متجانسة، وهذا الأمر يعود لخبرة الباحث.

3.2.2.4 الفئات المتساوية: وهي الفئات التي تتساوى جميعها في الطول. ولتكوين جدول تكراري ذو فئات متساوية نتبع الخطوات التالية:

1) **تحديد المدى:** وهو المجال الذي تنتشر فيه البيانات حيث: المدى =أكبر قيمة – أصغر قيمة

$$\boxed{E = x_1 - x_n}$$

2) **تحديد عدد الفئات ومداها:** القاعدة العامة في تحديد مدى الفئة هي: الا يكون طول الفئة كبيرا بحيث يؤدي ذلك إلى ضياع معالم التوزيع التكراري، وان لا يكون صغيرا بحيث يشمل التوزيع على فئات ليس فيها عدد كاف من المفردات، فنحصل على توزيع غير منتظم للتكرارات. وعليه، فلا نكثر من عدد الفئات أكثر من اللازم، لأن ذلك يفقد الجدول تكراري خاصيته، كأداة لتلخيص البيانات وفي إظهار إتجاه تمركز المعلومات الإحصائية وفي نفس الوقت، فإن اختيار عدد قليل من الفئات، وبالتالي مدى الفئات كبير يؤدي ضياع بعض المعلومات، ومن ثم عدم تحقيق التجانس بالنسبة لصفة المدروسة في تلك الفئات، لذلك يجب أن نختار مدى الفئة بشكل مناسب وفقا لمعطيات الظاهرة المدروسة. وعموما يمكن الحصول على قيمة تقريبية لعدد الفئات وذلك باسترشاد بعلاقة ستيرجس " Sturges" أو يول "Yole" :

أولا: معادلة ستيرجس

$$\boxed{k = 1 + 3{,}322 \log n}$$

حيث : n : حجم العينة k: عدد الفئات $\log$: اللوغاريتم العشري

ثانيا: معادلة يول

$$\boxed{k = 2{,}5\sqrt[4]{n}}$$

حيث : n : حجم العينة k: عدد الفئات

3) **تحديد طول الفئة**

$$\boxed{c = \frac{x_n - x_1}{k}}$$

طول الفئة = المدى العام ÷ عدد الفئات المقترحة

حيث: c : طول الفئة x_n: أكبر قيمة x_1 : أصغر قيمة k: عدد الفئات المقترحة

3) **تحديد حدود الفئة (تحديد بداية ونهاية كل فئة):** بعد اختيار مدى الفئة يجب أن نبين حديها بوضوح (الحد الأدنى والحد الأعلى) لمنع التدخل بين حدود الفئات. بحيث تكون بداية الفئة أصغر من أو تساوي أصغر مفردة في البيانات ونهاية الفئة الأخيرة تكون أكبر من أو تساوي أكبر مفردة من البيانات. ويستحسن أن نبدأ من مضاعفات عدد 5 وذلك لتسهيل الحسابات مثلا إذا كان لدينا أصغر قيمة 21 فإننا نبدأمن20.

4) **تحديد عدد التكرارات في كل فئة:** على أن تكون لكل قيمة واحدة وواحدة فقط تنتمي إليها، وهو ما يسمى بالتكرار.

5) **مركز الفئة:** يحسب مركز الفئة التي يرمز لها x_i بالعلاقة التالية:

$$\boxed{x_i = \frac{a+b}{2}}$$

حيث:

a : الحد الأدنى للفئة　　　　b : الحد الأعلى للفئة

مثال (03): البيانات التالية تمثل علامات 50 طالب في مادة الإحصاء. والمطلوب توضيح المعالم الأساسية لهذه البيانات من خلال وضعها في جدول التفريغ والتوزيع التكراري.

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العلامة	72	36	35	59	52	27	77	77	32	20

رقم الطالب	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
العلامة	57	78	67	60	54	38	47	44	37	42

رقم الطالب	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
العلامة	77	49	41	62	76	61	51	43	32	57

رقم الطالب	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
العلامة	37	65	84	67	47	65	56	54	50	48

رقم الطالب	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
العلامة	89	55	57	44	57	41	66	80	39	59

لا شك أن هذه البيانات بصورتها الخام لا تساعدنا بسهولة في الإجابة التساؤلات التالية: كم عدد الطلبة الراسبين؟ كم عدد الطلبة الناجحين؟ كم عدد الطلبة الممتازين؟ ما مستوى الطلبة؟ وغيرها من التساؤلات.

الحل:

ومن اجل تسهيل الإجابة على هذه التساؤلات، نقوم بتلخيص هذه البيانات وتنظيمها في جدول توزيع تكراري. ولتكوين جدول توزيع التكراري نتبع الخطوات التالية:

1. **حساب المدى**

من خلال الجدول أعلاه، نلاحظ أكبر علامة تعود لطالب ذو الترتيب 41 وعلامته تساوي 89 نقطة، أما أدنى علامة تعود لطالب ذو الترتيب 10 وعلامته تساوي 20 نقطة. وعليه فإن المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة (89−20 = 69 نقطة) وهو المجال الذي تتراوح فيه النقاط الطلبة.

2. **تحديد طول الفئة**

ما دم لا توجد لدينا معلومات عن طول الفئة وعدد الفئات فإنه يمكن الإسترشاد بعلاقة "سترجس" أو علاقة "يول" للحصول على عدد تقريبي لعدد الفئات (k).

1) علاقة ستورجس

$$k = 1 + 3{,}322 \log n$$

أولا: نحسب عدد الفئات (k)

$$k = 1 + 3{,}322 \log 50 = 6{,}64$$

ثانيا: نحسب طول الفئة (c)

$$c = \frac{E}{k} = \frac{x_n - x_1}{1 + 3{,}322 \log n} = \frac{89 - 20}{6{,}64} = 10.39 \approx 10\,pts$$

2) علاقة يول

$$k = 2{,}5\sqrt[4]{n}$$

أولا نحسب عدد الفئات (k)

$$k = 2{,}5\sqrt[4]{50} = 6.65$$

ثانيا: نحسب طول الفئة (c)

$$c = \frac{89 - 20}{6{,}65} = 10.36 \approx 10\,pts$$

جدول رقم(04): جدول التفريغ والتوزيع التكراري للعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء

رقم الفئة	فئات العلامات	التفريغ	التكرار
01	]30 – 20]	//	2
02	]40 – 30]	//// 卌	8
03	]50 – 40]	卌 卌	10
04	]60 – 50]	/// 卌 卌	13
05	]70 – 60]	/// 卌	8
07	]80 – 70]	/ 卌	6
08	]90 – 80]	///	3
المجموع			50

3.2.4الجداول التكرارية التجميعية: تستخدم الجداول التجمّيعية عندما نرغب في معرفة عدد (أو نسبة) المفردات التي قيمتها أقل أو أكثر من قيمة معينة في التوزيع التكراري، كما تستخدم في حساب بعض المقاييس الإحصائية (كما سنرى عند دراسة فصل مقاييس النزعة المركزية). وهناك نوعين من الجداول التكرارية المتجمعة هما:

1.3.2.4جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد: في هذا التوزيع يتم تجميع التكرارات على التوالي. فأحيانا يكون المطلوب تحديد عدد التكرارات الأقل من قيمة معينة. وهوما يتضح ذلك من الجدول التالي الذي يمثل توزيع علامات 50طالب في مادة الإحصاء.

جدول رقم(06): التوزيع التكراري المتجمع الصاعد للعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء

فئات العلامات	التكرار	فئات التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
[10 - 20[	0	أقل من20	0
[20 - 30[	2	أقل من30	2
[30 - 40[	8	أقل من40	10
[40 - 50[	10	أقل من50	20
[50 - 60[	13	أقل من60	33
[60 - 70[	8	أقل من70	41
[70 - 80[	6	أقل من80	47
[80 - 90[	3	أقل من 90	50
المجموع	50		

من خلال الجدول أعلاه، نلاحظ أن عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 50 نقطة هو20 طالب، بينما عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 90 نقطة وصل إلى 50 طالب.

2.3.2.4جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل: وهو يوضح عدد التكرارات الأكثر من قيمة معينة. وهو ما يتضح ذلك من الجدول التالي الذي يمثل علامات 50 طالب في مادة الإحصاء.

جدول رقم(05): التوزيع التكراري المتجمع النازل للعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء

فئات العلامات	التكرار	فئات التكرار المتجمع النازل	التكرار المتجمع النازل
[20 - 30[	2	20 فأكثر	50
[30 - 40[	8	30 فأكثر	48
[40 - 50[	10	40 فأكثر	40
[50 - 60[	13	50 فأكثر	30
[60 - 70[	8	60 فأكثر	17
[70 - 80[	6	70 فأكثر	9

[80 - 90[	3	80 فأكثر	3
[90 - 100[	0	90 فأكثر	0
المجموع	50		

من خلال الجدول أعلاه، يتضح أن عدد الطلبة الذين تحصلوا على 50نقطة فأكثر وصل عددهم إلى 30 طالب، بينما عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة من 70 نقطة فأكثر 9 طلبة .

3.2.4 الجداول التكرارية النسبية والمئوية: يستخدم التكرار النسبي عندما يراد زيادة التفصيل في دراسة سلوك ظاهرة محل الدراسة أو تبسيط عملية المقارنة بين ظاهرتين أو أكثر لنفس الخاصية في فترات مختلفة في حالة اختلاف التكرار الكلي. وعليه فإن هذا النوع من الجداول يوضح الأهمية النسبية لكل فئة، يرمز له p_i ويعرف بالصيغة التالية:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

حيث: p_i : التكرار النسبي، $\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات

أما تكرار النسبي المئوي يعطى بصيغة التالية:

$$p_i\% = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \times 100$$

حيث: $p_i\%$: التكرار النسبي المئوي، $\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات

مثال(04): الجدول التالي يوضح الأجر اليومي لعينة تتكون من خمسين عاملا من غير المؤهلين في احدى المؤسسات الخاصة. المطلوب أوجد التكرار النسبي والمئوي.

جدول رقم(07): توزيع تكراري للأجر اليومي لـ 50 عامل من غير المؤهلين في أحد المؤسسات الخاصة

فئات الأجور (ون)	[250 - 300[	[300 - 350[	[350 -400[	[400 - 450[	[450 - 500[	[500 - 550[
التكرار	5	8	10	13	8	6

الحل:

جدول رقم(08): التوزيع التكراري النسبي والمئوي للأجر اليومي لـ 50 عامل من غير المؤهلين في أحد المؤسسات الخاصة

رقم الفئة	الفئات	التكرارات f_i	التكرار النسبي p_i	التكرار النسبي المئوي $p_i\%$
01	]300 − 250]	5	0,10	10
02	]350 − 300]	8	0,16	16
03	]400 − 350]	10	0,20	20
04	]450 − 400]	13	0,26	26
05	]500 − 450]	8	0,16	16
06	]550 − 500]	6	0,12	12
المجموع		50	1,00	100

3.2.4الجداول التكرارية المزدوجة: يستخدم في هذا النوع من الجداول في وصف تلخيص البيانات المتعلقة بدراسة ظاهرتين في آن واحد. وقد يكون الجدول المزدوج كمي أو كيفي أو معا (كمي، كيفي).

مثال (05): في دراسة العلاقة بين مستوى التعليم والأجر الشهري (عشرة ألف دينار)، تم جمع البيانات التالية في أحد المجتمعات. والمطلوب: إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاثة فئات.

مستوى	الأجر	مستوى	الأجر	مستوى	الأجر	مستوى	الأجر	مستوى	الأجر
ثانوي	7	جامعي	9	ثانوي	8	متوسط	5	ثانوي	7
جامعي	8	متوسط	2	متوسط	3	متوسط	7	جامعي	8
متوسط	6	متوسط	4	متوسط	9	ثانوي	6	متوسط	12
ثانوي	9	ثانوي	3	جامعي	13	متوسط	4	متوسط	4

الحل:

أولا: تحديد طول فئة الأجور: طول الفئة = المدى العام للأجور ÷ عدد الفئات المقترحة

إذن: طول الفئة =(13−2) ÷3 =3,66 بتقريب يساوي 4 نقرب الى أكبر عدد صحيح

ثانيا: تحديد فئات المستوى: هناك ثلاثة فئات وهي: متوسط، ثانوي، جامعي.

وعليه نشكل الجدول المزدوج على النحو التالي:

جدول رقم(08): جدول التفريغ والتوزيع التكراري المزدوج للمستوى التعليمي والأجر الشهري لـ 20عامل

المستوى	فئات الأجور			المجموع
	من2 وأقل من6	من6 وأقل من10	من10 وأقل من14	
متوسط	6 𝍸 /	3 ///	1 /	10
ثانوي	1 /	5 𝍸		6
جامعي		3 ///	1 /	4
المجموع	7	11	2	20

5.العرض البياني للبيانات الإحصائية

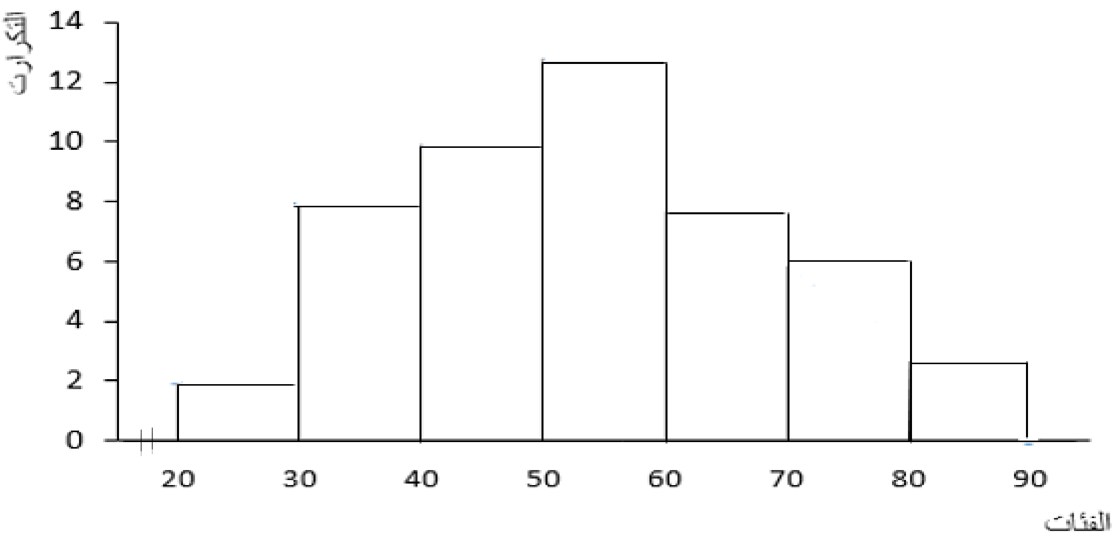
1.5العرض البياني للمتغيرات الكمية

1.1.5 العرض البياني للمتغيرات الكمية المستمرة

1.1.1.5 المدرج التكراري: يُمثل التوزيع التكراري بمستطيلات متلاصقة يمثل كل منها فئة من فئات الجدول التكراري، بحيث تتناسب مساحته مع تكرار الفئة الذي مثلها. وقواعدها متساوية وتساوي أطوال الفئات، والارتفاعات تتناسب مع التكرارات. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (06): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء المطلوب: ارسم المدرج التكراري

الحل:

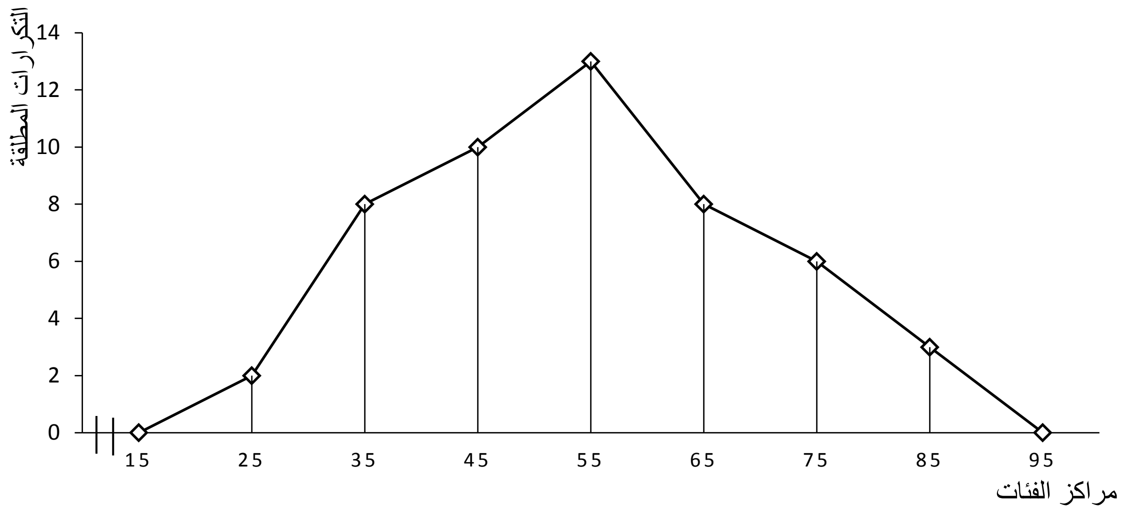


الشكل رقم (03): المدرج التكراري للعلامات 50طالب في مادة الإحصاء

2.1.1.5 المضلع التكراري: يرسم المضلع التكراري على محورين الأفقي يخصص لمراكز الفئات والمحور العمودي للتكرارات، ثم نضع نقطة فوق مركز كل فئة وبارتفاع يقابل التكرار الفئة، ويتم توصيل النقاط بخطوط مستقيمة ومده ليلامس المحور الأفقي من الطرفين، وذلك بافتراض فئتين وهميتين تكرار كل منهما صفرا.

مثال(07): انطلاقا من معطيات الجدول التوزيع التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء ارسم المضلع التكراري.

الحل:



الشكل رقم (04): المضلع التكراري للعلامات 50طالب في مادة الإحصاء

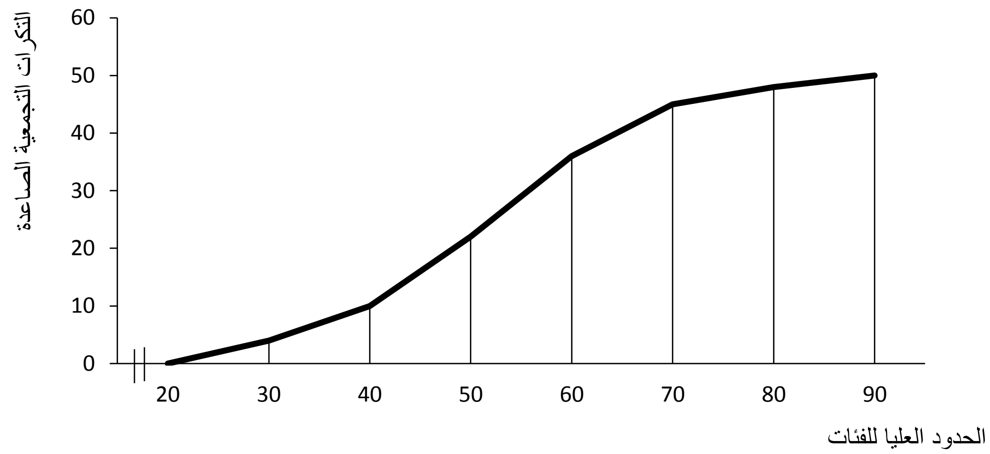
3.1.1.5 المنحنى التكراري: لا يختلف المنحنى التكراري عن المضلع التكراري وتتبع فيه نفس الخطوات الأولية المتبعة في رسم المنحنى التكراري، والاختلاف الوحيد بين المنحنيين هي طريقة توصل النقاط إذ توصل النقاط بالمضلع التكراري بخطوط مستقيمة بينما توصل النقاط بخطوط منحنية تمر بأكبر عدد ممكن من النقاط لمحافظة على انسيابية الشكل.

4.1.1.5 المضلع التكراري المتجمع: عند رسم المنحنى المتجمع الصاعد نتعامل مع الحدود العليا للفئات وليس مع مراكز الفئات كما هو الحال عند رسم المنحنى التكراري، وهو منحنى يتجه إلى الأعلى باستمرار. بينما عند رسم المنحنى التكراري النازل نتعامل مع الحدود الدنيا وهو منحنى يتجه إلى أسفل باستمرار حتى ينتهي عند المحور الأفقي. ويمكن رسم المضلع التكراري الصاعد منفردا، والنازل منفردا، ويمكن رسمهما في شكل واحد.

مثال(07): انطلاقا من جدول التوزيع التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء ارسم المضلع التكراري الصاعد والنازل.

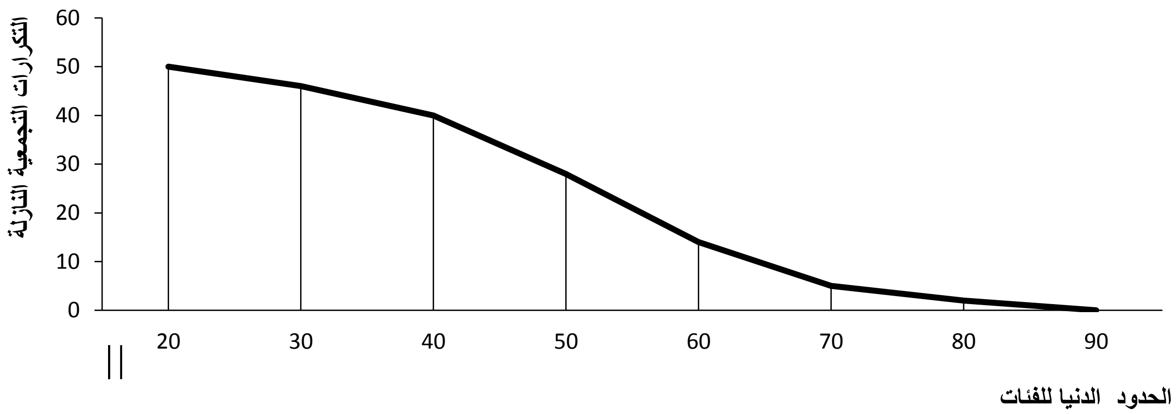
الحل:

أولا: رسم المضلع التكراري الصاعد



الشكل رقم(06): المضلع التكراري المتجمع الصاعد للعلامات 50طالب مادة الإحصاء

ثانيا: رسم التكرار المتجمع النازل



الشكل رقم(07): المضلع التكراري المتجمع النازل للعلامات 50طالب في مادة الإحصاء

5.1.1.5 الغصن والورقة Stem and Leaf Plot: تعتبر هذه طريقة أكثر كفاءة من المدرج التكراري، حيث أنها تعرض معلومات جدول التكراري بالإضافة إلى ذلك فهي تعرض الأرقام أيضا. حيث يخصص رقم الآحاد من الرقم كأوراق على اليمين الخط العمودي بينما يسار الخط العمودي (الساق) يخصص لرقم العشرات أو (العشرات والمئات معا) وهكذا. فمثلا: لعرض الغصن والورق للعدد 51 يكون:

1	5
الورق: هو رقم الأحاد	الغصن: هو الرقم العشرات

أما لعرض الغصن والورق للعدد 151 يكون كما يلي

1	15
الورق هو رقم الأحاد	الغصن هو رقم العشرات والمئات

كيفية تكوين شكل الساق والورق

أ. الورق يكون دائما رقما واحد

ب. اختيار الغصن (الساق) لا يتجاوز عدد السيقان عن عشرين ولا يقل عن خمسة. حيث يتم حساب

عدد السيقان بحساب المدى بين أكبر ساق وأقل ساق +1

عدد السيقان = المدى +1

فمثلا: إذا كان عدد من المفردات وكانت أكبر قيمة بها 98 وأقل قيمة بها 40 فإن عدد السيقان تحدد كما يلي: **المدى** =9−4+ 1 =6 وبالتالي: تكون الأغصان هي: 4 −5 −6 −7 −8 −9.

مثال (08): الأرقام التالية تمثل علامات مجموعة من الطلبة اعرضها بطريقة الغصن والورقة.

24	52	81	38	53
27	44	91	47	59
35	65	68	54	51
42	72	84	74	64
56	67	77	32	44

الحل:

أولا: نحسب عدد الأغصان

لدينا: أعلى قيمة هي 92، وأدنى قيمة 24، إذن: المدى= 9−2 =**7**. وعليه تكون:

عدد الأغصان = المدى +1 =8 أغصان، أي 7+1=8 اغصان

ثانيا: نرسم الشكل

نضع الأرقام من2 إلى9 مقابل خط عمودي. كما هو موضح في الشكل أدناه، إن هذه الأرقام تقابل خانة عشرات وتسمى الغصن، وقيم الخانة الثانية إلى اليمين الخط العمودي هي الأوراق. وإذا أدرنا الصفحة، وجعلنا الغصن يمثل محور الأفقي والأوراق محور العمودي، فإنه يظهر وكأنه مدرج تكراري طول كل فئة 10.

2	4	7					2
3	5	8					2
4	2	4	7	6			4
5	6	2	4	3	9	1	6
6	5	7	8	4			4
7	2	7	4				3
8	1	4	2				3
9	1						1

شكل رقم (08): عرض علامات مجموعة من الطلبة بطريقة الغصن والورق

ثالثا: مميزات طريقة الغصن والساق

أن طريقة الغصن والورق تتميز بمجموعة من المميزات هي:

1. لا تفقد البيانات الأصلية قيمها عند عرضها من خلال الغصن والورق، حيث يمكن إعادة البيانات كما كانت عليه دون أن تفقد البيانات قيمها
2. يمكن بسهولة جدا اشتقاق التوزيع التكراري حسب الأعداد أو الفئات من شكل الغصن والورق
3. يمكن من خلال طريقة الساق والورق الحصول على بعض المقاييس الإحصائية مباشرة، مثلا الساق الذي يحوي معظم القيم هو ما سنطلق عليه فيما بعد المنوال.
4. يمكن عرض البيانات بشكل أكثر تفصيلا وذلك عن طريق تقليل طول الغصن (طول الفئة)
5. يمكن أن ننظر إلى شكل الغصن والورق بصورة بيانية فإذا أدرنا الصفحة، وجعلنا الساق يمثل محور الأفقي والأوراق محور العمودي، يمكننا تخيل شكل البيانات.
6. يمكن " تضليل" الأوراق بظل مختلف، حسب غرض الباحث ويكون عرض البيانات في هذه الحالة شيقا وجذاباً.

2.1.5العرض البياني للمتغيرات الكمية المنقطعة: في هذه الحالة نتطرق إلى كيفية العرض البياني في حالة الجدول التكراري بسيط، وفي حالة وجود التكرارات التجمعية الصاعدة والنازلة.

1.2.1.5الأعمدة البيانية: تختلف طريقة عرض البيانات الكمية المنقطعة (جدول تكراري بسيط) عن المتغيرات الكمية المستمرة (جدول تكراري ذو فئات). حيث يتم عرضها بأعمدة عمودية كما يتضح ذلك من خلال المثال التالي:

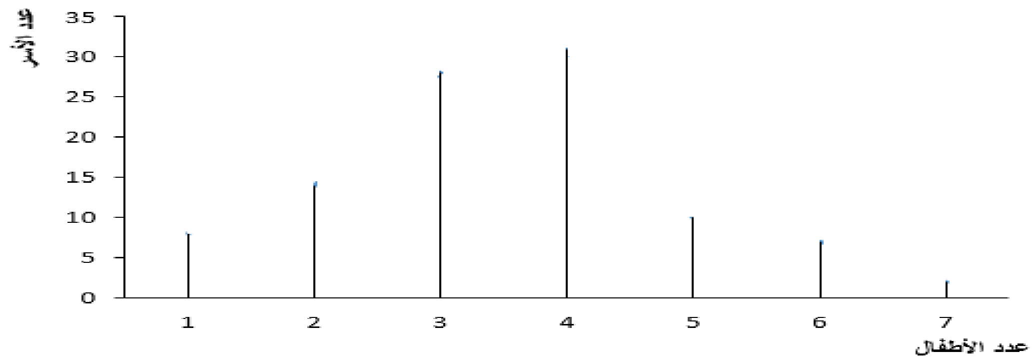
مثال(09): الجدول التالي يبين توزيع 100 اسرة حسب عدد اطفالها

جدول رقم(09): توزيع عدد الأطفال لـ 100 أسرة

عدد الأطفال	1	2	3	4	5	6	7	مجموع
عدد الاسر	8	14	28	31	10	7	2	100

المطلوب: اعرض هذه البيانات عن طريق الأعمدة البيانية

الحل:



شكل رقم(09): توزيع 100أسرة حسب عدد الأطفال

1.2.1.5العرض البياني للتكرارات التجمعية الصاعدة والنازلة: وهي عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب تصاعد التكرارات التجمعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير المدروس. بينما تكون هذه القطاع متنازلة في حالة التكرارات التجمعية النازلة حيث أن القطعة المستقيمة الأولى تقابل مجموع التكرارات وهكذا... كما يتضح ذلك من المثال التالي:

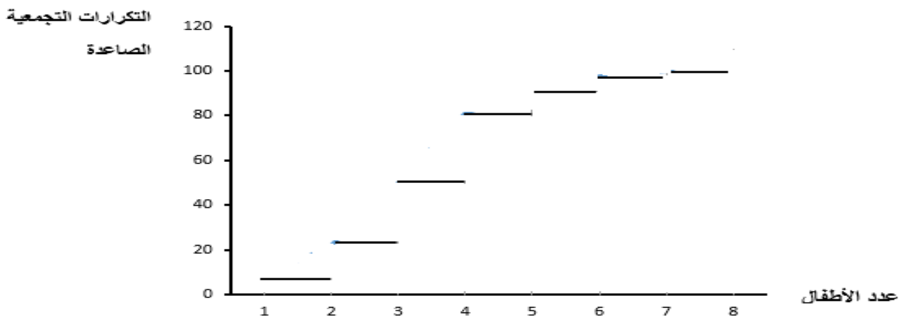
مثال(10): انطلاقا من معطيات المثال السابق أوجد التكرارات التجمعية الصاعدة والنازلة ثم اعرضها بيانيا.

الحل:

أولا: إيجاد التكرارات التجمعية الصاعدة والنازلة

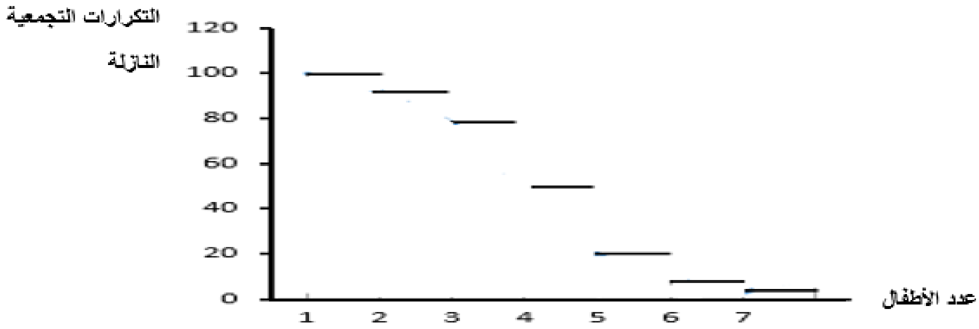
عدد أفراد الأسرة	1	2	3	4	5	6	7	مجموع
عدد الاسر	8	14	28	31	10	7	2	100
التكرار المتجمع الصاعد	8	22	50	81	91	98	100	
التكرار المتجمع النازل	100	92	78	50	19	9	2	

ثانيا: رسم التكرار المتجمع الصاعد



شكل رقم (10): العرض البياني للتكرارات التجمعية الصاعدة

ثالثا: رسم التكرار المتجمع النازل



شكل رقم (11): العرض البياني للتكرارات التجمعية النازلة

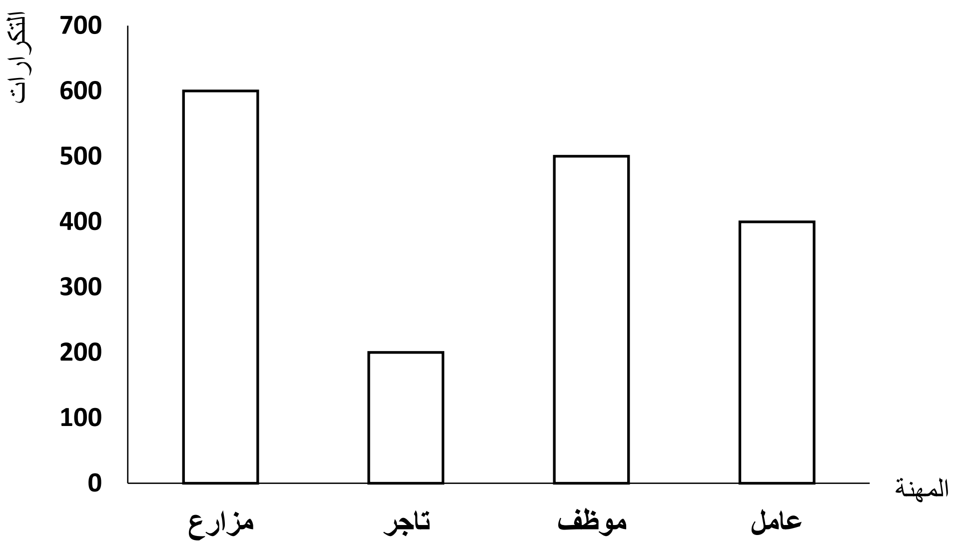
2.5العرض البياني للمتغيرات الكيفية: هناك عدة طرائق لعرض البيانات الكيفية من بين هذه الطرائق نجد:

1.2.5الأعمدة البيانية البسيطة: هي أعمدة أفقية تتناسب ارتفاعاتها مع الأعداد التي تمثلها وتستخدم عند عرض تطور حجم ظاهرة معينة أو عرض تطور التاريخي للظاهرة، حيث تستخدم لجذب الإنتباه إلى اتجاه الأرقام وليس إلى الأرقام ذاتها. لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي الذي يبين توزيع سكان احدى القرى تبعا للمهنة. والمطلوب عرض هذه البيانات في صورة أعمدة بيانية بسيطة

جدول رقم (10) : توزيع عدد سكان أحد القرى تبعا للمهنة

المهنة	مزارع	تاجر	موظف	عامل
العدد	600	200	500	400

الحل:



الشكل رقم (12): أعمدة البسيطة لتوزيع عدد سكان القرية حسب المهنة

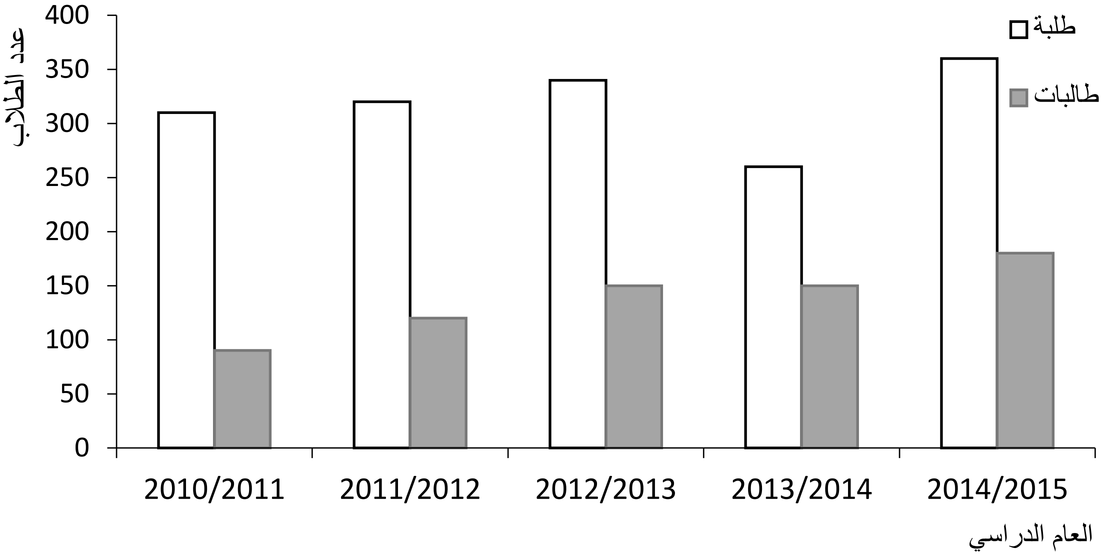
2.2.5 الأعمدة البيانية المتعددة: تستخدم لمقارنة أكثر من ظاهرة، وذلك برسم مستطيلات متلاصقة للظواهر المراد مقارنتها في السنوات المختلفة، بشرط أن يميز المستطيلات(الأعمدة)الخاصة بكل ظاهرة. هذا النوع من الرسوم البيانية يمكننا من المقارنة بين أكثر من متغير واحد في نفس الوقت. وفي مثل هذه الأشكال ان لا نضع أعمدة أكثر من طاقة الشكل لتجنب الالتباس والغموض. كما يجب وضع دليل صغير في اعلى الشكل لتبيان كل نوع من أنواع الأعمدة البيانية التي نقارنها. لتوضيح ذلك نأخذ المثال

التالي الذي يبين توزيع الطلاب حسب الجنس بإحدى الكليات. وهو مثال على" الأعمدة البيانية المزدوجة " ويمثل حالة خاصة من الأعمدة البيانية المتعددة. المطلوب: عرض معطيات الجدول في صورة أعمدة بيانية مزدوجة.

الجدول (11): توزيع عدد الطلاب حسب الجنس خلال الفترة
2015/2014-2011/2010

الجنس	العام الدراسي				
	2011/2010	2012/2011	2013/2012	2014/2013	2015/2014
طلبة	310	320	340	260	360
طالبات	90	120	150	150	180
المجموع	400	440	490	410	540

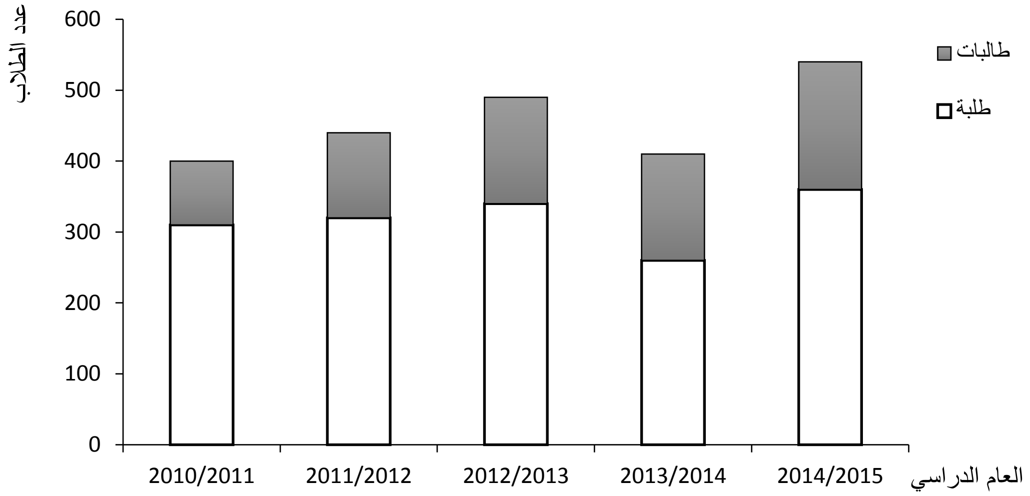
الحل:



شكل رقم (13): توزيع عدد الطلاب أحد الكليات تبعا للجنس
خلال الفترة 2015/2014-2011/2010

3.2.5 الأعمدة البيانية المجزأة: وهي عبارة عن رسم بياني يجمع بين خصائص الأعمدة البيانية البسيطة والأعمدة البيانية المتعددة. وتستخدم في نفس الحالات التي تستخدم فيها الأعمدة البيانية المتعددة. ولتوضيح ذلك نأخذ معطيات المثال السابق. والمطلوب عرض هذه البيانات عن طريق العمود المجزأ

الحل:



شكل رقم(14) : توزيع عدد الطلاب احد الكليات تبعا للجنس

خلال الفترة 2010 /2011-2014/2015

4.2.5 الدائرة البيانية: وهي أحد الرسوم التوضيحية وفيها يمثل المجموع الكلي بدائرة ومكونات المجموع الكلي بأجزاء من الدائرة، وتمثل مكونات هذا المجموع بزوايا تتناسب مع النسب المئوية لهذه المكونات. حيث أن الدائرة تمثل بزاوية قدرها 360° درجة فإن كل 1% من المجموع الكلي يمثل بزاوية مقدارها 3,6°درجة، لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي الذي يوضح تخصصات مختلفة لعدد من الطلبة المسجلين في أحد الكليات. والمطلوب تمثيل ذلك بيانيا باستخدام الدائرة البيانية.

جدول رقم(12): توزيع لعدد الطلبة تبعا للتخصصات المختلفة

التخصصات	علوم التسيير	علوم التجارية	التسويق	مالية ومحاسبة	المجموع
عدد الطلبة	36	59	65	89	240

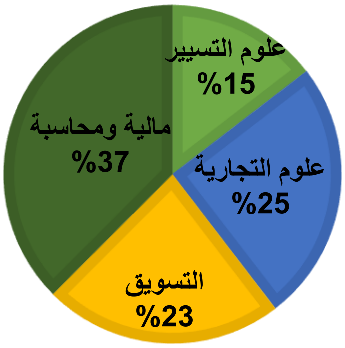
الحل:

أولا: نكون الجدول التالي لاستخراج النسب المئوية والزوايا المركزية

جدول رقم (13): التوزيع التكراري والمئوي لعدد للطلبة حسب التخصصات المختلفة

التخصصات	علوم التسيير	علوم التجارية	التسويق	مالية ومحاسبة	المجموع
عدد الطلبة	36	59	56	89	240
%	15	25	23	37	100
الزاوية المركزية	3,6×15=54	90	82,8	133,2	360

ثانيا: رسم الدائرة البيانية



شكل رقم (15): الدائرة البيانية لتوزيع عدد الطلبة حسب التخصصات

7. أسئلة وتمارين محلولة

1) أذكر طرق عرض البيانات الإحصائية.

الجواب:

طرق العرض البيانات الإحصائية هي: العرض الكتابي، العرض شبه الجدولي، العرض بطريقة الصور والأشكال الهندسية، العرض الجدولي، العرض البياني.

2) الجدول التالي يبين اعداد المتخرجين من أحد الكليات خلال ثلاثة سنوات.

جدول رقم (14): توزيع الطلاب المتخرجين تبعا للتخصص خلال السنوات 2018/2017-2016/2015

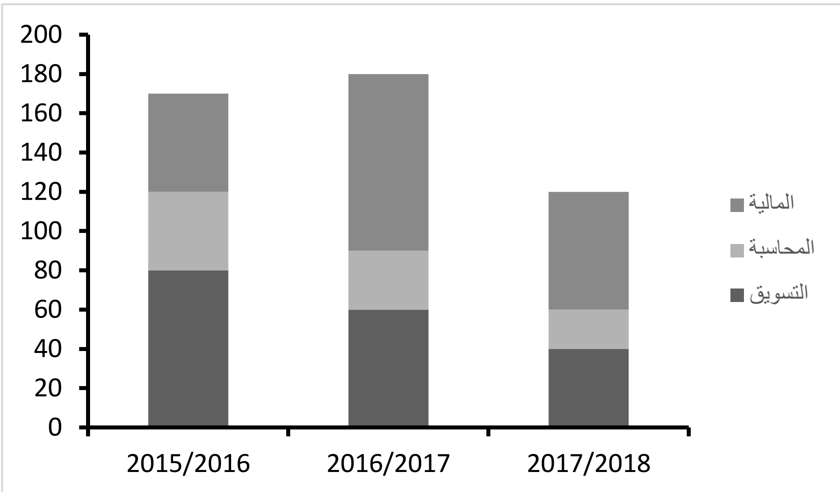
التخصص	العام الدراسي		
	2016/2015	2017/2016	2018/2017
التسويق	80	60	40
المحاسبة	40	30	20
المالية	50	90	60

المطلوب:

قارن تطور عدد الطلاب حسب السنوات وذلك عن طريق الأعمدة البيانية المجزأة.

الحل:

لتسهيل عملية الرسم نقوم أولا برسم مجموع عدد الطلاب لكل سنة دراسية ثم نقوم بتقسيم كل عمود تبعا للتخصص.



شكل رقم (19): توزيع الطلاب المتخرجين تبعا للتخصص خلال السنوات 2018/2017-2016/2015

3) قامت إحدى مصالح السكن بدراسة عينة من 280 سكن وسجلت عدد الغرف بكل سكن. وكانت

النتائج كما هي مسجلة في الجدول التالي:

عدد الغرف	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد السكنات	38	54					12	
تكرار المتجمع الصاعد					206			
تكرار المتجمع النازل								8
التكرار النسبي			0,2571					

المطلوب:

1. أكمل الجدول علماً أن بيانات العينة تؤكد أن 236سكن لا يزيد عدد الغرف بها عن 6غرف ولا يزيد عدد الغرف بها عن 6غرف.
2. ما هو عدد السكنات التي بها أقل من أربعة غرف؟
3. ما هو عدد السكنات التي بها أربعة غرف على الأكثر؟
4. ما هو عدد السكنات التي لا يقل عدد الغرف بها عن ستة؟
5. ما هو عدد السكنات التي يزيد عدد الغرف بها عن ستة؟
6. ما هو عدد السكنات التي بها أكثر من غرفتين وأقل من سبعة غرف؟

الحل:

1. من أجل إتمام الجدول علينا أن نجد قيم العمود f_i . وعليه تكون قيم هذا العمود على النحو التالي:

$f_1 = 38$

$f_2 = 54$

$f_3 = (0,2571) \times 280 = 72$

$f_4 = 206 - (38 + 54 + 72) = 42$

$f_5 = 236 - 206 = 30$

$f_6 = ?$

$f_7 = 12$

$f_8 = 8$

أما قيمة f_6 نتحصل عليها من حاصل الفرق بين حجم العينة (مجموع التكرارات) ومجموع التكرارات المعلومة في العمود f_i . وبذلك نستطيع إتمام الجدول

عدد الغرف	عدد السكنات (f_i)	التكرارات التجمعية		التكرار النسبي
		الصاعدة	النازلة	
2	$f_1 = 38$	38	280	0,1357
3	$f_2 = 54$	92	242	,01929
4	$f_3 = 72$	164	188	0,2571
5	$f_4 = 42$	206	116	0,15
6	$f_5 = 30$	236	74	0,1071
7	$f_6 = 24$	260	44	0,0857
8	$f_7 = 12$	272	20	0,0424
9	$f_8 = 8$	280	8	0,0286
المجموع	280			1

2. عدد السكنات التي بها أقل من أربعة غرف على الأكثر يساوي 92 سكن وذلك بالنظر الى التكرار المتجمع الصاعد.
3. عدد السكنات التي بها أربعة غرف على الأكثر يساوي 164 سكن وذلك بالنظر الى التكرار المتجمع الصاعد.
4. عدد السكنات التي لا يقل عدد الغرف بها عن ستة يساوي 74 سكن. وذلك بنظر الى التكرار المتجمع النازل.
5. عدد السكنات التي يزيد عدد الغرف بها عن ستة يساوي 44 سكن. وذلك بنظر الى التكرار المتجمع النازل.
6. عدد السكنات التي بها أكثر من غرفتين وأقل من سبعة غرف يساوي 198 مسكن. أي تشمل:

$f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 54 + 72 + 42 + 30 = 189$ سكن

أسئلة وتمارين

1) ماهي المعايير التي نأخذها بعين الإعتبار في تحديد طول الفئة؟

2) البيانات التالية تتعلق بتقديرات مجموعة من الطلاب في مقياس الإحصاء.المطلوب: 1. ما هو المتغير المدروس؟2. كون جدول تكراري بسيط 3. ماهي نسبة الطلبة الناجحين؟ 3.اعرض بيانات الجدول التكراري بيانيا.

جيد	ممتاز	مقبول	جيد	جيد جدا	جيد	ضعيف
جيد	جيد جدا	ممتاز	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد
ممتاز	ضعيف	جيد جدا	جيد	جيد جدا	ممتاز	مقبول
ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد	مقبول
ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد	مقبول
ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد	ممتاز	مقبول	جيد

3) بفرض أن البيانات تمثل إجمالي ما أنفقه 75 شخص خلال أسبوع بمئات الدنانير

73	67	73	74	65	62	66	78	68	82	62	73	50	68	72
62	79	71	75	79	60	83	63	63	81	74	69	77	84	73
75	78	82	65	76	61	75	83	79	71	90	60	75	85	71
90	57	73	93	76	89	79	80	91	85	74	87	75	65	83
97	69	66	73	96	60	88	78	75	78	68	62	82	79	76

المطلوب:1. كوّن جدول التفريغ والتوزيع التكراري ذو 8 فئات،

2. أوجد نسبة الإنفاق الأسبوعي لكل فئة من الفئات.

3. ارسم المدرج التكراري، المضلع التكراري، المنحنى المتجمع الصاعد والنازل في نفس الشكل.

4) الأرقام التالية تتعلق بـ 30 عامل، حيث يمثل أحد المتغيرين أجر العامل في اليوم والمتغير الآخر يمثل إ ذلك العمل. المطلوب: إعداد جدول توزيع تكراري مزدوج من خمس فئات متساوية.

رقم العامل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأجر	410	600	750	660	650	430	350	620	640	310
الإنتاج	83	86	93	91	95	87	82	93	88	87
رقم العامل	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الأجر	590	670	600	470	780	420	550	590	500	730
الإنتاج	93	98	90	81	96	89	97	85	92	100
رقم العامل	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
الأجر	500	700	570	680	670	770	680	790	570	690
الإنتاج	82	99	88	89	103	102	92	94	90	94

5) أعرض البيانات الآتية بطريقة الغصن والورقة

53 38 81 52 24 59 47 92 44 27 51 54 64 74 68 35

84 72 42 46 82 77 67 56 65

6) أكمل الجدولين

جدول رقم 01

رقم الفئة	الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد
01	]6 − 4]	....	....	03
02	]8 − 6]	....	0,125	....
03	]10 − 8]	....	....	18
04	]12 − 10]	....	0,25	....
05	]14 − 12]	09	....	....
06	]16 − 14]	....	....	....
08	]18 - 16]	....	0,0625	48
المجموع		....	....	....

جدول رقم02

رقم الفئة	الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد
01	4 − 2]]	04	....	....
02	− 4]]6	....	....	20
03	8 − 6]]	....	....	....
04	] 10 − 8]	....	0,20	....
05	12− 10]]	06	0,15	....
المجموع		....	....	....

سؤال: ماذا تلاحظ من خلال الجدول رقم 01

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

1. المتوسط الحسابي
2. المتوسط الهندسي
3. المتوسط التوافقي
4. المتوسط الربيعي
5. العلاقة بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي والمتوسط التربيعي
6. الوسيط
7. المنوال
8. العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال
9. الربيعيات والعشريات والمئويات (مقاييس الموقع)
10. تمارين محلولة

أسئلة وتمارين

ال الثالث

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

عندما نقوم بدراسة ظاهرة من الظواهر في عدد كبير من الوحدات الإحصائية نجد أن تلك الظاهرة تميل أو تتجه نحو التجمع أو التمركز حول قيمة معينة يطلق على هذا الميل أو الإتجاه اسم النزعة المركزية. والغرض من هذه المقاييس هو وصف المجموعة برقم واحد يمثلها. وهناك عدة أنواع من المتوسطات، واستعمال أي منها يتوقف على نوع البيانات الإحصائية المستخدمة والهدف من البحث أو الدراسة. وتتمثل هذه المقاييس في:

1. المتوسط الحسابي

يستخدم المتوسط الحسابي في المتغيرات الكمية فقط، ويعتبر أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما، لكونه يدخل في حساب مقاييس أخرى، كمقاييس التشتت، مقاييس الشكل، وهو ما يتبن لنا في الفصلين القادمين.

1.1. طريقة حساب المتوسط الحسابي من البيانات الأولية

هناك طرائق عديدة لإيجاد قيمة المتوسط الحسابي وهي على النحو التالي:

1) **الطريقة المباشرة:** إذا كانت $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم هو مجموع هذه القيم مقسوما على عددها ويرمز له بالرمز $\overline{X}$ هذا في حالة التعامل مع بيانات العينة، أما في حالة التعامل مع بيانات مجتمع فيرمز له بالحرف اليوناني μ (ميو).

(للعينة)
$$\overline{X} = \frac{x_{1+}x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

(للمجتمع)
$$\mu = \frac{x_{1+}x_2 + x_3 + ... + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum x}{N}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

حيث:

$\overline{X}$ متوسط الحسابي للعينة n:عدد مفردات العينة(حجم العينة) ، x_i : مفردات المتغير

$\sum$ يرمز إلى مجموع القيم. μ متوسط الحسابي للمجتمع N :عدد مفردات المجتمع

مثال (01): إذ اكانت الأرقام التالية تمثل الأجر الشهري (بعشرة آلف دينار) لسبعة أسر هي: 7، 3، 1، 6، 2، 4، 5. المطلوب أوجد المتوسط الحسابي للدخل (معدل الدخل) الشهري للأسر.

الحل:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{n=1}^{7}x_i}{7}=\frac{7+3+1+6+2+4+5}{7}=\frac{28}{7}=4$$

أي أن متوسط الدخل للأسرة هو 40 ألف دينار

2) **طريقة الإنحرافات البسيطة (طريقة المتوسط الفرضي):** إذا كانت $x_1,x_2,x_3,...x_n$ تمثل مفردات لظاهرة معينة وكان العدد A يمثل المتوسط الفرضي أو المؤقت لهذه القيم (يفضل أن تكون قيمة A مساوية لإحدى المفردة التي بالظاهرة وتكون هذه المفردة واقعة في المنتصف من حيث قيمتها) وكانت d_i تمثل انحرافات المفردات عن وسطها الفرضي $(d_i=x_i-A)$ فإن المتوسط الحسابي يعطى على النحو التالي:

حيث:

$$\overline{X}=A+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-A)}{n}=A+\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n}$$

$$\boxed{\overline{X}=A+\overline{d}}$$

n: عدد مفردات العينة x_i : مفردات المتغير A :عدد ثابت،

$\overline{d}$: متوسط الحسابي للمتغير d_i

تستخدم هذه الطريقة إذا كانت البيانات كثيرة وقيميها كبيرة، وذلك من أجل اختصار العمل الحسابي

مثال (02): أوجد المتوسط الحسابي للقيم التالية: 16،18،17،19،15،20، 17، 14، 15.

الحل:

نختار المفردة واقعة في المنتصف من حيث قيمتها وتساوي 16 أي $(A=16)$

$$\sum_{i=1}^{9}d_i=\sum_{i=1}^{9}(x_i-A)$$

$$=(20-16)+(15-16)+(19-16)+(17-16)+(18-16)+(16-16)+(17-16)+(14-16)+(15-16)$$

$$=(4)+(-1)+(3)+(1)+(2)+(0)+(1)+(-2)+(-1)=7$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{9} d_i}{n}$$

$$\bar{X} = 16 + \frac{7}{9} = 16{,}778$$

3) **الطريقة الانحرافات المختصرة:** يتم حساب المتوسط الحسابي في هذه الحالة كما يلي:

$$\boxed{\bar{X} = A + c\bar{U}}$$

حيث:

A : متوسط حسابي فرضي (أو مؤقت)،

c : يطلق عليه تسمية ثابت القسمة، وهو أكبر قيمة عددية تقبل كل القيم القسمة عليه وبدون باقي (كسر) كلما أمكن ذلك، من أجل تبسيط العمليات الحسابية،

$\bar{U}$: $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$; $u_i = \frac{x_i - A}{c} = \frac{d_i}{c}$

مثال(03): إذا كانت الأرقام التالية: 25، 20، 10، 15، 30 تمثل علامات 5 طلاب في امتحان مادة الإحصاء. والمطلوب أوجد متوسط علامات هذا الإمتحان.

الحل:

باختيار الوسط الفرضي $A = 15$ و $c = 5$ وهو أكبر قيمة عددية تقبل القسمة على كل القيم

$$\bar{X} = A + c\bar{U}$$

$$\bar{X} = A + c\frac{\sum_{i=1}^{5} u_i}{n}$$

$$\bar{X} = 15 + 5\left(\frac{5}{5}\right) = 20$$

$u_i = \frac{d_i}{c} = \frac{d_i}{5}$	$d_i = x_i - A$	x_i
2	10	25
1	5	20
1−	5−	10
0	0	15
3	15	30
$\sum_{i=1}^{5} u_1 = 5$		$\sum_{i=1}^{5} x_1 = 100$

2.1 طريقة حساب المتوسط الحسابي من الجداول التكرارية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ تمثل المفردات المختلفة لظاهرة x_i (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3, \ldots f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن قيمة المتوسط الحسابي يمكن ايجادها بأحد الطرق التالية:

1) **الطريقة المباشرة:** وفق هذه الطريقة يتطلب أولا إيجاد مراكز الفئات ثم نجد حاصل ضرب مراكز الفئات في التكرار المقابل لها. وتعطى بالصيغة التالية:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

حيث: $\overline{X}$: المتوسط الحسابي، x_i : مراكز الفئات،

$\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات، k : عدد الفئات

مثال (04): انطلاقا من معطيات الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء أوجد قيمة المتوسط الحسابي بهذه الطريقة.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$
]20 - 30]	2	25	50
]30 - 40]	8	35	280
]40 - 50]	10	45	450
]50 - 60]	13	55	715
]60 - 70]	8	65	520
]70 - 80]	6	75	450
]80 - 90]	3	85	255
المجموع	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 50$		$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 2720$

ثانيا: إيجاد قيمة المتوسط الحسابي

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i}=\frac{2720}{50}=54,4\,pts$$

2) **طريقة الإنحرافات البسيطة (طريقة المتوسط الفرضي أو المؤقت):** في هذه الحالة يتم حساب المتوسط الحسابي كما يلي:

$$\overline{X}=A+\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

حيث:

A : متوسط حسابي فرضي(مؤقت)، ويأخذ من أحد قيم مراكز الفئات والتي تقع الجدول التكراري وتقابل أكبر تكرار.

x_i : مركز الفئات k : عدد الفئات. $d_i = x_i - A$: انحراف مراكز الفئات عن المتوسط الحسابي الفرضي f_i : تكرار الفئة $\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات أو حجم العينة.

مثال(05): انطلاقا من معطيات الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. أوجد المتوسط الحسابي بهذه الطريقة

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

الفئات	f_i	x_i	$d_i = x_i - 55$	$f_i d_i$
[20 - 30[	2	25	-30	−60
[30 - 40[	8	35	−20	−160
[40 - 50[	10	45	−10	−100
[50 - 60[	13	55	0	0
[60 - 70[	8	65	10	80
[70 - 80[	6	75	20	120
[80 - 90[	3	85	30	90
المجموع	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 50$			$\sum_{i=1}^{7} f_i d_i = -30$

ثانيا: نحسب قيمة المتوسط الحسابي

نفرض أن قيمة A تساوي 55 وهي أحد قيم مراكز الفئات، التي تقع في وسط الجدول وتقابل أكبر تكرار.

$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$\overline{X} = 55 + \frac{-30}{50} = 54{,}4\,pts$$

3) **الطريقة الانحرافات المختصرة (طريقة الانحرافات بدلالة طول الفئة):** يمكن أيضا اختصار العلميات الحسابية أكثر بإستخدام المتوسط الحسابي الفرضي وبدلالة طول الفئة وهي امتداد لطريقة السابقة. ويفضل استعمال هذه الطريقة في حالة الفئات المتساوية الطول، حيث يتم تحويل المتغير x_i إلى

متغير آخر $u_i = \dfrac{x_i - A}{c}$ ويفضل اختيار قيمة A أحد مراكز الفئات التي تقابل أكبر تكرار وتقع في وسط الجدول التكراري، C تمثل طول الفئة، $\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات .

ويتم حساب المتوسط الحسابي وفق هذه الطريقة بتطبيق الصيغة التالية:

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \right) c \qquad \boxed{\overline{X} = A + \overline{U}c}$$

مثال(06): انطلاقا من معطيات المثال السابق أوجد المتوسط الحسابي باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة (طريقة الانحرافات بدلالة طول الفئة)

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

الفئات	f_i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - A}{c}$	$f_i u_i$
[20 - 30[	2	25	−3	−6
[30 - 40[	8	35	−2	−16
[40 - 50[	10	45	−1	−10
[50 - 60[	13	**55**	0	0
[60 - 70[	8	65	1	8
[70 - 80[	6	75	2	12
[80 - 90[	3	85	3	9
المجموع	$\sum_{i=1}^{7} fi = 50 = n$			$\sum_{i=1}^{7} f_i u_i = -3$

ثانيا: حساب قيمة $\overline{X}$

نفرض أن قيمة A تساوي 55 وهي أحد قيم مراكز الفئات التي تقع في وسط الجدول وتقابل أكبر تكرار.

$$\overline{X} = A + \overline{U}c$$

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \right) c$$

$$\overline{X} = 55 + \left(\frac{-3}{50} \right) 10 = 54,4\,pts$$

3.1 خواص المتوسط الحسابي

تتمثل خواص المتوسط الحسابي فيما يلي:

1. مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}=n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)-n\overline{X}=n\overline{X}-n\overline{X}=0$$

2. مجموع مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، أصغر من مجموع مربعات انحرافات للقيم عن أي قيمة أخرى. أي أن: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 \prec \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ ، حيث a أي مقدار ثابت يختلف عن $\overline{X}$ ولإثبات ذلك، نفرض ان a هي قيمة تمثل متوسط حسابي فرضي غير المتوسط الحسابي أي ($\overline{X}\neq a$) والمطلوب هو أن نجد: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ هي أكبر من قيمة $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2$

بإضافة وطرح $\overline{X}$ نتحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i+\overline{X}-\overline{X}+a)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\overline{X})+(\overline{X}-a)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\overline{X})^2+2\left(x_i-\overline{X}\right)(\overline{X}-a)+\left(\overline{X-a}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=i}^{n}(x_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})+n(\overline{X}-a)^2$$

$(\overline{X}-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})$ هذا المقدار يؤل إلى الصفر لان مقدار $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})=0$ ، وعليه تصبح المعادلة على النحو التالي:

$$=\sum_{i=i}^{n}(x_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-a)^2$$

نلاحظ أن المقدار $n(a-\overline{X})^2$ مقدار موجب دائما ونستنتج من ذلك أن : $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 \prec \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ وهو المطلوب.

مثال (07): تمثل الأرقام التالية علامات مجموعة من الطلبة 6، 8، 14، 10، 12. المطلوب: أوجد مربعات انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي ثم عن العدد 9 والعدد 11 ماذا تلاحظ؟

الحل:

أولا: حساب المتوسط الحسابي

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{n}=\frac{6+8+14+10+12}{5}=\frac{50}{5}=10\,pts$$

ثانيا: إيجاد مجموع مربع انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي $(\overline{X})$، وعن العدد 9، ثم عن العدد 11 كما موضح في الجدول التالي:

جدول رقم (01): مجموع مربعات انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي وعن العدد 9 والعدد 11

$(x_i-11)^2$	(x_i-11)	$(x_i-9)^2$	(x_i-9)	$(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})$	x_i
25	5−	9	3−	16	4−	6
9	3−	1	1−	4	2−	8
9	3	25	5	16	4	14
1	1	1	1	0	0	10
1	1	9	3	4	2	12
$\sum_{i=1}^{5}(x_i-11)^2=45$		$\sum_{i=1}^{5}(x_i-9)^2=45$		$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{X})^2=40$		$\sum_{i=1}^{5}x_1=50$

نلاحظ من الجدول أعلاه، أن مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل ما يمكن وأن الفرق بينهما يساوي $n(a-\overline{X})^2$ أي $5(9-10)^2=5$ أو $5(11-10)^2=5$

3. يدخل في حسابه جميع القيم، ومن ثم فهو يتأثر بعدد القيم، فكلما كان عدد القيم كبيرا كلما كان المتوسط الحسابي أكثر ثباتا وأكثر تعبيرا عن المتوسط المجتمع.

4. لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة، لأن حسابه يتطلب إيجاد مراكز الفئات

5. يخضع للعمليات الجبرية، أي إذا أضفنا أو طرحنا أو ضربنا أو قسمنا كل مفردة من المفردات مجموعة من البيانات بمقدار ثابت، ثم حسبنا المتوسط الحسابي للقيم الجديدة، فإن المتوسط الحسابي الناتج يكون المتوسط الحسابي الأصلي مضافا إليه قيمة الثابت، أو مطروحا منه قيمة الثابت، أو مضروبا في قيمة الثابت، أو مقسوما على قيمة الثابت، وذلك حسب العملية الجبرية التي تم إنجازها.

6. لا يمكن حسابه بيانيا.

7. يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة)، ويقال بأن مفردة ما متطرفة إذا كانت كبيرة جداً أو صغيرة جداُ مقارنة ببقية المفردات، أي يصبح مضلل في حالة مجموعات القيم التي تحتوي على قيم قليلة متطرفة جدا، فيقترب المتوسط الحسابي من القيم المتطرفة. والمثال التالي يوضح ذلك: استخراج المتوسط الحسابي للقيم التالية: 3، 5، 8، 800. فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم يساوي:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{n}=\frac{3+5+8+800}{4}=\frac{816}{4}=204$$

نلاحظ أن قيمة المتوسط الحسابي في هذه الحالة انجذبت نحو القيمة المتطرفة ولم يعبر عن القيم الأخرى.

8. إذا كانت الظاهرة x تأخذ القيم $x_1,x_2,x_3,...x_m$ و $\overline{X}$ تمثل المتوسط الحسابي لها، وكانت الظاهرة y تأخذ القيم $y_1,y_2,y_3...y_n$ و $\overline{Y}$ تمثل المتوسط الحسابي لها، فإن المتوسط الحسابي للظاهرتين معا الذي يرمز له بالرمز $\overline{\overline{X}}$ يعرف كما يلي: $\overline{\overline{X}}=\frac{m\overline{X}+n\overline{Y}}{m+n}$ ؛ أي يساوي (عدد القيم المجموعة الأولى × متوسطها الحسابي + عدد القيم المجموعة الثانية× متوسطها الحسابي)÷(عدد القيم المجموعة الأولى+ عدد القيم المجموعة الثانية).

3.المتوسط الهندسي

المتوسط الهندسي لأي مجموعة من القيم عددها n هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم. ويتم حسابه على النحو التالي:

1.3 في حالة البيانات الأولية

إذا كانت $x_1,x_2,x_3,...x_n$ تمثل مفردات لظاهرة ما فإن المتوسط الهندسي لهذه البيانات يتم إيجاده باستخدام الصيغة التالية والذي يرمز له بالرمز G .

$$\boxed{G=\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}=\left[x_1.x_2.x_3...x_n\right]^{\frac{1}{n}}}$$

ويمكن الإستعانة باللوغاريتمات لإيجاد قيمة المتوسط الهندسي خاصة إذا كانت القيم كثيرة وكبيرة وفي هذه الحالة تصبح صيغة المتوسط الهندسي على النحو التالي:

$$\log G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$\boxed{G=10^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i}}$$

مثال(08): أوجد المتوسط الحسابي للقيم التالية: 2، 4، 8

الحل:

من التعريف أعلاه، فان المتوسط الهندسي يساوي: $G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n} = \sqrt[3]{8\times4\times2} = \sqrt[3]{64}$

$$G = (64)^{\frac{1}{3}} = 4$$

كما يمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام اللوغاريتمات وذلك كما يلي:

$$\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$\log G = \frac{1}{3}[\log 2 + \log 4 + \log 8]$$

$$\log G = \frac{1}{3}[0,3010 + 0,6920 + 0,9031]$$

$$\log G = \frac{1}{3}[1,8062] = 0,60206$$

$$G = 10^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i}$$

$$G = 10^{0,60206} = 4$$

مثال(09): أشارت احصائيات إحدى الدول أن مستوى التضخم عرف خلال الأربع سنوات الأخيرة التغيرات التالية: 3%، 6%،4%،−2% .المطلوب أوجد نسبة التغير في مستوى التضخم خلال هذه الفترة.

الحل:

طالما كون التغيرات مقاسة بنسب مئوية فإننا نستخدم المتوسط الهندسي لإيجاد متوسط نسبة التغير

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n} = \sqrt[4]{\frac{103}{100}\times\frac{106}{100}\times\frac{104}{100}\times\frac{98}{100}}$$

$$= \sqrt[4]{1,03\times1,06\times1,04\times0,98} = \sqrt[4]{1,11276256} = 1,0270$$

وعليه، فإن معدل التضخم خلال الأربع سنوات وصل إلى 0,0270 أي 2,27% في هذه الدولة

2.3 في حالة الجداول التكرارية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,...x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3,...f_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها فإن المتوسط الهندسي لهذه البيانات يعرف كما يلي:

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f3}...x_k^{f_k}}$$

أو

$$G=\left[x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f_3}\dots x_k^{\ f_k}\right]^{\frac{1}{n}}$$

باستخدام اللوغاريتمات نجد أن:

$$\log G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\log x_i \Rightarrow G=10^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\log x_i}$$

مثال(10): أوجد المتوسط الهندسي لجدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[2 - 4[	[4 - 6[	[6 - 8[	[8 - 10[	[10 - 12[	المجموع
التكرار f_i	3	4	6	4	3	$\sum_{i=1}^{k} f_i=20$

الحل:

أولا نكون الجدول التالي:

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	
	f_i	x_i	$(x_i)^{f_i}$	$\log x_i$	$f_i\log x_i$
[2 - 4[	3	3	$27=(3)^3$	0,477121	1,431363
[4 - 6[	4	5	$625=(5)^4$	0,698970	2,79588
[6 - 8[	6	7	$117649=(7)^6$	0,845098	5,07055
[8 - 10[	4	9	$6561=(9)^4$	0,954243	3,8170
[10 - 12[	3	11	$1331=(11)^3$	1,041393	3,124173
المجموع	$\sum_{i=1}^{5} f_i=20$				$\sum_{i=1}^{5} f_i\log x_i=16,23966$

الطريقة الأولى: نستخدم الصيغة التالية:

$$G=\sqrt[n]{x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f\,3}\dots x_k^{f_k}}=\left[x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f_3}\dots x_k^{\ f_k}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$G=\left[27\times625\times117649\times6561\times1331\right]^{\frac{1}{20}}=6,4855$$

الطريقة الثانية: نستخدم الصيغة التالية التي تعتمد على اللوغاريتمات في إيجاد قيمة المتوسط الهندسي وهي:

$$\log G=\frac{1}{n}\sum_{i=}^{k} f_i\log x_i \Rightarrow G=10^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\log x_i}$$

$$\log G=\frac{1}{20}\sum_{i=}^{5} f_i\log x_i=\frac{16,23966}{20}=0,8119483\Rightarrow G=10^{0,8119483}=6,4855$$

بعض خواص المتوسط الهندسي

1. يدخل في حسابه جميع القيم المعطاة.

2. يستخدم في حساب دراسة الظواهر التي تزيد مفرداتها بنسبة ثابتة كما الحال عند دراسة نمو السكان، النمو الاقتصادي، التغيرات النسبية في الأسعار والأرقام القياسية، نمو الكائنات الحية، وغيرها من الأمثلة.
3. لا يتأثر كثيرا بالقيم المتطرفة.
4. عدم إمكانية استخدامه مع التوزيعات التي تضم قيم سالبة أو صفرية.
5. لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.
6. المتوسط الهندسي أصغر من المتوسط الحسابي لأي مجموعة من البيانات الموجبة وغير المتساوية.

4. المتوسط التوافقي

المتوسط التوافقي لمجموعة من البيانات هو عبارة عن مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب القيم. ويتم حسابه على النحو التالي:

1.4في حالة البيانات الأولية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,...x_n$ تمثل مفردات لظاهرة ما فإن المتوسط الهندسي لهذه البيانات يتم إيجاده باستخدام الصيغة التالية والذي يرمز له بالرمز H .

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$$

مثال(11): أوجد المتوسط التوافقي للقيم التالية:2، 4، 5

الحل:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{3}{0,5+0,25+0,2} = \frac{3}{0,95} = 3,158$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{3}{0,5+0,25+0,2} = \frac{3}{0,95} = 3,158$$

مثال(12): لنفرض طائرة تتحرك في الجو وفق اضلاع مربع طول ضلعه 100 كلم بسرعة مختلفة هي: 100 كلم في الساعة على الضلع الأول ثم 200 كلم/سا على الضلع الثاني ثم 300 كلم/سا على الضلع الثالث ثم 400 كلم/سا على الضلع الرابع. المطلوب حساب متوسط سرعة الطائرة.

الحل:

فإذا حسبنا متوسط السرعة بهذه الطريقة نجد أن متوسط السرعة يساوي250 كلم/سا

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{100+200+300+400}{4}=250k/h$$

غير أن هذه النتيجة لا تعبير عن معدل السرعة الفعلي، فهي نتيجة مضللة بدليل أن:

الزمن الذي تستغرقه الطائرة لقطع المضلع الأول هو: ساعة واحدة(60د) أو 1 ساعة

الزمن الذي تستغرقه الطائرة لقطع المضلع الثاني هو: نصف ساعة (30د) أو $\frac{1}{2}$ ساعة

الزمن الذي تستغرقه الطائرة لقطع المضلع الثالث هو: 20 دقيقة (20د) أو $\frac{1}{3}$ ساعة

الزمن الذي تستغرقه الطائرة لقطع المضلع الرابع هو: ربع ساعة (15د) أو $\frac{1}{4}$ ساعة

ومنه مجموع الوقت المستغرق لقطع مسافة 400 كلم هو $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$ وبذلك يكون متوسط السرعة

هو: $\frac{400}{\frac{25}{12}}=192k/h$ أو نستعل مباشرة صيغة المتوسط التوافقي

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}}=\frac{4}{\frac{12+6+4+3}{1200}}=\frac{4}{\frac{25}{1200}}=\frac{4\times1200}{25}=192k/h$$

نفس النتيجة السابقة، وبالتالي فإن متوسط سرعة الطائرة هو 192 كلم في الساعة وليس 250 كلم في الساعة

2.4في حالة الجداول التكرارية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,...x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3,...f_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها فإن المتوسط التوافقي لهذه البيانات يعرف كما يلي:

$$\boxed{H=\frac{\sum_{i=1}^{k}f_i}{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}}$$

حيث: H: المتوسط التوافقي x_i : مراكز الفئات، $\sum_{i=1}^{k}f_i$: مجموع التكرارات

k: عدد الفئات، f_i : تكرار الفئة

مثال(13): الجدول التالي يبين توزيع أجور عمال أحد المعامل

فئات الأجور	[3 – 7[	[7 – 11[	[11 – 15[	[15 – 19[	[19 – 23[	[23 – 27[
التكرار	8	12	10	9	6	5

فئات الأجور	التكرار f_i	مراكز الفئات x_i	$\frac{f_i}{x_i}$

المطلوب: أوجد الأجر التوافقي

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

]7 – 3]	8	5	$8 \div 5 = 1{,}6$
]11 – 7]	12	9	$12 \div 9 = 1{,}3333$
]15 – 11]	10	13	$10 \div 13 = 0{,}7682$
]19 – 15]	9	17	$9 \div 17 = 0{,}5294$
]23 – 19]	6	21	$6 \div 21 = 0{,}2857$
]27 – 23]	5	25	$5 \div 25 = 0{,}2$
المجموع	$\sum_{i=1}^{6} f_i = 50$		$\sum_{i=1}^{6} \frac{f_i}{x_i} = 4{,}7176$

ثانيا: نحسب قيمة المتوسط التوافقي

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)} = \frac{50}{4{,}7176} = 10.5986D$$

يعني أن متوسط الأجر الشهري لعمال المصنع يساوي 10,60 دينار في المتوسط

3.4خواص المتوسط التوافقي

- يدخل في حسابه جميع القيم.
- يتأثر كثيرا بالقيم الشاذة
- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.
- يكون $H \leq G \leq X$ ويحدث التساوي في حالة جميع القيم متساوية
- ويفضل استخدام هذا المتوسط في حساب معدل السرعة إذ تعطي في العادة بدلالة وحدة الزمن وكذلك في حساب الأسعار متى أعطيت على أساس عدد الوحدات بالنسبة لوحدة النقود.

5.الوسط التربيعي

يعرف الوسط التربيعي لمجموعة من القيم على أنه الجذر التربيعي لمتوسط مربعات القيم ويتم حسبه على النحو التالي:

1.5في حالة البيانات الأولية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ تمثل مفردات لظاهرة ما فإن الوسط التربيعي لهذه البيانات يتم إيجاده باستخدام الصيغة التالية والذي يرمز له بالرمز Q .

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

مثال(14): أوجد الوسط التربيعي للقيم التالية:1، 3، 4، 5، 7

الحل:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{(1)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (7)^2}{5}} = \sqrt{20} = 4,47$$

2.4في حالة الجداول التكرارية

إذا كانت $x_1, x_2, x_3, ... x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3, ... f_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها فإن المتوسط التوافقي لهذه البيانات يعرف كما يلي:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

حيث:

Q: المتوسط الهندسي، x_i : مراكز الفئات،

$\sum_{i=1}^{k} f_i$: مجموع التكرارات، f_i : تكرار الفئة، k: عدد الفئات

مثال(15): انطلاقا من معطيات الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. أوجد الوسط التربيعي لهذا التوزيع.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[20 - 30[	2	25	50	1250
[30 - 40[	8	35	280	9800
[40 - 50[	10	45	450	20250
[50 - 60[	13	55	715	39325
[60 - 70[	8	65	520	33800
[70 - 80[	6	75	450	33750
[80 - 90[	3	85	255	21675

159850	2720		50	المجموع

ثانيا: نحسب قيمة الوسط التربيعي

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}} = \sqrt{\frac{159850}{50}} = \sqrt{3197} = 56{,}54\,pts$$

3.4 خواص الوسط التربيعي

- يستخدم في حسابه جميع القيم المتاحة
- يستخدم في حساب متوسط المجموعة من لقيم إذا كانت تحتوي على بعض القيم السالبة وكانت الإشارة السالبة ليست ذات أهمية.
- مجموع انحرافات مربعات القيم عن مربع الوسط التربيعي لهذه القيم تساوي صفراً.
- يستخدم في مجالات الفيزياء.

5. العلاقة بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والوسط التوافقي والوسط التربيعي

لهذه المقاييس الأربعة صفة مشتركة وهي استخدامها جميع القيم المتاحة. كما أن $Q \geq \overline{X} \geq G \geq H$ لأية مجموعة من القيم المختلفة سواء كانت بيانات أولية أو في جدول تكراري وتتساوى هذه المتوسطات في حالة واحدة إذا كانت جميع القيم متساوية

مثال(16): إذا كانت القيم التالية: 4، 8، 2،10 تمثل علامات مجموعة من الطالبة أوجد: المتوسط الحسابي، الهندسي، التوافقي، والمتوسط التربيعي، ثم قارن بين النتائج، ماذا تلاحظ؟

الحل:

أولا: إيجاد قيمة المتوسط الحسابي $\overline{X}=\frac{\sum_{n=1}^{4}x_i}{4}=\frac{4+8+2+10}{4}=\frac{24}{4}=6\,pts$

ثانيا: إيجاد قيمة المتوسط الهندسي $G=\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}=\sqrt[4]{4\times8\times2\times10}=\sqrt[4]{384}=[384]^{\frac{1}{4}}=4{,}43\,pts$

ثالثا: إيجاد قيمة المتوسط التوافقي $H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}=\frac{4}{0{,}25+0{,}125+0{,}5+0{,}1}=\frac{4}{0{,}975}=4{,}10\,pts$

رابعا: إيجاد قيمة الوسط التربيعي: $Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{(4)^2+(8)^2+(2)^2+(10)^2}{4}}=\sqrt{\frac{16+64+4+100}{4}}=\sqrt{\frac{184}{4}}=6{,}78\,pts$

نلاحظ من خلال النتائج أن: $Q\succ\overline{X}\succ G\succ H$ $\quad 6{,}78\succ6\succ4{,}43\succ4{,}10$

6. الوسيط

الوسيط هو قيمة المفردة التي يقع ترتيبها وسط المجموعة عند ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا (أو تنازليا)، بحيث تكون عدد القيم الأصغر منها تساوي عدد القيم الأكبر منها. ويعتبر الوسيط مقياساً ترتيبيا على عكس المتوسط الحسابي الذي يستخدم إلا كمقياس كمي.

1.6طريقة حساب الوسيط من البيانات الأولية

لإيجاد قيمة الوسيط من البيانات الأولية نقوم بالخطوات التالية:

أولا بترتيب القيم تصاعديا (أو تنازليا)

ثانيا: نجد رتبة الوسيط بقسة عدد القيم على 2 بعد إضافة لعدد القيم واحد $R(M_e)=\frac{n+1}{2}$

ثالثا: نحدد قيمة الرتبة.

مثال (16): أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية: 4، 9، 7، 6، 3، 9، 8

الحل:

1) ترتيب القيم تصاعديا: 3، 4، 6، 7، 8، 9، 9
2) نحسب عدد القيم وتساوي $n=7$
3) نحسب ترتيب الوسيط $\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$
4) نبحث عن القيمة التي يقع ترتيبها الرابع فنجد ها تساوي 7 إذن قيمة الوسيط تساوي7 وليس قيمة 4.

مثال (17): أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية: 11، 17 9، 12، 7، 14، ،16، 18

الحل:

1) ترتيب القيم تصاعديا: 7، 9، 11، 12، 14، 16، 17، 18

2) نحسب عدد القيم وتساوي $n=8$

3) نحسب ترتيب الوسيط $R(M_e)=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{8+1}{2}=4{,}5$

4) نبحث عن القيمة التي يقع ترتيبها الرابع ونصف، في هذه الحالة، فإن قيمة الوسيط تقع بين القيمتين ذوي الترتيب الرابع والخامس، والتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب الرابع بنصف الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب الخامس والرابع.

$$M_e=12+\frac{1}{2}(14-12)=13$$

ومنه فإن قيمة الوسيط تساوي 13وليس رتبة 4,5 $M_e=13$

2.6طريقة حساب الوسيط من الجداول التكرارية

لحساب الوسيط من جدول تكراري نتبع النقاط التالية:

1) إيجاد التكرار المتجمع الصاعد وهو يقابل ترتيب القيم في حالة البيانات الأولية

2) تحديد رتبة الوسيط $R(M_e)=\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2}$

3) تحديد الفئة الوسيطية التي تقع فيها قيمة الوسيط،

4) تحديد قيمة الوسيط بتطبيق الصيغة الوسيط

$$\boxed{M_e=a+\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2}-F\uparrow_{-1}}{f_{Me}}\times c}$$

حيث: a : الحد الأدنى للفئة الوسيطية

$\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2}$: رتبة الوسيط $F\uparrow_{-1}$: التكرار المتجمع السابق للفئة الوسيطية،

f_{Me} : تكرار الفئة الوسيطية (التكرار المطلق للفئة الوسيطية)، c : طول الفئة الوسيطية

مثال (18): انطلاقا من معطيات الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء أوجد قيمة الوسيط حسابيا.

فئات العلامات	التكرارات f_i	فئات التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$
[10 - 20[	0	أقل من20	0

الحل:

1)

الفئات	التكرار		التكرار المتجمع الصاعد
[20 - 30[	2	أقل من30	2
[30 - 40[	8	أقل من40	10
[40 - 50[	10	أقل من50	20
[50 - 60[	13	أقل من60	33
[60 - 70[	8	أقل من70	41
[70 - 80[	6	أقل من80	47
[80 - 90[	3	أقل من 90	50
المجموع	50		

الجدول التالي:

2) إيجاد الت2) تكرار ر المتجمع الصاعد كما هو موضح في الجدول أعلاه.

3) إيجاد رتبة الوسيط $R(M_e)=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2}=\frac{50}{20}=25$ ، بالنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد نجد علامة الطالب ذو الترتيب 25 تقع ضمن المجال [50 –60[، ومنه الفئة الوسيطية هي: [50 –60[، وتكرارها 13، وطولها 10 نقاط.

4) حساب قيمة الوسيط

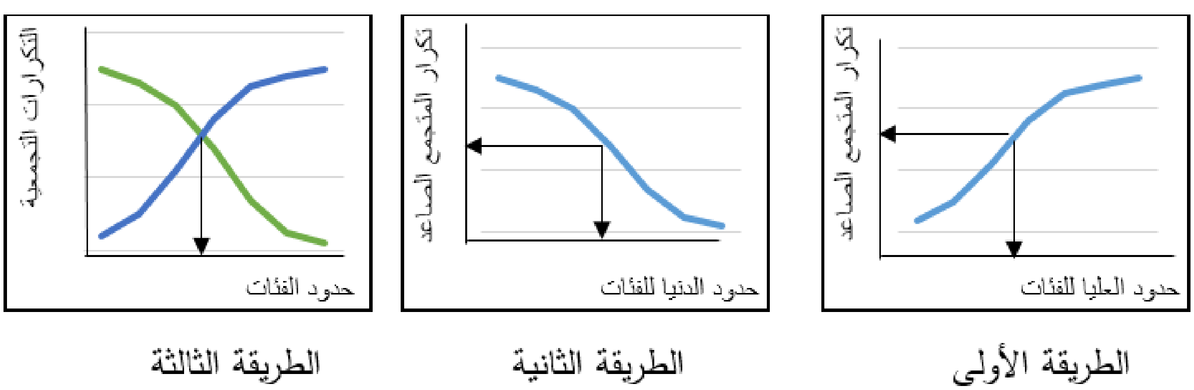
$$M_e=50+\frac{\frac{50}{2}-20}{13}\times 10=53{,}85\,pts$$

$$M_e=50+\frac{\frac{50}{2}-20}{13}\times 10=53{,}85\,pts$$

وهذا معناه أن 50% من الطلبة تقل علاماتهم عن 53,85 نقطة بينما 50% تفوق علاماتهم عن 53,85 نقطة بمعنى أخر أن علامة الطالب ذو ترتيب 25 تساوي 53,85 نقطة

3.6 حساب الوسيط بيانيا

يمكن ايجاد قيمة الوسيط بيانيا عن طريق رسم المنحنى المتجمع الصاعد أو النازل أوكلهما معاً وذلك على النحو التالي:



الطريقة الأولى — الطريقة الثانية — الطريقة الثالثة

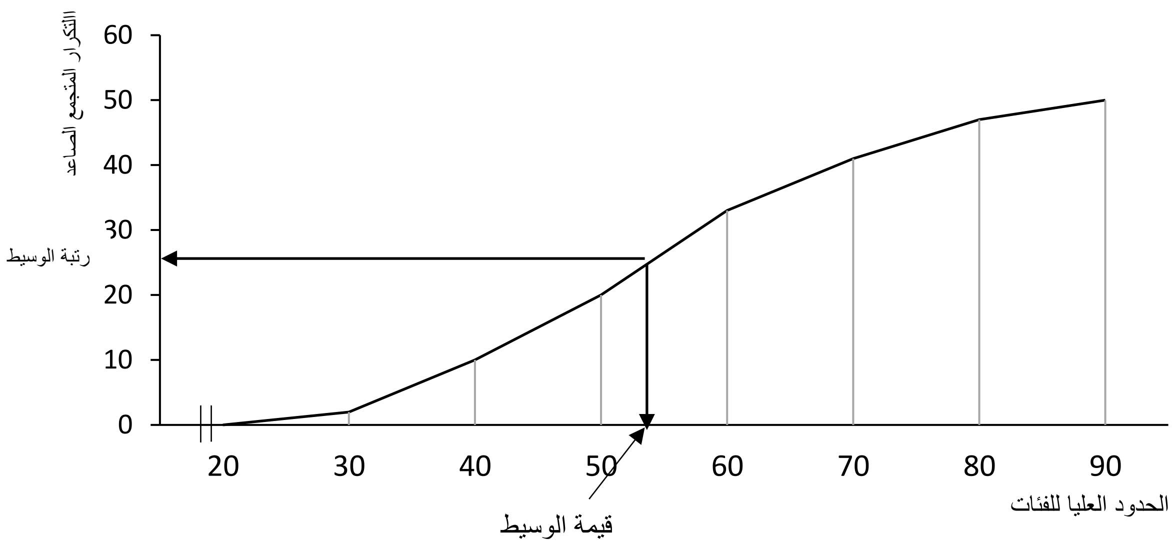
شكل رقم(01): حساب قيمة الوسيط بيانيا

فيما يخص الطريقة الأولى والثانية نقوم برسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) ونحدد رتبة الوسيط على المحور العمودي ومن هذه النقطة (رتبة الوسيط $\sum_{i=1}^{k} f_i \div 2$) نمد خط أفقي حتى يتقاطع مع منحنى التكرار المتجمع الصاعد(أو منحنى المتجمع النازل) ومن نقطة التقاطع ننزل عمود حتى يتقاطع مع المحور الأفقي (محور حدود الفئات) فتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي هي قيمة الوسيط. بينما الحالة الثالثة تتحدد قيمة الوسيط عند تقاطع منحنى المتجمع الصاعد والنازل ثم نقوم بإنزال عمود حتى يتقاطع مع المحور الأفقي (حدود الفئات) هي قيمة الوسيط.

مثال(19): انطلاقا من معطيات المثال السابق أوجد قيمة الوسيط بيانيا

الحل:

نرسم التكرار المتجمع الصاعد ثم نتحدد قيمة الوسيط



شكل رقم(02): حساب الوسيط بيانيا لعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء

4.6 خوص الوسيط

تتمثل خواص الوسيط فيما يلي:

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة لاعتماده على الترتيب.
- يمكن إيجاده بيانيا.
- لا يخضع للعمليات الجبرية كالمتوسط الحسابي.

- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة من أحد طرفيها أو كليهما.
- لا يمكن حسابه من المتغيرات الكيفية القابلة للترتيب وعددها زوجي.
- لا يدخل في حسابه جميع القيم، ويحسب فقط من القيم التي في المركز (الوسط)
- لا يحتاج لتعديل التكرار إذا كانت أطوال الفئات غير متساوية.
- يتحدد بعدد القيم وليس بقيمتها، ويصعب إيجاده من عدد كثير من القيم غير المبوبة

7. المنوال

يستخدم هذا المقياس إذا كان الهدف من الدراسة الحصول على مقياس سريع لظاهرة النزعة المركزية بصرف النظر عن الدقة في القياس، أو عندما يكون اتجاه واضح نحو تمركز البيانات في جدول التوزيع التكراري، ويستخدم المنوال كمقياس لوصف البيانات الكيفية، إلا أنه بالإمكان استخدامه أيضا لوصف البيانات الكمية.

1.7طريقة حساب المنوال من البيانات الأولية

يتم حساب هذا المقياس في هذه الحالة وفقا للتعريف الآتي: المنوال هو القيمة أو الصفة الأكثر شيوعا، أو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة المسيطرة أو صاحبة أكبر تكرار. ويرمز له M_O .

مثال(20) أوجد المنوال للمجموعات التالية:

1) 4، 5، 7، 10، 3، 9، 10،6
2) 4، 9، 5، 4، 6، 8، 9
3) 3، 6، 7، 8

الحل:

المجموعة الأولى: المنوال يساوي 10 $M_O = 10$

المجموعة الثانية: هناك منوالان هما:4، 9 $M_{0_2} = 9$ $M_{0_1} = 4$

المجموعة الثالثة: عديمة المنوال، لعدم تكرار أي قيمة أكثر من غيرها $M_o = \phi$

مثال (21): أوجد المنوال للتقديرات التالية: ممتاز ، جدجدا، جيد، جيد، مقبول، مقبول

الحل:

هناك منوالين: جيد، مقبول

2.7طريقة حساب المنوال من الجداول التكرارية

في حالة البيانات المبوبة في جدول تكراري، لا نستطيع القول عما إذا كانت هناك قيمة معينة لها أكبر تكرار، لأن القيم تذوب في الفئات المختلفة. وعليه فإننا نعرف الفئة المنوالية هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار. ويتم تحديد قيمة تقريبيه للمنوال بعدة طرق نذكر منها:

1.2.7 **طريقة مركز الفئة المنوالية:** وتعد هذه الطريقة سهلة، حيث تعتبر قيمة المنوال هي مركز الفئة المنوالية. ولكن هذه الطريقة غير دقيقة لأنها تتجاهل تماماً تأثير تكرارات الفئات الأخرى.

2.2.7 **طريقة الفروق (بيرسون):** تعتبر هذه الطريقة أفضل وأدق الطرق، حيث يتم تحديد المنوال بواسطة ثلاث فئات، الفئة المنوالية والفئة السابقة لها والفئة اللاحقة عليها. ويستخدم في ذلك الصيغة التالية:

$$\boxed{M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} C}$$

حيث: a : الحد الأدنى للفئة المنوالية

Δ_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها

Δ_2 : الفرق بين التكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة عليها

c : طول الفئة

مثال(22): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب أوجد المنوال حسابيا بطريقة الفروق.

فئات العلامات	التكرارات f_i
]30 - 20]	2
]40 - 30]	8
]50 - 40]	10
]60 - 50]	13
]70 - 60]	8
]80 - 70]	6
]90 - 80]	3
المجموع	50

الحل:

من خلال معطيات المثال نجد الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكبر وهي:]50 − 60] وتكرارها 13.

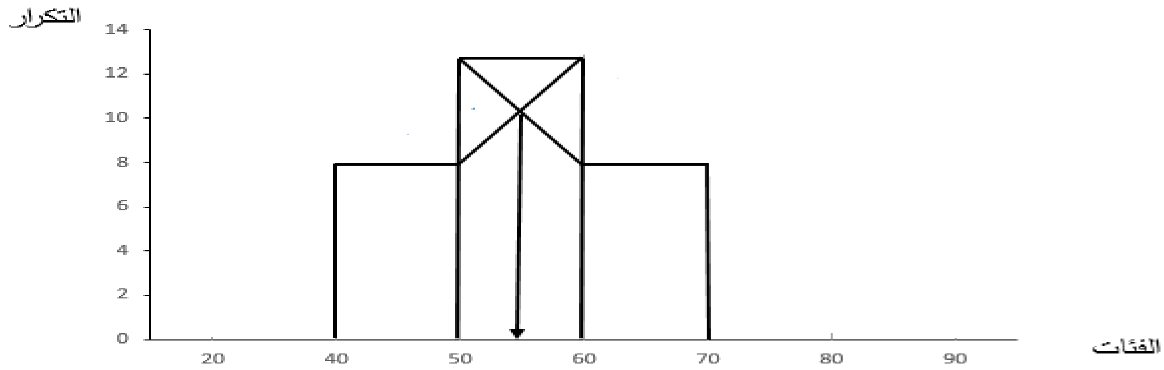
$$M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} C$$

$$M_o = 50 + \frac{(13-10)}{(13-8)+(13-10)} 10$$

$$M_o = 50 + \frac{3}{5+3} 10 = 54{,}29\, pts$$

3.6. إيجاد المنوال بيانيا

لإيجاد قيمة المنوال بيانيا نقوم برسم المدرج التكراري لكن نكتفي برسم الفئة المنوالية والسابقة واللاحقة عليها كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل رقم (03): حساب المنوال بيانيا

4.7 حساب المنوال في التوزيعات التكرارية غير متساوية الطول

يتم أيضا استخدام نفس الطرق السابقة، لكن بعد تعديل التكرارات، حيث نحصل على التكرارات المعدلة لكل فئة بقسمة التكرار المطلق على طول الفئة، ويرمز له بالرمز $f_i^* = \frac{f_i}{c}$ كما يتضح من المثال التالي:

مثال(23): أوجد المنوال (حسابيا وبيانيا) للتوزيع التكراري التالي:

فئات الأجور	]2 − 0]	]6 − 2]	]10 − 6]	]20 − 10]	]30 − 20]	]50 − 30]
التكرار	1	5	8	10	15	5

الحل:

مادام الفئات غير منتظمة نقوم أولا بتعديل التكرارات كما يتبين في الجدول التالي:

الفئات	التكرارات f_i	طول الفئة c	التكرار المعدل $f_i^* = \frac{f_i}{c}$
]2 − 0]	2	2	1=2÷2
]6 − 2]	5	4	1,25=4÷5
]10 − 6]	8	4	2=4÷8
]20 − 10]	10	10	1=10÷10
]30 − 20]	15	10	1,5=10÷15
]50 − 30]	5	20	0.25=20÷5
المجموع	45		

من خلال الجدول نلاحظ أن الفئة المنوالية هي: [6 −10]وهي تقابل أكبر تكرار معدل وليس الفئة التي تقابل أكبر تكرار مطلق.

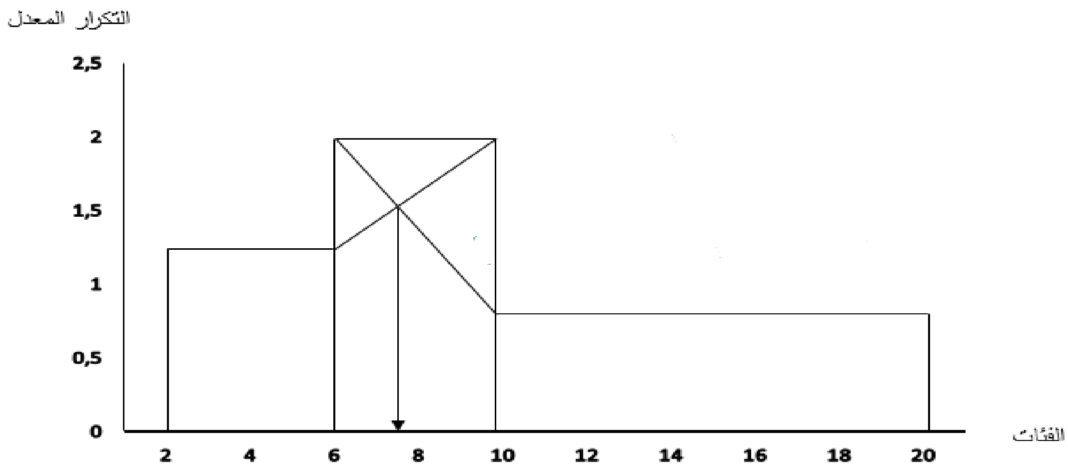
$$M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} C$$

$$M_o = 6 + \frac{(2-1{,}25)}{(2-1)+(2-1{,}25)}4$$

$$M_o = 6 + \frac{0{,}75}{1+0{,}75}4 = 7{,}71$$

5.6: حساب المنوال في التوزيعات التكرارية غير متساوية الطول

نرسم المدرج التكراري لكن نكتفي برسم ثلاثة فئات فقط وهي: الفئة المنوالية، الفئة السابقة للفئة المنوالية واللاحقة عليها كما يتضح ذلك من الشكل التالي:



شكل رقم (04): حساب المنوال بيانيا في حالة الفئات غير متساوية المدى

6.7. خصائص المنوال

من بين خصائص المنوال نجد:

1. أسهل مقاييس النزعة المركزية، ويستخدم لوصف الظواهر الكيفية

2. لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة)، فالمنوال لمجموعة القيم 7، 8، 2، 5، 2 هو 2، والمنوال لمجموعة القيم 7، 8، 2، 1000، 2، هو أيضا 2، كما أنه يعتمد على فئة أكبر تكرار والفئتين المجاورتين لها.

3. يتأثر المنوال بالتكرار ولا يتأثر بالقيم المتطرفة أو الوسطى.

4. يمكن إيجاد المنوال بشكل تقريبي بالرسم.

5. لا يدخل في حسابه جميع القيم.

6. تعدّد الصيغ التي يعرف بها المنوال يؤدي إلى اختلاف في قيمة المنوال لمجموعة القيم الواحدة. فهو مقياس غير مستقر تتوقف قيمته في حالة التوزيعات التكرارية على طريقة التبويب.أي يتأثر بعدد فئات التوزيع التكراري وطول الفئة.

7. ليس له معنى إذا كانت التكرارات قليلة.

8. يجب استخدام التكرار المعدل في حالة الفئات غير متساوية الطول.

9. أفضل مقياس للتعبير عن النزعة المركزية في التوزيعات غير الطبيعية أو التوزيعات الملتوية التواء حاداً.

8. العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال

توجد علاقة تجريبية بين المتوسطات الثلاث المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال وهي:

(المتوسط الحسابي–المنوال) = 3(المتوسط الحسابي – الوسيط)	$\left(\overline{X}-M_O\right)=3(\overline{X}-M_e)$

هذه العلاقة، صحيحة في التوزيعات ذات المنحنى التكراري القريب من التماثل (قريب من التوزيع الطبيعي) أي ذو التواء بسيط. وتفيدنا هذه العلاقة في الحصول على قيمة تقريبية لأي من هذه المتوسطات بمعرفة المتوسطيين الآخرين.

أما في حالة التوزيع الطبيعي (شكله يشبه شكل الجرس) عديم الإلتواء، فإن قيمة المتوسط الحسابي في الحالة تساوي قيمة الوسيط وقيمة المنوال.

المتوسط الحسابي= الوسيط = المنوال	$\overline{X}=M_e=M_O$

مثال(24): إذا علمت ان وسيط التوزيع احادي المنوال هو30 وأن قيمة المتوسط الحسابي هي ضعف قيمة المنوال، فما هي قيمة كل من المتوسط الحسابي والمنوال؟ وما شكل التوزيع؟

الحل:

لدينا: $M_e=30$ و $\overline{X}=2M_O$ من خلال العلاقة التجريبية بين مقاييس النزعة المركزية نجد:

$$\begin{aligned}\overline{X}-M_O=3(\overline{X}-M_e) &\Leftrightarrow 2M_O-M_O=3(2M_O-M_e)\\ &\Leftrightarrow M_O=3(2M_O-30)\\ &\Leftrightarrow M_O=6M_O-90\\ &\Leftrightarrow 5M_O=90\\ &\Leftrightarrow 5M_O=90\\ &\Leftrightarrow M_O=\frac{90}{5}=18\end{aligned}$$

وبالتالي فإن قيمة المتوسط الحسابي هي: $\overline{X}=18\times2=36$

أما شكل التوزيع فهو مائل إلى ناحية اليمين (التواء موجب) لأن: $M_O \prec M_e \prec \overline{X} \Leftrightarrow 18 \prec 30 \prec 36$

أما إذا كانت النتيجة على هذا الشكل $M_O \succ M_e \succ \overline{X}$ فإن شكل التوزيع فهو مائل ناحية اليسار (التواء سالب).

9.الربيعيات والعشريات والمئويات (مقاييس الموقع)

لحساب أي مقياس من هذه المقاييس نتبع نفس الخطوات التي أتبعناها عند حساب الوسيط حسابيا وبيانيا مع مراعاة الفرق في الرتبة فقط.

1.9 الربيعيات

يعرف الربيع i حيث: $i=1,2,3$ على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها $25i\%$ من البيانات المرتبة تصاعديا. ولحساب الربيعات في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

1.2.9: في حالة البيانات الأولية: يتم حساب الربيعات من البيانات الأولية (بيانات غير مبوبة) بتباع الخطوات التالية:

1. ترتيب القيم تصاعديا
2. تحديد رتبة كل ربيع $R(Q_i)=\frac{i}{4}(n+1)$ ، حيث: $i=1,2,3$
3. تحديد قيمة رتبة كل ربيع

مثال(25): أوجد الربيعات للقيم التالية: 15، 11، 20، 8، 29، 37، 24

الحل:

أولا: ترتيب القيم تصاعديا: 8، 11، 15، 20، 24، 29، 37

ثانيا: إيجاد رتبة الربيع كل ربيع ثم قيمة كل رتبة ربيع

1) حساب رتب الربيعيات

- رتبة الربيع الأول $R(Q_1)=\frac{1}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_1)=\frac{1}{4}(7+1)=2$
- رتبة الربيع الثاني $R(Q_2)=\frac{1}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_2)=\frac{2}{4}(7+1)=4$
- رتبة الربيع الثالث $R(Q_3)=\frac{1}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_3)=\frac{3}{4}(7+1)=6$

2) تحديد قيم الرتب

- قيمة رتبة الربيع الأول $Q_1=11$
- قيمة رتبة الربيع الثاني $Q_2=20$
- قيمة رتبة الربيع الثالث $Q_3=29$

مثال(26): في حالة إضافة العدد 41 إلى المثال السابق أوجد الربيعيات: 37،29،8،20،11،15، 24، 41.

الحل:

أولا: ترتيب القيم تصاعديا: 8، 11، 15، 20، 24، 29، 37،39، 41.

ثانيا: إيجاد رتبة الربيع كل ربيع ثم قيمة كل رتبة ربيع

1) حساب رتب الربيعيات

- رتبة الربيع الأول $R(Q_1)=\frac{1}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_1)=\frac{1}{4}(8+1)=2{,}25$

أي أن قيمة الربيع الأول تقع بين القيمتين ذوي الترتيب الثالث والثاني بالتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب الثاني بـ $\frac{1}{4}$ أي:(0,25) الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب الثاني والأول.

- رتبة الربيع الثاني $R(Q_2)=\frac{2}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_1)=\frac{2}{4}(8+1)=4{,}5$

أي أن قيمة الربيع الثاني تقع بين القيمتين ذوي الترتيب الخامس والرابع بالتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب الرابع بـ $\frac{1}{2}$ أي:(0,5) الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب الخامس والرابع.

- رتبة الربيع الثالث $R(Q_3)=\frac{3}{4}(n+1)\Rightarrow R(Q_1)=\frac{3}{4}(8+1)=6{,}75$

أي أن قيمة الربيع الثالث تقع بين القيمتين ذوي السابع والسادس بالتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب السادس بـ $\frac{3}{4}$ أي:(0,75) الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب السابع والسادس.

2) تحديد قيم الرتب

- قيمة رتبة الربيع الأول هي: 12 $Q_1=11+\frac{1}{4}(15-11)=12$
- قيمة رتبة الربيع الثاني هي: 22 $Q_2=20+\frac{1}{2}(24-20)=22$
- قيمة رتبة الربيع الثالث هي: 35 $Q_3=29+\frac{3}{4}(37-29)=35$

2.1.9 في حالة الجداول التكرارية: يتم حساب الربيعات من الجداول التكرارية (بيانات مبوبة) بتباع الخطوات التالية:

1. إيجاد التكرار المتجمع الصاعد
2. تحديد رتبة الربيع $R(Q_i)=\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{k} f_i$ ، حيث: $i=1,2,3$
3. تحديد فئة الربيعية بالنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد
4. تطبيق صيغة الربيعيات:

$$Q_i=a+\left(\frac{\frac{i\sum_{i=1}^{k} f_i}{4}-F\uparrow_{-1}}{f_{Me}}\right)C$$

a : الحد الأدنى للفئة الربعية Q_i ، $\left(i\sum_{i=1}^{k} f_i/4 \right)$: رتبة الربيع Q_i، $F\uparrow_{-1}$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الربيعية Q_i، f_{Q_i} : التكرار المطلق للفئة الربعية Q_i، c : طول الفئة الربيعية Q_i

مثال(27): أوجد الربيعيات (حسابيا وبيانيا) انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50طالب في مادة الإحصاء.

الفئات	f_i	x_i	$F\uparrow$

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي من أجل تحديد رتب الربيعات

]30 - 20]	2	25	2
]40 - 30]	8	35	10
]50 - 40]	10	45	20
]60 - 50]	13	55	33
]70 - 60]	8	65	41
]80 - 70]	6	75	47
]90 - 80]	3	85	50
المجموع	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 50$		

ثانيا: حساب قيمة الربيع الأول

1. تحديد رتبة الربيع الأول $R(Q_1)$

$$R(Q_1) = \frac{1}{4}\sum f_i = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

2. تحديد الفئة الربيعية الأولى وهي:

[40 – 50]، أي أن علامة الطالب ذو الترتيب 12,5 تتراوح علامته بين 40 وأقل من50 نقطة وذلك بنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد.

3. تحديد قيمة الربيع الأول Q_1

$$Q_1 = a + \left(\frac{\frac{1\sum_{i=1}^{7} f_i}{4} - F\uparrow_{-1}}{f_{Med}} \right) C$$

$$Q_1 = 40 + \left(\frac{12.5 - 10}{10} \right) 10 = 42{,}5\, pts$$

وهذا معناه أن 25% من الطلاب تقل علامتهم عن 42,5نقطة، بينما، بينما 75 %من الطلاب تفوق علاماتهم عن 42,5 نقطة.

ثانيا: حساب قيمة الربيع الثاني Q_2

مادام قد تم حساب الوسيط عند دراسة الوسيط، لا دعي لتكرار حساب الـ Q_2

لإن:

$$Q_2 = M_e = 53{,}85\, pts$$

ثالثا: حساب قيمة الربيع الثالث Q_3

1. تحديد رتبة الربيع االثالث $R(Q_3)$

$$R(Q_3)=\frac{3}{4}\sum f_i=\frac{3\times 50}{4}=37,5$$

2. تحديد الفئة الربيعية الثالثة وهي [60 −70[، أي أن علامة الطالب ذو الترتيب 37,5 تتراوح بين 60 وأقل من 70 نقطة وذلك بنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد.

3. تحديد قيمة الربيع الثالث

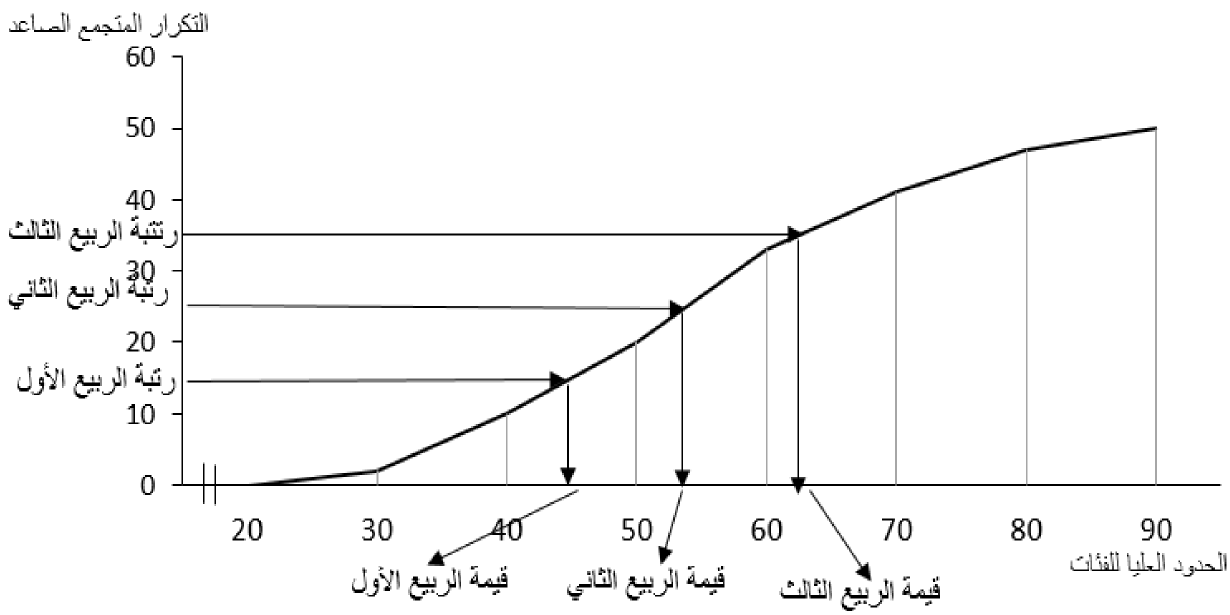
$$Q_3=a+\left(\frac{\frac{3\sum_{i=1}^{7} f_i}{4}-F\uparrow_{-1}}{f_{Me}}\right)C$$

$$Q_3=60+\left(\frac{37,5-33}{8}\right)10=65,63\,pts$$

وهذا معناه أن 75% من الطلاب تقل علامتهم عن 65,63 نقطة بينما 75 %من الطلاب تفوق علاماتهم عن 65,63 نقطة.

1. إيجاد قيمة الربيعيات بيانيا

لإيجاد قيم الربيعيات بيانيا نقوم برسم المنحنى المتجمع الصاعد ونحدد رتبة كل ربيع على المحور العمودي ومن هذه النقطة (رتبة الربيع $i\sum_{i=1}^{k} f_i \div 4$ حيث $i=1,2,3$) ثم نمد خط أفقي حتى يتقاطع مع منحنى التكرار المتجمع الصاعد، ومن نقطة التقاطع ننزل عمود حتى يتقاطع مع المحور الأفقي (محور حدود العليا للفئات)، فتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي هي قيمة ربيع. وهو ما يتضح من خلال الشكل أدناه



شكل رقم (05): إيجاد قيمة الربيعيات بيانيا

2.10العشريات: يعرف العشير i حيث $i=1,2,3,...,9$ على انه القيمة أو المفردة التي يسبقها $10i\%$ من البيانات المرتبة تصاعديا.

1.2.10: في حالة البيانات الأولية: يتم حساب العشريات في حالة البيانات الأولية كما يلي

1) ترتيب القيم تصاعديا
3) تحديد رتبة كل عشير: $R(D_1)=\frac{i}{10}(n+1)$ ، حيث: $i=1,2,3,...,9$
4) تحديد قيمة رتبة كل عشير

مثال (28): أوجد العشير الأول والثامن للقيم التالية: 15، 11، 20، 8، 29، 37، 24.

الحل:

أولا: ترتيب القيم تصاعديا: 8، 11، 15، 20، 24، 29، 37.

ثانيا: حساب رتبة وقيمة العشير الثاني

- **رتبة العشير الثاني** $R(D_2)=\frac{2}{10}(n+1)\Rightarrow R(D_2)=\frac{2}{10}(7+1)=1,6$

أي أن قيمة العشير الأول تقع بين القيمتين ذوي الترتيب الثاني والأول بالتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب الأول بـ 0,6 الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب الثاني والأول.

- **قيمة العشير الثاني** $D_2=8+\frac{1}{10}(11-8)=8,3$

ثالثا: حساب رتبة وقيمة العشير الثامن

- **رتبة العشير الثامن** $R(D_8)=\frac{8}{10}(n+1)\Rightarrow R(D_8)=\frac{8}{10}(7+1)=6,4$

أي أن قيمة العشير الثامن تقع بين القيمتين ذوي الترتيب السابع والسادس بالتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب السادس بـ 0,4 الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب السابع والسادس.

- **قيمة العشير الثامن** $D_8=29+\frac{8}{10}(37-29)=35,4$

2.2.9 في حالة الجداول التكرارية: يتم حساب العشريات من الجداول التكرارية بتباع نفس الخطوات المتبعة عند حساب الربيعيات:

1) إيجاد التكرار المتجمع الصاعد
2) تحديد رتبة العشير D_i حيث $i=1,2,3,...,9$
3) تطبيق صيغة العشريات

$$D_i = a + \left(\frac{\frac{i\sum_{i=1}^{k} f_i}{10} - F\uparrow_{-1}}{fD_i} \right) C$$

حيث: $i = 1,2,3,\dots,9$

a : الحد الأدنى للفئة العشيرية D_i ، $\frac{i\sum_{i=1}^{k} f_i}{10}$: رتبة العشير D_i،

$F\uparrow_{-1}$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة العشيرية D_i،

f_{D_i} : التكرار المطلق للفئة الربعية D_i، c : طول الفئة الربيعية D_i

مثال(29): أوجد العشير الأول والتاسع انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50طالب في مادة الإحصاء

الحل:

أولا: كون الجدول

الفئات	f_i	x_i	$F\uparrow$
]30 − 20]	2	25	2
]40 − 30]	8	35	10
]50 − 40]	10	45	20
]60 − 50]	13	55	33
]70 − 60]	8	65	41
]80 − 70]	6	75	47
]90 − 80]	3	85	50
المجموع	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 50$		

ثانيا: حساب قيمة العشير الأول D_1

1. تحديد رتبة العشير الأول $R(D_1)$

$$R(D_1) = \frac{1}{10}\sum f_i = \frac{50}{10} = 5$$

2. تحديد الفئة العشيرية الأولى وهي:

[30 −40[، وتكرارها 8، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق هذه الفئة هو 2. أي أن علامة الطالب ذو الترتيب 5 تتراوح بين 30 وأقل من 40 نقطة.

3. تحديد قيمة العشير الأول D_1 وذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$D_1 = a + \left(\frac{\frac{1\sum_{i=1}^{7} f_i}{10} - F\uparrow_{-1}}{f_{D_i}} \right) C$$

$$D_1 = 30 + \left(\frac{5-2}{8} \right) 10 = 33{,}75\, pts$$

وهذا معناه أن 10% من الطلبة تقل علامتهم عن 33,75 نقطة بينما 90 %من الطلاب تفوق علاماتهم عن 33,75 نقطة.

ثالثا: حساب قيمة العشير التاسع D_9

4. تحديد رتبة العشير التاسع $R(Q_9)$ $R(D_9)=\frac{9}{10}\sum f_i=\frac{9\times 50}{10}=45$

5. تحديد الفئة العشيرية التاسعة وهي [70 –80[، أي أن علامة الطالب ذو الترتيب 45 تتراوح بين 70 وأقل من 80 نقطة وذلك بنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد.

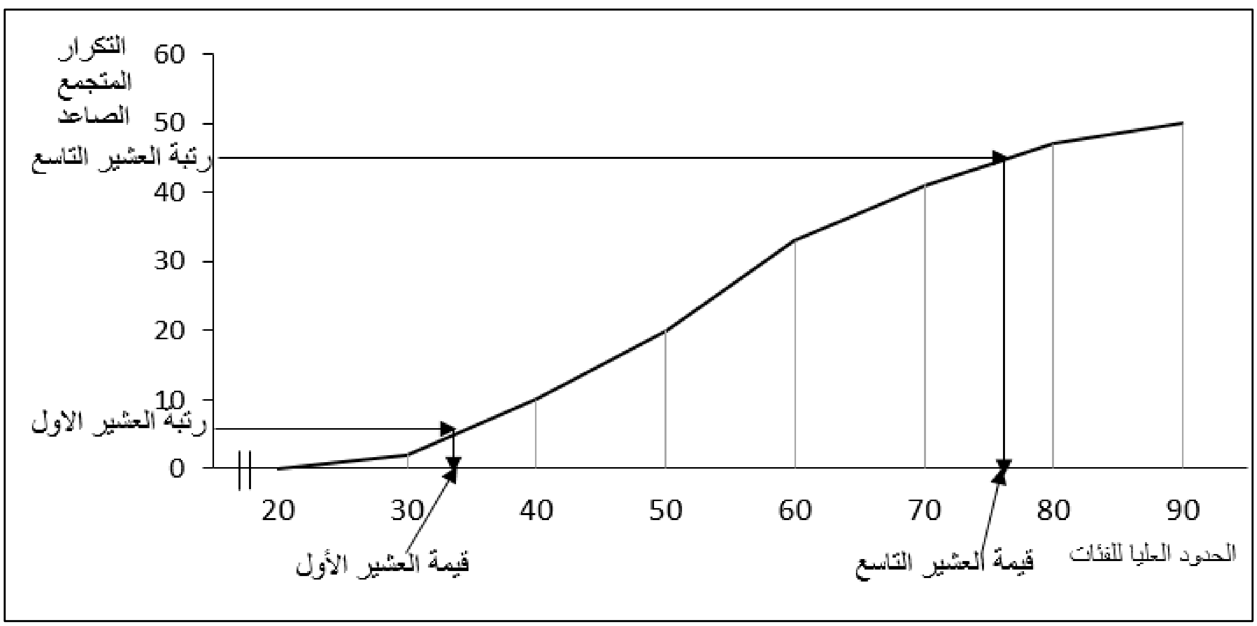
6. تحديد قيمة العشير التاسع

$$D_9=a+\left(\frac{\frac{9\sum_{i=1}^{7} f_i}{10}-F\uparrow_{-1}}{f_{D_9}}\right)C$$

$$D_9=70+\left(\frac{45-41}{6}\right)10=76{,}67\,pts$$

وهذا معناه أن 90% من الطلبة تقل علامتهم عن 76,67 نقطة بينما 10 %من الطلبة تفوق علاماتهم عن 76,67 نقطة.

رابعا: إيجاد قيمة العشير الأول و التاسع بيانيا



شكل رقم (06): تحديد قيمة العشير الأول والتاسع بيانيا

2.9 المئويات: يعرف المئوي i حيث $i=1,2,3,...,99$ على انه القيمة أو المفردة التي يسبقها $i\%$من البيانات المرتبة تصاعديا ولحسابه نميز حالتين:

.2.9 في حالة البيانات الأولية: يتم حساب المئويات في حالة البيانات الأولية كما يلي:

1) ترتيب القيم تصاعديا

2) تحديد رتبة كل مئوي: $R(p_1)=\frac{i}{100}(n+1)$ ، حيث: $i=1,2,3,...,99$

3) تحديد قيمة رتبة كل مئوي

مثال (30): أوجد المئوي 50 والمئوي 75 للقيم التالية: 15، 11، 20، 8، 29، 37، 24.

الحل:

أولا: ترتيب القيم تصاعديا: 8، 11، 15، 20، 24، 29، 37

ثانيا: حساب رتبة وقيمة P_{50}

- رتبة المئوي الخمسون $R(P_{50})$

$$R(P_{50})=\frac{50}{100}(n+1)\Rightarrow R(P_{50})=\frac{50}{100}(7+1)=4$$

ومنه قيمة الرتبة الرابعة تساوي 20، وهي نفس قيمة الوسيط والعشير الخامس لأنهما لديها نفس الرتبة،

أي أن: $P_{50}=M_e=Q_2=20$

ثالثا: حساب رتبة وقيمة P_{75}

- رتبة المئوي الخامس والسبعون

$$R(P_{75})=\frac{75}{100}(n+1)\Rightarrow R(P_{75})=\frac{75}{100}(7+1)=\frac{600}{100}=6$$

ومنه قيمة رتبة السادسة هي: تساوي 29، وهي نفس قيمة الربيع الثالث أي: $P_{75}=Q_3=29$

ثانيا: في حالة الجداول التكرارية

يتم حساب المئويات من الجداول التكرارية بتباع نفس الخطوات المتبعة عند حساب الربيعيات:

- إيجاد التكرار المتجمع الصاعد
- تحديد رتبة المئوي P_i حيث: $i=1,2,3,...,9$
- تطبيق الصيغة التالية

$$\boxed{P_i=a+\left(\frac{\frac{i\sum_{i=1}^{k}f_i}{100}-F\uparrow_{-1}}{f_{P_i}}\right)C.}$$

حيث: $i=1,2,3,...,99$

a : الحد الأدنى للفئة المئوية P_i

$\frac{i\sum_{i=1}^{k}f_i}{100}$: رتبة المئوي P_i ، $F\uparrow_{-1}$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة المئوية P_i

f_{P_i} : التكرار المطلق للفئة المئوية P_i c : طول الفئة المئوية P_i

مثال(31): أوجد المئوي العاشر والمئوي التسعون انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50طالب في مادة الإحصاء.

الحل:

أولا: تكوين الجدول التالي:

$F\uparrow$	x_i	f_i	الفئات
2	25	2	]30 - 20]
10	35	8	]40 - 30]
20	45	10	]50 - 40]
33	55	13	]60 - 50]
41	65	8	]70 - 60]
47	75	6	]80 - 70]
50	85	3	]90 - 80]
		$\sum_{i=1}^{7} f_i = 50$	المجموع

ثانيا: حساب قيمة المئوي العاشر P_{10}

1) تحديد رتبة العشير الأول $R(P_{10})$

$$R(P_{10}) = \frac{10}{100}\sum_{i=1}^{7} f_i = \frac{(10)(50)}{100} = 5$$

2) تحديد الفئة المئوية العاشرة وهي: [30 −40]، وتكرارها 8، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق هذه الفئة هو 2. أي أن علامة الطالب ذو الترتيب 5 تتراوح بين 30 وأقل من 40 نقطة.

3) تحديد قيمة المئوي العاشر P_{10} وذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$P_{10} = a + \left(\frac{\frac{10\sum_{i=1}^{7} f_i}{100} - F\uparrow_{-1}}{f_{P_{10}}} \right) C$$

$$P_{10} = 30 + \left(\frac{5-2}{8} \right) 10 = 33{,}75\, pts$$

وهذا معناه أن 10% من الطلاب تقل علامتهم عن 33,75 نقطة بينما 90 %من الطلاب تفوق علاماتهم عن 33,75 نقطة.

ثانيا: حساب قيمة المئوي 90 (P_{90})

- تحديد رتبة المئوي التسعون $R(P_{90})$

$$R(P_{90}) = \frac{90}{100}\sum f_i = \frac{90\times 50}{100} = 45$$

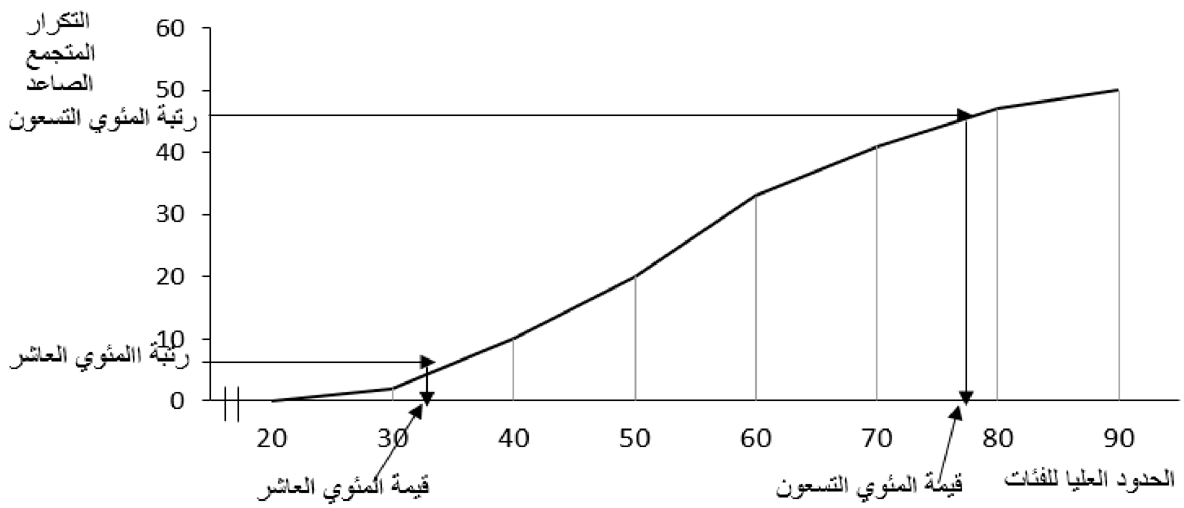
●تحديد قيمة المئوي التسعون

$$P_{90} = a + \left(\frac{\frac{90\sum_{i=1}^{7} f_i}{100} - F\uparrow_{-1}}{f_{P_{90}}} \right) C$$

$$P_{90} = 70 + \left(\frac{45-41}{6} \right) 10 = 76{,}67\, pts$$

وهذا معناه أن 90% من الطلبة تقل علامتهم عن 76,67 نقطة بينما 10 %من الطلبة تفوق علاماتهم عن 76,67 نقطة.

2. إيجاد قيمة المئوي العاشر والمئوي التسعون بيانيا



شكل رقم (07): إيجاد المئوي العاشر والمئوي التسعون لعلامات 50طالب في مادة الإحصاء

6. تمارين محلولة

1) أجرى باحث دراسة حول عدد الأطفال في الأسرة في مدينة معينة فأخذ عينة تتكون من 100 أسرة سأل عن عدد الأطفال كل منها فكانت النتائج كما في الجدول الآتي:

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	5	6	7
عدد الأسر	60	100	170	180	200	160	100	30

المطلوب: 1. اوجد المتوسط الحسابي 2. الوسيط 3. المنوال

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي

عدد الأطفال (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	المجموع
عدد الأسر (f_i)	60	100	170	180	200	160	100	30	1000
$f_i x_i$	0	10	340	540	800	800	600	210	3390
التكرار المتجمع الصاعد	60	160	330	510	710	870	970	1000	

1. حساب المتوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{3390}{1000} = 3{,}39 \approx 3$$

إذن متوسط(معدل) عدد الأطفال في الأسرة 3 أطفال (لأنه متغير كمي منقطع).

2. حساب الوسيط

تحديد رتبة الوسيط

$$R(M_e) = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2} = \frac{1000}{2} = 500$$

ومنه عدد الأطفال لدى الأسرة ذات الترتيب 500 هو 3 أطفال. ولمعرفة هذه نتيجة ننظر إلى التكرار المتجمع الصاعد ونحدد عدد الأطفال لدى الأسرة ذات الترتيب 500.

3. حساب المنوال

المنوال يساوي 4 أطفال وهي القيمة الأكثر انتشارا من غيرها. حيث وصل عدد الأسر التي لديها 4

أطفال إلى 200 أسرة

2) يسافر شخص من مدينة A الى مدينة B بمتوسط سرعة 40 كيلومتر في الساعة ويعود من B إلى A في نفس الطريق بسرعة 80 كيلومتر في الساعة، احسب متوسط السرعة للرحلة بأكملها إذا كانت المسافة بين المدنيتين 80 كيلومتر.

الحل:

المتوسط المناسب الذي يعبر عن معدل السرعة هو المتوسط التوافقي وليس المتوسط الحسابي

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{80}}=\frac{2}{0{,}025+0{,}0125}=53{,}33k/h$$

لان الوقت المستغرق للانتقال من مدينة A إلى B $\left(\frac{80}{40}=2h\right)$ والوقت المستغرق للانتقال من مدينة B إلى A $\left(\frac{80}{80}=1h\right)$ ومنه متوسط السرعة للرحلة بأكملها $(80+40)\div 3=160\div 3=53{,}33k/h$

لكن لو استعملنا المتوسط الحسابي فإن متوسط السرعة للرحلة بأكملها تساوي 60 كيلو متر في ساعة وبالتالي هذه النتيجة مضللة لا تعبر عن متوسط السرعة.

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{2}x_i}{n}=\frac{40+80}{2}=60k/h$$

3) عرف حجم التبادل التجاري بين دولتين معينتين ارتفاعاً سنويا قدر بـ:

- 5% خلال الثلاثة سنوات الأولى
- 7% خلال الخمس سنوات الموالية
- 9% خلال السنتين الأخيرتين

فما متوسط ارتفاع حجم التبادل التجاري بين الدولتين خلال هذه الفترة؟

الحل:

المتوسط المناسب الذي يعبر عن معدل الإرتفاع السنوي في حجم التجاري بين البلدين خلال عشرة سنوات هو: المتوسط الهندسي

$$G=\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3\ldots x_n}$$

$$G=\sqrt[3]{\frac{105}{100}\times\frac{107}{100}\times\frac{109}{100}}=\sqrt[3]{1{,}05\times 1{,}07\times 1{,}09}=\left[1{,}05\times 1{,}07\times 1{,}09\right]^{\frac{1}{3}}=1{,}0698$$

وعليه فإن معدل الإرتفاع السنوي في حجم التبادل التجاري بين البلدين خلال العشر السنوات يساوي 6,70 %.

4) إذا علمت أن الوسط الهندسي يساوي 4 أوجد قيمة x للقيم التالي:3، 2، 4، x

الحل:

$$G=\sqrt[n]{x_1.\times4\times2\times3}=4\Rightarrow4=\sqrt[4]{24x}\Rightarrow4=[24x]^{\frac{1}{4}}$$

برفع الطرفين إلى أس 4 نجد: $265=24x\Rightarrow x=10{,}7$

5) تضم احدى الشركات 350 عاملا راتبهم الشهري المتوسط 42000دج؛ وينقسم أولئك العمال إلى صنفين: عمال ذو شهادات جامعية براتب شهري متوسط قدره50000دج، وعمال بدون شهادة جامعية براتب شهري متوسط مقداره بـ 36000دج. والمطلوب: ما هو عدد العمال في كلا الصنفين؟

الحل:

يمكن ترتيب معطيات التمرين في الجدول التالي:

الشهادة	المؤشرات الإحصائية			متوسط الراتب الشهري لجميع العمال $\overline{\overline{X}}$
	عدد العمال n_i	متوسط الأجور $\overline{X}$	$n\overline{X}$	
جامعية	n_1	50000	$50000n_1$	42000
غير جامعية	n_2	36000	$36000n_2$	
المجموع	350			

لدينا:

$$\overline{\overline{X}}=\frac{n_1\overline{X}_1+n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2}=42000$$

$$\overline{\overline{X}}=\frac{n_1\overline{X}_1+n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2}=42.000\Leftrightarrow42.000=\frac{50.000n_1+36.000n_2}{350}$$

$$\Leftrightarrow50.000n_1+36.000n_2=42000\times350$$

$$\Leftrightarrow50.000n_1+36.000n_2=14.700.000\quad..................(1)$$

ولدينا أيضا: $n_1+n_2=350\Leftrightarrow n_1=350-n_2\quad..............(2)$

بتعويض المعادلة الثانية في الأولى نجد:

$$50000(350-n_2)+36000n_2=14700000\Leftrightarrow n_2=17500000-50000n_2+36000n_2=14700000$$

$$\Leftrightarrow-14000n_2=-2.800.000\Leftrightarrow\mathrm{n}_2=\frac{2.800.000}{14000}\quad\Leftrightarrow\mathrm{n}_2=200$$

هذا الرقم يعبر عن عدد العمال بدون شهادات جامعية ومنه عدد العمال بشهادة جامعية يساوي:

$$n_1+n_2=350\Leftrightarrow n_1=350-200\Leftrightarrow n_1=150$$

أسئلة وتمارين

1) اذكر " المفهوم الإحصائي" الذي يمكن التعبير عنه في الدلالات اللفظية التالية:

1. ميل المفردات الإحصائية للتجمع حول قيمة معينة
2. القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها في المفردات الإحصائية
3. قيمة يليها ويسبقها 50% من المفردات
4. القيمة التي تميل معظم المفردات للتمركز حولها

2) أذكر مزايا وعيوب كل من المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال

3) فيما يلي التوزيع التكراري لأعمار عينة من أفراد مجتمع. والمطلوب: أوجد التكرار المتجمع الصاعد والنازل، المتوسط الحسابي، العمر الأكثر انتشار، أرسم المدرج التكراري، والمضلع التكراري في نفس الشكل.

فئات العمر	]45 – 40]	]50 – 45]	]55 – 50]	]60 – 55]	]65 – 60]	]70 – 65]	]75 – 70]	]80 – 75]	]85 – 80]	]90 – 85]
التكرارات	1	4	13	16	21	18	16	7	3	1

4) الجدول التالي يوضح الأنفاق الشهري بالآلف الدنانير لعينة من الأسر

فئات الأجور	]30 –20]	]40 – 30]	]50 – 40]	]60 – 50]	]70 – 60]	]80 – 70]	]90 – 80]	]100 – 90]	المجموع
التكرارات	15	23	59	91	52	20	19	11	300

المطلوب:

أوجد: 1–المتوسط الحسابي بطريقتين مختلفتين. 2 – الوسيط (حسابيا وبيانيا). 3 الربيعات (حسابيا وبيانيا).

4– المنوال (حسابيا وبيانيا).5 – المتوسط الهندسي. 6– المتوسط التوافقي.

5) بفرض أن انتاج مصنع ما ارتفع بنسبة 2% خلال الفترة 2005 –2006م، كما ارتفع بنسبة 5% خلال الفترة 2006–2007م، وأيضا ارتفع بنسبة 10% في الفترة 2007–2008 م. والمطلوب إيجاد معدل الزياد الإنتاج خلال الفترة 2005 إلى 2008.

6) ا كان الجدول التكراري التالي:

الفئات	]8 - 2]	]14 - 8]	]20 - 14]	]26 - 20]	]32- 26]	المجموع
التكرار f_i	9	12	19	6	4	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 50$

المطلوب:

1. أوجد الوسيط، المتوسط الحسابي، المنوال
2. أوجد المتوسط الربيعي
3. أوجد الربيع الأعلى والأدنى

7) تشغل شركة 200 عامل، وكان متوسط انتاج العامل الواحد في هذه الشركة 130 وحدة يوميا. ويصنف العمال في هذه الشركة إلى فئتين، فئة العمال ذوي الخبرة العالية وفئة العمال ذوي خبرة متدنية (قيد التدريب). وقد وصل متوسط عدد الوحدات المنتجة من قبل العمال ذوي الخبرة العالية 140 وحدة يوميا بينما فئة العمال ذوي الخبرة المتدنية بلغت 90 وحدة يوميا. المطلوب:

1. ما هو عدد العمال ذوي الخبرة العالية في هذه الشركة؟
2. ما هو عدد العمال ذوي الخبرة المتدنية في هذه الشركة؟

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

إن اقتصار وصف البيانات على استخدام مؤشرات النزعة المركزية لا تعط لنا صورة واضحة عن هذه البيانات، إذ من الممكن أن نجد عدد من التوزيعات التي لها نفس مؤشرات النزعة المركزية لكنها في نفس الوقت تختلف كثيرا في درجة تشتتها. وهو ما يتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (01): المقارنة بين مجموعتين من حيث مقاييس النزعة المركزية

(المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال)

المجموعات	المجموعة الأولى(01)	المجموعة الثانية(02)
القيم(البيانات)	82، 81، 81، 80، 80، 80، 79، 79، 78	120، 100، 100، 80، 80، 80، 60، 60، 40
عدد القيم	$n_1 = 9$	$n_2 = 9$
مجموع القيم	$\sum_{i=1}^{9} x_i = 720$	$\sum_{J=1}^{9} x_J = 720$
المتوسط الحسابي	$\overline{X_1} = 80$	$\overline{X_2} = 80$
الوسيط	$M_{e_1} = 80$	$M_{e_2} = 80$
المنوال	$M_{O_1} = 80$	$M_{O_2} = 80$

من خلال الجدول أعلاه، يتبين أن المجموعتان تتساوى من حيث مؤشرات النزعة المركزية، لكن عند النظر إلى قيم المجموعتين نجد المجموعة الأولى أقل تشتتا(تبعثرا) من المجموعة الثانية، الأمر الذي يتطلب إيجاد مقاييس أخرى لقياس مقدار التفاوت بين المفردات (القيم). وتسمى هذه المقاييس بالمقاييس التشتت والتي يمكن تصنفها إلى مجموعتين: مقاييس التشتت المطلق، ومقاييس التشتت النسبي.

1. مقاييس التشتت المطلق

وهي مقاييس تقيس مباشرة مقدار التشتت، والتي هي بدورها يمكن تصنيفها مجموعتين مقاييس التشتت البسيطة ومقاييس التشتت المركزية.

1.1 مقاييس التشتت البسيطة: هي المقاييس التي تعتمد على قمتين فقط في حسابها من بين هذه المقاييس نجد:

1.1.1 المدى: يستخدم هذا المقياس عندما يكون الهدف هو الحصول على مقياس سريع لمدى تشتت المفردات دون الاهتمام الكبير بالدقة في القياس أو حين ما يكون للمفردات المتطرفة أهمية خاصة.

1.1.1.1طريقة حساب المدى من البيانات الأولية: يعرف المدى للبيانات الأولية بأنه عبارة الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة

$$E = x_n - x_1$$

$\boxed{\text{المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة}}$

مثال (01): بفرض أن القيم 16، 14، 5، 11، 8، 10،17، 7 تمثل علامات مجموعة من الطلبة. المطلوب أوجد المدى؟

الحل:

نلاحظ أن أكبر قيمة في البيانات تساوي 17 وأصغرها تساوي 5 وعليه فإن المدي يساوي.

$$E = 17 - 5 = 11$$

2.1.1.1طريقة حساب المدى من الجداول التكرارية: يتم حساب المدى في هذه الحالة بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى: يعرف المدى بهذه الطريقة على أنه الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا وبين الحد الأدنى للفئة.

المدى = الحد الأعلى للفئة العليا−الحد الأدنى للفئة الدنيا

الطريقة الثانية: المدى عبارة عن الفرق بين مركز الفئة العليا ومركز الفئة الدنيا أي أن:

المدى = مركز الفئة العليا−مركز الفئة الدنيا

مثال(02): انطلاقا من الجدول التوزيع التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء أوجد المدى الذي تتراوح فيه علامات الطلبة.

الحل:

باستخدام الطريقة الأولى: المدى = الحد الأعلى للفئة العليا−الحد الأدنى للفئة الدنيا

المدى = 90−20 =70 نقطة

باستخدام الطريقة الثانية: المدى = مركز الفئة العليا − مركز الفئة الدنيا

المدى= 85−25=60 نقطة

3.1.1.1 خواص المدى: يتصف المدى بالخواص التالية

- إذا كانت جميع المفردات متساوية فإن المدى يساوي صفر أي لا يوجد تشتت
- يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية
- مقياس مضلل في حالة وجود قيم شاذة
- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة
- بسيط الحساب وسهل المفهوم، لذلك فهو يستخدم عادة في مراقبة الإنتاج والأحوال الجوية، كما أنه كثير الإستخدام في الأوساط العامة.
- لا يعتمد في حسابه على كل البيانات.

– هو عبارة عن مجال يحتوي على كل البيانات.

2.1.1المدى الربيعي: للتخلص من بعض عيوب المدى والتي من أهمها تأثره بالقيم الشاذة وعدم إمكانية حسابه في الجداول التكرارية المفتوحة وجد مقياس آخر لظاهرة التشتت ما يسمى بالمدى الربيعي. ويتم حسابه بعد استبعاد بعض القيم المتطرفة أو الشاذة. وبالتحديد فهو يستبعد ربع القيم الصغيرة من ناحية وربع القيم الكبيرة من ناحية أخرى. ويعرف بأنه يساوي الفرق بين الربيع الثالث (Q_3) والربيع الأول(Q_1) .

1.2.1.1طريقة حساب المدى الربيعي من البيانات الأولية: يتم حساب الربيع الأول والثاني بنفس طريقة حساب الوسيط. ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{E_Q = Q_3 - Q_1}$$

مثال (03): أوجد المدى القيم التالية:

53 61 41 33 25 17 13 9 65 73 81

الحل:

أولا: بترتيب القيم تصاعديا

81 73 65 61 53 41 33 25 17 13 9

ثانيا: حساب قيمة الربيع الأول

رتبة الربيع الأول $R(Q_1) = \frac{1}{4}(n+1) \Rightarrow R(Q_1) = \frac{1}{4}(11+1) = 3$

ومنه قيمة رتبة الربيع الأول $Q_1 = 17$

ثالثا: حساب قيمة الربيع الثالث

رتبة الربيع الثالث $R(Q_1) = \frac{1}{4}(n+1) \Rightarrow R(Q_1) = \frac{3}{4}(11+1) = 9$

ومنه قيمة رتبة الربيع الثالث $Q_3 = 65$

رابعا: حساب المدى الربيعي

$$E_Q = Q_3 - Q_1$$

$$E_Q = 65 - 17 = 48$$

2.2.1.1طريقة حساب الانحراف الربيعي من الجداول التكرارية: يتم حسابه بنفس الطريقة السابقة.

مثال (04): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء أوجد المدى الربيعي علما أن قيمة الربيع الأول تساوي 42,5 نقطة، وقيمة الربيع الثالث تساوي65.63 نقطة.

الحل:

$E_Q = Q_3 - Q_1$

$E_Q = 65{,}63 - 42{,}5 = 23{,}13\,pts$

2.2.1.1خواص المدى الربيعي: يتصف المدى الربيعي بالخصائص التالية:

- لا يتأثر بالقيم الشاذة(المتطرفة)
- يفصل استخدامه كمقياس للتشتت إذا كان الوسيط هو المقياس المناسب للنزعة المركزية.
- يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة
- هو عبارة عن مجال يحتوي على 50% من البيانات
- يستخدم في حالة التوزيعات التكرارية شديدة الإلتواء
- يتحدد بعدد البيانات وليس بقيمتها

3.1مقاييس التشتت المركزي: إن مقاييس التشتت السابقة لا تعتمد على كل مفردات المجموعة، إذا تعتمد فقط على قمتين فقط، لذا ادخل مفهوم المتوسط الحسابي لقياس التشتت (التشتت حول المركز) وهي أكثر استعمالا وأكثر دقة من غيرها. إذ تعتمد في حسابها على المتوسط الحسابي، من بين هذه المقاييس نجد:

1.3.1: الانحراف المتوسط: تقوم فكرة الانحراف في هذا المقياس هي قياس مدى تباعد (انحراف) القيم عن متوسطها الحسابي بغض النظر فيما إذا كان ذلك الإنحراف سليباً أو موجباً. فكلما كانت تلك القيم قريبة من متوسطها دل ذلك على تجانسها والعكس صحيح.

1.1.3.1طريقة حساب الانحراف المتوسط من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما فإن الانحراف المتوسط يعرف على أنه متوسط الانحرافات المطلقة للقيم عن متوسطها الحسابي. والسبب في أخذ القيم المطلقة لإزالة أثر الإشارة السالبة، لأن من خواص المتوسط الحسابي أن مجموع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي صفر. ويرمز له $M.D$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{X} \right|}{n}}$$

حيث:

x_i : قيم المتغير n : عدد قيم المتغير $\overline{X}$: المتوسط الحسابي للمتغير x_i

مثال (05): أوجد الإنحراف المتوسط للقيم التالية: 7، 4، 3، 1، 6، 2، 5

الحل:

الجدول رقم(02): العمليات الحسابية لحساب

الإنحراف المتوسط من بيانات أولية

$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$	$(x_i - \overline{X})$	**الحل:** x_I
3	3	7
0	0	4
1	-1	3
3	-3	1
2	2	6
2	-2	2
1	1	5
$\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{X} \rvert = 12$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}) = 0$	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 28$

أولا: حساب قيمة المتوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{n} == \frac{28}{7} = 4$$

ثانيا: حساب قيمة الإنحراف المتوسط

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{X} \rvert}{n} = \frac{12}{7} = 1{,}71$$

2.1.3.1طريقة حساب الانحراف المتوسط من الجداول التكرارية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ تمثل المفردات المختلفة لظاهرةx_i (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3, \ldots f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن الانحراف المتوسط لهذه البيانات يعرف كما يلي

$$\boxed{M.D = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \lvert x_i - \overline{X} \rvert}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

حيث:

x_i : مراكز الفئات، k : عدد الفئات، f_i : التكرارات،

$\overline{X}$: المتوسط الحسابي للمتغير x_i ، مجموع التكرارات: $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

مثال (06): أجري امتحان لمجموعة من الطلبة في مادة الإحصاء. وبعد تصحيح الإمتحان تم تبويب العلامات في جدول توزيع تكراري فكانت النتائج كما هي موضحة في الجدول التالي:

الفئات	]2−0]	] 4 −2]	]6−4]	]8−6]	]10−8]	المجموع
التكرار f_i	3	4	5	6	2	20

المطلوب: حساب الانحراف المتوسط

الحل:

جدول رقم (03): العمليات الحسابية لحساب الإنحراف المتوسط

الفئات	f_i	x_I	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{X})$	$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{X} \rvert$
]2 - 0]	3	1	3	-4	4	12
]4 - 2]	4	3	12	-2	2	8
]6 - 4]	5	5	25	0	0	0
]8 - 6]	6	7	42	2	2	12
]10 - 8]	2	9	18	4	4	8
المجموع	$n = \sum_{i=1}^{5} fi = 20$		$\sum_{i=1}^{5} fix_i = 100$			$\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - \overline{X} \rvert = 40$

أولا: حساب قيمة المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} fi} = \frac{100}{20} = 5\,pts$$

ثانيا: حساب قيمة الإنحراف المتوسط:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - \overline{X} \rvert}{n} = \frac{40}{20} = 2{,}3\,pts$$

2.2.3.1خواص الإنحراف المتوسط: يتصف الانحراف المتوسط بالخواص التالية:

- يقيس الانتشار حول المتوسط الحسابي، و يعتمد في حسابه على جميع القيم.
- تزداد قيمته بازدياد التفاوت بين قيم المفردات.
- لا يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.
- يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- يهمل إشارات الانحرافات، لأن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرا.

2.3.1التباين والانحراف المعياري: يعرف التباين بأنه المتوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، حيث يتم تربيع القيم للتخلص من الإشارات السالبة. والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين. ويرمز لتباين المجتمع بالرمز σ^2 أما تباين العينة فيرمز له بالرمز s^2. وعندما يستخدم الباحثون مصطلح الإنحراف المعياري فهم يقصدون به معظم الأحيان الإنحراف المعياري لعينة لأنه نادرا ما يتم جمع البيانات للمجتمع بأكمله.

1.2.3.1طريقة حساب الانحراف المعياري من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما فإن الانحراف المعياري لهذه البيانات يتم حسابه بأحد الصيغ التالية:

تباين المجتمع

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=n}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

تباين العينة

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=n}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

بينما الانحراف المعياري هو عبارة عن جذر التباين أي:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad s = \sqrt{s^2}}$$

ولتبسيط عملية الحساب يمكن إعادة كتابة هذه صيغة الإنحراف المعياري على النحو التالي:

لدينا:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x^2 - 2\overline{X}x_i + \overline{X}^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\overline{X}^2\right]$$

نعلم أن:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \Leftrightarrow n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n}x_i$$

وعليه فإن:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{X}^2\right]$$

ومنه الانحراف المعياري يساوي

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{X}^2\right]}}$$

ويمكن ايضا كتابة صيغة الإنحراف المعياري بالطريقة التالية:

لدينا:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x^2 - 2\overline{X}x_i + \overline{X}^2)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right]$$

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right]}}$$

مثال (07): بفرض أن القيم 41، 46، 25، 27، 20، 23، 35، 39 تمثل أعمار عينة من الموظفين. الطلوب أوجد التباين والإنحراف المعياري.

الحل:

جدول رقم(04): العمليات الحسابية لإيجاد قيمة الإنحراف المعياري بطريقة الإنحراف عن المتوسط الحسابي وبتربيع القيم

القيم	الطريقة الأولى		الطريقة الثانية
x_i.	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^2$	$x^2{}_i$.
41	9	81	1681
46	14	196	2116
25	−7	49	625
27	−5	25	729
20	−12	144	400
23	−9	81	529
35	3	9	1225
39	7	49	1521
256	0	634	8826

:

أولا: حساب قيمة المتوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{n=1}^{7} x_i}{7} = \frac{256}{8} = 32$$

ثانيا: حساب قيم الإنحراف المعياري

1) باستخدام طريقة الإنحرافات عن متوسط الحسابي $s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{634}{7}}=\sqrt{90,57}==9,51$

2) باستخدام طريقة تربيع القيم

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right]}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{8-1}\left[8826-\frac{(256)^2}{8}\right]}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{8-1}\left[8826-\frac{65536}{8}\right]}$$

$$s=\sqrt{90,57}=9,51pts$$

2.2.3.1طريقة حساب الانحراف المعياري من الجداول التكرارية :إذا كانت $x_1,x_2,x_3,...x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1,f_2,f_3,...f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن الانحراف المعياري لهذه البيانات يتم حسابه بأحد الطرق التالية:

1) **طريقة الانحرافات عن المتوسط الحسابي:** وفق هذه الطريقة تعطى صيغة الانحراف المعياري على النحو التالي:

$$\boxed{s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}f_i(x_i-\overline{X})^2\right]}}$$

حيث: x_i : مراكز الفئات k : عدد الفئات

f_i : التكرارات $\overline{X}$: المتوسط الحسابي للمتغير x_i

S^2 : التباين لقيم المتغير x_i S : الانحراف المعياري لقيم المتغير x_i

$n=\sum_{i=1}^{k}f_i$: مجموع التكرارات

مثال (08): أوجد الإنحراف المعياري (بطريقة الإنحرافات عن المتوسط الحسابي) للجدول التوزيع التكراري الذي يوضح علامات 50 طالبا في مادة الإحصاء. علما أن قيمة المتوسط الحسابي تساوي 54.4 نقطة.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي، الذي يبين مختلف العمليات الحسابية

جدول رقم(04): العمليات الحسابية لحساب الإنحراف المعياري

بطريقة الإنحرافات عن المتوسط الحسابي

$f_i(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-54{,}4)$	$f_i x_i$	x_i	f_i	الفئات
1728,72	864,36	−29,40	50	25	2	]30 - 20]
3010,88	376,36	−19,40	280	35	8	]40 - 30]
883,60	88,36	−9,40	450	45	10	]50 - 40]
4,68	0,36	0,60	715	55	13	]60 - 50]
898,88	112,36	10,60	520	65	8	]70 - 60]
2546,16	424,36	20,60	450	75	6	]80 - 70]
2809,08	936,36	30,60	255	85	3	]90 - 80]
11882			2720		50	المجموع

ثالثا: حساب الإنحراف المعياري

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^2\right]$$

$$s^2=\frac{1}{50-1}[11882]=242{,}4897$$

$$s=\sqrt{242{,}4897}=15{,}57\,pts$$

2) **باستخدام طريقة مراكز الفئات:** وفق هذه الطريقة تعطى صيغة الانحراف المعياري على النحو التالي:

اما أن نستخدم الصيغة التالية

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n}\right]}$$

أو نستخدم الصيغة التالية:

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - n\overline{X}^2\right]}$$

مثال (09): انطلاقا من جدول التوزيع التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. أوجد قيمة الإنحراف المعياري بهذه الطريقة.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي الذي يشمل مختلف العمليات الحسابية

جدول رقم(05): العمليات الحسابية لحساب الإنحراف المعياري بطريقة مراكز الفئات

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[20 − 30[	2	25	50	1250
[30 − 40[	8	35	280	9800
[40 − 50[	10	45	450	20250
[50 − 60[	13	55	715	39325
[60 − 70[	8	65	520	33800
[70 − 80[	6	75	450	33750
[80 − 90[	3	85	255	21675
المجموع	50		2720	159850

ثانيا: نحسب قيمة الإنحراف المعياري

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n}\right]}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{50-1}\left[159850-\frac{(2720)^2}{50}\right]}$$

$$s=\sqrt{11882 \div 49 = 242{,}4897}$$

$$s=\sqrt{242{,}4897}=15{,}57\,pts$$

3) **طريقة الإنحرافات عن المتوسط الحسابي الفرضي:** ووفق هذه الطريقة يتم طرح قيمة معينة من المتغير x_i لنحصل على متغير أخر $d_i = x_i - A$ ويفضل اختيار قيمة A أحد مراكز الفئات التي تقابل أكبر تكرار. والصيغة تعطى على النحو التالي :

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i d^2{}_i - \frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i d_i)^2}{n}\right]}}$$

مثال(10): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. أوجد قيمة الإنحراف المعياري بهذه الطريقة.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي، مع افتراض أن قيمة المتوسط الحسابي الفرضي يساوي 55 $(A = 55)$، وهي تمثل مركز الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

جدول رقم(06): العمليات الحسابية لحساب الإنحراف المعياري

بطريقة الإنحرافات عن المتوسط الحسابي الفرضي

الفئات	f_i	x_i	$d_i = x_i - 55$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
]20 - 30]	2	25	−30	−60	1800
]30 - 40]	8	35	−20	−160	3200
]40 - 50]	10	45	−10	−100	1000
]50 - 60]	13	55	0	0	0
]60 - 70]	8	65	10	80	800
]70 - 80]	6	75	20	120	2400
]80 - 90]	3	85	30	90	2700
المجموع	50			−30	11900

ثانيا: نحسب قيمة الإنحراف المعياري

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i d^2{}_i - \frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i d_i)^2}{n}\right]}$$

$$s = \sqrt{= \frac{1}{50-1}\left[11900 - \frac{(-30)^2}{50}\right]}$$

$$s = \sqrt{242,48979} = 15,57\, pts$$

4) **طريقة المختصرة (طريقة انحراف عن المتوسط الفرضي بدلالة طول الفئة):** من ممكن أيضا اختصار العلميات الحسابية أكثر بإستخدام المتوسط الحسابي الفرضي وبدلالة طول الفئة وهي امتداد لطريقة السابقة. وتستعمل هذه الطريقة في حالة الفئات المتساوية الطول، حيث يتم تحويل المتغير x_i إلى متغير آخر $u_i = \frac{x_i - A}{c}$ ويفضل اختيار قيمة A أحد مراكز الفئات التي تقابل أكبر تكرار، بينما قيمة C تمثل طول الفئة. والجدول التالي يوضح هذه الطريقة. أما صيغة هذه الطريقة تكتب على النحو التالي:

$$\boxed{s_x = \sqrt{c^2 s_u^2}}$$

مثال(11): انطلاقا من الجدول التوزيع التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. أوجد قيمة الإنحراف المعياري بهذه الطريقة.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي، مع افتراض أن قيمة المتوسط الحسابي الفرضي يساوي 55 ($A = 55$)، وهي تمثل مركز الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

جدول رقم(07): العمليات الحسابية لحساب الإنحراف المعياري بطريقة المختصرة

الفئات	f_i	x_i	$u_i = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
]30 - 20]	2	25	−3	−6	18
]40 - 30]	8	35	−2	−16	32
]50 - 40]	10	45	−1	−10	10
]60 - 50]	13	55	0	0	0
]70 - 60]	8	65	1	8	8
]80 - 70]	6	75	2	12	24
]90 - 80]	3	85	3	9	27
المجموع	50			−3	119

ثانيا: نحسب التباين بدلالة المتغير u_i

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i u^2{}_i - \frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i)^2}{n}\right]$$

$$s_u^2 = \frac{1}{49}\left[119 - \frac{(-3)^2}{50}\right] = 2,4248979$$

ثالثا: نحسب قيمة الإنحراف المعياي بدلالة المتغير x_i

$$s_x = \sqrt{c^2 s_u^2}$$

$$s_x = \sqrt{(10)^2 2{,}4248979} = \sqrt{242{,}48979} = 15{,}57\,pts$$

3.2.1.1.خواص الإنحراف المعياري: يتميز الانحراف المعياري كمقياس من مقاييس التشتت بالخواص التالية:

1. يدخل في حسابه جميع القيم.
2. كثير الإستخدام في القوانين والنظريات الإحصائية، فهو يستخدم في إيجاد معامل الإختلاف، معامل الإلتواء. وفي إيجاد الارتباط والانحدار، وغيرها من القوانين الإحصائية.
3. لا تتأثر قيمة الإنحراف المعياري بعمليتي الجمع والطرح عند إضافة(أو طرح) عدد ثابت من كل مفردة فإن القيمة تبقى ثابتة. بينما تتأثر قيمة الإنحراف المعياري بعمليتي الضرب والقسمة، وعليه فإن قيمة الإنحراف المعياري الجديدة تساوي القيمة الاصلية للانحراف المعياري مضروبة في (أو مقسومة على) مقدار العدد الثابت. ولتحقق من هذه الخاصية نأخذ الجدول التالي الذي بين مختلف العمليات الجبرية.

جدول رقم(08): تأثير العمليات الجبرية على قيمة الإنحراف المعياري

القيم الأصلية		إضافة قيمة(+2)		طرح قيمة(−2)		ضرب (×2)		قسمة على(÷2)	
$.x_i$	$.x^2{}_i$	(x_i+2)	$(x_i+2)^2$	(x_i-2)	$(x_i-2)^2$	$(x_i\times 2)$	$(x_i\times 2)^2$	$(x_i\div 2)$	$(x_i\div 2)^2$
4	16	6	36	2	4	8	64	2	4
6	36	8	64	4	16	12	144	3	9
12	144	14	196	10	100	24	576	6	36
8	64	10	100	6	36	16	256	4	16
20	400	22	484	18	324	40	1600	10	100
50	1250	52	2704	48	2304	100	10000	25	625
مجموع كل عمود		مجموع كل عمود		مجموع كل عمود		مجموع كل عمود		مجموع كل عمود	
100	1910	112	3584	88	2784	200	12640	50	790
S=17,2820		S=17,2820		S=17,2820		S=34.564		S=8.641	
مدى تأثير		لا يتأثر بإضافة قيمة ثابتة(+2)		لا يتأثر بطرح قيمة ثابتة(−2)		يتأثر بضرب في قيمة ثابتة(×2)		يتأثر بقسمة على قيمة ثابتة(÷2)	

4. يتأثر بالقيم المتطرفة لأنه يعتمد في حسابه على المتوسط الحسابي الذي بدوره يتأثر بها.
5. لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

6. لا يمكن ايجاده بيانيا.
7. إذا كانت الظاهرة x تأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, ... x_m$ و $\overline{X}$ تمثل المتوسط الحسابي و s_1^2 تمثل التباين لها وكانت الظاهرة y تأخذ القيم $y_1, y_2, y_3 ... y_n$ و $\overline{Y}$ تمثل المتوسط الحسابي و s_2^2 تمثل التباين لها فإن التباين المشترك للظاهرتين معاً يرمز له بالرمز s_p^2 ويعرف كما يلي:

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

2. مقاييس التشتت النسبي

إن مقاييس التشتت السابقة لا تمكن من المقارنة بين مجموعتين من القيم، فقد تختلف وحدات القياس من مجموعة إلى أخرى، فمثلا عند مقارنة تشتت أطوال مجموعة من الطلبة مع تشتت أوزنهم، فالأولى مقاسة بالسنتمتر والثانية بالكيلوغرام، فلا يمكن إجراء مثل هذه المقارنة باستخدام التشتت المطلق، وحتى إذا كانت وحدات القياس واحدة وكان اختلاف بين متوسطي المجموعتين، أو حجم البيانات من مجموعة إلى أخرى، فلا يمكن استخدام التشتت المطلق. ومن بين مقاييس التشتت النسبي نجد: معامل الإختلاف، معامل الإختلاف الربيعي، الدرجة المعيارية

1.2 معامل الإختلاف: يستخدم لإزالة أثر وحدة القياس وللمقارنة بين المتغيرين مقاسين بوحدتين مختلفتين ويعرف كما يلي:

معامل الإختلاف المجتمع

$$\boxed{C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100}$$

معامل الإختلاف العينة

$$\boxed{C.V = \frac{s}{\overline{X}} \times 100}$$

وعليه فإذا كانت قيمة هذا المعامل كبيرة دل ذلك على وجود تشتت كبير بين مفردات التوزيع والعكس صحيح.

مثال(12): أوجد أي من الدولتين أقل تشتتا في توزيع الدخول وفقا للمعطيات في الجدول التالي:

الدولة	الوحدة القياسية	متوسط الدخل	الإنحراف المعياري
A	دولار	1300	850
B	دينار	2100	1100

الحل:

الدولة A

$$C.V_A = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{850}{1300} \times 100 = 65,385\%$$

الدولة B

$$C.V_B = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1100}{2100} \times 100 = 52,381\%$$

أي إن مقدار التشتت النسبي في التوزيع الدخل في الدولة B هو أقل مما عليه الحال في البلد A، وبذلك فإن الدولة في البلد B هي أكثر عدالة في توزيعها الدخل على أفراد المجتمع.

2.2معامل الإختلاف الربيعي: هو مقياس آخر لا يعتمد على الوحدة المستعملة في البيانات وهو يعتمد في تعريفه على المدى الربيعي، حيث يستخدم في التوزيعات التكرارية المفتوحة ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{CVQ = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100}$$

حيث: Q_1: الربيع الأنى Q_3 : الربيع الأعلى

مثال(14): إذا كان التوزيع التكراري وجد قيمة: $Q_1 = 23{,}17$ و $Q_3 = 47{,}43$. بينما التوزيع تكراري آخر وجد قيمة $Q_1 = 11{,}3$ و $Q_3 = 29{,}8{,}43$. والمطلوب: أي توزيعين أكثر تغيرا

الحل:

نحسب معامل الإختلاف الربيعي لكل من التوزيعين:

التوزيع الأول:

$$CVQ_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{47{,}43 - 23{,}17}{47{,}43 + 23{,}17} \times 100 = 34{,}36\%$$

التوزيع الثاني:

$$CVQ_2 = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{29{,}8 - 11{,}3}{29{,}8 + 11{,}3} \times 100 = 45{,}01\%$$

بما أن معامل الإختلاف الربيعي الثاني أكبر من التوزيع الأول يكون تغير في التوزيع الثاني أكبر من تغير التوزيع الأول

3.2الدرجة المعيارية: تعبر عن انحراف(بُعد) مفردة ما من مجموعة عن المتوسط الحسابي لتلك المجموعة بوحدات من الإنحراف المعياري. وتستخدم عندما نريد المقارنة بين قيمتين في مجموعتين مختلفتين. وتعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{Z_i = \frac{x_i - \overline{X}}{S}}$$

حيث أن: x_i : مفردات المتغير $\overline{X}$: المتوسط الحسابي لقيم المتغير x_i

S : الانحراف المعياري لقيم المتغير x_i

مثال (15): حصل طالب على 60 نقطة في اختبار لمادة الإحصاء وعلى 70 نقطة في اختبار المنهجية. وكان المتوسط الحسابي لعلامات الطلاب في كل من المادتين على الترتيب 54و65 نقطة. كما أن الإنحراف المعياري لهما على الترتيب 2، و2,5 نقطة.

أ. مستخدما مفهوم الدرجة المعيارية بيّن في أي المادتين يكون مستوى الطالب أفضل؟

ب. مستخدما مفهوم معامل الإختلاف بين في أي المادتين كان تحصيل الطلاب أكثر تباينا؟

الحل:

الجواب عن السؤال أ: نحسب الدرجة المعيارية

- الدرجة المعيارية لمادة الإحصاء

$$Z_1 = \frac{x_i - \overline{X}}{S} = \frac{60 - 54}{2} = 3$$

- الدرجة المعيارية لمادة المنهجية $Z_2 = \frac{x_i - \overline{X}}{S} = \frac{70-65}{2,5} = 2$

من خلال الناتجتين يتبين أن مستوى الطالب في مادة الإحصاء أحسن في مادة المنهجية، حيث أن علامته في الإحصاء تبعد عن متوسط هذه المادة بمقدار 3 وحدات من الإنحراف المعياري، بينما تبعد علامته في المنهجية عن متوسط هذه المادة بوحدتين فقط من الإنحراف المعياري.

الجواب على السؤال ب: نحسب معامل الإختلاف

- معامل الإختلاف لعلامات الطلاب في مادة الإحصاء $C.V_1 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{2}{54} \times 100 = 3,7\%$
- معامل الإختلاف لعلامات الطلاب في مادة المنهجية $C.V_2 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{2,5}{65} \times 100 = 3,8\%$

من خلال نتيجتي معاملي الإختلاف لتوزيع علامات الطلاب في المادتين نلاحظ أن تحصيلهم كان أقل تجانسا في مادة المنهجية.

3. تمارين محلولة

1) قام طالبان بإجراء دراسة إحصائية عن الطلاب المتقدمين للكلية وعلى عينتين مختلفتين من الطلاب المتقدمين فكانت النتائج كالتالي:

عدد الطلاب	عدد الطلاب	المتوسط الحسابي	التباين
نتائج الطالب الأول	20	21 سنة	3,5
نتائج الطالب الثاني	30	20سنة	4,9

المطلوب: احسب المتوسط الحسابي والتباين للعينتين مجتمعتين معاً

الحل:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{m\overline{X} + n\overline{Y}}{m+n} = \frac{(20)(21)+(30)(20)}{50} = 20{,}4$$

$$s^2 = \frac{(m-1)s^2{}_1 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} = \frac{(19)(3{,}5)+(29)(4{,}9)}{48} = 4{,}3$$

2) إذا كانت لدينا مجموعتان من العمال متوسط الأجر اليومي في المجموعة الأولى 50 ون والإنحراف المعياري يساوي10 ون. بينما المجموعة الثانية كان المتوسط الحسابي لأجر العامل في اليوم 35 ون والإنحراف المعياري 9 ون المطلوب أي المجموعتين أكثر تشتتا أو تفاوتا

الحل:

معامل الإختلاف في المجموعة الأولى $$C.V_1 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{10}{50} \times 100 = 20\%$$

معامل الإختلاف في المجموعة الثانية $$C.V_2 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{9}{35} \times 100 = 25\%$$

تشير هذه النتائج إلى أن المجموعة الثانية تظهر اختلاف في الأجر أكثر مما تظهره المجموعة الأولى

3) لغرض تقييم إحدى طرق التعليم الحديثة، أجري اختبار لمجموعتين من الطلاب، المجموعة الأولى، تم تعليمها حسب الطريقة التقليدية، والمجموعة الثانية تم تعليمها حسب الطريقة الحديثة. وكانت نتائج الإختبار كما يلي، والمطلوب التعليق عليها.

المؤشر / المجموعة	المتوسط الحسابي	الإنحراف المعياري
المجموعة الأولى	60	8
المجموعة الثانية	75	15

من الواضح أن الطريقة الحديثة أدت إلى زيادة القدرة على التحصيل العلمي، وبحساب معامل الإختلاف

نجد:

معامل الإختلاف في المجموعة الأولى $C.V_1 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{8}{60} \times 100 = 13,3\%$

معامل الإختلاف في المجموعة الثانية $C.V_2 = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{15}{75} \times 100 = 25\%$

أي أن الطريقة الحديثة رغم أنها أدت إلى زيادة القدرة على التحصيل فإنها أدت إلى زيادة تشتت في المستوى العلمي للطلاب.

أسئلة وتمارين

1) أذكر مزايا وعيوب المدى، المدى الربيعي

2) أحسب المدى والمدى الربيعي والإنحراف المعياري ومعامل الإختلاف من القيم التالية: 8، 4، 2، 1، 7، 6، 4، 9، 5، 3، 6

3) إذا كان الإنحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي وكان مجموع مربع القيم يساوي 450 والمتوسط الحسابي يساوي 20. أوجد عدد القيم.

4) أخذت عينتان من مجتمعين فأعطتنا النتائج كما هي موضحة في الجدول. والمطلوب:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\sum_{i=1}^{50} x_i = 300$	$\sum_{i=1}^{40} y_i = 280$
$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1950$	$\sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 1950$

- أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من العينتين.
- أي من العينتين أكثر تجانسا.
- إذا دمجت العيّنتان ما هو المتوسط الحسابي للمجموعة الناتجة.
- أوجد الانحراف المعياري الناتج عن دمج العينتين.

5) فيما يلي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لعينة من الأسر أحد القرى النائية تبعا لبعض المتغيرات.

المتغير	متوسط الحسابي	الانحراف المعياري
حجم الأسرة	5 فرد	3 فرد
مساحة المنزل	100 م	15م
مساحة الأرض الزراعية	15 هكتار	5 هكتار
العمر	45 سنة	10سنة
الدخل الشهري	500 ون	50 ون

المطلوب:

أ. بين أيهما أكثر تشتتا حجم الأسرة أم مساحة المنزل

ب. بين أيهما أكثر تشتتا الدخل الشهري أم مساحة الأرض الزراعية

ت. ترتيب المتغيرات الخمسة المذكورة ترتيبا تنازليا تبعا لدرجة التشتت

6) عند دراسة ظاهرة الطول والوزن لمجموعة عمال أحد المصانع كانت لدينا البيانات التالية:

ظاهرة الطول: $s = 8cm$ $\quad \overline{X} = 160cm$

ظاهرة الوزن: $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 72687kg$ $\quad \sum_{i=1}^{20} x_1 = 1200kg$

أيا الظاهرتين أكثر تجانسا.

الفصل الخامس

مقاييس الشكل

1. العزوم

1.1 مفهوم العزوم

2.1 العزوم حول الصفر (العزوم الصفرية)

3.1 العزوم حول العدد الثابت A

4.1 العزوم حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية)

5.1 العلاقة بين العزوم الصفرية والعزوم المركزية

2. الإلتواء

1.2 مفهوم الإلتواء

2.2 قياس الإلتواء

1.1.2 باستخدام العلاقات بين مقاييس النزعة المركزية والعلاقات بين بعض مقاييس الموقع

2.1.2 باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي

3. التفرطح

1.3 مفهوم التفرطح

2.3 قياس التفرطح

1.2.3 باستخدام بعض مقاييس الموقع

2.2.3 باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي

4. تمارين محلولة

أسئلة وتمارين

الفصل الخامس

مقاييس الشكل

مقاييس الشكل هي تلك المقاييس التي تبين شكل التوزيع الإحصائي من التواء أو تفرطح مقارنة بالتوزيع الطبيعي. ويُستخدم في ذلك العلاقات بين بعض المقاييس النزعة المركزية، والعلاقات بين بعض مقاييس الموضع (الربيعيات، العشريات)، العزوم، لتحديد درجة الإلتواء والتفرطح.

1. العزوم

1.1 مفهوم العزوم: هو مصطلح ميكانيكي ويشير إلى مقياس للقوة حول نقطة مركزية، أما في الإحصاء فيستخدم لقياس الإلتواء والتفرطح. وتنقسم العزوم إلى قسمين: العزوم حول الصفر (العزوم الصفرية أو الإبتدائية)، والعزوم حول العدد الثابت A

2.1 العزوم حول الصفر (العزوم الصفرية)

1.2.1 طريقة حساب العزوم حول الصفر في حالة البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3,...x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما فإن العزم الرائي حول الصفر في حالة البيانات الأولية والتي يرمز لها بـ m'_r يعطى بصيغة التالية:

$$\boxed{m'_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,r}}{n}\, ; r = 1,2,3,4,...}$$

وعليه:

فإذا كان: $r = 0$ فإن العزم حول الصفر يساوي واحد:

$$m'_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,0}}{n} = 1$$

أما إذا كان : $r = 1$ فإن العزم حول الصفر يساوي المتوسط الحسابي $m'_1 = \overline{X}$ أي

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

مثال(01): احسب العزم الأول والثاني والثالث حول الصفر للقيم التالية: 2، 3، 4، 5

الحل:

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{n} = \frac{2+3+4+5}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5 = \overline{X}$$

$$m'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2}}{n} = \frac{2^2+3^2+4^2+5^2}{4} = \frac{54}{4} = 13{,}5$$

$$m'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^{\,3}}{n} = \frac{2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3}{4} = \frac{224}{4} = 56$$

2.2.1طريقة حساب العزوم حول الصفر في حالة الجداول التكرارية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, ... x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3, ... f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن العزم الرائي حول الصفر في هذه الحالة يعطى كما يلي:

$$\boxed{m'_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{\,r}}{\sum_{i=1}^{k} f_i} ; r = 1,2,3,4.....}$$

مثال (02): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء احسب العزم الأول والثالث والرابع حول الصفر.

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

$f_i x_i^{\,4}$	$f_i x_i^{\,3}$	$f_i x_i^{\,2}$	$f_i x_i$	x_i	f_i	فئات
781250	31250	1250	50	25	2	]30 − 20]
12005000	343000	9800	280	35	8	]40 − 30]
41006250	911250	20250	450	45	10	]50 − 40]
118958125	2162875	39325	715	55	13	]60 − 50]
142805000	2197000	33800	520	65	8	]70 − 60]
781250	2531250	33750	450	75	6	]80 − 70]
12005000	1842375	21675	255	85	3	]90 − 80]
662001250	10019000	159850	2720		50	المجموع

ثانيا: حساب العزم الصفري الأول

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{2720}{50} = 54,4 = \overline{X}$$

ثالثا: حساب العزم الصفري الثالث

$$m'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x^3{}_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{10019000}{50} = 200380$$

ثالثا: حساب العزم الصفري الرابع

$$m'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x^3{}_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{662001250}{50} = 13240025$$

3.1العزوم حول العدد الثابت A

1.3.1طريقة حساب العزوم حول العدد الثابت A **في حالة البيانات الأولية:** إذا كانت الظاهرة x تأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ و A عدد ثابت فإن العزم الرائي حول العدد الثابت يعطى كما يلي:

$$\boxed{m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^r}{n}; r = 1,2,3,4.....}$$

2.3.1طريقة حساب العزوم حول العدد الثابت في حالة الجداول التكرارية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3, \ldots f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن العزم الرائي حول العدد Aفي هذه الحالة يعطى كما يلي

$$\boxed{m_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - A)^r}{n}; r = 1,2,3,4.....}$$

4.1العزوم حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية)

إذا كان $A = \overline{X}$ فإن العزم في هذه الحالة هو العزم حول المتوسط الحسابي (العزم المركزي)

1.4.1 طريقة حساب العزم حول المتوسط الحسابي في حالة البيانات الأولية: إذا كانت الظاهرة x تأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ و $\overline{X}$ تمثل المتوسط الحسابي لها فإن العزم الرائي حول المتوسط الحسابي (العزم المركزي) في حالة البيانات الأولية يعطى كما يلي:

$$\boxed{m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^r}{n} \quad ; \quad r = 1,2,3,4,...}$$

وعليه فإن:

العزم المركزي من المرتبة الأولى $(r = 1)$ يساوي صفر

$$r = 1 \Rightarrow m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})}{n} = 0$$

وهذا من خواص المتوسط الحسابي، حيث أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

العزم المركزي من المرتبة الثانية $(r = 2)$، ويساوي التباين

$$r = 2 \Rightarrow m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$$

العزم المركزي من المرتبة الثالثة $(r=3)$

$$r=3 \Rightarrow m_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^3}{n}$$

العزم المركزي من المرتبة الرابعة $(r=4)$

$$r=4 \Rightarrow m_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^4}{n}$$

وهكذا...

مثال(03): احسب العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للقيم التالية:3، 6، 9، 12، 15

الحل:

أولا: حساب المتوسط الحسابي

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{3+6+9+12+15}{5}=\frac{45}{5}=9$$

ثانيا: حساب العزم الأول حول المتوسط الحسابي:

$$r=1 \Rightarrow m_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})}{n}=0$$

ثالثا: حساب العزم الثاني حول المتوسط الحسابي:

$$r=2 \Rightarrow m_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}=\frac{(3-9)^2+(6-9)^2+(9-9)^2+(12-9)^2+(15-9)^2}{5}=18$$

2.4.1 طريقة حساب العزم حول المتوسط الحسابي في حالة الجداول التكرارية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3,...x_k$ تمثل المفردات المختلفة للظاهرة x (أو مراكز الفئات) و $f_1, f_2, f_3,...f_k$ تمثل التكرارات المناظرة لها فإن العزم الرائي حول المتوسط الحسابي في هذه الحالة يعطى كما يلي:

$$\boxed{m_r=\frac{\sum_{i=1}^{k}f_i(x_i-\overline{X})^r}{\sum_{i=1}^{k}f_i};r=1,2,3,4.....}$$

فئات	f_i	x_i	f_ix_i	$(x_i-\overline{X})$	$(x_i-\overline{X})^2$	$f_i(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})^3$	$f_i(x_i-\overline{X})^3$
]30 - 20]	2	25	50	−29,40	864,36	1728,72	−25412,2	−50824,37
]40 - 30]	8	35	280	−19,40	376,36	3010,88	−7301,38	−58411,07
]50 - 40]	10	45	450	−9,40	88,36	883,60	−830,58	−8305,84

]60 - 50]	13	55	715	0 ,60	0,36	4,68	16,2	2,81
]70 - 60]	8	65	520	10,60	134,56	898,88	7303,40	58427,20
]80 - 70]	6	75	450	20,60	424,36	2546,16	8741,82	52450,90
]90 - 80]	3	85	255	30,60	936,36	2809,08	28652,62	85957,85
المجموع	50		2720			11882,00		676779,20

مثال (04): انطلاقا من الجدول التكراري المتعلق بعلامات 50 طالب في مادة الإحصاء. المطلوب أوجد العزم الثاني والثالث حول المتوسط الحسابي (العزم المركزي).

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

ثانيا: حساب المتوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{2720}{50} = 54{,}4\,pts$$

ثالثا: حساب العزم المركزي الثاني

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{11882}{50} = 237{,}64$$

رابعا: حساب العزم المركزي الثالث

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{79297{,}48}{50} = 1585{,}9496$$

5.1العلاقة بين العزوم حول الصفر والعزوم حول المتوسط الحسابي

لدينا: العزم المركزي من المرتبة الثانية $(r = 2)$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right]^2$$

ومنه نستطيع كتابة العزم المركزي من المرتبة الثانية على النحو التالي:

$$\boxed{m_2 = m_2' - m_1'^2}$$

العزم المركزي من المرتبة الثالثة $(r = 3)$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3}{n}$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n} - 3\overline{X}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + 3\overline{X}^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n} - \overline{X}^3$$

ومنه نستطيع كتابة العزم المركزي من المرتبة الثالثة على النحو التالي:

$$\boxed{m_3 = m_3' - 3m_2' m_1' - m_1'^3}$$

لدينا العزم المركزي من المرتبة الرابعة $(r=4)$

$$m_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^4}{n}$$

$$m_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^4}{n}-4\overline{X}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^3}{n}+6\overline{X}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-4\overline{X}^3\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}+\overline{X}^4$$

$$m_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^4}{n}-4\overline{X}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^3}{n}+6\overline{X}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-4\overline{X}^3\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}+\overline{X}^4$$

$$m_4=m_4'-4m_3'm_1'+6m_2'm_1'^2-4m_2'm_1'^3+m_1'^4$$

ومنه نستطيع كتابة العزم المركزي من المرتبة الرابعة على النحو التالي:

$$\boxed{m_4=m_4'-4m_3'm_1'+6m_2'm_1'^2-3m_1'^4}$$

وبشكل عام فإن:

$$m_r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^r}{n}$$

$$\boxed{m_r=m_r'-C_r^1m_{r-1}'m_1'+C_r^2m_{r-2}'m_2'+\ldots+(-1)^{r-1}C_r^{r-1}m_{r-(r-1)}+(-1)^r m_1'^r}$$

ملاحظة: لقياس الإلتواء والتفرطح فإنه يكتفي بالعزوم الأربعة الأولى حول المتوسط الحسابي. ولتسهيل العمل الحسابي فإن العزوم تحسب بدلالة العزوم حول الصفر

مثال(05) : أحسب العزوم حول المتوسط الحسابي(العزوم المركزية) m_1 ، m_2 ، m_3 ، m_4 ثم باستخدام العزوم حول الصفر للقيم التالية: 1، 2، 4، 6، 7

الحل:

1. حساب المتوسط الحسابي:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{1+2+4+6+7}{5}=\frac{20}{5}=4$$

2. حساب العزم الأول حول المتوسط الحسابي:

$$m_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)}{n}=0$$

3. حساب العزم الثاني حول المتوسط الحسابي:

$$m_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}=\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2}{5}=\frac{9+4+0+4+9}{5}=\frac{26}{5}=5{,}2$$

رابعا: حساب العزم الثالث حول المتوسط الحسابي:

$$m_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^3}{n}=\frac{(1-4)^3+(2-4)^3+(4-4)^3+(6-4)^3+(7-4)^3}{5}=\frac{-27-8+0+27+8}{5}=\frac{0}{5}=0$$

خامسا: حساب العزم الرابع حول المتوسط الحسابي:

$$m_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^4}{n}=\frac{(1-4)^4+(2-4)^4+(4-4)^4+(6-4)^4+(7-4)^4}{5}=\frac{81+16+0+16+81}{5}=\frac{194}{5}=38{,}8$$

ثانيا: حساب العزوم المركزية من العلاقة بين العزوم المركزية والصفرية

أ. حساب العزوم حول الصفر (العزوم الصفرية)

1. حساب العزم الأول حول الصفر :

$$m_1'=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 1}}{n}=\frac{1+2+4+6+7}{5}=\frac{20}{5}=4$$

2. حساب العزم الثاني حول الصفر:

$$m_2'=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}=\frac{1^2+2^2+4^2+6^2+7^2}{5}=\frac{1+4+16+36+49}{5}=\frac{106}{5}=21{,}2$$

3. حساب العزم الثالث حول الصفر:

$$m_3'=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 3}}{n}=\frac{1^3+2^3+4^3+6^3+7^3}{5}=\frac{1+8+64+216+343}{5}=\frac{632}{5}=126{,}4$$

4.حساب العزم الرابع حول الصفر:

$$m_4'=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 4}}{n}=\frac{1^4+2^4+4^4+6^4+7^4}{5}=\frac{1+16+256+1296+2401}{5}=\frac{3970}{5}=794$$

ب. تطبيق العلاقة بين العزوم المركزية والصفرية

لدينا: العزم الصفري الأول $m_1'=4$ ، العزم الصفري الثاني $m_2'=21{,}2$

العزم الصفري الثالث $m_3'=126{,}4$ ، العزم الصفري الرابع

$m_4'=794$

وعليه فإن :

العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفر وهذا من خواص المتوسط الحسابي $m_1=0$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي يساوي $m_2=m_2'-m_1'^2=21{,}5-4=5.2$

$m_2 = 21{,}5 - 4 = 5.2$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي يساوي $m_3 = m_3' - 3m_2'm_1' - m_1'^3$

$m_3 = 126{,}4 - 3(21{,}5 \times 4) + (2 \times 4^3) + 126{,}4 - 254{,}4 + 128 = 0$

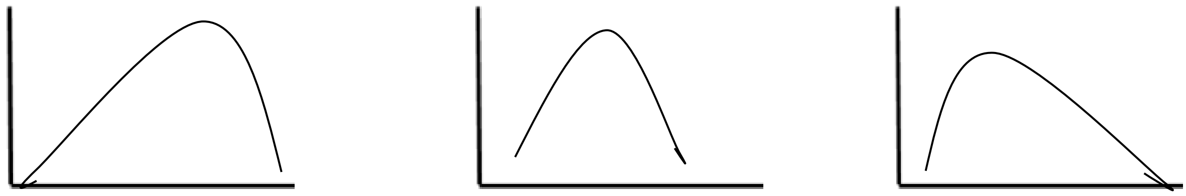
العزم الرابع حول المتوسط الحسابي يساوي $m_4 = m_4' - 4m_3'm_1' + 6m_2'm_1'^2 - 3m_1'^4$

$m_4 = 794 - 4(126{,}4 \times 4) + 6(21{,}2 \times 4^2) - 3 \times 4^4 = 38{,}8$

نفس النتائج التي تحصلنا عليها عندما استخدمنا العزوم المركزية.

2الالتواء

1.2 مفهوم الإلتواء: يقصد الالتواء درجة بعد البعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويكون الإلتواء موجباً ناحية اليمين إذ كان التوزيع له ذيل طويل ناحية اليمين (القيم الكبيرة)، ويعرف الإلتواء سالب إذا كان ذيل التوزيع ناحية اليسار (القيم الصغيرة). كما يتضح من الأشكال التالية:



شكل رقم (01): أشكال الإلتواء

.2.2 قياس الإلتواء : يتم قياس الإلتواء بإحدى الطريقتين التاليتين : إما باستخدام العلاقات بين بعض مقاييس النزعة المركزية والعلاقات بين مقاييس الموقع أو باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية).

1.2.2باستخدام العلاقات بين بعض مقاييس النزعة المركزية والعلاقات بين مقاييس الموقع

أولا: العلاقة بين المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط: ويتم حساب الإلتواء باستخدام أحد الطريقتين:

الطريقة الأولى: معامل الإلتواء الأول لـ " بيرسون ": هو عبارة عن نسبة الفرق بين المتوسط الحسابي والمنوال على قيمة الإنحراف المعياري وتتراوح قيمة بين +1 و−1 . ويتلاشى الإلتواء عندما يكون الفرق بين المتوسط الحسابي والمنوال يساوي الصفر، وذلك في حالة التوزيع الاعتدالي. ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{\beta_{p_1} = \frac{\overline{X} - M_O}{s}}$$

$$\text{معامل الإلتواء} = \frac{\text{المتوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

حيث:

β_{p_1} : معامل الإلتواء (تقرأ بيطا) ، $\overline{X}$: المتوسط الحسابي، M_O : المنوال، S : الإنحراف المعياري.

وعليه، فإذا كان معامل الإلتواء الأول لـ " بيرسون " $\beta_{p_1} \rangle 0$ كان الإلتواء موجباً، أما إذا كان $\beta_{p_1} \langle 0$ يقال عنه أنه التواء سالب، وفي حالة كونه يساوي $\beta_{p_1} = 0$ فإن التوزيع متناظر.

الطريقة الثانية: معامل الإلتواء الثاني لـ " بيرسون ": أحيانا قد يتعذر حساب معامل " بيرسون" الأول وذلك في حالة البيانات التي ليس لها منوال أو عند وجود أكثر من منوال، وعليه يمكن تقديره عن طريق الصيغة التالية:$\left(\overline{X} - M_O = 3\left(\overline{X} - M_e\right)\right)$ حيث يعطى معامل الإلتواء الثاني كما يلي:

$$\text{معامل الإلتواء} = \frac{3(\text{المتوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الإنحراف المعياري}}$$

$$\boxed{\beta_{P_2} = \frac{3(\overline{x} - M_e)}{s}}$$

وتنحصر قيمة معامل الإلتواء بين +3 في الالتواء الموجب إلى−3 في الإلتواء السالب، ويتلاشى الإلتواء عندما يكون الفرق بين المتوسط الحسابي والوسيط يساوي الصفر وذلك في حالة التوزيع الاعتدالي (التوزيع الطبيعي).

ثانيا: العلاقة بين الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى (معامل الإلتواء الربيعي): يمكن قياس الإلتواء بالإعتماد على الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى وهو ما يسمي بمعامل الإلتواء الربيعي من اقتراح " بوليBowley " و نرمز له بـ: β_Q يستخدم في حالة تعذر حساب المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري فيمكن الإعتماد على الوسيط والربيعيات. ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{\beta_Q = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1}}$$

كما يمكن كتابة معامل الربيعي(بولي) على النحو التالي:

$$\boxed{\beta_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}}$$

تتراوح قيمة معامل الإلتواء بولي بين +1 و−1 فإذا كانت قيمة هذا المعامل موجب كان التوزيع مائلا بالإتجاه نحو اليمين، أما إذا كان سالبا يكون التوزيع مائل إلى ناحية اليسار، بينما إذا كان مساويا للصفر فإن التوزيع يكون متناظر.

مثال (06): بعد دراسة أحد التوزيعات التكرارية تم الحصول على النتائج الإحصائية التالية:

$Q_1 = 42{,}1 \qquad Q_3 = 61{,}7 \qquad \overline{X} = 52 \qquad M_O = 52{,}9 \qquad M_e = 52{,}14$

المطلوب: قياس الإلتواء باستخدام:

1. معامل الإلتواء بيرسون الأول
2. معامل الإلتواء بيرسون الثاني
3. معامل الإلتواء الربيعي (معامل الإلتواء بولي)

الحل:

1. معامل الإلتواء بيرسون الأول

$$\beta_{p_1} = \frac{\overline{X} - M_O}{s}$$

$$\beta_{p_1} = \frac{52 - 52{,}9}{14{,}595} = -0{,}06$$

2. معامل الإلتواء بيرسون الثاني

$$\beta_{P_2} = \frac{3(\overline{x} - M_e)}{s}$$

$$\beta_{p_1} = \frac{3(52 - 52{,}14)}{14{,}595} = -0{,}03$$

3. معامل الإلتواء الربيعي (معامل الإلتواء بولي)

$$\beta_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

$$\beta_Q = \frac{61{,}7 + 42{,}1 - 2(52{,}14)}{61{,}7 - 42{,}1} = -0{,}02$$

هذه النتائج كلها تشير إلى التواء سالب قريب من التماثل

ثالثا: العلاقة بين الوسيط والعشيرين الأول والتاسع: لأخذ أكبر نسبة من القيم في قياس الإلتواء اقترح كيلي Kelly استخدام الفرق بين بعد العشير الأول عن والوسيط وبعد الوسيط عن العشير التاسع لقياس الإلتواء. ويعطى معامل الإلتواء بالصيغة التالية:

$$\boxed{\beta_D = \frac{(D_9 - M_e) - (M_e - D_1)}{D_9 - D_1}}$$

تتراوح قيمة معامل الإلتواء كيلي بين $+1$ و-1 فإذا كانت قيمة هذا المعامل موجب كان التوزيع مائلا بالإتجاه نحو اليمين، أما إذا كان سالبا يكون التوزيع مائل إلى ناحية اليسار، بينما إذا كان مساويا للصفر فإن التوزيع يكون متناظر.

مثال(07): بعد دراسة أحد التوزيعات التكرارية تم الحصول على النتائج الإحصائية التالية:

$D_9 = 85{,}6 \qquad D_1 = 46{,}6 \qquad M_e = 63{,}1$

المطلوب: قياس الإلتواء باستخدام معامل الإلتواء كيلي

$$\beta_D = \frac{(D_9 - M_e) - (M_e - D_1)}{D_9 - D_1}$$

$$\beta_D = \frac{(85{,}6 - 63{,}1) - (63{,}1 - 46{,}7)}{85{,}6 - 46{,}7} = \frac{6{,}1}{38{,}9} = 0{,}1568$$

هذه القيمة تعبر عن وجود التواء بسيط موجب.

2.2.2 باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية): تستخدم العزوم حول المتوسط الحسابي لتسهيل العمل الحسابي، فإنها تحسب بدلالة العزوم الصفرية.

معامل الإلتواء العزمي (معامل الإلتواء فيشر): وهو النسبة بين العزم الثالث حول المتوسط الحسابي ومكعب الإنحراف المعياري ويستخدم هذا المعامل إذا كان التوزيع وحيد المنوال، وتتراوح قيمته بين +1 و−1، فإذا كانت إشارة العزم الثالث موجبة فإن الإلتواء يكون ناحية اليمين، وسالبة إذا كان الالتواء ناحية اليسار. وإذا رمزنا لمقياس الالتواء بالرمز β_F .

$$\text{معامل الإلتواء فيشر} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الإنحراف المعياري})^3}$$

$$\boxed{\beta_F = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}}$$

$$\boxed{\beta_F = \frac{m_3^2}{S^3}}$$

فإذا كان معامل الإلتواء فيشر $\beta_F \rangle 0$ فالالتواء موجب، أما إذا كان $\beta_F \langle 0$ فالالتواء سالب، بينما إذا كان $\beta_F = 0$ توزيع متناظر.

مثال(08): أحسب مقدار ونوع الإلتواء باستخدام معامل الإلتواء لفيشر للجدول التكراري التالي:

الفئات	[1 − 3[	[3 − 5[	[5 − 7 [
التكرارات	1	3	6

الحل:

أولا: نشكل الجدول التالي:

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^2$	$f_i(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^3$	$f_i(x_i - \overline{X})^3$
[1 − 3[	1	2	2	−3	9	9	27	27
[3 − 5[	3	4	12	−1	1	3	−1	−3
[5 − 7[	6	6	36	1	1	6	1	6
المجموع	10		50			18		30

ثانيا: حساب المتوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{50}{10} = 5$$

ثالثا: حساب العزم المركزي الثاني

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{18}{10} = 1{,}8$$

رابعا: حساب العزم المركزي الثالث

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{30}{10} = 3$$

خامسا: حساب مقدار الإلتواء (معامل فيشر)

$$\beta_F = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$$

مقدار الإلتواء

$$\beta_F = \frac{3}{\sqrt{(1{,}8)^3}} = \frac{3}{\sqrt{5{,}832}} = 0{,}274$$

أما نوع الإلتواء فهو ملتو ناحية اليمين لأن العزم الثالث موجب

3 التفرطح

1.3 مفهوم التفرطح: يشير التفرطح إلى درجة تدبب (تطاول) أو درجة تبسط التوزيع في المنطقة المحيطة بالمنوال، وتقاس درجة تدبب أي توزيع بالنسبة إلى تدبب التوزيع الطبيعي. فإذا كانت قاعدة التوزيع ضيقة فإنه يكون مدببا (عالي القيمة)، أما إذا كانت قاعدة المنحنى واسعة فإن فإنه يقال بأن المنحنى متفلطح (منبسط القيمة). كما يتضح ذلك من الأشكال التالية:

منحنى مدبب (عالي القمة) منحنى معتدل التفرطح (معتدل القمة) منحنى مفرطح(منبسط القمة)

شكل رقم(02): أشكال التفرطح

2.3 قياس التفرطح: يمكن قياس التفرطح بإحدى الطريقتين التاليتين: إما باستخدام بعض مقاييس الموقع أو باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي.

1.2.3 باستخدام الربيعيات والعشريات (مقاييس الموقع): يمكن قياس التفرطح بالإعتماد على الربيعين الأدنى والأعلى والعشيرين التاسع والأول، ويسمي هذا المعامل بمعامل **كيلي** يرمز له بالرمز k ويعطى بالصيغة التالية:

$$k = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{D_9 - D_1}$$

معامل التفرطح = نصف المدى الربيعي / (العشير التاسع − العشير الأول)

عليه، فإذا كانت $k = 0,263$ فإن المنحنى معتدل التفرطح(وهي قيمة k للتوزيع الطبيعي) ، أما إذا كانت $k \succ 0,263$ فإن المنحنى مدبب، وإذا كانت $k \prec 0,263$ فإن المنحنى مفرطح.

مثال(09): بعد دراسة أحد التوزيعات التكرارية تم الحصول على المقاييس الإحصائية التالية:

$Q_1 = 200,883$ $\quad Q_3 = 213,857$ $\quad D_1 = 193,529$ $\quad D_9 = 223,0763$

والمطلوب: أدرس شكل التوزيع بإستخدام معامل" كيلي" للتفرطح

الحل:

$$k = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{D_9 - D_1}$$

$$k = \frac{\frac{1}{2}(213,857 - 200,883)}{223,0763 - 193,529} = 0,220$$

مادام قيمة k المحسوبة أقل من قيمة k للتوزيع الطبيعي فإن التوزيع المعطى مفرطح إلى حد ما.

2.1.3 باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية): يعتمد قياس التفرطح على العزم الثاني والرابع حول المتوسط الحسابي، ويسمى بمعامل فيشر لتفرطح (وهو نسبة العزم الرابع إلى قيمة الإنحراف المعياري). فإذا رمزنا لمعامل التفرطح α_1 فإن صيغته تعطى كما يلي:

$$\alpha_1 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

حيث: m_2 و m_4 هما: العزم الثاني والرابع حول المتوسط الحسابي.

أما نوع ذلك التفرطح فيعتمد على المقارنة بالعدد 3 كما يلي :

1. إذا كانت $\alpha_1 = 3$ فإن المنحنى معتدل التفرطح
2. إذا كانت $\alpha_1 \rangle 3$ فإن المنحنى مدبب (عالي القيمة)
3. إذا كانت $\alpha_1 \langle 3$ فإن المنحنى متفرطح (منبسط القيمة)

ويكتب معامل التفرطح في حالة البيانات الأولية على النحو التالي:

$$\alpha_1 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^4}{n}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^4}{n}}{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2\right)^2}{n^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2\right)^2}$$

$$\alpha_1 == \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\right)^2}$$

أما في حالة الجداول التكرارية معامل التفرطح يعطى كما يلي

$$\alpha_1 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^4}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}{\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^2\right)^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{n^2\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^2\right)^2}$$

حيث: $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

ملاحظة يمكن كتابة الصيغة السابقة على النحو التالي وذلك بطرح قيمة 3 من الصيغة الأولى ونرمز له بـ α_2 . وبذلك نقارن قيمة هذا المعامل بالعدد صفر وليس بالعدد ثلاثة، ويعرف كما يلي:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - 3 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

1. إذا كانت $\alpha_1 = 0$ فإن المنحنى معتدل التفرطح
2. إذا كانت $\alpha_1 \rangle 0$ فإن المنحنى مدبب
3. إذا كانت $\alpha_1 \langle 0$ فإن المنحنى متفرطح

مثال(10):أوجد مقدار ونوع التفرطح باستخدام العزوم المركزية لتوزيع التكراري التالي:

الفئات	]20- 10]	]40-20]	]40 -30]	]50 -40]	]60-50]
التكرار	19	14	16	30	21

الحل:

أولا: نكون الجدول التالي:

فئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$(x_i-\overline{X})$	$(x_i-\overline{X})^2$	$f_i(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})^4$	$f_i(x_i-\overline{X})^4$
]20 – 10]	19	15	285	22−	484	9196	234256	4450864
]30 – 20]	14	25	350	12−	144	2016	20736	290304
]40 – 30]	16	35	560	2−	4	64	16	256
]50 – 40]	30	45	1350	8	64	1920	4096	122880
]60 – 50]	21	50	115	18	324	6804	104976	2204496
المجموع	100		3700			20000		7068800

ثانيا: حساب قيمة المتوسط الحسابي:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}=\frac{3700}{100}=37$$

ثانيا: نحسب مقدار التفرطح

$$\alpha_1=\frac{m_4}{m_2^2}=\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{X})^2\right)^2}$$

$$\alpha_1=\frac{(100)(7068800)}{(20000)^2}=\frac{7068800}{40000}=1{,}76$$

بما أن قيمة $\alpha_1 \prec 3$ فإن المنحنى متفرطح (منبسط القيمة)

4.تمارين محلولة

1) الجدول التكراري التالي يبين فئات الدخل لـ 50عامل في احدى المؤسسات الإنتاجية.

الفئات	]100− 90]	]110−100]	]120 −110]	]130 −120]	]140−130]	]150−140]	المجموع
التكرار	3	14	16	11	4	2	50

المطلوب:

1. حساب العزوم المركزية (الثاني، الثالث، الرابع)
2. حساب العزوم الصفرية.
3. حساب العزوم المركزية من العلاقة بين العزوم المركزية والصفرية.
4. معامل الإلتواء
5. معامل التفرطح.

الحل:

1. حساب العزوم المركزية

أولا: نكون الجدول التالي:

فئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$(x_i-\overline{X})$	$f_i(x_i-\overline{X})^2$	$f_i(x_i-\overline{X})^3$	$f_i(x_i-\overline{X})^4$
]100 − 90]	3	95	285	−21	1323	−27783	583443
]110 − 100]	14	105	1470	−11	1694	−18634	204974
]120 − 110]	16	115	1840	−1	16	−16	16
]130 − 120]	11	125	1375	9	891	8019	72171
]140 − 130]	4	135	540	19	1444	27436	521284
]150 − 140]	2	145	290	29	1682	48778	1414562
المجموع	50		5800		7050	37800	2796450

ثا

نيا: إيجاد العزوم المركزية

– حساب العزم المركزي الثاني

$$m_2=\frac{\sum_{i=1}^{6} f_i(x_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{6} f_i}=\frac{7050}{50}=141D$$

– حساب العزم المركزي الثالث

$$m_3=\frac{\sum_{i=1}^{6} f_i(x_i-\overline{X})^3}{\sum_{i=1}^{6} f_i}=\frac{37800}{50}=756D$$

– حساب العالعزم المركزي الرابع

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i(x_i - \overline{X})^4}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{2796450}{50} = 55929D$$

2. حساب العزوم الصفرية.

أولا: نكون الجدول التالي:

$f_i x^4{}_i$	$f_i x_i{}^3$	$f_i x^2{}_i$	$f_i x_i$	x_i	f_i	فئات
244351875	2572125	27075	285	95	3	]100 - 90]
1701708750	16206750	154350	1470	105	14	]110 - 100]
2798410000	24334000	211600	1840	115	16	]120 - 110]
2685546875	21484375	171875	1375	125	11	]130 - 120]
1328602500	9841500	72900	540	135	4	]140 - 130]
884101250	6097250	42050	290	145	2	]150 - 140]
9642721250	80536000	679850	5800		50	المجموع

ثانيا: حساب العزوم الصفرية

– العزم الصفري الأول

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i{}^1}{n} = \frac{5800}{50} = 116D$$

– العزم الصفري الثاني

$$m'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i{}^2}{n} = \frac{679850}{50} = 13597D$$

– العزم الصفري الثالث

$$m'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i{}^3}{n} = \frac{80536000}{50} = 1610720D$$

– العزم الصفري الرابع

$$m'_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i{}^4}{n} = \frac{9642721250}{50} = 192854425D$$

ثالثا: حساب العزوم المركزية من العلاقة بين العزوم المركزية والصفرية.

– العزم المركزي الثاني:

$$m_2 = m'_2 - m'^2_1$$

$$m_2 = 13597 - (116)^2$$

$$m_2 = 141$$

– العزم المركزي الثالث:

$$m_3 = m'_3 - 3m'_2 m'_1 - 2m'^3_1$$

$$m_3 = 1610720 - 3(13597)(116) + 2(116)^3$$

$$m_3 = 1610720 - 4731756 + 3121792$$

$$m_3 = 756$$

- العزم المركزي الرابع:

$$m_4 = m'_4 - 4m'_3m'_1 + 6m'_2m'^2_1 - 3m'^4_1$$

$$m_4 = 192854425 - 4(1610720)(116) + 6(13597)(116)^2 - 3(116)^4$$

$$m_4 = 192854425 - 747374080 + 1097767392 - 543191808$$

$$m_4 = 55928$$

3. معامل الإلتواء

$$\beta_F = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$$

$$\beta_F = \frac{756}{\sqrt{(141)^3}} = 0,451$$

وعليه فإن التوزيع يكون ملتوي التواء موجب

4. معامل التفرطح (معامل كيلي)

$$\alpha_1 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{55928}{(141)^2} = \frac{55928}{19881} = 2,81$$

ومنه فإن التوزيع يكون مفرطح (منبسط) لأن قيمة 2,81 أقل من 3

أسئلة وتمارين

1) ما الفرق بين الإلتواء والتفرطح

2) ما المقصود بكل من الإلتواء الموجب والإلتواء السالب

3) أذكر مقاييس الإلتواء

4) أذكر مقاييس التفرطح

5) إذا علم أن الوسيط والمنوال يساوي 7 و 6,7 على الترتيب لجدول التوزيع التكراري التالي:

الفئات	]4 - 2]	]6 - 4]	]8 - 6]	]10 - 8]	]12- 10]
التكرار f_i	4	f_1	10	f_2	5

المطلوب: 1. إيجاد قيمة f_1 ، f_2 2.معامل الإلتواء

6) الجدول التكراري التالي يبين فئات الدخل لـ 50عامل في احدى المؤسسات الإنتاجية.

الفئات	]60 - 40]	]80- 60]	]100 - 80]	]120 - 100]	]140 - 120]	المجموع
التكرار f_i	8	12	20	8	2	50

علما أن: المتوسط الحسابي يساوي 83,6 ، المنوال يساوي 85 ، الربيع الأول يساوي 67,5

الوسيط يساوي 85، الربيع الثالث يساوي 97,5، الإنحراف المعياري يساوي 20.95 و. المطلوب أوجد :

- العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول المتوسط الحسابي (العزوم المركزية)
- العزم الأول والثاني والثالث الرابع حول الصفر (العزوم الصفرية)
- معامل الإلتواء ونوع الإلتواء بمختلف الطرق
- معامل التفرطح ونوعه بمختلف الطرق

المراجع

المراجع المستخدمة في إعداد هذه المطبوعة

1. احمد مصطفى خاطر وآخرون(1998)، التحليل الإحصائي للبحوث في الخدمة الاجتماعية، المكتب الجامعي الحديث، مصر.
2. اخلاص محمد عبد الحفيظ، مصطفى حسين الباهي، عادل محمد النشار(2004)، التحليل الإحصائي في العلوم التربوية نظريات – تطبيقات –تدريبات، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة.
3. اعتماد محمد علام(2016)، الإحصاء في البحوث الاجتماعية، مكتبة الأنجلو المصرية، مصر.
4. جلاطو جيلالي (1999)، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
5. جمعة زكرياء (2018)، دروس ملخصة وتمارين محلولة في الإحصاء، دار هومة، الجزائر.
6. حجاج غانم(2013)، التحليل العاملي نظريا وعملياً في العلوم الإنسانية والتربوية، عالم الكتب، مصر.
7. خليفة عبد السميع خليفة(1990)، الإحصاء التربوي، مكتبة الأنجلو المصرية، مصر.
8. دلال القاضي واخرون(2005)، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن.
9. ريفا بيرمان براون، مارك ساوندرز(2010)، التعامل مع الإحصاء كل ما تحتاج إلى معرفته، تر: نهى بهمن، مجموعة النيل العربية، مصر.
10. زكريا أحمد الشربيني(2001)، الإحصاء اللابارامتري مع استخدام SPSS في العلوم النفسية والتربوية والإجتماعية، مكتبة الأنجلو المصرية، مصر.
11. سعيد جاسم الاسدي، سندس عزيز فارس(2015)، الأساليب الإحصائية في البحوث للعلوم التربوية والنفسية والإجتماعية والإدارية والعلمية، ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان.
12. شفيق العتوم(2006)، طرق الاحصاء تطبيقات اقتصادية وإدارية باستخدام SPSS، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن.
13. شيبات أحمد (2001)، الإحصاء الوصفي، دار الهدى، الجزائر.
14. صالح بن محمد الصغير (2006)، مقدمة في الإحصاء الاجتماعي، النشر والمطابع ـ جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية.
15. صلاح أحمد مراد(2000)، الأساليب الإحصائية في العلوم النفسية والتربوية والإجتماعية، مكتبة الأنجلو المصرية، مصر.
16. صلاح الدين محمود علام (1993)، الأساليب الإحصائية الإستدلالية البارامترية واللابارامترية، دار الفكر العربي، ط1، مصر.

17. عايش محمود زيتون(2004)، أساسيات الإحصاء الوصفي، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان.

18. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي(1995)، الطرق الإحصائية التطبيقية للمعاينة، منشورات جامعة السابع من أبريل، ليبيا.

19. عبد العزيز هيكل(1974)، مبادئ الأساليب الإحصائية، دار النهضة العربية، بيروت.

20. عبد الله فلاح المنيزل، عايش موسى غرايبة(2006)، الإحصاء التربوي تطبيقات باستخدام الرزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان.

21. علي عبد السلام العماري، على حسين العجيلي (2000)، الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، فليتا شركة ELGA، مالطا.

22. محفوظ جودة (2009)، التحليل الإحصائي الأساسي بإستخدام SPSS، ط2، دار وائل للنشر، عمان.

23. محمد حسين محمد رشيد(2002)، الإحصاء في التربية، ط2، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان.

24. محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض(2004)، مقدمة في الإحصاء، مبادئ وتحليل باستخدام SPSS، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان.

25. محمد علي الأطرقجي(1980). الوسائل التطبيقية في الطرق الإحصائية، ط1، دار الطليعة، بيروت.

26. مختار محمد عبد اللا، فاطمة عبد السلام شرابي(1999) ، أساسيات الإحصاء الاجتماعي، دار غريب للطباعة، مصر.

27. مصطفى الخوجة، لبيبة حسب النبي(2000). مقدمة في الإحصاء، الدار الجامعية، مصر.

28. نبيل جمعة النّجار، ماجد راضي الزّغبي(2009)، أساليب البحث العلمي منظور تطبيقي، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن.

29. يعيش وسيلة خزاز، قاسمي صونيه سلامة، شناف خديجة، بلخيري مراد(2018)، تقنيات تصميم الإستبيان، منشورات ألفا، الجزائر.

30 . Louise Martin et Gérald Baillargeon , Statistique appliquée à la psychologie , 2^{e} édition. Canda : Québec les éditions SMG 1989.

31 . Anderson- sweeney-williams, Statistique pour l'économie et la gestion, Traduction de la 6^{e} édition américaine par Claire borsenberger, 4^{e} édition, de Boeck, Paris, 2013.

1.دليل الجمع والضرب

1.1 دليل الجمع

نحتاج في الإحصاء إلى جمع القيم الرقيمة وبصورة متكررة. لذا يُستخدم دليل الجمع، الذي يرمز له بالحرف اليوناني $\sum$ ويقرأ "سڤما"، للتعبير عن مجموع القيم. ومن بين خواص هذا الرمز نجد:

إذا كانت x ترمز لظاهرة (أو متغير) ما وتأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ فإن x_i ترمز لقيمة المفردة i فإن هذا الرمز يستخدم كما يلي:

أ. مجموع القيم نرمز له بالرمز $\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

مثال: إذا كان لدينا المتغير x يأخذ القيم التالية: $x_1 = 5, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 14$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 5 + 8 + 14 = 27$$

ب. إذا كانت جميع القيم متساوية وكل منها يساوي مقدار ثابت فإن: $\sum_{i=1}^{n} a = a + a + a + ... + a = na$

مثال: إذا كان لدينا العدد الثابت $a = 5$ و $n = 3$ فإن: $\sum_{i=1}^{3} 5 = 5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$

ج.إذا ضربنا كل قيمة من القيم في مقدر وليكن a مثلا فإن

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = ax_1 + ax_2 + ax_3 + ... + ax_n = a(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) = a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

د. مجموع مربع القيم يرمز له بالرمز: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$

هـ. مربع مجموع القيم يرمز له بالرمز:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)^2$$

2.1 دليل الضرب

يستخدم الرمز $\prod$ للدلالة على ضرب مجموعة من القيم ويقرأ

إذا كانت x ترمز لظاهرة (أو متغير) ما وتأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ فإن x_i ترمز لقيمة المفردة i

فإن هذا الرمز يستخدم كما يلي: $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times x_3 \times ... x_n$

مثال: إذا كان لدينا المتغير x يأخذ القيم التالية: $x_1 = 5, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 14$. أوجد حاصل ضرب هذه القيم.

$$\prod_{i=1}^{3} x_i = 5 \times 8 \times 14 = 560$$