

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

THESE

en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN AUTOMATIQUE

Présentée par

IFRAH Salah

Master of Science en cybernétique de l'Université de Prague

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES REGIMES GLISSANTS
STATIQUES et DYNAMIQUES:
APPLICATION A LA MACHINE ASYNCHRONE.**

Soutenue publiquement le 15. Janvier 1995 devant le jury :

MM.	N. LOUAM -----	Président
	H. CHEKIREB -----	Rapporteur
	F. BOUDJEMAA -----	Examineur
	B. HEMICI -----	Examineur
	M.C. SOUAMI -----	Examineur

Je remercie

Monsieur N. LOUAM, Maître de Conférence à l'ENP, pour sa participation au jury, avec la charge de président.

Monsieur H. CHEKIREB, chargé de cours à l'ENP, qui a encadré mes travaux et dont l'aide précieuse m'a permis de mener à bien ce travail.

Monsieur F. BOUDJEMA, chargé de cours à l'ENP, dont l'expérience et les conseils m'ont été d'une aide précieuse.

Monsieur B. HEMICI, chargé de Cours à l'ENP, pour ses observations judicieuses et utiles.

Monsieur M.C. SOUAMI, chargé de cours à l'ENP, pour avoir accepté d'être rapporteur et membre du jury.

Monsieur M. HAMERLAIN, directeur de recherche au CDTA, pour son aide précieuse.

Mes remerciements vont aussi à mes camarades de l'INIM et en particulier A. IGUEDAD et M. AHMED-NACER pour leurs conseils et leurs témoignages d'amitiés.

Que le personnel du laboratoire d'automatique et d'informatique de l'INIM et du laboratoire d'automatique et d'électronique de puissance de l'ENP trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour la part qu'il a prise à la réalisation de ce travail .

A mes parents

A ma femme et mes deux enfants
qui m'ont apporté leur
soutien. Aujourd'hui, j'aimerais
leur dire tout mon attachement.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
1. SUR LES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE	5
1.1.Principe fondamental des SSV	5
1.2.Les configurations de base	7
1.3.Les différentes sortes des régimes glissants	9
1.3.1.Régime glissant idéal	10
1.3.2.Régime glissant réel	11
1.4.Robustesse et sensibilité	13
1.5.Conclusion	16
2.REGIMES GLISSANTS STATIQUES	17
2.1.Conditions d'existence du régime glissant	17
2.1.1.Cas continu	17
2.1.2.Cas discret	20
2.1.3.Comparaison des deux types de régimes	22
2.2.Cas monovariable	23
2.2.1.Définitions	24
2.2.1.1.Degré relatif	24
2.2.1.2.Forme normale	27
2.2.1.3.Dynamique des zéros	28
2.2.2.Systèmes à degré relatif un	29
2.2.3.Systèmes à degré relatif supérieur à un	32
2.3.Cas multivariable	33
2.3.1.Degré relatif vectoriel	33
2.3.2.Forme normale	34
2.3.3.Description des régimes glissants	36
2.4.Application à la machine asynchrone	38
2.4.1.Modèle de la machine	38
2.4.2.Calcul de la commande	40
2.4.3.Résultats de la simulation	43
2.5.Conclusion	53

3.REGIMES GLISSANTS DYNAMIQUES	54
3.1.Cas monovariable	54
3.1.1.Définitions	54
3.1.2.1.Degré relatif dynamique	54
3.1.2.2.Forme normale dynamique	55
3.1.2.3.Dynamique des zéros	57
3.1.2.Systèmes à degré relatif statique zéro	59
3.1.3.Systèmes à degré relatif statique	
supérieur à zéro	60
3.1.4.Régimes glissants d'ordre élevé	64
3.2.Cas multivariable	66
3.2.1.Définitions	66
3.2.1.1.Degré relatif dynamique vectoriel ..	66
3.2.1.2.Forme normale dynamique	67
3.2.1.3.Dynamique des zéros	68
3.2.2.Régime glissant idéal	68
3.3.Rejet de la perturbation	69
3.3.1.Cas monovariable	69
3.3.2.Cas multivariable	73
3.4.Application à la machine asynchrone	76
3.4.1.Calcul de la commande	76
3.4.2.Résultats de la simulation	81
3.5.Conclusion	89
4.DYNAMIQUE GRAND GAIN ET DYNAMIQUE EQUIVALENTE	90
4.1.Cas monovariable	90
4.2.Cas multivariable	93
4.3.Application à la machine asynchrone	94
4.3.1.Calcul de la commande	94
4.3.2.Résultats de la simulation	95
4.4.Conclusion	108
CONCLUSION GENERALE	110

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	113
ANNEXE A	117
ANNEXE B	120
ANNEXE C	122

INTRODUCTION

La commande à structure variable est une commande non linéaire, localement caractérisée par le mouvement glissant. Celui-ci existe, chaque fois que la trajectoire d'état du système traverse, sous l'influence de cette commande, une surface de commutation dite *surface glissante*.

Dans une commande à structure variable, Certains paramètres varient d'une manière discontinue. Ainsi, ils prennent deux valeurs possibles. La commutation d'une valeur à l'autre s'effectue de façon à obliger la trajectoire du système à évoluer sur la surface glissante.

Selon la forme de la commande choisie, le mouvement glissant peut exister séparément sur chacune des surfaces choisies ou sur l'intersection de celles-ci. Le mouvement, du premier cas, est appelé par Zinober [6] *régime glissant*. Alors, que celui du deuxième cas, ce même auteur, l'appelle *mode glissant*.

Quand la trajectoire du système est contrainte d'évoluer le long de la surface glissante choisie, la dynamique du système plonge dans l'état d'un autre système de dimension inférieure. Ce système réduit est appelé *système équivalent* [1], [2].

La forme de la surface glissante est souvent une combinaison linéaire des variables d'état des formes canoniques du système. Les formes connues sont la *forme normale* [3], la *forme généralisée* [4] et la *forme régulière* [5].

Les coefficients de cette surface déterminent la dynamique et la stabilité du système. Ils sont identiques aux coefficients de l'équation caractéristique du système équivalent.

Le mouvement transitoire de la trajectoire du système, se compose de deux mouvements différents [6]. Le premier est un mouvement rapide. Il permet d'atteindre la surface glissante. Le deuxième est un mouvement lent, dont le rôle est de maintenir la trajectoire d'état sur la surface glissante.

L'utilisation de la machine asynchrone dans l'industrie est d'un intérêt considérable. Sa construction est simple et robuste (élimination des contacts de glissement). Le progrès récent de la microélectronique et de l'électronique de puissance font en sorte qu'elle soit plus disponible que la machine à courant continu. Son comportement non linéaire et l'exigence d'un rapport performance-coût élevé, nécessitent l'application des techniques de commande avancées.

Parmi les solutions proposées, la commande vectorielle est la plus utilisée. Elle est basée sur le principe de séparation du flux et du couple [7], [8]. L'avantage de cette technique est le découplage entrée-sortie.

Sabanovic [32] a appliqué, en 1981, les régimes glissants à une machine asynchrone à cage d'écureuil pour le réglage de la position, de la vitesse et du couple. Une autre application, du même auteur [33] a été réalisée en 1989 pour l'entraînement de trois types de machines à courant alternatif.

D'autres solutions prennent en considération le caractère non linéaire du modèle. Celles-ci utilisent la commande optimale [9] et la commande adaptative [10].

Ces deux dernières décennies se distinguent par l'introduction de nouvelles approches dans la commande non linéaire. Ces approches sont basées sur les concepts de la géométrie différentielle [11], [12] et de l'algèbre différentielle [13]. Elles connaissent plusieurs domaines d'utilisation tels que: le découplage, la linéarisation et la stabilisation des systèmes non linéaires par retour d'état continu [3] ou discontinu [29].

Dans ce travail, nous aborderons la stabilisation des systèmes non linéaires par retour d'état discontinu en utilisant la technique du régime glissant et les différentes formes canonique de commande [14], [15]. Comme exemple d'application, nous prendrons la machine asynchrone.

Le premier chapitre est un rappel du concept fondamental de la commande à structure variable, des différentes configurations utilisées, des régimes glissants et des notions de la robustesse et de la sensibilité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse et à la synthèse des *régimes glissants statiques* [19]. Le calcul de la commande est basé sur une forme normale dite *statique*. Le terme *statique* signifie que le système de commande utilisé est d'ordre zéro. Les deux types de régimes glissants, continu et discret, sont présentés et discutés. Les performances de la commande en régime glissant statique sont testées sur le modèle de la machine asynchrone.

Dans le troisième chapitre, l'analyse et de la synthèse des *régimes glissants dynamiques* sont présentées [22].

Le calcul de la commande est basé sur une forme normale dite *dynamique*. Le terme *dynamique* signifie que le système de commande utilisé est, au moins, d'ordre un. Le modèle de la machine asynchrone est pris comme exemple d'application pour tester les performances de cette approche.

L'objet du dernier chapitre est l'analyse du comportement du système non linéaire au voisinage de la surface glissante. Il est montré, pour un système non linéaire mis sous forme normale dynamique, que la dynamique équivalente est identique à la dynamique grand gain. Ceci est montré sur le modèle de la machine asynchrone.

Chacun des trois derniers chapitres, comprend une étude en simulation de la machine asynchrone. Les résultats obtenus, lors de la simulation, sont présentés sous forme de tableaux et de courbes de réponse.

L'annexe, en trois parties, comprend les notions fondamentales de l'algèbre différentielle et les caractéristiques de la machine asynchrone utilisée.

1. SUR LES SYSTÈMES À STRUCTURE VARIABLE

Dans ce chapitre, un bref rappel sur la théorie des systèmes à structure variable (SSV) et des régimes glissants associés est présenté. Le principe fondamental est donné au paragraphe 1.1. Les configurations de base des SSV les plus utilisées sont discutées Au paragraphe 1.2. Au paragraphe 1.3, les différents types du régime glissant sont présentés. Enfin, dans le paragraphe 1.4, Les notions de la robustesse et de la sensibilité sont introduites.

1.1 PRINCIPE FONDAMENTAL DES SSV

Les systèmes à structure variable, se distinguent par un changement discontinu de la structure de la commande; alors qu'une commande conventionnelle, possède une structure figée. Par exemple, Lors d'une commande adaptative, seuls les paramètres de celle-ci changent de manière continue, selon un mécanisme d'adaptation. Par contre pour les SSV, le changement discontinu, est provoqué par des composantes données en fonction de la dynamique du système.

Dans la littérature spécialisée [16], [17], [18], les systèmes à structure variable sont souvent présentés comme des systèmes hiérarchisés (fig. 1.1a). En effet, si chaque paramètre de la fonction $s(x)$ change alternativement de signe, nous disposerons de 2^m structures de commande, où m est le nombre de paramètres. Ainsi chaque structure de la commande constitue un sous système (fig. 1.1a). L'ensemble de ces sous systèmes, en alternance selon une logique de commutation, forme la commande.

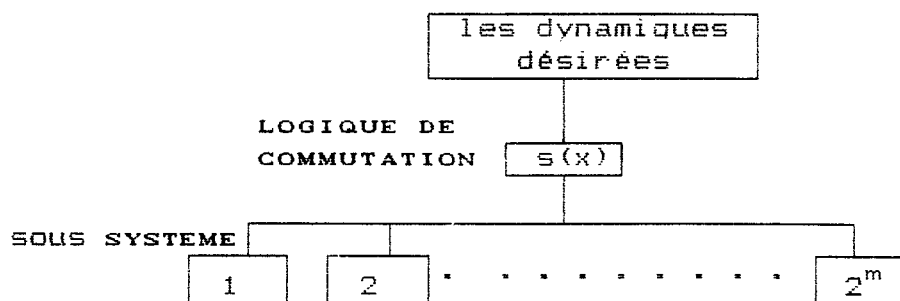


Figure 1.1a.- schéma de principe du ssv

L'introduction d'une telle complexité permet, par rapport à d'autres méthodes, une combinaison des propriétés de chaque sous système. Ainsi, le SSV acquiert de nouvelles propriétés qui n'existent dans aucun des sous systèmes. De telles propriétés, sont le résultat d'un simple changement de structure, selon une logique de commutation donnée. La nouvelle dynamique, composée à partir des différentes dynamiques des sous systèmes, représente, sous certaines conditions, un régime spécial appelé *régime glissant* [1].

Le phénomène de glissement consiste à amener la trajectoire d'état du système vers la fonction $s(x)$, dite *surface glissante*, puis à l'aide d'une logique de commutation l'obliger à rester au voisinage de cette surface (fig. 1.1b).

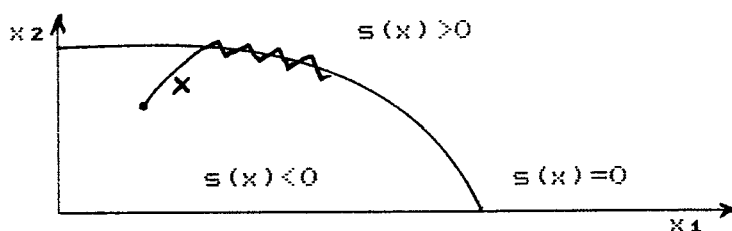


Figure 1.1b.- phénomène de glissement pour un système monovariante d'ordre 2

1.2 LES CONFIGURATIONS DE BASE

Le schéma de principe des SSV nous permet de distinguer deux configurations de base [16]. La première consiste en un changement de la structure de la commande entre deux retours d'état différents (fig. 1.2), où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $s(x)$ est une variété (surface) et $u(x) \in \mathbb{R}^m$ est une commande discontinue définie par la logique de commutation suivante:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{pour } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x) & \text{pour } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (1.1a)$$

avec :

$$s(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x))^T$$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))^T$$

$$u_i^+(x) > \bar{u}_i^-(x), \quad i = 1, \dots, m \quad (1.1b)$$

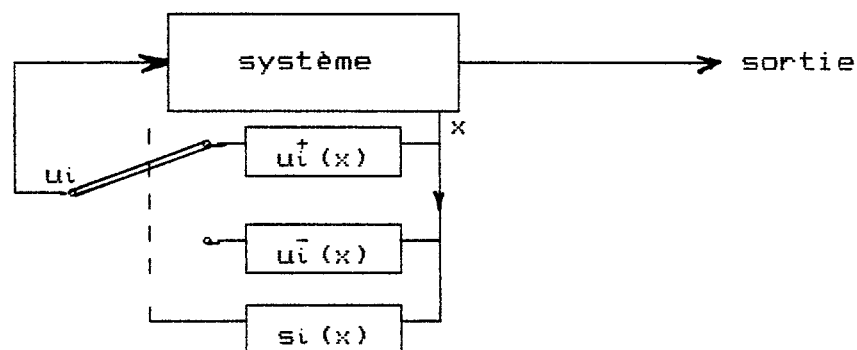


Figure 1.2.- configuration par changement de retour d'état

La deuxième configuration consiste en un changement de la structure par simple commutation entre deux valeurs fixes de u selon la figure 1.3, tel que :

$$u_i = \begin{cases} u_{\max} \text{ pour } s_i(x) > 0 \\ u_{\min} \text{ pour } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (1.1c)$$

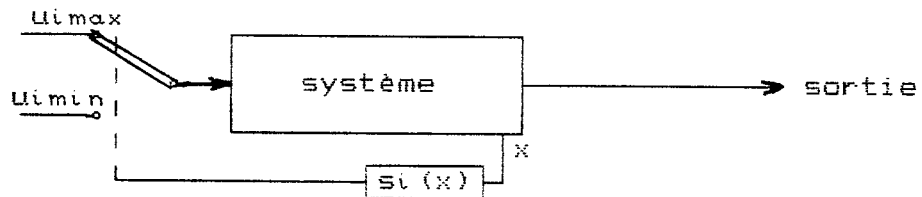


figure 1.3 : configuration par changement entre deux valeurs fixes de u

Pour les deux configurations, le système peut être continu ou discret. Dans le premier cas, il est décrit par l'équation différentielle et l'équation de sortie suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1.2a)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, u et $y \in \mathbb{R}^m$, représentent respectivement le vecteur d'état, la commande et la sortie du système continu. Alors que dans le deuxième cas, il s'agit de l'équation récurrente et de l'équation de sortie suivantes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k)) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2b)$$

où k , $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k)$ et $y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement le temps discret, l'état, la commande et la sortie du système discret.

Le passage de la forme continue (1.2a) à la forme discrète (1.2b) est possible au cas où il n'est pas nécessaire de connaître l'état du système à tout instant t mais seulement aux instants d'échantillonnage $t = k \Delta t$, où Δt représente la période d'échantillonnage.

1.3 LES DIFFÉRENTES SORTES DES RÉGIMES GLISSANTS

Dans la littérature, deux grandes catégories de régimes glissants sont citées, le régime glissant statique et le régime glissant dynamique [19], [22]. Dans la première catégorie, la commande est statique (absence des dérivées de la commande), alors que dans la deuxième, la commande est dynamique (présence des dérivées de la commande). Dans les deux cas, le régime glissant peut être continu ou discret.

En temps continu, le système change de structure, chaque fois que sa trajectoire d'état coupe la surface glissante. L'approche, utilisée dans la littérature [24] pour l'implantation du régime glissant en temps discret, nécessite le remplacement de *l'élément de commutation*, dans les configurations de base (fig. 1.2 et 1.3), par un *organe de calcul numérique*. Cet organe change la structure du système et calcule la loi de commande à des instants discrets. Dans ce cas, le régime glissant, qui prend naissance, est nécessairement différent de celui qui apparaît en temps continu. Le régime glissant est dit idéal, si la fréquence de l'élément de commutation est infinie. Par contre, il est dit réel, si cette fréquence est finie.

1.3.1. RÉGIME GLISSANT IDÉAL

Soit D un domaine appartenant à la surface $s(x)$ et défini tel que :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-m}, s(x) = 0 \right\} \quad (1.3a)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (1.2) et $s(x)$ est donnée par :

$$s(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x))^T \quad (1.3b)$$

On considère les deux conditions suivantes [1]:

i) on définit 2^m sous systèmes selon une stratégie de commutation donnée par (1.1). On suppose qu'aucune trajectoire de ces sous systèmes n'appartient totalement au domaine D .

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute trajectoire du système (1.2), avec la commande discontinue (1.1), démarrante du voisinage δ de D , est obligée de quitter le voisinage ε de D , seulement dans un voisinage de ses limites.

Si ces deux conditions sont vérifiées, alors D définit le domaine du régime glissant et $s(x)$ est appelée surface de commutation ou surface glissante. Si encore $s(x)$ est définie comme l'intersection des $s_i(x)$, pour $i = 1, 2, \dots, m$, alors il s'agit du mode glissant.

En d'autres termes, le régime glissant existe, si au voisinage de $s(x) = 0$, le vecteur vitesse de la trajectoire du système

(1.2) est dirigé, sous l'influence de la commande (1.1), vers la surface $s(x)$. Si la trajectoire coupe cette surface, elle doit être maintenue au voisinage de celle-ci. Ceci est illustré par les figures 1.4 et 1.5.

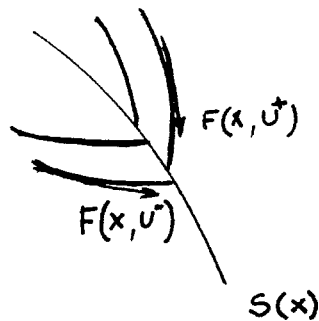


Figure 1.4.- régime glissant

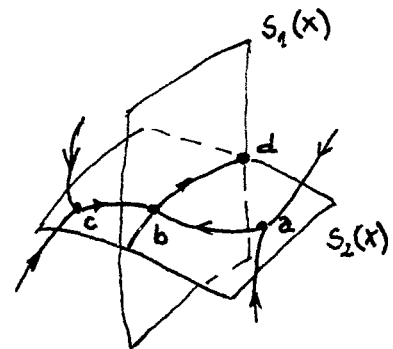


Figure 1.5- mode glissant

1.3.2. RÉGIME GLISSANT RÉEL

En régime glissant idéal, la fréquence de commutation est supposée infinie. Les imperfections de l'élément de commutation (retard, hystérésis, inertie, etc ...) et les dynamiques négligées, font en sorte que cette fréquence soit finie et variable. Dans de telles conditions, le régime glissant est dit réel. Par exemple [1], dans le cas du système monovariable, la présence d'une hystérésis impose à la commande u la forme suivante:

$$u = \begin{cases} u(x)^+ & \text{pour } s(x) > \Delta \\ u(x)^- & \text{pour } s(x) < -\Delta \end{cases} \quad (1.4a)$$

ou Δ est un petit nombre positif qui représente l'imperfection introduite.

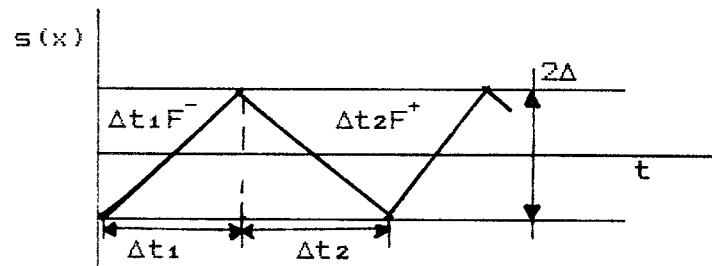


Figure 1.6.- commutation avec hystérésis

Dans ce cas, la trajectoire du système n'évolue plus exactement le long de la surface $s(x) = 0$, mais tend à osciller (brouter) au voisinage de celle-ci (fig. 1.6), d'où le phénomène de broutement (chattering).

La variation Δx de la trajectoire du système est donnée par l'expression:

$$\Delta x = F^- \Delta t_1 - F^+ \Delta t_2 \quad (1.4b)$$

avec:

$$\Delta t_1 = \frac{2\Delta}{\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] F^-} \quad \text{et} \quad \Delta t_2 = \frac{-2\Delta}{\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] F^+} \quad (1.4c)$$

$$F^+ = F(x, u^+) \quad F^- = F(x, u^-)$$

La fréquence de commutation f_c est donnée par:

$$f_c = \frac{1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (1.4d)$$

Cette fréquence doit être suffisamment grande par rapport à la rapidité du régime transitoire du système.

1.4. ROBUSTESSE ET SENSIBILITÉ

La robustesse et la sensibilité sont deux concepts traduisant la capacité du système de tolérer ou de rejeter les perturbations (variations des paramètres, erreurs de modélisation, etc...) qui lui sont imposées. Frank [20], définit la robustesse et la sensibilité comme suit:

Sensibilité:

le système est dit sensible aux variations du paramètre, si sa fonction de sensibilité est différente de zéro. Si cette fonction est égale à zéro, alors le système est dit "zéro sensible". Par contre si la valeur absolue de cette fonction est très petite, alors le système est dit insensible.

La fonction de sensibilité S est donnée par la relation:

$$S = \frac{\partial \text{Crit}}{\partial \alpha} \quad (1.4a)$$

où Crit est le critère ou la performance et α est le paramètre. S'il s'agit de plusieurs paramètres, alors la sensibilité est donnée par sa variation ΔS , telle que:

$$\Delta S = \sum_1^m S_j \Delta \alpha_j \quad (1.4b)$$

où $\Delta \alpha_j$ est la variation du j-ème paramètre.

Robustesse:

le système est dit robuste, si certaines de ses performances sont maintenues invariantes, dans un domaine limité par rapport aux perturbations finies et bornées.

Le cas d'une perturbation, due à une incertitude paramétrique, est illustré par le schéma suivant:

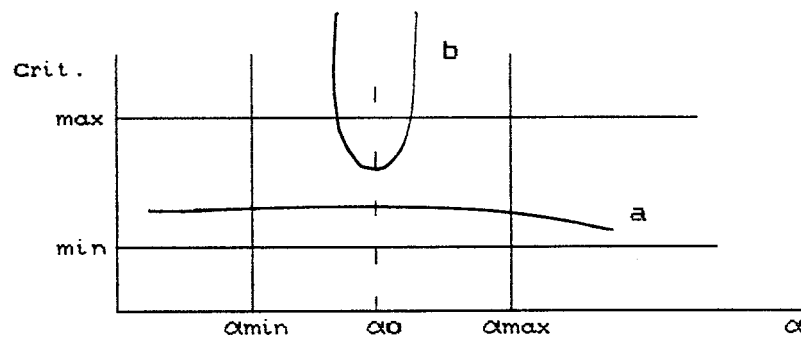


Figure 1.7.- robustesse de la commande par rapport à la variation du paramètre α , le critère (a) est plus robuste que le critère (b).

Dans le cas du régime glissant, ce domaine est donné par (1.3) et la robustesse est mesurée localement par la distance ρ entre le vecteur d'état x (fig. 1.8) et la surface $s(x) = 0$.

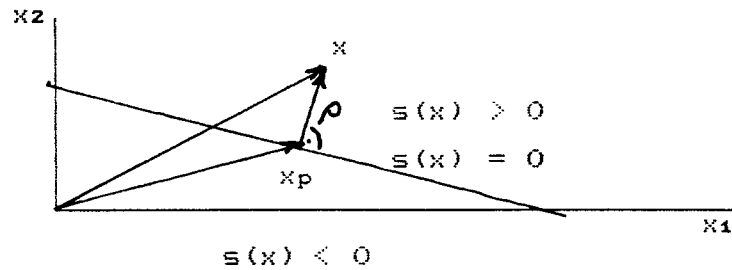


Figure 1.8.- interprétation géométrique de la distance ρ dans un espace d'état de dimension 2.

En général, la surface $s(x)$ est une combinaison linéaire du vecteur d'état x tel que:

$$s(x) = C^T x \quad (1.5)$$

où C est un vecteur de coefficients tel que l'équation caractéristique de (1.5) soit un polynôme de Hurwitz. le vecteur d'état x du système prend la forme suivante:

$$x = x_p \pm \rho \frac{C}{\|C\|} \quad (1.6a)$$

où x_p est la projection du vecteur x sur la surface $s(x) = 0$ et $\|C\|$ est la norme du vecteur C . Par substitution dans $s(x)$, nous aurons:

$$s(x) = s \left[x_p \pm \rho \frac{C}{\|C\|} \right] = \pm \rho C^T \frac{C}{\|C\|} \quad (1.6b)$$

d'où:

$$\rho = \frac{|s(x)|}{\|C\|} \quad (1.7)$$

1.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, un rappel sur les systèmes à structure variable et les régimes glissants associés est présenté. Nous avons rappelé le principe fondamental des systèmes à structure variable et les configurations de base les plus utilisées.

Deux types fondamentaux des régimes glissants ont été étudiés: le régime idéal et le régime réel.

Nous avons présenté une définition de la robustesse et de la sensibilité en relation directe avec le régime glissant. Pour la mesure de la robustesse, la relation 1.7 est proposée.

2. RÉGIMES GLISSANTS STATIQUES

Dans ce chapitre, l'analyse et la synthèse des régimes glissants statiques des systèmes non-linéaires, sont présentées. Au paragraphe 2.1, les conditions d'existence du régime glissant, en temps continu et discret, sont introduites puis discutées. Au paragraphe 2.2 l'analyse et la synthèse des régimes glissants sont effectuées pour les systèmes monovariabiles. Les résultats, obtenus en monovariabiles, sont élargis aux systèmes multivariabiles découplés et constituent le paragraphe 2.3. Enfin, une application à la machine asynchrone est présentée au paragraphe 2.4.

2.1. CONDITIONS D'EXISTENCE DU RÉGIME GLISSANT

2.1.1. CAS CONTINU

La loi de commande qui oblige le système continu, décrit par l'équation (1.2a), à évoluer dans le domaine (1.3), peut être continue ou discontinue.

Si la commande est continue, alors nécessairement la surface $s(x)$ doit vérifier la condition d'invariance suivante [21]:

$$L_{F(x, U_{eq})} s(x) = 0 \quad (2.1a)$$

où L symbolise la dérivée de Lie [3] et U_{eq} est la commande équivalente [1], [2]. L'équation (2.1a) décrit le comportement du système (1.2a) en régime glissant idéal si celui-ci existe.

En effet, cette équation admet localement sur $s(x)$, par rapport à U , comme solution U_{eq} si la matrice:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_j} L_F(x, U) s_i(x) \right]_{(i,j)} \quad (2.1b)$$

est localement non singulière pour les entiers i et j allant de 1 jusqu'à m . Cette solution est unique, en vertu du théorème de la fonction implicite [3].

Si la commande est discontinue, alors pour que le régime glissant idéal continu existe, il suffit de satisfaire les conditions suivantes:

$$L_{F(x, U^+)} s(x) < 0, \quad L_{F(x, U^-)} s(x) > 0 \quad (2.1c)$$

Ainsi, la trajectoire du système (1.2a) fait, sous l'influence de la commande (1.1), un mouvement infiniment petit au voisinage du domaine D défini par (1.3). Une forme équivalente à (2.1c) est donnée par l'inégalité suivante:

$$L_{F(x, U)} s^T s < 0 \quad (2.1d)$$

En effet, si la fonction de Lyapunov est définie par:

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (2.1e)$$

alors sa première dérivée est donnée par l'expression suivante:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (s^T s) \dot{x} \quad (2.1f)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique de la trajectoire du système (1.2), il suffit que l'expression (2.1f) soit négative. Ceci est possible seulement si la condition (2.1d) est vérifiée au voisinage du domaine (1.3).

En régime glissant idéal, la fréquence de commutation de la commande est supposée infinie. Les imperfections des éléments de commutation et les erreurs de modélisation font en sorte que cette fréquence soit finie et variable. Ceci donne naissance au phénomène de broutement ("chattering") qui est indésirable. Dans ce cas, la condition de glissement (2.1d) devient [18]:

$$L_F(x,u) s^T s \leq -\eta |s| \quad (2.1g)$$

où η est une matrice diagonale donnée par:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \dots & 0 \\ 0 & \eta_{2,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \eta_m \end{bmatrix} \quad (2.1h)$$

Le choix du gain η_i détermine la rapidité d'apparition du régime glissant du sous système i , pour i allant de 1 à m . En pratique, il est du même ordre de grandeur que pour un fonctionnement optimal.

Le temps t_i que met la trajectoire d'état de chaque sous système i , pour atteindre la surface $s_i = 0$, s'obtient en intégrant l'inéquation (2.1g), tel que:

$$t_i \leq \frac{|s_i(0)|}{\eta_i} \quad (2.1i)$$

2.1.2 CAS DISCRET

La condition d'invariance de $s(x)$, pour le système (1.2b) avec une commande continue, s'écrit en temps discret à l'instant k [22], [23], [24]:

$$s(F(x(k), U_{eq}(k))) - s(x(k)) = 0 \quad (2.2a)$$

où $u_{eq}(k)$ est la commande équivalente. Une condition nécessaire, pour la validité de (2.2a), est telle que la matrice [22]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial U_j} \left[s_i(F(x(k), U(k))) \right] \right]_{(i,j)} \quad (2.2b)$$

soit localement non singulière.

Si la commande du système (1.2b) est discontinue, alors les conditions suffisantes d'existence du régime glissant idéal discret, au voisinage du domaine D , sont données par les inégalités suivantes:

$$\left. \begin{aligned} s(F(x(k), U^+(k))) - s(x(k)) &< 0 \\ s(F(x(k), U^-(k))) - s(x(k)) &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2c)$$

ou encore:

$$|s(F(x(k), U(k)))| - |s(x(k))| < 0 \quad (2.2d)$$

Il est facile de vérifier, à l'aide du théorème de la fonction implicite, que l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.2a) dépendent de la condition (2.2b). La démonstration de la relation (2.2d) s'effectue à partir de la fonction de Lyapunov V_k et sa première différence comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\ &= \frac{1}{2} s^T(k+1) s(k+1) - \frac{1}{2} s^T(k) s(k) \end{aligned} \quad (2.2e)$$

en développant, nous aurons :

$$\Delta V = \frac{1}{2} s^T(k) \Delta s(k) + \frac{1}{2} \Delta s^T(k) s(k+1) \quad (2.2f)$$

d'où :

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left[s^T(k) \left[s(k+1) - s(k) \right] + \left[s(k+1) - s(k) \right]^T s(k+1) \right] \quad (2.2g)$$

La première différence ΔV est inférieure à zéro si la partie droite de l'équation (2.2g) est une quantité négative, telle que :

$$|s(k+1)| - |s(k)| < 0$$

En régime glissant discret, en plus des erreurs dues aux dynamiques négligées, la commande est calculée à des instants discrets puis appliquée au système continu durant la période d'échantillonnage Δt . Ceci implique inévitablement un régime glissant non idéal qui donne naissance au phénomène de broutement comme dans le cas continu.

2.13 COMPARAISON DES DEUX TYPES DE RÉGIMES

En temps discret, la différence entre deux instants consécutifs, appelée période d'échantillonnage Δt , est prise constante telle que:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t = (k+1)\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.3a)$$

souvent, une notation, qui rappelle le cas continu, est utilisée en posant :

$$\frac{\Delta x(k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} \quad (2.3b)$$

en discret, L'opérateur $\frac{\Delta}{\Delta t}$ est analogue à l'opérateur $\frac{d}{dt}$ en continu. Donc la dérivée de Lie donnée par la relation:

$$L_F s = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]^T \dot{x} \quad (2.3c)$$

devient en discret :

$$\Delta s(k) = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]^T \Delta x(k) \quad (2.3d)$$

sachant que Δ est l'opérateur différence avant, la quantité $\Delta s(k)$ s'écrit:

$$\Delta s = s(k+1) - s(k) \quad (2.3e)$$

avec [22]:

$$s(k+1) = s(F) = (s \circ F)(x) \quad (2.3f)$$

où le symbole " \circ " est l'opérateur de composition des fonctions et s et F représentent, respectivement, $s(k)$ et $F(x(k), U(k))$.

De cette analyse simple, il s'ensuit, que l'opérateur de Lie " L " en continu, correspond à l'opérateur composition " \circ " en discret. La condition (2.2b) s'obtient facilement de l'expression (2.1b). En effet, à partir des relations (2.3c), (2.3d), (2.3e), et (2.3f), il est possible d'écrire, pour chaque sous système, l'égalité suivante:

$$\frac{\partial}{\partial U_j} (\Delta s_i(k)) = \frac{\partial}{\partial U_j} (s_i \circ F)(x) - \frac{\partial}{\partial U_j} s_i(k) \quad (2.3g)$$

le deuxième terme de la partie droite de l'égalité (2.3g) étant nul, celle-ci devient:

$$\frac{\partial}{\partial U_j} (\Delta s_i(k)) = \frac{\partial}{\partial U_j} \left[(s_i \circ F)(x) \right] \quad (2.3h)$$

La relation (2.3h) permet, facilement, de transposer les résultats, obtenus en continu, au cas discret. La démarche inverse reste aussi vraie.

2.2 CAS MONOVARIABLE

On considère la classe des systèmes continus de la forme suivante:

$$\dot{x} = F(x, U) \quad (2.4a)$$

$$y = h(x) \quad (2.4b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont, respectivement l'état, la commande et la sortie du système.

2.2.1 DÉFINITIONS

2.2.1.1 DEGRÉ RELATIF

Le système (2.4) est dit de degré relatif r au point x_0 si :

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial U} \left[L_F y^k \right]_{x=x_0} = 0, \quad k < r - 1 \quad (2.5a)$$

$$ii) \quad \frac{\partial}{\partial U} \left[L_F y^{r-1} \right]_{x=x_0} \neq 0, \quad (2.5b)$$

Le degré relatif détermine le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie du système pour faire apparaître la commande.

En effet, la première dérivée de la sortie y s'écrit :

$$y^{(1)} = \left[L_F y \right]_{x=x_0}$$

si $\frac{\partial}{\partial U} \left[L_F y \right]_{x=x_0} \neq 0$, alors $r = 1$, sinon il faut encore dériver :

$$y^{(2)} = \left[L_F y^{(1)} \right]_{x=x_0}$$

si $\frac{\partial}{\partial U} \left[L_F y^{(1)} \right]_{x=x_0} \neq 0$, alors $r=2$, sinon il faut continuer à

dériver jusqu'à $k = r-1$:

$$y^{(r)} = \left[L_F y^{(r-1)} \right]_{x=x_0}$$

avec:

$$\frac{\partial}{\partial U} \left[L_F y^{(r-1)} \right]_{x=x_0} \neq 0 \quad \text{et } r = k + 1$$

Remarques:

Si la sortie y dépend de U , alors le degré relatif r est défini zéro.

En régime glissant discret, le degré relatif se déduit à partir de (2.3) et (2.5) et on retrouve facilement la définition de Sira-Ramirez [22]:

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial U} \left[\left[h \circ F^k \right] \right]_{x=x_0} = 0, \quad k < r - 1 \quad (2.5c)$$

$$\text{ii) } \frac{\partial}{\partial U} \left[\left(h \circ F^{r-1} \right) \right]_{x=x_0} \neq 0 \quad (2.5d)$$

dans ce cas, k désigne le temps discret et le degré relatif r détermine le temps que met la commande pour influencer la sortie du système.

En appliquant (2.5a) et (2.5b) aux systèmes linéaires par rapport à la commande:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) U \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

on retrouve les relations, du degré relatif, définies au point x_0 par Isidori [3]:

$$\text{i) } L_g \left[L_f^k h(x) \right] = 0, \quad k < r - 1 \quad (2.5e)$$

$$\text{ii) } L_g \left[L_f^{r-1} h(x) \right] \neq 0 \quad (2.5f)$$

Le degré relatif des systèmes linéaires correspond à l'excès des pôles sur les zéros de la fonction de transfert.

Si les dérivées de la commande U n'apparaissent dans aucune des dérivées successives de la sortie y , le degré relatif est dit statique.

2.2.12 FORME NORMALE

Soit r le degré relatif du système (2.4) au point x_0 . On pose:

$$z_i = \Phi_i(x) = L_F^{i-1} h(x), \quad i = 1, \dots, r \quad (2.6a)$$

Il est toujours possible de choisir $(n-r)$ fonctions $\bar{\Phi}_{r+1}, \dots, \bar{\Phi}_n$, telle que:

i) l'application $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ soit un difféomorphisme local.

$$\text{ii) } \frac{\partial \bar{\Phi}_{r+p}}{\partial U} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n-r \quad (2.6b)$$

Dans ce cas, le système (2.4) est décrit, dans les coordonnées normales (2.6) au point $z_0 = \Phi(x)$, par les équations suivantes:

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (2.7a)$$

$$\dot{z}_r = L_F^r h(x) = L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \quad (2.7b)$$

$$\dot{z}_{r+p} = q_p(z_1, \dots, z_n), \quad p = 1, 2, \dots, n-r \quad (2.7c)$$

$$y = z_1 \quad (2.7d)$$

où:

$$\xi = (z_1, z_2, \dots, z_r), \quad \eta = (z_{r+1}, \dots, z_n), \quad Z = (\xi, \eta)^T$$

cette forme s'appelle forme normale.

Dans le cas où $r = n$, il s'agit de la linéarisation exacte par difféomorphisme.

2.2.13 LA DYNAMIQUE DES ZÉROS

Soit $U = \gamma(z)$ la commande qui amène z_0 , en un temps infiniment petit, vers la surface $h(x) = 0$ et l'y maintient. Les composantes du vecteur ξ (2.7) sont mises à zéro pour tout $t > t_0$. En vertu du théorème de la fonction implicite, la commande U doit vérifier l'équation suivante:

$$L_F^r h(\Phi^{-1}(z), \gamma(z)) = 0 \quad (2.8a)$$

Dans ce cas, chaque point de la surface $h(x) = 0$ est exprimé en coordonnées normales par le couple $(0, \eta)$. Si l'équation (2.8) est vérifiée localement pour tout $t > t_0$, le système (2.4) est décrit par la dynamique suivante [3]:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta) \quad , \xi(0) = 0 \quad , \eta(0) = \eta_0 \quad (2.8b)$$

Cette équation représente la dynamique interne du système, lorsque l'entrée et les conditions initiales sont choisies de telle manière que la sortie soit égale à zéro. Une telle dynamique s'appelle la dynamique des zéros. Elle dépend de la nature de la surface $h(x) = 0$. Si cette dynamique est asymptotiquement stable, le système est dit à *phase minimale*. Autrement, il est à *phase non minimale*.

Dans le cas des systèmes linéaires, il s'agit de la dynamique des zéros de transmission.

2.2.2 SYSTÈMES À DEGRÉ RELATIF UN

L'analyse effectuée aux paragraphes précédents, montre la possibilité de l'existence d'un régime glissant dans le domaine D , pour une surface glissante $h(x)$. Ce régime existe si, pour toute valeur initiale définie dans ce domaine, le système (2.4) satisfait localement la condition suivante:

$$\frac{\partial}{\partial U} \left[L_{F(x,U)} h(x) \right]_{x=x_0} \neq 0 \quad (2.9)$$

En effet, supposons que la commande équivalente est définie par la (2.1a), alors (2.9) est toujours vérifiée et constitue une condition nécessaire, mais non suffisante, pour l'existence du régime glissant statique.

Définition 2.1 [22]:

la loi de commande qui maintient la trajectoire d'état du système (2.4) dans le domaine d'existence du régime glissant sur une surface glissante $h(x)$, s'appelle la **commande équivalente** $u_{\text{eq}}(x)$. Dans ce cas, la dynamique du système (2.4) est représentée par une trajectoire en régime glissant idéal [1]. Cette notion coïncide avec celle de la dynamique des zéros du système (2.4). Une telle trajectoire est décrite par les équations suivantes:

$$\dot{x} = F(x, u_{\text{eq}}(x)) \quad (2.10a)$$

$$y = h(x) = 0 \quad (2.10b)$$

Ceci implique que la surface $h(x)$ est invariante par rapport au régime glissant idéal (2.10).

Proposition 2.1:

si le degré relatif du système (2.4) est égal à 1 alors la commande équivalente existe et elle est unique.

Preuve:

si le système (2.4) a un degré relatif 1 alors la condition (2.9) est vérifiée pour tout x appartenant à l'ouvert X de \mathbb{R}^n et pour tout U appartenant à l'ouvert U de \mathbb{R} . Pour une surface glissante $h(x)$, l'équation différentielle:

$$L_{F(x,U)} h(x) = 0 \quad (2.11)$$

définie pour tout $x \in D$, possède, en vertu du théorème de la fonction implicite [3], une solution unique $U = U_{\text{eq}}(x)$.

Théorème 1:

si le degré relatif du système (2.4) est 1 et la loi de commande est discontinue, donnée par une logique de commutation selon (1.1), alors une condition suffisante d'existence du régime glissant sur $h(x) = 0$ est donnée par la relation suivante:

$$U^-(x) < U_{\text{eq}}(x) < U^+(x) \quad (2.12)$$

preuve:

supposons que le régime glissant existe localement sur $h(x) = 0$, pour la commande discontinue (1.1), alors nécessairement les conditions (2.9) et (2.10) sont vérifiées. Le degré relatif du système est 1, donc la condition (2.11) est toujours vérifiée. Il s'ensuit que la commande équivalente $u_{\text{eq}}(x)$ existe et elle est unique.

On considère la commande suivante:

$$U^\alpha(x) = \alpha U^+(x) + (1-\alpha) U^-(x) \quad (2.13a)$$

pour $\alpha \in \{0, 1\}$, il existe une valeur $\alpha_{\text{éq}}$ qui dépend de x telle que:

$$U^{\alpha_{\text{éq}}}(x) = \alpha_{\text{éq}} U^+(x) + (1-\alpha_{\text{éq}}) U^-(x) \quad (2.13b)$$

où $U^{\alpha_{\text{éq}}}(x)$ est la commande équivalente $U_{\text{éq}}(x)$. La valeur de $\alpha_{\text{éq}}$ est déterminée à partir du théorème de Filippov [25]:

$$\alpha_{\text{éq}} = \frac{L_{F(x, U^-)} h(x)}{L_{F(x, U^-)} h(x) + L_{F(x, U^+)} h(x)} \quad (2.13c)$$

la relation (1.1) s'écrit:

$$U^+ - U^- = \Delta U \quad (2.13d)$$

de (2.13b), (2.13c) et (2.11) on obtient:

$$U_{\text{éq}}(x) = \frac{L_{F^-} h(x)}{L_{F^-} h(x) + L_{F^+} h(x)} U^+(x) + \frac{L_{F^+} h(x)}{L_{F^-} h(x) + L_{F^+} h(x)} U^-(x) \quad (2.13e)$$

où F^+ et F^- représentent, respectivement $F(x, U^+)$ et $F(x, U^-)$. La condition (2.12) s'obtient facilement à partir de (2.13d) et (2.13e).

2.2.3 SYSTÈMES À DEGRÉ RELATIF SUPÉRIEUR À UN

Dans ce cas, pour permettre au système d'évoluer sur la surface $h(x) = 0$, il est possible de créer un régime glissant statique en choisissant, pour la surface glissante $s(x)$, la forme suivante en coordonnées normales Z_1, \dots, Z_n [3]:

$$s(Z) = Z_r + c_{r-1} Z_{r-1} + \dots + c_2 Z_2 + c_1 Z_1 \quad (2.14)$$

avec:

$$\frac{\partial}{\partial U} \left[L_{F(x, U)}^{s(x)} \right]_{x=x_0} \neq 0 \quad (2.15)$$

Le système (2.4) possède, localement par rapport à $s(x)$, un degré relatif égal à 1. Par conséquent, un régime glissant local existe sur la surface $s(x) = 0$ tel que:

$$Z_r = -c_{r-1} Z_{r-1} \dots -c_2 Z_2 -c_1 Z_1 \quad (2.16)$$

Le régime glissant idéal, ou la dynamique des zéros associé à la surface glissante $s(x)$, se présente comme suit:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-2 \quad (2.17a)$$

$$\dot{Z}_{r-1} = -c_{r-1} Z_{r-1} \dots -c_2 Z_2 -c_1 Z_1 \quad (2.17b)$$

$$\dot{Z}_{r+p} = q_p(Z_1, \dots, Z_n), \quad p = 1, 2, \dots, n-r \quad (2.17c)$$

$$y = Z_1, \quad s(Z) = 0 \quad (2.17d)$$

si les équations (2.15c) sont asymptotiquement stables, alors par un choix approprié des coefficients C_1, \dots, C_{r-1} , il est possible d'obtenir un mouvement stable pour les premières $r-1$ équations différentielles linéaires. Le régime glissant idéal, qui prend naissance sur la surface $s(x)$ oblige la sortie y du système et ses $r-1$ premières dérivées à tendre vers zéro. En d'autres termes le vecteur d'état du système tend vers la surface glissante $h(x) = 0$.

Remarques:

Si le degré relatif r est égal à la dimension du système n , on parle alors de *linéarisation exacte en régime glissant*.

Dans le cas de la poursuite, le système réduit (2.17) peut être interprété comme un système inverse [34].

2.3 CAS MULTIVARIABLE

Les résultats obtenus dans le cas du système monovariante peuvent être transposés au cas d'un système carré et découplé de la forme (1.2a).

2.3.1 DEGRÉ RELATIF VECTORIEL

Le système multivariable (1.2a) est dit localement de degré relatif vectoriel (r_1, \dots, r_m) si, pour chaque j , nous avons:

$$i) \frac{\partial}{\partial u_j} \left[L_F y_j^k \right]_{x=x_0} = 0, \quad k < r_j - 1 \quad (2.18a)$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial u_j} \left[L_F y_j^{r_j-1} \right] \neq 0 \quad (2.18b)$$

avec:

$$j = 1, \dots, m$$

2.3.2. FORME NORMALE

les coordonnées normales sont données, en fonction du difféomorphisme local, pour chaque j , par les relations suivantes:

$$Z_{i,j} = \Phi_{i,j}(x) = L_F^{i-1} h_j(x), \quad i=1, \dots, r_j \quad (2.19a)$$

avec :

$$r = \sum_1^m r_j$$

$$n = \sum_1^m n_j$$

Pour $n_j \geq r_j$, il est toujours possible de choisir, pour chaque j , $(n_j - r_j)$ fonctions $\Phi_{(r_j+1,j)}, \dots, \Phi_{(n_j,j)}$, telles que:

i) l'application $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_j, \dots, \Phi_m)$ soit un difféomorphisme local avec $\Phi_j = (\Phi_{(1,j)}, \dots, \Phi_{(n_j,j)})$.

$$\text{ii) } \left. \frac{\partial \Phi_{(r_j+p,j)}}{\partial U_j} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \text{pour chaque } j \quad (2.19b)$$

avec:

$$j = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad p = 1, \dots, n_j - r_j$$

Pour un tel choix, la forme normale du système (1.2a) se présente, pour chaque j , comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{1,j} &= Z_{2,j} \\ \dot{Z}_{2,j} &= Z_{3,j} \\ &\vdots \\ \dot{Z}_{r_j,j} &= L_F^{r_j} h_j(\Phi^{-1}(z), U), \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\dot{Z}_{r_j+p,j} = g_{p,j}(\xi, \eta), \quad p=1, \dots, n_j - r_j \quad (2.20b)$$

$$y_j = Z_{1,j} \quad (2.20c)$$

où:

$$\xi_j = (Z_{(1,j)}, Z_{(2,j)}, \dots, Z_{(r_j,j)}) \quad (2.20d)$$

$$\eta_j = (Z_{(r_j+1,j)}, \dots, Z_{(n_j,j)}) \quad \text{et} \quad Z_j = (\xi_j, \eta_j) \quad (2.20e)$$

$$Z = (Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_m)^T \quad (2.20f)$$

2.3.3 DESCRIPTION DES RÉGIMES GLISSANTS

Le système multivariable est supposé carré et découplé. Dans ce cas, la matrice de découplage (2.1b) est une matrice diagonale. Pour permettre au système (1.2a) d'évoluer sur la surface $h(x)$, telle que:

$$h(x) = \left[h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x) \right]^T = 0 \quad (2.21)$$

il faut choisir, pour la commande discontinue (1.1), m surfaces glissantes ayant la forme suivante:

$$s_j(Z) = Zr_{j,j} + Cr_{j-1,j} Zr_{j-1,j} \dots + \\ + Cz_{,j} Zz_{,j} + C1_{,j} Z1_{,j} \quad (2.22)$$

où chaque surface glissante $s_j(Z)$ représente un polynôme de Hurwitz et chaque élément de la matrice diagonale de découplage (2.1b) vérifie la condition suivante:

$$\frac{\partial}{\partial U_j} L_{F(x,U)}^{s_j(x)} \neq 0, \quad (2.23)$$

De cette façon, un régime glissant idéal (ou une dynamique des zéros), sera associé localement, à chaque surface glissante $s_j(x)$, telle que :

$$s(Z) = \left[s_1(Z), s_2(Z), \dots, s_m(Z) \right]^T = 0 \quad (2.24)$$

Ces dynamiques, sont décrites par :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{1,j} &= Z_{2,j} & j &= 1, \dots, m \\ \dot{Z}_{2,j} &= Z_{3,j} \\ &\vdots \\ \dot{Z}_{r_{j-1},j} &= -C_{r_{j-1},j} Z_{r_{j-1},j} - \dots - \\ &\quad - C_{2,j} Z_{2,j} + C_{1,j} Z_{1,j} \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\dot{Z}_{r_{j+p},j} = a_{p,j}(\xi, \eta), \quad p = 1, \dots, n_j - r_j \quad (2.25b)$$

$$y_j = Z_{1,j} \text{ et } s_j(Z) = 0, \quad (2.25c)$$

Si les équations (2.25b) sont asymptotiquement stables, alors on obtient sur chaque surface $s_j(x)$ un régime glissant idéal stable, identique à celui du cas du système monovarié, décrit par les équations (2.17).

Dans le cas où $r = n$, on obtient une linéarisation exacte en régime glissant. Le système en boucle fermée se compose de m sous systèmes linéaires (par rapport à la variable d'état Z) et libres.

2.4. APPLICATION À LA MACHINE ASYNCHRONE

2.4.1. MODÈLE DE LA MACHINE

Le modèle utilisé est vectoriel. La machine asynchrone est alimentée par un onduleur de tension (commandé en courant en mode MLI). Le modèle vectoriel est donné par des équations différentielles dans le repère (d,q) ayant comme axe de référence le vecteur du courant magnétisant rotorique (imr), représentant l'image du flux de la machine [7], [26], [35]:

$$\frac{di_{ds}}{dt} = -\alpha i_{ds} + \omega_{mr} i_{qs} + \beta i_{dref} \quad (2.26a)$$

$$\frac{di_{qs}}{dt} = -\alpha i_{qs} - \omega_{mr} i_{ds} + \beta i_{qref} \quad (2.26b)$$

$$\frac{di_{mr}}{dt} = \frac{1}{T_r} i_{ds} - \frac{1}{T_r} i_{mr} \quad (2.26c)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_o}{J} i_{qs} i_{mr} - \frac{C_r}{J} \quad (2.26d)$$

où :

$$\omega_{mr} = p \omega_m + \frac{i_{qs}}{T_r i_{mr}} \quad (2.26e)$$

$$\alpha = \frac{1 + \alpha_1}{\sigma T_s}, \quad \alpha_1 = \frac{K E}{R_s}, \quad \beta = \alpha - \frac{1}{\sigma T_s}, \quad T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (2.26f)$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1+\sigma_r)(1+\sigma_s)}, \quad K_o = \frac{2 p M}{1 + \sigma_r}, \quad T_s = \frac{L_s}{R_s} \quad (2.26g)$$

i_{ds}, i_{qs} : les courants statoriques dans le repère (d,q)

i_{mr} : le courant magnétisant rotorique

R_s, R_r : les résistances statorique et rotorique

J : l'inertie

M : l'inductance mutuelle

L_s, L_r : les inductances statorique et rotorique

K, E : gain et tension à l'entrée de l'onduleur

p : le nombre de paires de pôles

σ_s, σ_r : le coefficient de fuite statorique et rotorique

ω_m : la vitesse mécanique

C_r : le couple résistant

Pour passer à la représentation d'état, le vecteur d'état x et la commande U sont définis, tels que:

$$x = (i_{ds}, i_{qs}, i_{mr}, \omega_m)$$

$$U = (i_{dref}, i_{qref})$$

$F(x, U)$ a la forme suivante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} U \quad (2.27)$$

où:

$$f_1 = -\alpha x_1 + \omega_{mr} x_2$$

$$f_2 = -\alpha x_2 - \omega_{mr} x_1$$

$$f_3 = \frac{1}{T_r} x_1 - \frac{1}{T_r} x_3$$

$$f_4 = \frac{K_o}{J} x_2 x_3 - \frac{C_r}{J}$$

$$g_1 = (\beta, 0), \quad g_2 = (0, \beta)$$

$$g_3 = (0, 0), \quad g_4 = (0, 0)$$

L'objectif de la commande est l'asservissement de la vitesse mécanique (ω_m). Pour garantir un bon fonctionnement à la machine, le courant magnétisant rotorique (i_{mr}) doit être maintenu constant. Ainsi nous sommes en présence des deux sorties suivantes:

$$y_1 = i_{mr} = x_3, \quad y_2 = \omega_m = x_4 \quad (2.28)$$

2.4.2. CALCUL DE LA COMMANDE

le degré relatif de chaque sortie, y_1 et y_2 , est 2. Les variables d'état des erreurs sont définies telles que:

$$e_1 = y_d - \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = y_d - x_{34} \quad (2.29a)$$

$$e_2 = - \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = -f_{34} \quad (2.29b)$$

où y_d est le vecteur de la sortie désirée. La forme normale s'écrit donc:

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (2.30a)$$

$$\dot{e}_2 = A_2 e_2 - A_1 e_1 + A_y y_d - A_c C_r - A_u U \quad (2.30b)$$

où:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha - \frac{1}{T_r} & \frac{J \omega_{mr}}{K_o T_r x_3} \\ -\frac{K_o T_r}{J} x_3 \omega_{mr} & \frac{f_3}{x_3} - \alpha \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{T_r} & , 0 \\ \frac{K_o}{J} x_3 \omega_{mr} & , 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{mr}}{K_0 T_r x_3} \\ \frac{f_3}{J x_3} - \frac{\alpha}{J} \end{bmatrix}, \quad A_u = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{T_r}, & 0 \\ 0, & \frac{K_0 \beta}{J} x_3 \end{bmatrix}$$

$$A_y = A_1$$

$$\omega_{mr} = p x_4 + \frac{x_2}{T_r x_3}$$

La sortie désirée y_d et la grandeur C_r représentent, respectivement, des perturbations par la consigne et par la charge. La dynamique des zéros est décrite, à l'origine de l'espace d'état pour $\omega_{mr} = \omega_{mro}$, par l'équation suivante:

$$A_y y_d - A_c C_r - A_u U_{\phi q} = 0 \quad (2.31a)$$

avec:

$$\omega_{mro} = p y_{dz} + \frac{C_r}{K_0 T_r y_{d1}^2} \quad (2.31b)$$

$$x_{34} = \begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{dz} \end{bmatrix} \quad (2.31c)$$

La surface glissante est une combinaison des variables d'état e_1 et e_2 telles que:

$$s = e_2 + \lambda e_1 \quad (2.32a)$$

avec:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.32b)$$

Le régime glissant est obtenu pour $s = 0$. L'équation du système en régime glissant devient donc:

$$\dot{e}_1 = -\lambda e_1 \tag{2.33}$$

Pour le calcul de la commande U, deux approches sont possibles. La première est directe, elle consiste à faire apparaître la commande en dérivant l'équation (2.32). Alors que la deuxième est basée sur le système inverse [34]. Dans ce qui suit nous utiliserons la première approche. Ceci nécessite d'imposer au système la dynamique discontinue suivante:

$$\dot{s} = -M_s \text{sign}(s) \tag{2.34a}$$

A partir des relations (2.30) et (2.32) la commande U se présente sous la forme suivante:

$$U = A_u^{-1} \left[A_2 e_2 + (A_1 + \lambda) e_1 - A_1 y_d - A_c C_r + M_s \text{sign}(s) \right] \tag{2.34b}$$

A partir de cette équation, nous pouvons déduire le schéma fonctionnel suivant:

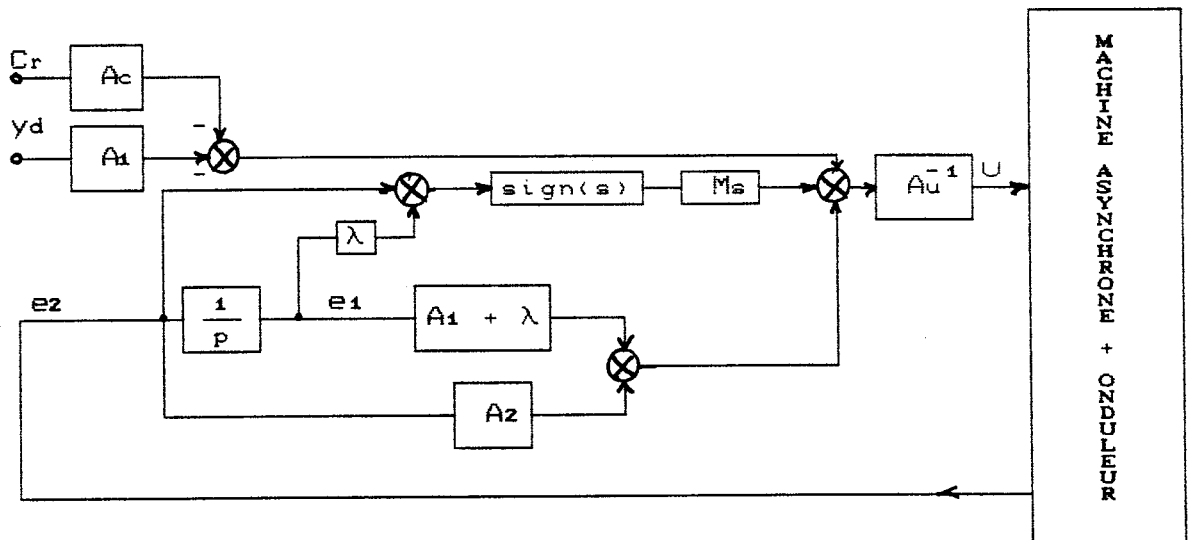


Figure 2.1.- schéma fonctionnel de la commande

La méthode de simulation du système commandé en numérique est donnée par L'algorithme suivant:

- 1°-Echantillonnage du système continu à l'instant $t=k\Delta t$, et saisie de la sortie continue y_{cont} .
- 2°-Partition de Δt en r sous intervalles et calcul de la sortie (du système exacte) discrétisé y_{dis} à l'instant $t = (k+1)\Delta t$ selon la relation:

$$y_{dis} \left[k + \frac{i}{r} \right] = y_{dis} \left[k + \frac{i-1}{r} \right] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F_{i-1} d\tau$$

avec:

$$F_{i-1} = F \left[k + \frac{i-1}{r} \right], \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$t_i = \left[k + \frac{i}{r} \right] \Delta t \quad t_{i-1} = \left[k + \frac{i-1}{r} \right] \Delta t$$

- 3°-Calcul de la commande U à l'instant $t = (k+1)\Delta t$ selon la relation (2.34b).
- 4°-Envoi de cette commande durant l'intervalle de temps Δt et ré-initialisation de la sortie du système continu, tel que : $y_{cont} = y_{dis}$ et $k = k + 1$.

2.4.3. RÉSULTAT DE LA SIMULATION

Les résultats de simulation sont présentés pour les valeurs initiales suivantes :

$$i_{ds0}=0, i_{qs0}=0, i_{mr0}=20, \omega_{m0}=0$$

Lors de la simulation, les instants d'occurrence des régimes glissants, pour les sorties y_1 et y_2 , ont été respectivement

choisis, tels que: $tr_1 = 0,01$ secondes et $tr_2 = 0,06$ secondes. Les gains nécessaires, pour amener les trajectoires du système vers les surfaces glissantes respectives, sont calculés à partir de la relation (2.1i), d'où: $Ms_1 = 11787$ et $Ms_2 = 1848$. Nous avons choisis deux types de perturbations: l'échelon idéal (EI) et l'échelon réel (ER). Chaque échelon a été retardé de 0.3 secondes. Le test de la robustesse a été effectué de trois façons:

- 1°-En perturbant le système par la consigne de la vitesse.
- 2°-En supposant des incertitudes sur les paramètres Tr et J de l'ordre de 100% .
- 3°-En variant instantanément, la charge Cr de zéro à sa valeur nominale.

Lors de la variation de la consigne de la vitesse, le courant magnétisant reste inchangé et la vitesse mécanique passe de 300 à -300 tours/min, en un intervalle de temps de l'ordre du $2/10$ de la seconde. Alors que les courants statoriques ne dépassent pas la valeur de 86 A (fig.2.4). Les valeurs de pointe des courants statoriques du système non perturbé (SNP) et du système perturbé (SP), pour un échelon idéal (EI) et un échelon réel (ER), sont résumés respectivement dans les tableaux (2.1a) (2.1b) et (2.1c).

Les variations des paramètres Tr et J n'ont, pratiquement aucune influence sur les sorties. Dans le cas de la variation de la charge Cr , de zéro à sa valeur nominale, la compensation de celle-ci, par son introduction dans la commande, provoque le passage de la commande i_{qref} de 5,99 à 42,92 [A] et du courant statorique i_{qs} de 0 à 34,21 [A], tel qu'indiqué par les figures 2.5 et 2.6 et les tableaux 2.1a, 2.1b et 2.1c.

Tableau 2.1a. - Valeurs de pointe des commandes i_{dref} et i_{qref} du système non perturbé (SNP) et du système perturbé (SP), pour un échelon idéal (EI) et un échelon réel (ER).

		i_{dref} [A]				i_{qref} [A]			
		max	min	finale		max	min	finale	
				moy	Δ			moy	Δ
SNP	E I	85,50	20,84	30,04	3,86	45,218	5,53	5,99	0,46
	E R	85,51	22,66	30,04	3,86	27,05	2,86	5,99	0,46
SP et EI	Tr	85,50	20,84	30,04	3,86	45,218	5,53	5,99	0,46
	J	85,50	20,84	30,04	3,86	45,218	5,53	5,99	0,46
	Cr	85,50	16,93	22,44	3,86	55,76	5,53	42,92	0,43
	Yd2	85,50	20,30	30,04	3,86	45,21	-56,95	-5,99	0,46

Tableau 2.1b. - Valeurs de pointe des courants stationnaires i_{ds} et i_{qs} du système non perturbé (SNP) et du système perturbé (SP), pour un échelon idéal et un échelon réel (ER).

		i_{ds} [A]				i_{qs} [A]			
		max	min	finale		max	min	finale	
				moy	Δ			moy	Δ
SNP	E I	79,43	0	27,99	2,32	38,58	-0,65	0	0,38
	E R	79,44	0	27,99	2,32	20,66	-0,38	0	0,38
SP et EI	Tr	79,43	0	27,99	2,32	38,588	-0,38	0	0,38
	J	79,43	0	27,99	2,32	38,588	-0,38	0	0,38
	Cr	79,43	0	27,99	2,32	46,77	-0,33	34,21	0,38
	Yd2	79,43	0	27,99	3,32	38,58	-50,29	-0	0,38

La variation de la charge provoque une chute de 14 % de la valeur établie de la vitesse mécanique puis un retour rapide avec, pratiquement, une erreur statique nulle.

Tableau 2.1c. - valeurs de pointe des sorties, i_{mr} et ω_m , du système non perturbé (SNP) et du système perturbé (SP), pour un échelon idéal (EI) et un échelon réel (ER).

		i_{mr} [A]				ω_m [tours/min]			
		max	min	finale		max	min	finale	
				moy	Δ			moy	Δ
SNP	E I	28,01	20	28,00	0,00	300,00	—	299,99	0,01
	E R	28,00	20	27,99	0,01	300,00	—	299,99	0,01
S P et	Tr	28,58	20	27,99	0,01	300,00	—	299,99	0,01
	J	28,01	20	27,99	0,01	300,00	—	299,99	0,01
	Cr	28,01	20	27,99	0,01	300,00	261,03	299,99	0,01
E I	yd2	79,43	20	27,99	0,01	300,00	-299,99	-299,99	0,01

Les temps de réponse et les gains nécessaires, pour atteindre les régimes glissants, sont présentés dans le tableau (2.1d).

Tableau 2.1d. - Temps de réponse t_r et gain M_d du SNP et du SP.

		i_{mr} [A]		ω_m [tours/min]	
		t_r [s]	M_d	t_r [s]	M_d
SNP	E I	0.018	11787	0,097	1848
	E R	0.018	11787	0.13	1848
S P et	Tr	0.018	11787	0,097	1848
	J	0.018	11787	0,097	1848
	Cr	0.018	11787	0,097	1848
E I	yd2	0.018	11787	0.194	1848

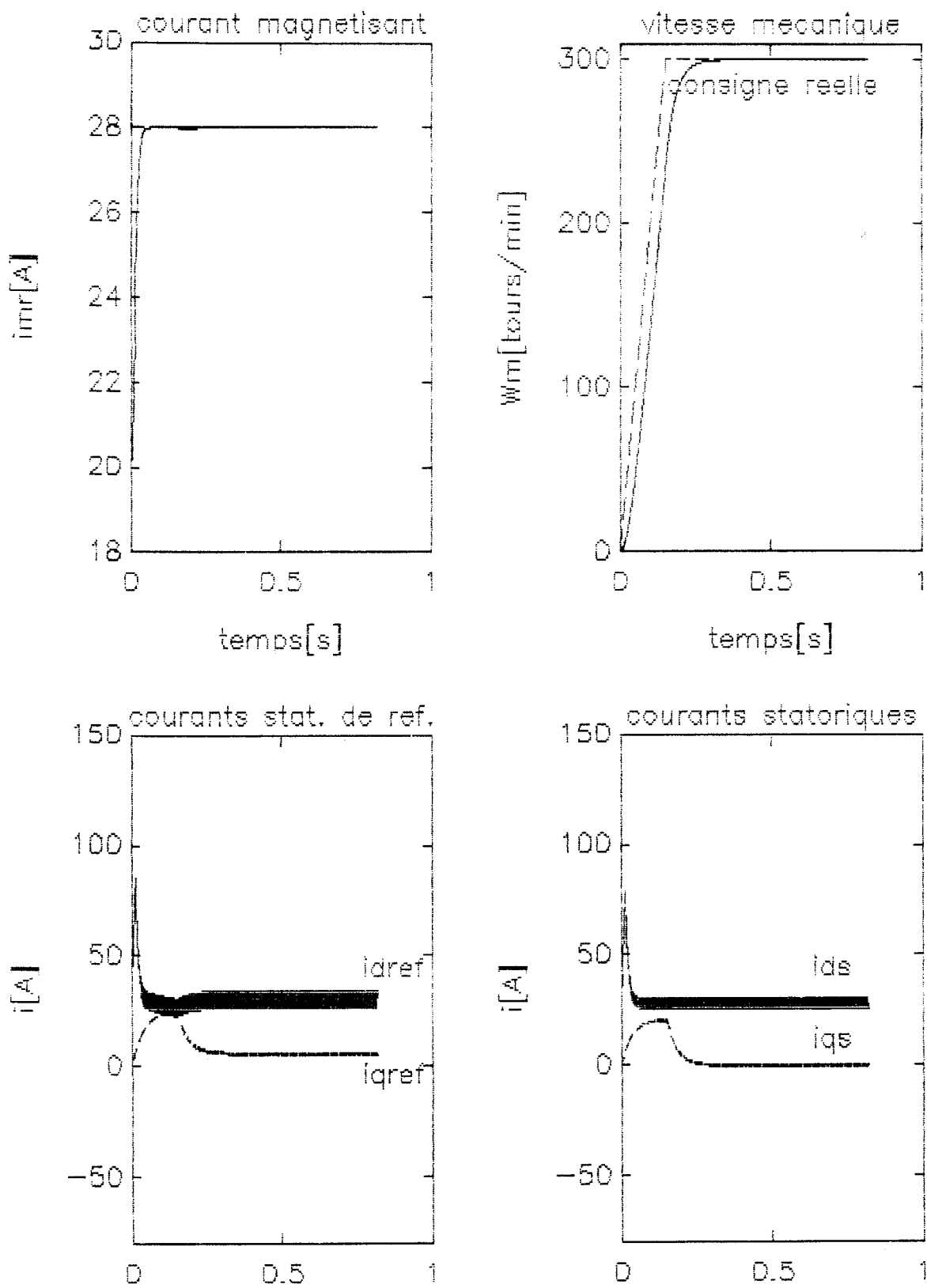


Figure 2.2.— RGS pour une consigne reelle de Wm

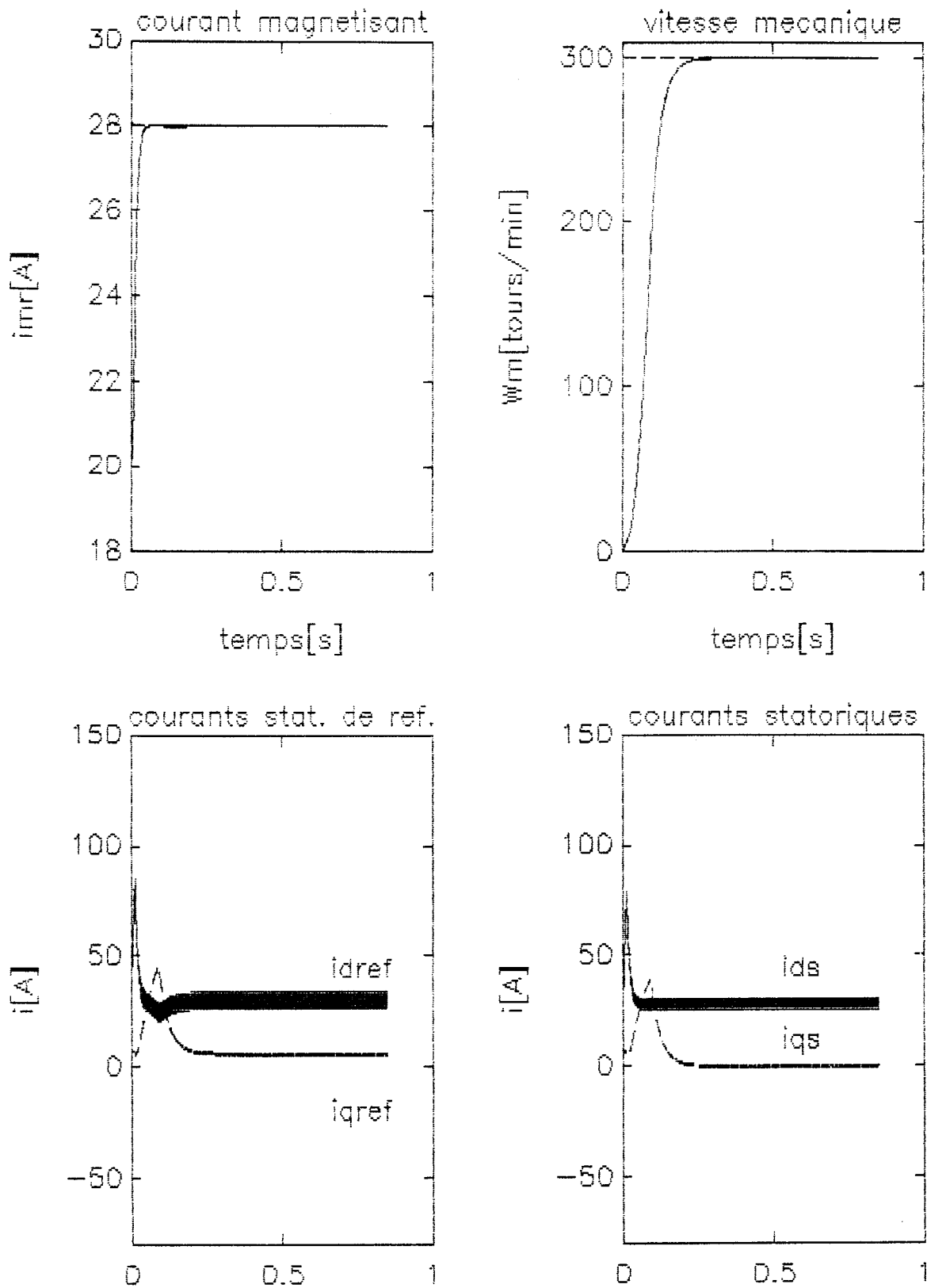


Figure 2.3.— RGS pour une consigne de Wm 300

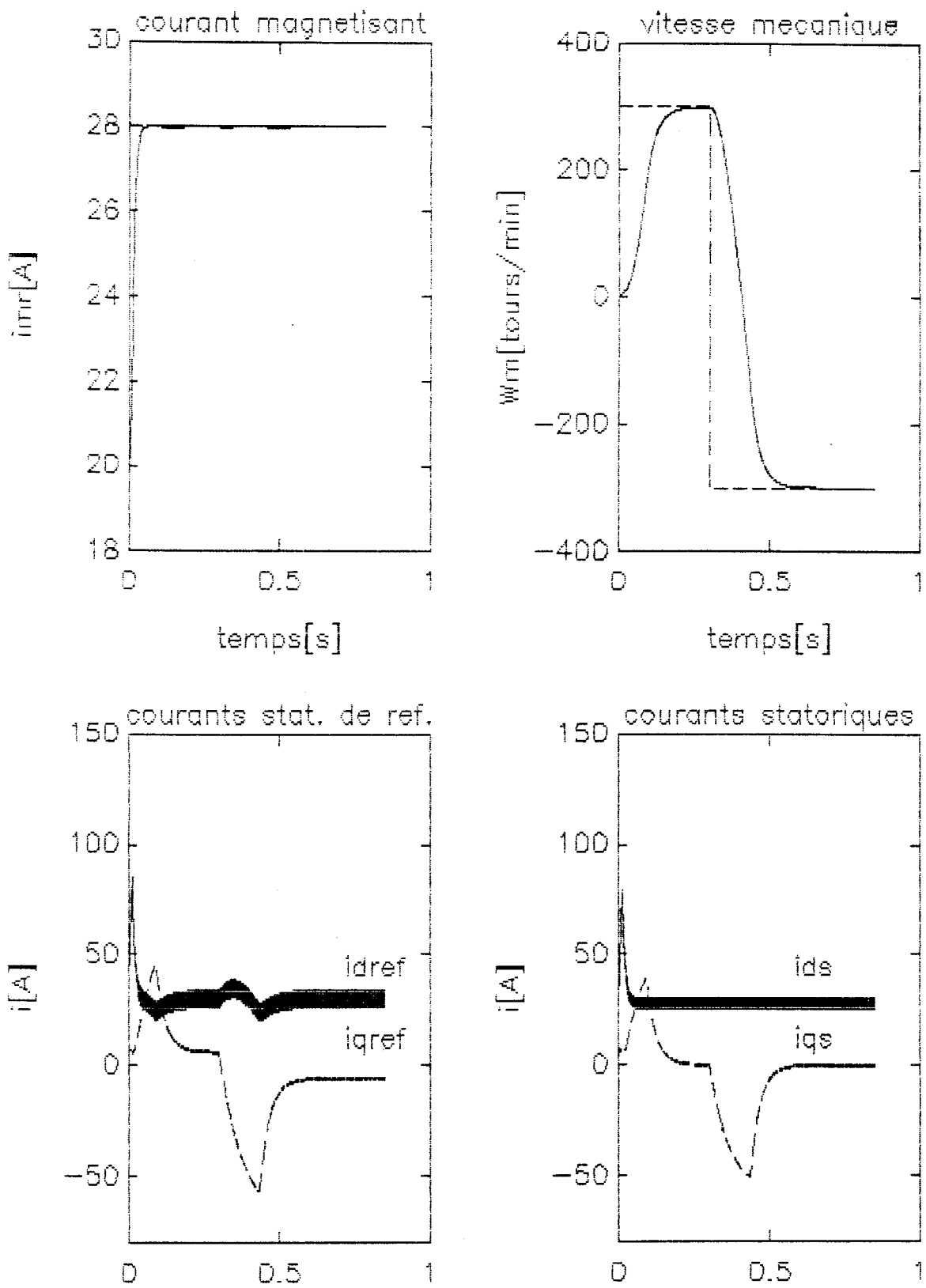


Figure 2.4. – RGS avec asservissement de vitesse

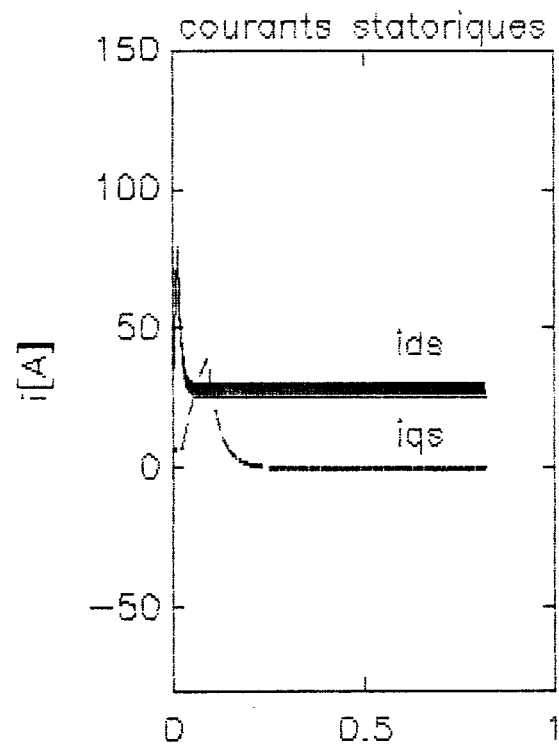
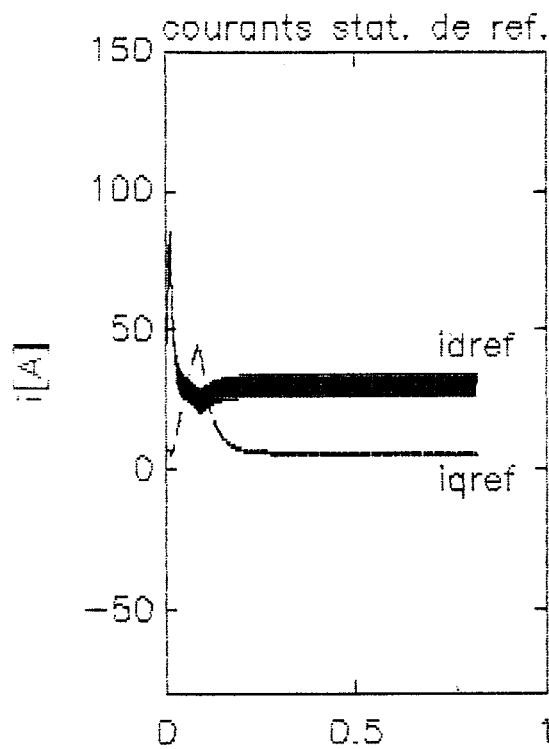
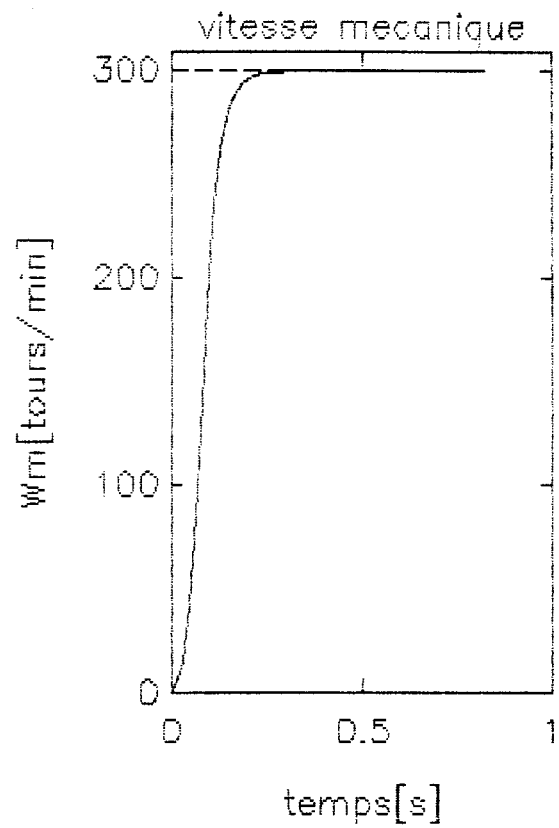
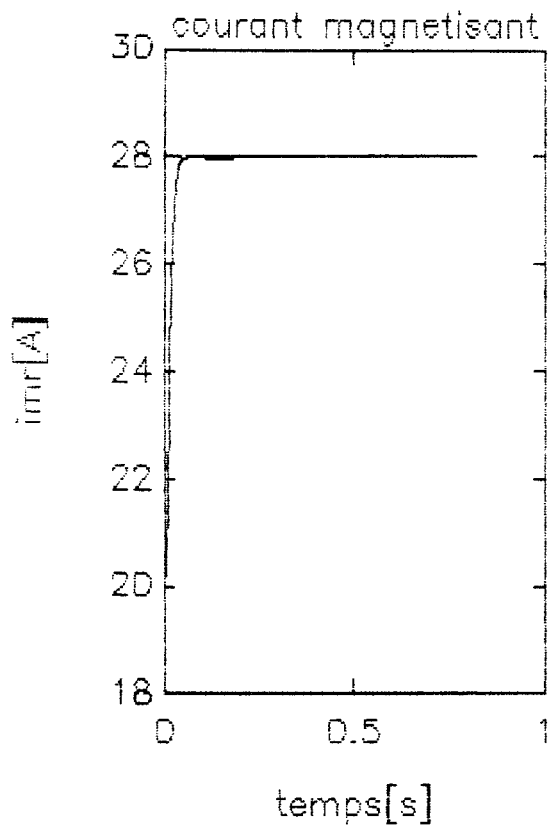


Figure 2.5.— RGS avec perturbation par T_r , ($T_r \rightarrow 2T_r$)

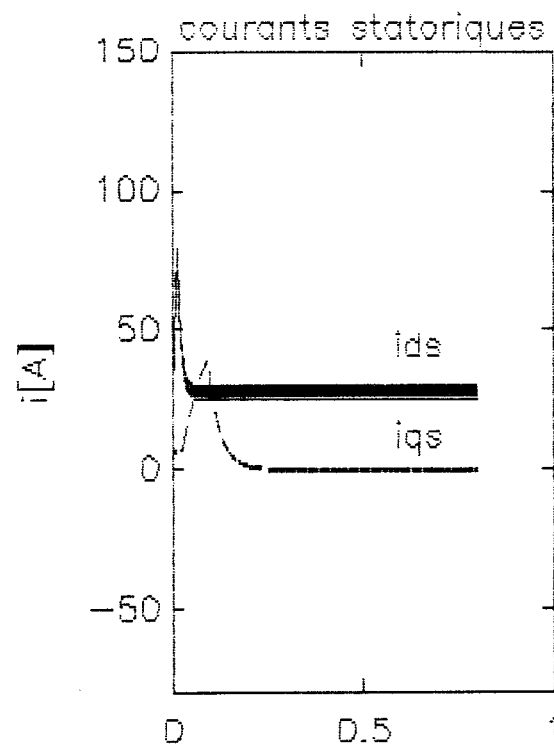
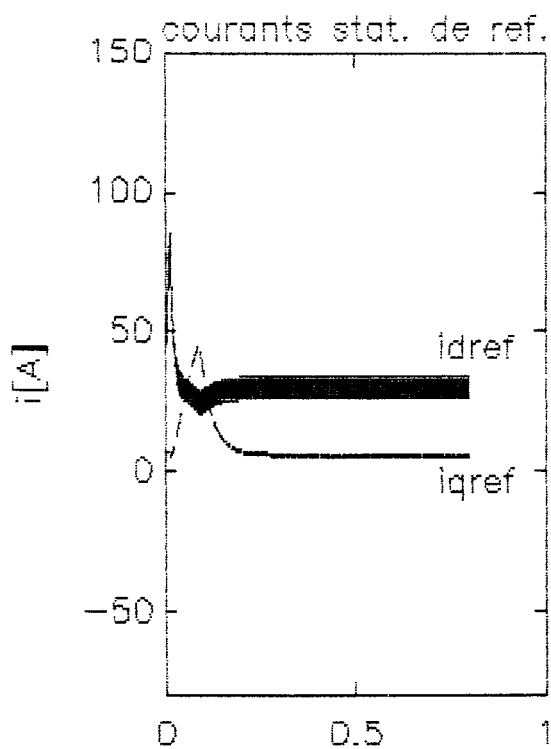
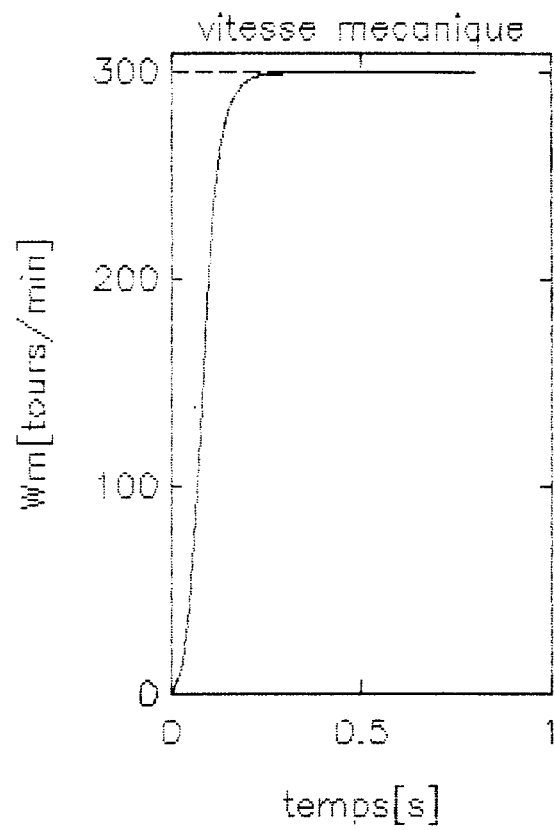
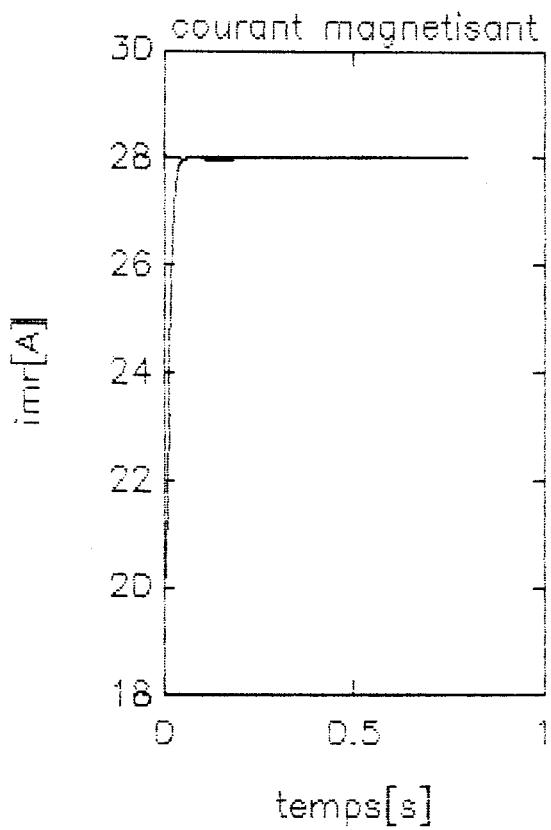


Figure 2.6.— RGS avec perturbation par J, ($J \rightarrow 2J$)

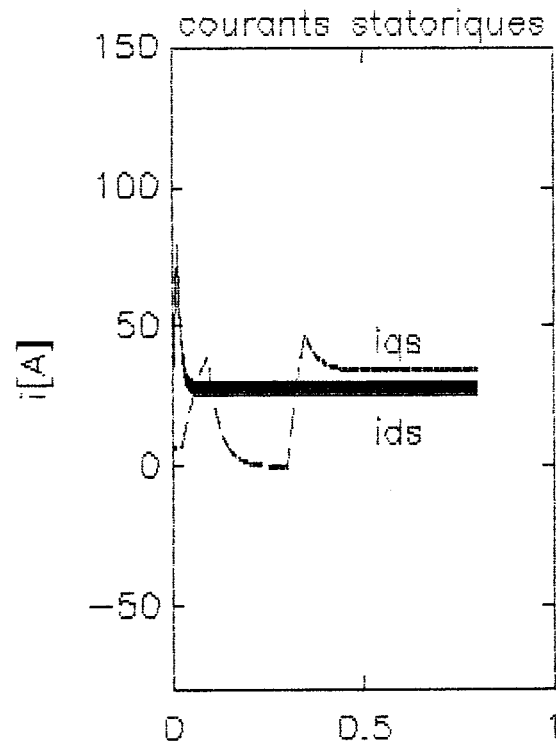
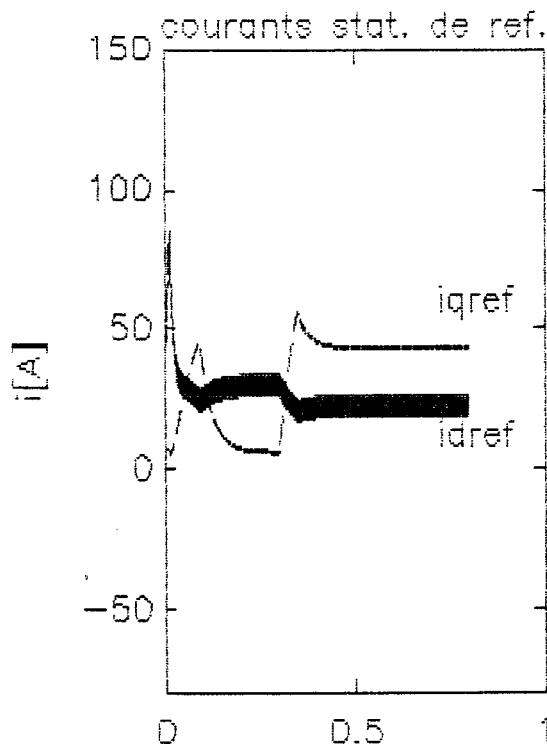
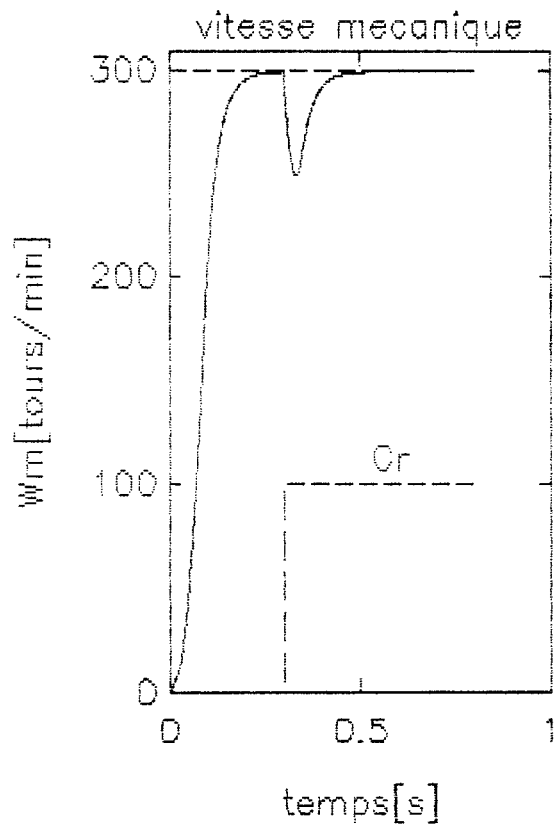
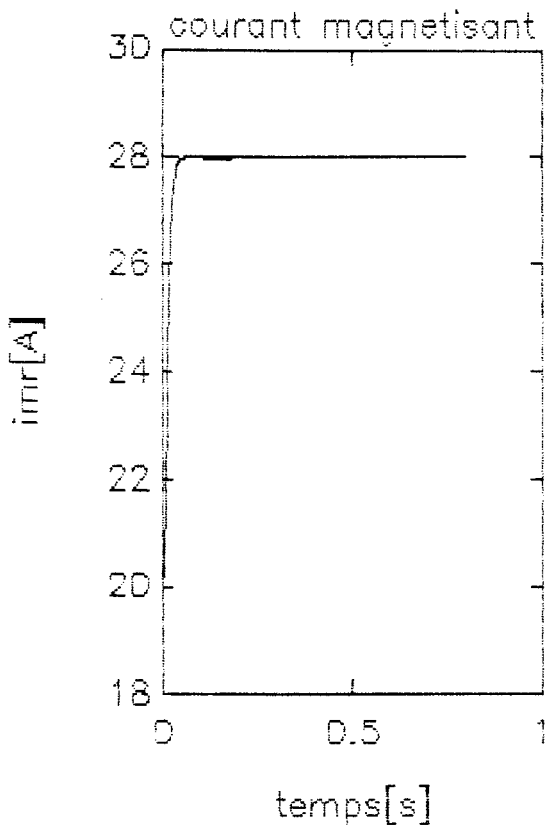


Figure 2.7.— RGS avec perturbation par la charge Cr

2.5. CONCLUSION

L'analyse et la synthèse des régimes glissants statiques ont été effectuées sur la base de la forme normale.

Nous avons analysé les deux types de régimes glissants statiques, à savoir le régime glissant continu et le régime glissant discret. Les résultats obtenus par Sira-Ramirez [22], dans le cas discret des systèmes monovariables, ont été élargis au cas continu pour les systèmes non linéaires par rapport à la commande.

Il est montré, que l'approche de la géométrie différentielle permet, sous certaines conditions, une linéarisation exacte des systèmes non linéaires en régime glissant avec une réduction de leur dimension. Nous avons proposé une généralisation de la définition du degré relatif et des conditions de glissement.

Les résultats théoriques obtenus sont valables pour les systèmes monovariables (discret et continu). Pour les systèmes multivariables, nous nous sommes limité au cas des systèmes découplés.

Ce chapitre se termine par un exemple d'application à la machine asynchrone. Le broutement constaté, en particulier dans la commande i_{dref} , est dû, essentiellement, à la nécessité de porter (et de maintenir), le plus rapidement possible, le courant magnétisant i_{mr} à une valeur constante. Néanmoins, la fréquence de broutement de cette commande ne dépasse pas la valeur de 1kHz. Cette fréquence est largement supportée par l'onduleur de tension. Ainsi, l'effet du broutement sur la sortie est négligeable (voir tableau 2.1c).

3. RÉGIMES GLISSANTS DYNAMIQUES

Ce chapitre présente l'utilisation de la forme normale dynamique pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants des systèmes non linéaires. Le terme dynamique signifie que cette forme contient un certain nombre de dérivées de la commande U . Dans les paragraphes 3.1 et 3.2, le cas des systèmes monovariables et multivariables est abordé et les conditions d'existence du régime glissant dynamique sont déduites. Dans le paragraphe 3.3, Les conditions de rejet de la perturbation sont présentées puis discutées. Enfin, une application à la machine asynchrone est présentée au paragraphe 3.4.

3.1 CAS MONOVARIABLE

3.1.1 DÉFINITIONS

3.1.1.1 DEGRÉ RELATIF DYNAMIQUE

Le système (2.4) est dit, localement, de degré relatif dynamique ν , si :

$$i) \frac{\partial}{\partial u_q} \left[y^k \right] = 0, \quad k < \nu - 1 \quad (3.1a)$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial u_q} \left[y^{\nu-1} \right] \neq 0 \quad (3.1b)$$

où q représente la dimension de la commande $U = (u_1, \dots, u_q)$,
En effet, en dérivant la sortie, nous aurons :

$$\dot{y} = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^T F(x, U) + \frac{\partial y}{\partial U_1} \dot{U}_1 \quad (3.2a)$$

si $\frac{\partial}{\partial U_1} \left[y \right]_{x=x_0} \neq 0$, alors $\nu = 1$, sinon il faut dériver

encore:

$$y^2 = \left[\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right]^T F(x, U) + \left[\frac{\partial \dot{y}}{\partial U_2} \right] \dot{U}_2 \quad (3.2b)$$

si $\frac{\partial}{\partial U_2} \left[\dot{y} \right]_{x=x_0} \neq 0$, alors $\nu = 2$, sinon il faut continuer à

dériver jusqu'à:

$$y^\nu = \left[\frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial x} \right]^T F(x, U) + \left[\frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial U_q} \right] \dot{U}_q \quad (3.2c)$$

avec:

$$\frac{\partial}{\partial U_q} \left[y^{\nu-1} \right]_{x=x_0} \neq 0$$

Le degré relatif dynamique détermine le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie du système, pour faire apparaître la dérivée de la commande d'ordre le plus élevé.

3.1.1.2. FORME NORMALE DYNAMIQUE

soient r , ν , et q , respectivement, le degré relatif statique, la dimension du vecteur d'état $Z = (Z_1, \dots, Z_\nu)^T$ et

la dimension de la commande $U = (U_1, \dots, U_q)$, tels que:

$$Z_i = y^{i-1}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (3.3a)$$

$$U_q = U^{q-1}, \quad q = 1, \dots, \nu - r \quad (3.3b)$$

La dynamique du système (2.4) est décrite localement dans les nouvelles coordonnées du vecteur Z par les équations suivantes:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (3.4a)$$

$$\dot{Z}_r = Z_{r+1} \quad (3.4b)$$

$$\dot{Z}_{r+d} = L_F Z_{r+d} + \sum_{q=1}^d \frac{\partial Z_{r+d}}{\partial U_q} \dot{U}_q, \quad d = 1, 2, \dots, \nu - r \quad (3.4c)$$

$$y = Z_1 \quad (3.4d)$$

Cette forme s'appelle *forme normale dynamique*. La forme généralisée explicite d'observabilité, définie par Fliess [30], s'obtient facilement pour $r = 0$. Ainsi, le degré relatif dynamique coïncide avec le degré de transcendance fini, de la forme généralisée explicite, défini par le même auteur [29] [30].

Proposition 3.1:

la dimension de la commande d est égale à la différence entre le degré relatif dynamique ν et le degré relatif statique r de la sortie du système (2.4). Il s'ensuit:

$$d = \nu - r \quad (3.5)$$

Preuve:

En décomposant le vecteur d'état Z , nous aurons:

$$(Z_1, \dots, Z_r) \subset (Z_1, \dots, Z_{r+q}) \subseteq (Z_1, \dots, Z_\nu) \quad (3.6)$$

pour obtenir \dot{U}_q dans la forme (3.4), il est nécessaire que la condition (3.5) et la relation (3.6) soient vérifiées.

3.1.13. DYNAMIQUE DES ZÉROS

La dynamique des zéros s'obtient à l'origine de l'espace d'état pour Z convergeant asymptotiquement vers zéro. Elle est décrite par l'équation suivante:

$$L_F Z_\nu \Big|_{Z=0} + \sum_{q=1}^d \frac{\partial Z_\nu}{\partial U_q} \dot{U}_q \Big|_{Z=0} = 0, \quad d = \nu - r \quad (3.7)$$

Si la solution de cette équation tend, localement, vers un point d'équilibre constant, alors le système est dit à *phase minimale* au voisinage de ce point. Sinon, le système est dit à *phase non minimale*.

Dans le cas du système à phase minimale, la commande équivalente est définie au point d'équilibre [31].

Lemme 3.1:

La dimension de la commande U détermine la dimension de la dynamique des zéros.

Preuve:

la dynamique des zéros (3.7) se déduit de la forme (3.4) pour $Z = 0$. Dans ce cas, il est facile de vérifier que la dimension de la commande représente la dimension de la dynamique des zéros.

Remarques:

Si la sortie du système dépend de la commande U ($r = 0$), la dimension du vecteur d'état Z est minimale. Dans ce cas, la forme normale dynamique est identique à la forme généralisée explicite définie par Fliess [30] et le degré relatif dynamique coïncide avec le degré de transcendance fini défini par le même auteur.

Le degré relatif statique s'obtient à partir des relations (3.1a) et (3.1b) définissant le degré relatif dynamique, si la dimension de la commande est égale à un.

Le degré relatif dynamique peut être interprété comme le nombre de conditions initiales nécessaires pour la l'intégration de (3.4). Il est évident que ce nombre est imposé par la forme de la sortie du système. Si la sortie dépend de la commande U , ce nombre devient minimal.

Physiquement, le degré relatif statique (dynamique), représente le temps que met la commande statique (dynamique) pour influencer la sortie du système.

3.12 SYSTÈMES À DEGRÉ RELATIF STATIQUE ZÉRO

On considère la classe des systèmes non linéaires continus de la forme suivante :

$$\dot{x} = F(x, U) \quad (3.8a)$$

$$y = h(x, U) \quad (3.8b)$$

Etant donné la présence de la commande dans la sortie y . Il s'ensuit, selon la définition (2.5), que le système (3.8) a un degré relatif statique zéro. La condition nécessaire, pour l'existence du régime glissant statique sur $h(x, u)$, est donnée par la relation (2.9). Celle-ci devient:

$$\frac{\partial h(x, U)}{\partial u} \neq 0 \quad (3.8c)$$

La dimension de la commande U , ou la dimension de la dynamique des zéros, est donnée par la relation (3.5). Pour $r = 0$, elle est identique au degré relatif dynamique du système.

Si l'objectif de la commande est l'annulation de la première dérivée de la sortie. Dans ce cas, le degré relatif dynamique est égal à un et la forme normale dynamique (3.4) devient:

$$\dot{z}_1 = L_F z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial u} \dot{u} \quad (3.9a)$$

$$y = z_1 \quad (3.9b)$$

Il est facile de vérifier que l'inégalité (3.8c) constitue aussi une condition nécessaire pour l'existence du régime glissant dynamique sur $h(x, u) = 0$.

Le régime glissant dynamique idéal est décrit par l'équation différentielle (3.9). La dynamique des zéros, est obtenue pour $Z_1 = 0$, telle que:

$$L_F h(x, u) + \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \dot{u} = 0 \quad (3.10a)$$

Cette équation admet, au point d'équilibre une solution pour $u = u_0(x)$, si le système est à phase minimale. Par conséquent, le régime glissant idéal existe sur $h(x, u) = 0$, tel que:

$$\dot{x} = F(x, u_0(x)) \quad (3.10b)$$

$$y = 0 \quad (3.10c)$$

3.13 SYSTÈMES À DEGRÉ RELATIF STATIQUE SUPÉRIEUR À ZÉRO

Dans ce cas, pour permettre au systèmes (2.4) d'évoluer sur $h(x) = 0$, il faut définir une surface glissante $s(x)$ en fonction du vecteur d'état (3.3a), telle que:

$$s(Z) = Z^\nu + C_{\nu-1} Z^{\nu-1} + \dots + C_1 Z_1 \quad (3.11a)$$

avec:

$$\frac{\partial Z^\nu}{\partial u_q} \neq 0, \quad q = \nu - r \quad (3.11b)$$

où ν est le degré relatif dynamique et les coefficients C_i pour $i=1, \dots, \nu-1$, sont choisis de telle manière que l'équation caractéristique de (3.11a) soit un polynôme de Hurwitz.

Proposition 3.2:

si le système (2.4) est de dimension n et de degré relatif statique r , tel que $n > r$. Alors la condition nécessaire, pour l'existence du régime glissant dynamique, est donnée par la relation (3.11b) et n représente le degré relatif dynamique.

Preuve:

pour exprimer explicitement \dot{U}_q , il est nécessaire que la condition (3.11b) soit vérifiée dans la forme normale dynamique (3.4). Pour $n > r$, on vérifie facilement à partir de (3.11b), (3.3a) et (3.1b) que la dimension n du système (2.4) coïncide avec le degré relatif dynamique ν .

Proposition 3.3:

Pour le système (2.4), les conditions nécessaires d'existence du régime glissant dynamique et du régime glissant statique, sont identiques.

Preuve:

en effet, si $n > r$ la forme normale statique (2.7) s'écrit pour le vecteur d'état (Z_1, \dots, Z_{r+1}) comme suit:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1} \quad , i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$\dot{Z}_r = L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) = Z_{r+1}$$

$$\dot{Z}_{r+1} = L_F^{r+1} h(\Phi^{-1}(Z), U) + \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right] \dot{U}_1$$

$$y = Z_1$$

à partir de la forme normale dynamique (3.4) \dot{Z}_{r+1} se présente:

$$\dot{Z}_{r+1} = L_F Z_{r+1} + \frac{\partial Z_{r+1}}{\partial U_1} \dot{U}_1$$

les deux derniers termes de la partie droite de la dernière équation d'état, des deux formes, sont identiques, d'où la relation suivante:

$$\frac{\partial Z_{r+1}}{\partial U_1} = \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right]$$

Pour le vecteur d'état (Z_1, \dots, Z_{r+2}) , la forme normale statique (2.7) s'écrit:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1} \quad , i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$\dot{Z}_r = L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) = Z_{r+1}$$

$$\dot{Z}_{r+1} = L_F^{r+1} h(\Phi^{-1}(Z), U) + \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right] \dot{U}_1 = Z_{r+2}$$

$$\dot{Z}_{r+2} = L_F Z_{r+2} + \frac{\partial Z_{r+2}}{\partial U_1} \dot{U}_1 + \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right] \dot{U}_2$$

à partir de la forme normale dynamique (3.4) \dot{Z}_{r+2} se présente:

$$\dot{Z}_{r+2} = L_F Z_{r+2} + \frac{\partial Z_{r+2}}{\partial U_1} \dot{U}_1 + \frac{\partial Z_{r+2}}{\partial U_2} \dot{U}_2$$

Sachant que $\dot{U}_1 = U_2$, la condition du glissement devient:

$$\frac{\partial Z_{r+2}}{\partial U_2} = \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right]$$

En continuant à dériver la variable d'état Z jusqu'à $q = \nu - r$, où $\nu = n$. Il s'ensuit:

$$\frac{\partial Z_{r+q}}{\partial U_q} = \frac{\partial}{\partial U_1} \left[L_F^r h(\Phi^{-1}(Z), U) \right] \quad (3.12)$$

Dans ce cas, l'ordre de la dérivée le plus élevé de la commande U est $q-1$.

En régime glissant dynamique idéal, la surface glissante est nulle. Z_n est donnée en fonction des autres composantes du vecteur d'état Z , par l'expression suivante:

$$Z_n = -C_1 Z_1, \dots, -C_{n-1} Z_{n-1} \quad (3.13)$$

Le régime glissant dynamique idéal est exprimé en fonction, du vecteur d'état réduit à $n-1$ variables d'état, sous la forme suivante:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (3.14a)$$

$$\dot{Z}_{n-1} = -C_1 Z_1, \dots, -C_{n-1} Z_{n-1} \quad (3.14b)$$

$$s(Z) = 0, \quad h(x) = Z_1 = 0, \quad (3.14c)$$

L'équation caractéristique de (3.14) est la même que celle de la surface (3.11a). Il s'ensuit que le système équivalent (3.14) est localement et asymptotiquement stable. En outre, il est réduit et linéaire par rapport à Z.

La commande équivalente u_{eq} est obtenue par la résolution de l'équation différentielle (3.7) pour $s(Z) = 0$, donc $Z=0$, telle que :

$$L_F Z_n + \sum_{q=1}^{n-r} \frac{\partial Z_n}{\partial U_q} U_q = 0 \quad (3.15)$$

La solution de cette équation représente l'évolution de la commande équivalente.

3.14. RÉGIMES GLISSANTS D'ORDRE ÉLEVÉ

Si l'objectif de la commande est l'annulation de la n-ième dérivée de la sortie secondaire o du système (2.4), alors le degré relatif dynamique est n et la forme normale dynamique (3.4) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 \\
 \dot{\sigma}_2 &= \sigma_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_r &= \sigma_{r+1} \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_{r+d} &= L_F \sigma_{r+d} + \sum_{q=1}^{n-r} \frac{\partial \sigma_{r+d}}{\partial U_q} \dot{U}_q,
 \end{aligned} \tag{3.16a}$$

$$\sigma = \sigma_1 \tag{3.16b}$$

avec:

$$U_q = U^{(q-1)} \quad q = 1, \dots, n-r \tag{3.16c}$$

où r désigne le degré relatif statique de la sortie σ .

Définition 3.1.[31]:

L'élément σ admet un régime glissant d'ordre $n-1$, si la forme normale dynamique (3.16) est d'ordre n .

Si le degré relatif r de la sortie σ du système (2.4) est supérieur à zéro, alors $r-1$ détermine l'ordre du régime glissant statique.

Lemme 3.2:

Si le degré relatif statique de la sortie σ du système non linéaire (2.4) est nul. Alors, le régime glissant est nécessairement dynamique.

Preuve:

Supposons que la sortie σ a un degré relatif statique nul, la condition de glissement (3.11b) est vérifiée et la forme normale dynamique contient la commande et un certain nombre de ses dérivées. Il s'ensuit que le régime glissant est nécessairement dynamique.

3.2. CAS MULTIVARIABLE

Dans ce paragraphe nous nous limiterons à la classe des systèmes carrés et découplés de la forme (1.2a). Ces hypothèses sont restrictives, mais permettent un cadre général d'utilisation des régimes glissants dynamiques. Dans ce cas, le système multivariable admet, pour chaque sortie une commande dynamique, un degré relatif dynamique et une forme normale dynamique.

3.2.1. DÉFINITIONS

3.2.1.1. DEGRÉ RELATIF DYNAMIQUE VECTORIEL

Le système (1.2a) est dit, localement, de degré relatif dynamique vectoriel (n_1, \dots, n_m) , si et seulement si, pour chaque $j = 1, \dots, m$:

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial U_{qj}} \left[y_j^k \right] = 0, \quad k < n_j - 1 \quad (3.17a)$$

$$ii) \quad \frac{\partial}{\partial U_{qj}} \left[y_j^{n_j-1} \right] \neq 0 \quad (3.17b)$$

où q_j représente la dimension de la commande $U_j = (U_{1,j}, \dots, U_{q_j,j})^T$.

3.2.12. FORME NORMALE DYNAMIQUE

soient n_j , et q_j , respectivement, la dimension du vecteur d'état $Z_j = (Z_{1,j}, \dots, Z_{n_j,j})^T$ et la dimension de la commande U_j , tels que:

$$Z_{i,j} = y_j^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n_j - 1 \quad (3.18a)$$

$$U_{q_j} = U^{q_j-1}, \quad q_j = 1, \dots, n_j - n_j \quad (3.18b)$$

La dynamique du système (1.2.a) est décrite localement dans les nouvelles coordonnées du vecteur Z_j par les équations suivantes:

$$\dot{Z}_{i,j} = Z_{i+1,j} \quad i = 1, 2, \dots, n_j - 1 \quad (3.18c)$$

$$\dot{Z}_{n_j,j} = Z_{n_j+1,j} \quad (3.18d)$$

$$\dot{Z}_{n_j+d_j} = L_F Z_{n_j+d_j} + \sum_{q=1}^{d_j} \frac{\partial Z_{n_j+d_j}}{\partial U_{q_j}} \dot{U}_{q_j}, \quad (3.18e)$$

$$y_j = Z_{1,j} \quad (3.18f)$$

avec:

$$d_j = 1, 2, \dots, n_j - n_j$$

Ainsi, nous sommes en présence de m sous systèmes monovariabiles.

3.2.13. DYNAMIQUE DES ZÉROS

Si dans la forme normale dynamique généralisée (3.18), le vecteur d'état Z_j converge asymptotiquement vers zéro, alors la dynamique des zéros est donnée par l'équation suivante:

$$L_F Z_{nj} + \sum_{q=1}^{d_j} \frac{\partial Z_{nj}}{\partial U_{qj}} \dot{U}_{qj} = 0 \quad (3.19)$$

où $d_j = n_j - r_j$ et chaque dynamique des zéros est identique à celle du cas monovariable.

3.2.2. RÉGIME GLISSANT IDÉAL

Le système multivariable (1.2a) admet des régimes glissants, si la condition (3.12) est vérifiée pour chaque j . En régime glissant dynamique idéal, la surface glissante (3.11a), pour chaque sous système, est nulle. $Z_{nj,j}$ est donnée en fonction des autres composantes du vecteur d'état Z , par l'expression suivante:

$$Z_{nj,j} = -C_{1,j} Z_{1,j}, \dots, -C_{n-1,j} Z_{n-1,j} \quad (3.20a)$$

Le régime glissant dynamique idéal est exprimé, en fonction du vecteur d'état réduit à n_j-1 variables d'état, sous la forme suivante:

$$\dot{z}_{i,j} = z_{i+1,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n_j - 2 \quad (3.20b)$$

$$\dot{z}_{n_j-1,j} = -C_{1,j} z_{1,j} \dots - C_{n_j-1,j} z_{n_j-1,j} \quad (3.20c)$$

$$s_j(z) = 0, \quad y_j = z_{1,j} = 0, \quad (3.20d)$$

Ainsi, nous sommes en présence de m sous systèmes équivalents ayant les mêmes propriétés qu'un système monovariante.

3.3. REJET DE LA PERTURBATION

3.3.1. CAS MONOVARIABLE

On considère la classe, des systèmes non linéaires et monovariante, décrite par la forme suivante:

$$\dot{x} = F(x, U, w) \quad (3.21a)$$

$$y = h(x) \quad (3.21b)$$

où x , U , w , et y sont, respectivement, le vecteur d'état de dimension n , la commande, la perturbation (qui est bornée et additive) et la sortie.

Supposant que la sortie y a deux degrés relatifs statiques r_v et r_u par rapport, respectivement, à la perturbation w et la commande U . Le calcul d'une commande stabilisante, pour le système non linéaire (3.21), est possible en imposant à sa sortie secondaire s la dynamique discontinue suivante [31]:

$$\dot{s} = -M_d \text{sign}(s) \quad (3.22a)$$

où M_d représente le gain nécessaire pour annuler sa sortie secondaire s en un temps t_r , donné par la relation suivante:

$$t_r = \frac{|s(x(0))|}{M_d} \quad (3.22b)$$

La fonction signe est définie par:

$$\begin{aligned} \text{sign}(s) &= 1 \text{ pour } s > 0 \\ \text{sign}(s) &= 0 \text{ pour } s = 0 \\ \text{sign}(s) &= -1 \text{ pour } s < 0 \end{aligned} \quad (3.22c)$$

Pour $r_v = n$ et $r_u = r$, la forme normale dynamique du système (3.21) s'écrit:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.23a)$$

$$\dot{Z}_n = C(Z, U_1, \dots, U_d) + \frac{\partial Z_n}{\partial U_d} \dot{U}_d + w, \quad d = n-r \quad (3.23b)$$

$$y = Z_1 \quad (3.23c)$$

où:

$$C(Z, U_1, \dots, U_d) = L_F Z_n + \sum_{q=1}^{d-1} \frac{\partial Z_n}{\partial U_q} \dot{U}_q \quad (3.23d)$$

L'utilisation de la forme normale dynamique (3.23) permet de faire apparaître une commande qui stabilise le système (3.21) en régime glissant. La proposition suivante s'impose:

Proposition 3.4:

le système non linéaire du type (3.21) est stabilisable en régime glissant commandé par la dérivée d'ordre le plus élevé de la commande U.

Preuve:

la commande, qui permet au système d'évoluer en régime glissant, se présente sous la forme suivante:

$$U_d = \left(\frac{\partial Z_n}{\partial U_d} \right)^{-1} \left[-C(Z, U_1, \dots, U_d) - \sum_{i=1}^{n-1} C_i Z_{i+1} - M_d \operatorname{sign}(s) \right] \quad (3.24a)$$

avec:

$$\frac{\partial Z_n}{\partial U_d} \neq 0 \quad (3.24b)$$

M_d est une constante positive choisie, telle que:

$$M_d \geq \max |w| \quad (3.24c)$$

Les coefficients C_i doivent être choisis de façon à assurer la stabilité asymptotique. Il est facile de vérifier que la commande (3.24a) remplit la condition d'évolution en régime glissant donnée par l'inéquation suivante:

$$s\dot{s} = \left[Z_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_i Z_i \right] \left[C(Z, U_1, \dots, U_d) + \frac{\partial Z_n}{\partial U_d} \dot{U}_d + w + \sum_{i=1}^{n-1} C_i Z_{i+1} \right] < 0 \quad (3.25)$$

Supposons que la perturbation vérifie les conditions suivantes:

i) elle est bornée, additive et possède la forme suivante:

$$w = w(t) \quad (3.26a)$$

ii) les degrés relatifs r_u et r_w de la sortie y du système (3.21) par rapport, respectivement, à la commande U et à la perturbation w , vérifient la relation suivante:

$$r_w \geq r_u \quad (3.26b)$$

Dans ce cas, La construction précédente de la condition de glissement nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 3.5:

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées ($r_w \geq r_u$), alors le système non linéaire du type (3.21) est stabilisable de façon robuste en régime glissant commandé par la dérivée d'ordre le plus élevé de la commande U .

Preuve:

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées, alors il est toujours possible de choisir un degré relatif dynamique égal au degré relatif statique, r_v tel que lors de l'application de la commande (3.24) au système (3.21), la condition de glissement (3.25) soit vérifiée et la perturbation w est rejetée.

3.3.2. CAS MULTIVARIABLE

soit un système carré découplé de la forme

$$\dot{x} = F(x, U, w) \quad (3.27a)$$

$$y = h(x) \quad (3.27b)$$

où $U = (U_1, \dots, U_m)^T$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ et $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ sont respectivement, la commande, la sortie et la perturbation qui est bornée et additive. Supposons que le degré relatif statique de chaque sortie y_j , par rapport w_j , est identique à son degré relatif dynamique n_j , par rapport à U_j . Dans ce cas, la forme normale dynamique du système se présente comme suit:

$$\dot{z}_{i,j} = z_{i+1,j} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n_j - 1 \quad (3.28a)$$

$$\dot{z}_{n_j,j} = C_j \left[z, U_{1j}, \dots, U_{dj} \right] + \frac{\partial z_{n_j,j}}{\partial U_{dj}} \dot{U}_{dj} + w_j \quad (3.28b)$$

$$y_j = z_{1,j} \quad (3.28c)$$

où $d_j = n_j - r_j$ est la dimension de la commande U_j et r_j est le degré relatif statique de la sortie y_j par rapport à la commande U_j . Ainsi, nous sommes en présence de m sous systèmes monovariables. Ceci nous permet de transposer facilement les résultats obtenus dans le cas monovariable. Les surfaces glissantes prennent la forme suivantes:

$$S_j = Z_{n_j,j} + \sum_{i=1}^{n_j-1} C_{i,j} Z_{i,j} \quad (3.29)$$

où $j = 1, \dots, m$

La condition de glissement devient:

$$s_j \dot{s}_j = \left[Z_{n_j} + \sum_{i=1}^{n_j-1} C_{i,j} Z_{i,j} \right] \left[C_j(Z, U_{1j}, \dots, U_{dj}) + \frac{\partial Z_{n_j,j}}{\partial U_{dj}} \dot{U}_{dj} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n_j-1} C_{i,j} Z_{i+1,j} + w_j \right] < 0 \quad (3.30)$$

La commande qui maintient chaque j -ième sous système, en régime glissant dynamique, se présente sous la forme suivante:

$$U_{dj} = \left[\frac{\partial Z_{nj,j}}{\partial U_{dj}} \right]^{-1} \left[-C_j \left(Z, U_{1j}, \dots, U_{dj} \right) - \sum_{i=1}^{n_j-1} C_{i,j} Z_{i+1,j} - M_{dj} \operatorname{sign}(S_j) \right] \quad (3.31a)$$

avec:

$$\frac{\partial Z_{nj}}{\partial U_{dj}} \neq 0 \quad (3.31b)$$

$$M_{dj} \geq \max |w_j| \quad (3.31c)$$

La procédure de calcul de la commande, pour chaque sous système, est donnée par l'algorithme [29], comme suit:

- 1°- Echantillonnage du système continu à l'instant $t=kT$, où T est la période d'échantillonnage.
- 2°- Calcul des nouvelles variables d'état et des paramètres de la commande, par l'utilisation de la forme normale dynamique.
- 3°- Résolution de l'équation (3.24) et calcul de la commande selon la relation:

$$u = u_1 + T u_2 + \dots + \frac{T^{(d-1)}}{(d-1)!} u_d$$

- 4°- Envoi de la commande dans le système pendant la période de temps T et incrémentation du temps $t = (k+1) T$

3.4. APPLICATION À LA MACHINE ASYNCHRONE

Le modèle de la machine asynchrone est donné par les équations (2.26) et (2.27), dans le deuxième chapitre.

3.4.1. CALCUL DE LA COMMANDE

Les sorties y_1 et y_2 ont le même degré relatif statique dont la valeur est 2. Si la commande est de dimension 1, alors le degré relatif dynamique, pour chaque sortie, est 3. Dans ce cas, les variables d'état de l'erreur sont:

$$e_1 = \begin{pmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = y_d - x_{34} \quad (3.32a)$$

$$e_2 = - \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = -f_{34} \quad (3.32b)$$

$$e_3 = -\dot{f}_{34} \quad (3.32c)$$

Le vecteur d'état de l'erreur est défini, tel que:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (3.32d)$$

La forme normale dynamique du système perturbé (3.27) s'écrit:

$$\dot{e}_1 = e_2 \tag{3.33a}$$

$$\dot{e}_2 = e_3 \tag{3.33b}$$

$$\dot{e}_3 = a_2 e_3 + (\dot{a}_2 + a_1) e_2 + \dot{a}_1 e_1 - \dot{a}_1 \gamma_d - \dot{a}_c \Gamma_r - \dot{a}_u U - a_u \dot{U} \tag{3.33c}$$

où:

$$a_2 = \begin{pmatrix} -\alpha - \frac{1}{T_r} & , & \frac{J \omega_{mr}}{K_0 T_r x_3} \\ -\frac{K_0 T_r}{J} x_3 \omega_{mr} & , & \frac{-e_{21}}{x_3} - \alpha \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{T_r} & , & 0 \\ \frac{K_0}{J} x_3 \omega_{mr} & , & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_c = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{mr}}{K_0 T_r x_3} \\ -\frac{e_{21}}{J x_3} - \frac{\alpha}{J} \end{pmatrix},$$

$$a_u = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{T_r} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{K_0 \beta}{J} x_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & , & \frac{J}{K_0 T_r x_3} \left(\dot{\omega}_{mr} + \frac{e_{21} \omega_{mr}}{x_3} \right) \\ -\frac{K_0 T_r}{J} \left(x_3 \dot{\omega}_{mr} - e_{21} \omega_{mr} \right) & , & \frac{1}{x_3} \left(\frac{e_{21}}{x_3} - e_{31} \right) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ \frac{K_0}{J} \left[x_3 \dot{\omega}_{mr} - e_{21} \omega_{mr} \right] & , & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{a}_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_0 Tr x_3} \left[\dot{\omega}_{mr} + \frac{e_{21} \omega_{mr}}{x_3} \right] \\ \frac{1}{J x_3} \left[\frac{e_{21}}{x_3} - e_{31} \right] \end{pmatrix}$$

$$\ddot{a}_u = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ 0 & , & \frac{K_0 \beta}{J} e_{21} \end{pmatrix},$$

avec:

$$\omega_{mr} = P x_4 + \frac{x_2}{Tr x_3}$$

$$\dot{\omega}_{mr} = P f_4 + \frac{1}{K_0 Tr x_3} \left[\frac{1}{x_3} \left(J \dot{f}_4 - \frac{2J f_3}{x_3} f_4 - \frac{2 f_3}{x_3} Cr \right) \right]$$

ω_{mr} et $\dot{\omega}_{mr}$ s'écrivent en fonction du vecteur d'état de l'erreur e :

$$\omega_{mr} = P x_4 + \frac{1}{Tr x_3} \left[\frac{-J e_{22} + Cr}{K_0 x_3} \right]$$

$$\dot{\omega}_{mr} = -P e_{22} - \frac{1}{K_0 T_r \kappa_3} \left[\frac{1}{\kappa_3} \left(J e_{32} + \frac{2J e_{21}}{\kappa_3} e_{22} - \frac{2 e_{21}}{\kappa_3} C_r \right) \right]$$

La consigne y_d et la charge C_r représentent les grandeurs perturbatrices.

Il est facile de vérifier que la dynamique des zéros est nulle. Par conséquent, le système est à phase minimale.

La surface glissante est donnée par :

$$s = e_3 + \lambda_2 e_2 + \lambda_1 e_1 \quad (3.34a)$$

où :

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11,0} \\ 0 \quad , \lambda_{14} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{21,0} \\ 0 \quad , \lambda_{24} \end{bmatrix} \quad (3.34b)$$

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (3.34c)$$

Le régime glissant s'obtient, pour $s = 0$, à partir de la forme normale dynamique (3.33), telle que :

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (3.35a)$$

$$\dot{e}_2 = -\lambda_2 e_2 - \lambda_1 e_1 \quad (3.35b)$$

En dérivant la relation (3.34) et par substitution de la dérivée du vecteur d'état \dot{e}_3 , à partir de la forme normale dynamique (3.33), il est possible d'écrire, pour la première dérivée de la commande U , l'expression suivante :

$$\dot{U} = (au)^{-1} \left[(a_2 + \lambda_2) e_3 + (\ddot{a}_2 + a_1 + \lambda_1) e_2 + \dot{a}_1 e_1 - a_1 v_d - \ddot{a}_c C_r - \dot{a}_u U + M_d \text{sign}(s) \right] \quad (3.36a)$$

où:

$$M_d = \begin{pmatrix} M_{d1} & 0 \\ 0 & M_{d2} \end{pmatrix} \quad (3.36b)$$

avec:

$$M_{d1} \geq |w_1|, \text{ et } M_{d2} \geq |w_2| \quad (3.36c)$$

A partir de l'équation (3.36), nous pouvons déduire le schéma fonctionnel suivant:

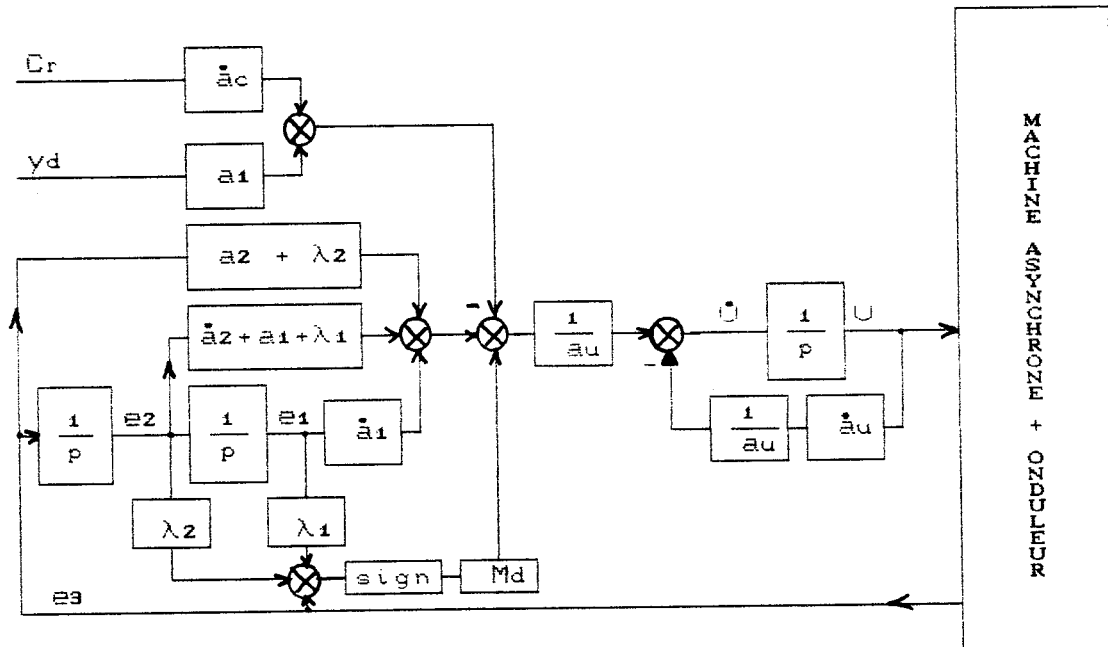


Figure 3.1.- Schéma fonctionnel de la commande dynamique

3.4.2. RÉSULTATS DE LA SIMULATION

Les résultats de la simulation sont présentés pour les valeurs initiales suivantes :

$$i_{ds0}=0, \quad i_{qs0}=0, \quad i_{mr0}=20, \quad \omega_{m0}=0$$

Les coefficients des surfaces glissantes sont calculés de telle manière que le polynôme (3.34) soit un polynôme de Hurwitz. Il s'ensuit:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 60 & , & 0 \\ 0 & , & 110 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 900 & , & 0 \\ 0 & , & 90 \end{bmatrix}$$

Dans un premier cas, le système non perturbé (SNP), est soumis à une consigne de vitesse du type échelon idéal (EI) et échelon réel (ER).

Dans un deuxième cas, Le système perturbé (SP) est soumis au test de la robustesse, de trois façons différentes:

- a)-En le perturbant par la consigne de la vitesse.
- b)-En supposant des incertitudes sur les paramètres T_r et J , de l'ordre de 100%.
- c)- En variant instantanément, la charge C_r de zéro à sa valeur nominale.

Les valeurs de pointe des commandes, des courants statoriques et des sorties i_{mr} et ω_m sont résumées, respectivement, dans les tableaux (3.1a), (3.1b), et (3.1c). Les courbes de réponses sont données par les figures (3.1), (3.2), ..., (3.6).

Tableau 3.1a. - valeurs de pointe des commandes i_{dref} et i_{qref} du système non perturbé(SNP) et du système perturbé(SP), pour un échelon idéal(EI) et un échelon réel(ER).

		$i_{dref}[A]$			$i_{qref}[A]$		
		max	min	finale	max	min	finale
SNP	E I	173,20	-79,70	30,04	131,91	-15,40	5,99
	E R	181,04	-62,56	30,04	27,88	4,11	5,99
S P et E I	Tr	173,20	-79,70	30,04	131,91	-15,40	5,99
	J	173,20	-79,70	30,04	131,91	-15,40	5,99
	Cr	173,20	-79,70	21,71	131,91	-15,40	43,53
	Yd2	173,20	-79,70	30,04	131,91	-375,70	-5,99

Tableau 3.1b. - valeurs de pointe des courants stationnaires i_{ds} et i_{qs} du système non perturbé(SNP) et du système perturbé(SP), pour un échelon idéal et un échelon réel(ER).

		$i_{ds}[A]$			$i_{qs}[A]$		
		max	min	finale	max	min	finale
SNP	E I	166,61	-56,78	28,00	113,61	-13,99	-0,00
	E R	168,23	-57,59	28,00	23,95	-01,64	-00,00
S P et E I	Tr	166,61	-56,78	28,00	113,61	-13,99	-00,00
	J	166,61	-56,78	28,00	113,61	-13,99	-00,00
	Cr	166,61	-56,78	28,00	113,61	-13,99	34,21
	Yd2	166,61	-56,78	28,00	113,61	-348,59	00,00

Tableau 3.1c. - valeurs de pointe des sorties, i_{mr} et ω_m , du système non perturbé(SNP) et du système perturbé(SP), pour un échelon idéal(EI) et un échelon réel(ER).

		$i_{mr}[A]$			$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$		
		max	min	finale	max	min	finale
SNP	E I	32,76	-	28,00	320,54	-	300,00
	E R	32,89	-	28,00	302,83	-	300,00
S P	Tr	32,76	-	28,00	320,54	-	300,00
	J	32,76	-	28,00	320,54	-	300,00
et	Cr	32,76	-	28,00	320,54	289,75	330,30
	yd2	32,76	-	28,00	320,54	-348,89	-300,00
E I							

Tableau 3.1d. - Temps de réponse t_r et gain M_d du SNP et du SP, pour un échelon idéal(EI) et un échelon réel(ER).

		$i_{mr}[A]$		$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$	
		t_r	M_{d1}	t_r	M_{d2}
SNP	E I	0,038	1400	0,102	2200
	E R	0,038	1400	0,102	2200
S P	Tr	0,038	1400	0,102	2200
	J	0,038	1400	0,102	2200
et	Cr	0,038	1400	0,102	2200
	yd2	0,038	1400	0,102	2200
E I					

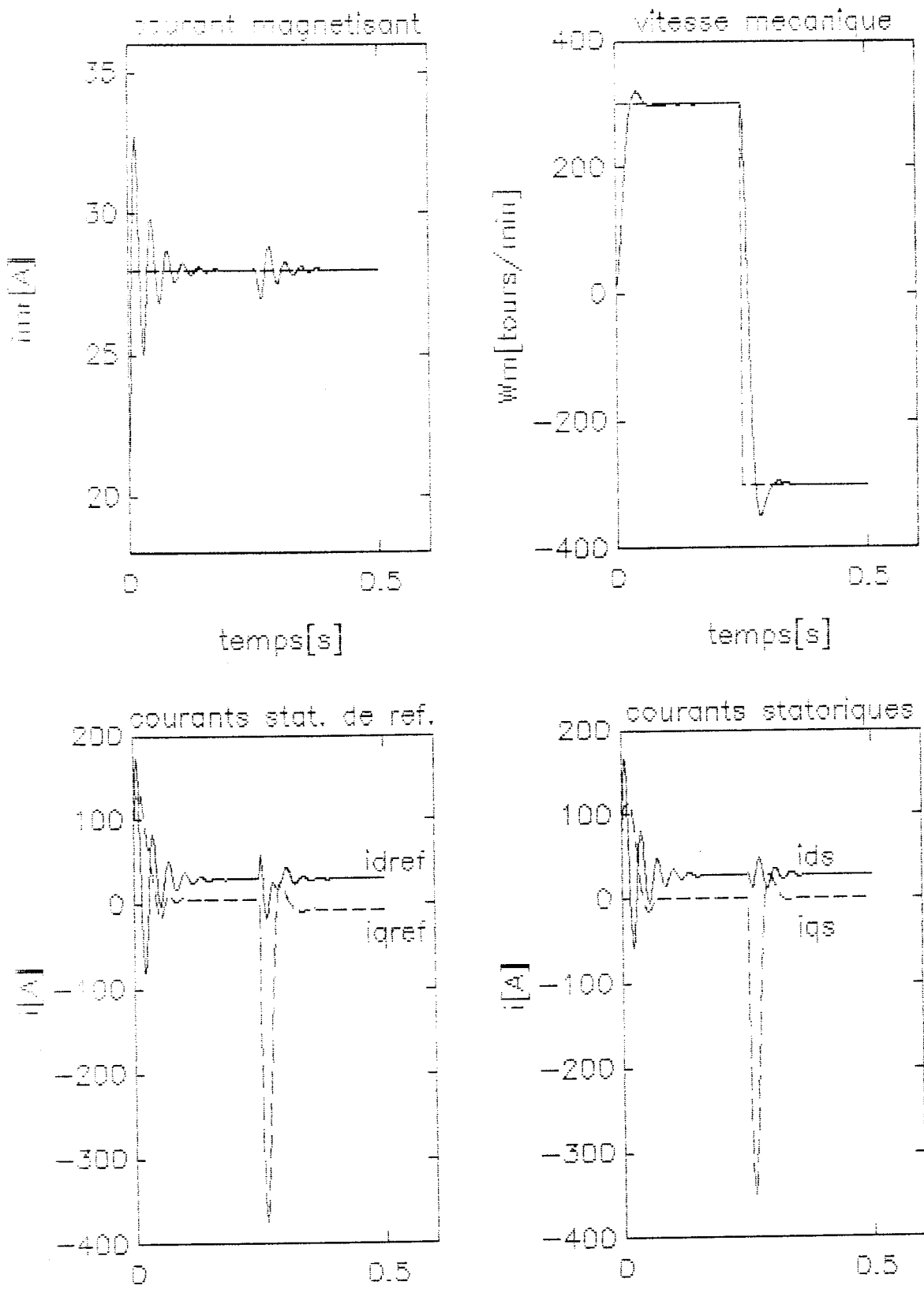


Figure 3.2. – RGD avec asservissement de vitesse

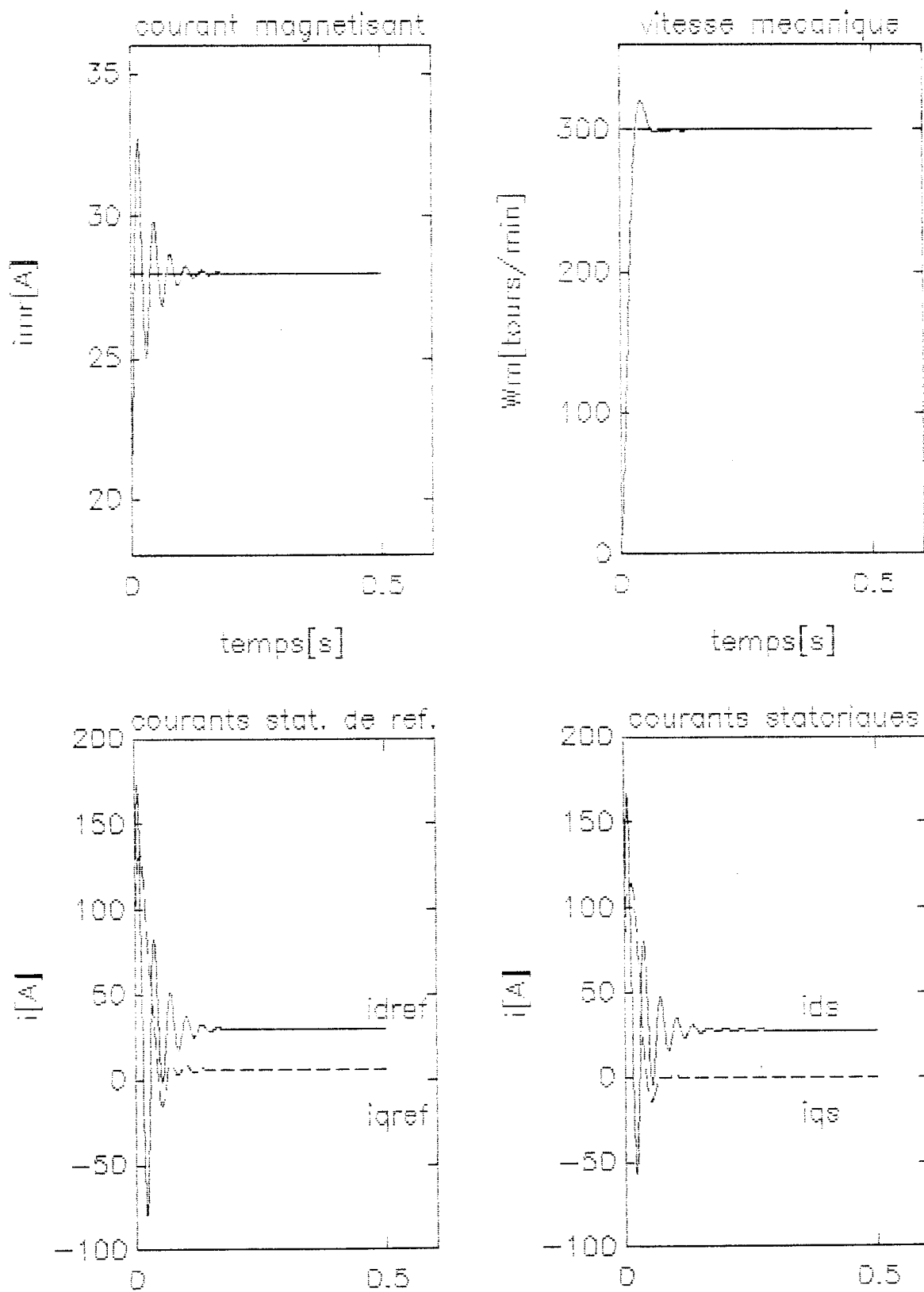


Figure 3.3.— RGD avec perturbation par T_r , ($T_r \rightarrow 2T_r$)

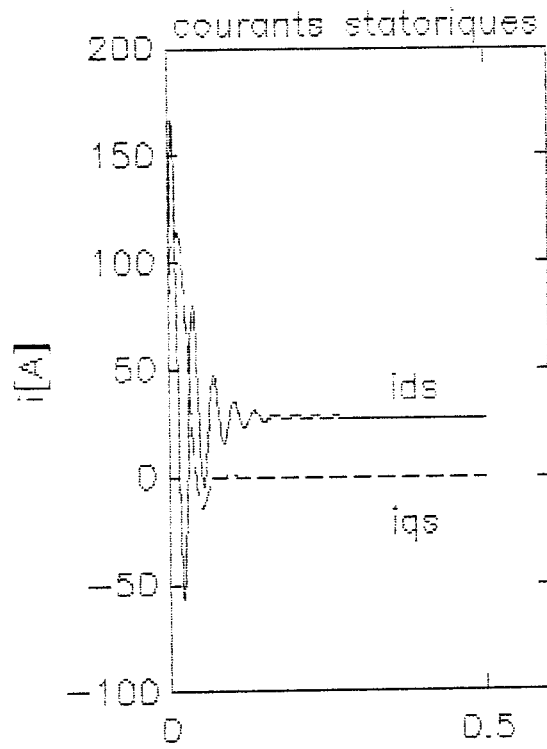
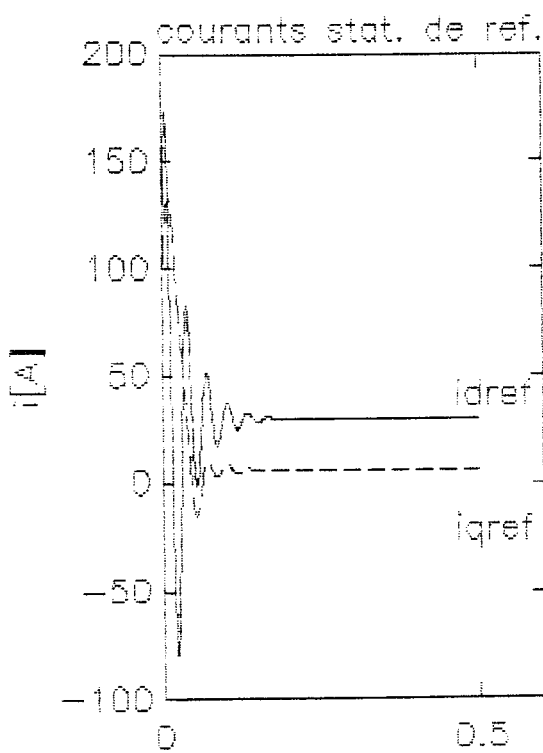
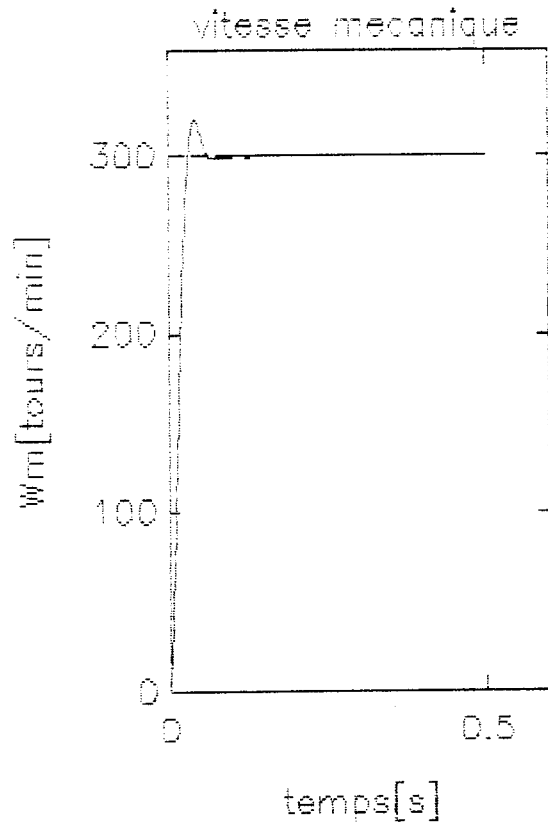
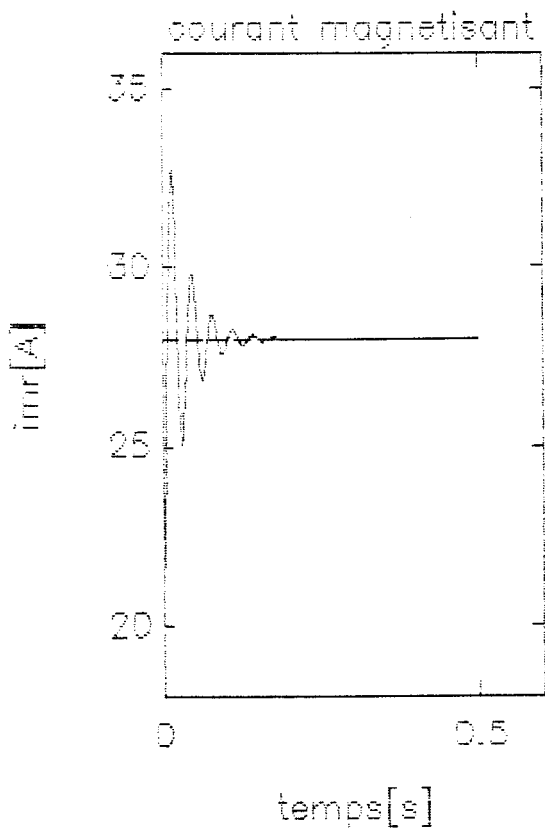


Figure 3.4.— RGD avec perturbation par J , ($J \rightarrow 2J$)

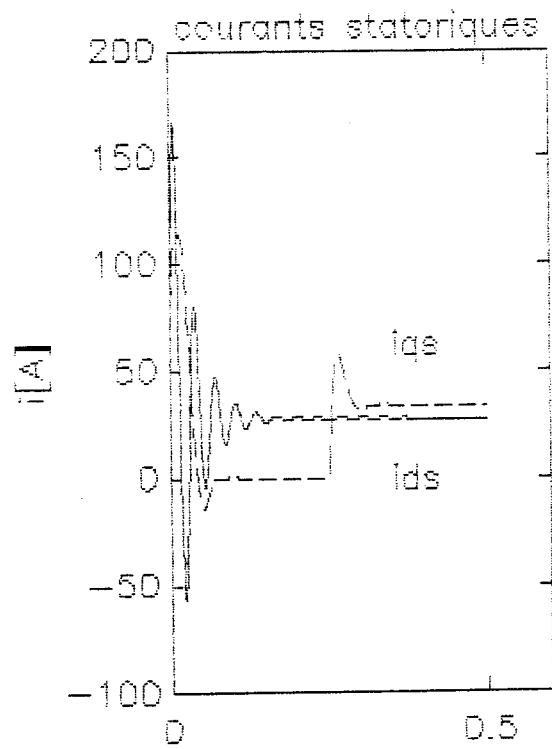
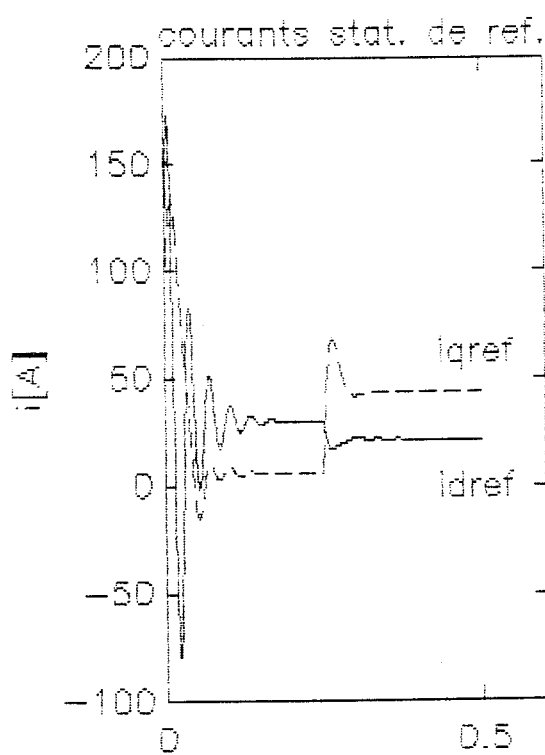
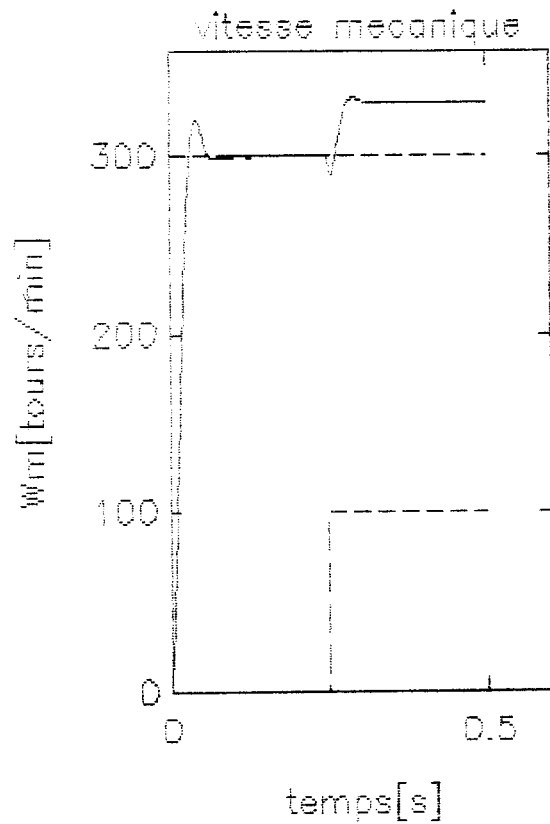
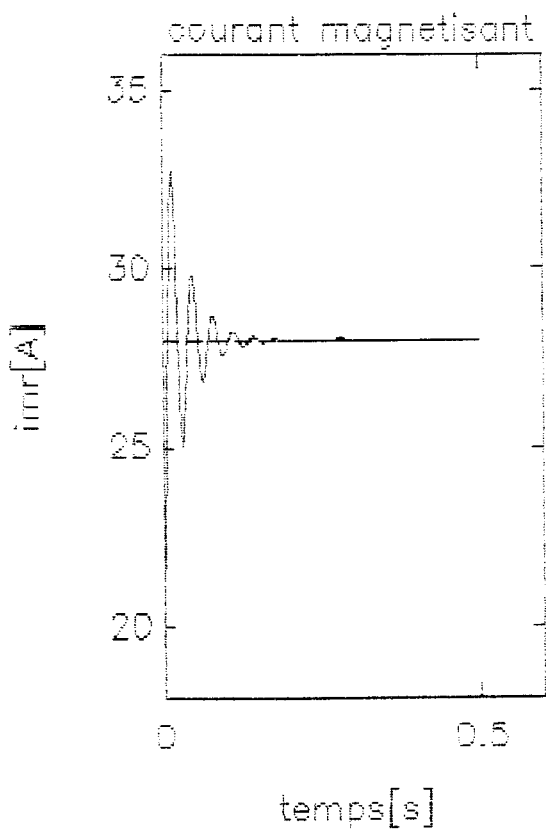


Figure 3.5.— RGD avec perturbation par la charge C_r

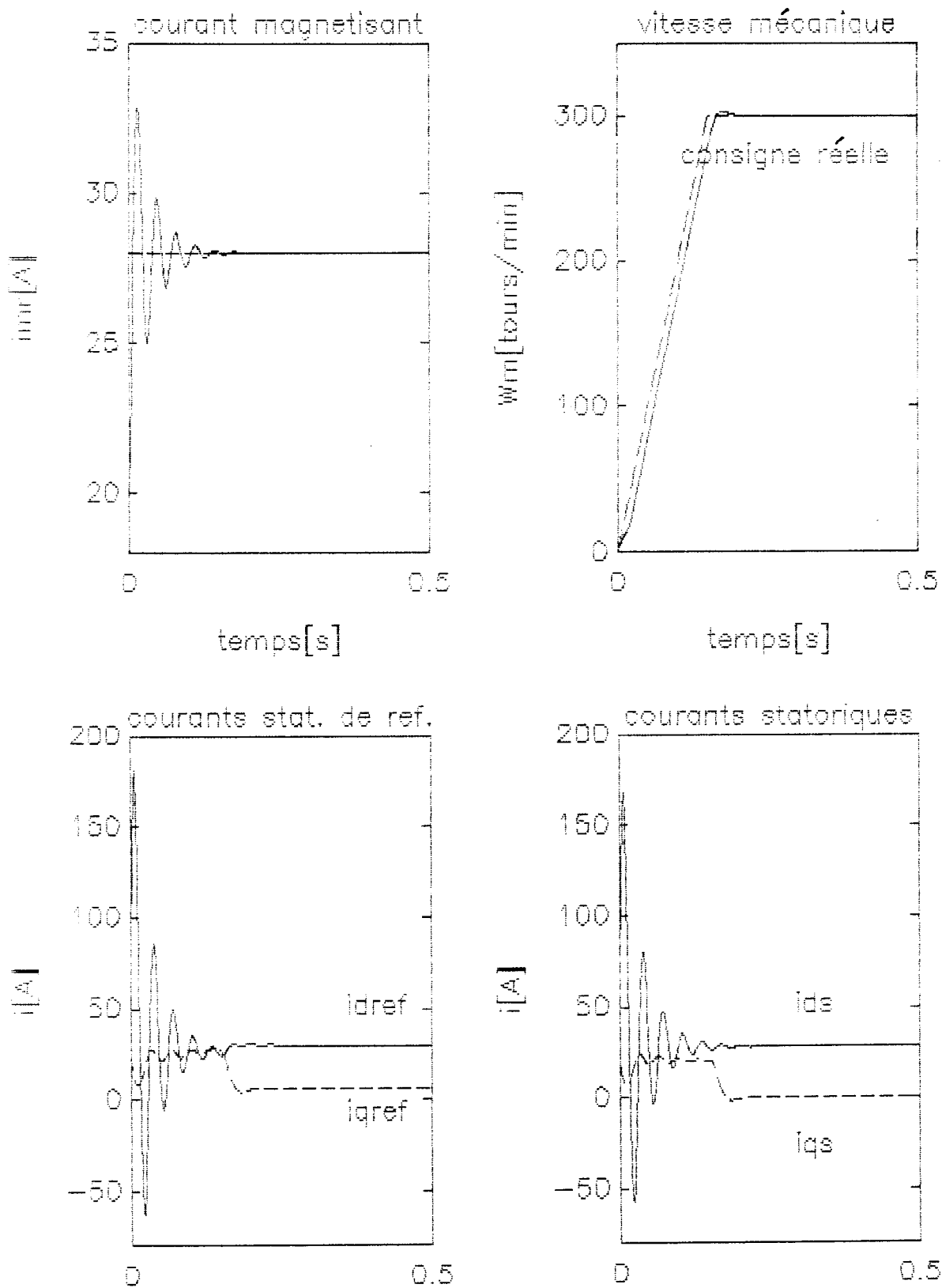


Figure 3.6. – RGS pour une consigne réelle de W_m

3.5. CONCLUSION

L'analyse et la synthèse des régimes glissants dynamiques, ont été effectuées sur la base de la forme normale dynamique. Deux cas ont été pris en considération lors de l'analyse, les systèmes à degré relatif statique zéro et les systèmes à degré relatif statique supérieur à zéro. Nous avons montré que la condition du glissement dynamique est identique à celle de la condition de glissement statique. Une expression générale, pour le calcul de la commande en régime glissant dynamique, est proposée.

Le cas du système perturbé est aussi étudié et la condition du rejet de la perturbation est déduite. Cette condition est vérifiée pour les régimes glissants statiques et dynamiques.

Il est montré aussi, que le régime glissant, basé sur la forme normale dynamique permet, sous certaines conditions, une linéarisation exacte des systèmes non linéaires. L'avantage de la commande en régime glissant dynamique est la disparition du phénomène de broutement.

Enfin, un exemple d'application à la machine asynchrone est présenté. Le test de la robustesse confirme les résultats théoriques obtenus. Nous constatons l'absence du phénomène de broutement et la rapidité des réponses. Cependant, cette rapidité est accompagnée par une demande forte en courants statoriques. En outre, un dilemme, entre le courant magnétisant et la vitesse mécanique est remarqué. En effet, un grand temps de réponse en vitesse provoque une demande supplémentaire en courants statoriques i_{dref} et i_{ds} (tab. 3.1a et b).

4. DYNAMIQUE EQUIVALENTE ET DYNAMIQUE GRAND GAIN

Dans ce chapitre, nous analyserons le comportement du système avant d'atteindre le régime glissant. Au paragraphe 4.1, l'identité entre la dynamique équivalente et la dynamique grand gain est établie pour les systèmes non linéaires monovariante. Ce résultat est étendu aux systèmes non linéaires multivariants découplés au paragraphe 4.2. Enfin, l'application à la machine asynchrone est présentée au paragraphe 4.3.

4.1. CAS MONOVARIABLE

L'analyse du comportement du système non linéaire, avant d'atteindre le régime glissant, peut se faire en imposant à sa sortie secondaire s la dynamique continue suivante:

$$\dot{s} = -M s \quad (4.1)$$

où M est le gain nécessaire pour annuler la sortie secondaires $s = 0$. Cette dynamique permet la stabilisation du système sur l'origine de l'espace d'état (point d'équilibre).

Soient les conditions suivantes :

- i) Les coefficients C_i de la surface $s(x)$ sont choisis de telle manière que son équation caractéristique soit un polynôme de Hurwitz.
- ii) la dynamique des zéros du système (3.21) est asymptotiquement stable.

Si ces deux conditions sont satisfaites, pour le gain M tendant vers l'infini, alors le système (3.21) se décompose en une dynamique rapide et une autre lente. En plus, la trajectoire de la dynamique lente évolue au voisinage $\mu = M^{-1}$ de la surface $s = 0$.

Lemme 4.1:

Si le système en bouclage linéarisant grand gain satisfait les conditions (i) et (ii), alors sa dynamique équivalente est identique à la dynamique de sa composante lente et la commande équivalente coïncide avec la commande grand gain.

Preuve:

A partir de (4.1) et (3.11a), la forme normale dynamique (3.23) devient:

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.2a)$$

$$\dot{z}_{n-1} = -\sum_{p=1}^{n-1} C_p z_{p+1} \quad (4.2b)$$

$$\mu \dot{z}_n = -\mu \sum_{p=1}^{n-1} C_p z_{p+1} - s \quad (4.2c)$$

$$y = z_1 \quad (4.2d)$$

Les équations (4.2) représentent un système singulièrement

perturbé. La dynamique lente s'obtient, pour $\mu = 0$, telle que:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.3a)$$

$$\dot{Z}_{n-1} = - \sum_{p=1}^{n-1} C_p Z_{p+1} \quad (4.3b)$$

$$y = Z_1, \quad s = 0 \quad (4.3c)$$

Il est facile de vérifier que la dynamique (4.3) a la même équation caractéristique que celle de la surface s (3.11a).

La dynamique continue (4.1) impose à s , et par conséquent à Z , une convergence asymptotique et locale vers zéro. À partir de (3.23) et (4.3), il s'en suit:

$$c(0, u_1, u_2, \dots, u_d) + \left[\frac{\partial Z_n}{\partial u_d} \dot{u}_d \right]_{Z=0} + w = 0 \quad (4.4)$$

Si la perturbation w est bornée et si le système (3.21) est à phase minimale, alors la résolution locale de (4.4), par rapport à u , définit la commande équivalente ou la commande à l'origine de l'espace d'état.

Dans le cas de la poursuite, la perturbation représente la sortie désirée et un nombre fini de ses dérivées. La dynamique de la commande (4.4) peut être interprétée comme un système inverse ayant pour entrée la trajectoire désirée et pour sortie la commande u .

Remarques:

Si le régime glissant existe sur $s = 0$, alors les équations (4.3) représentent le comportement du système (3.21) en régime glissant idéal.

Si la sortie du système a un degré relatif nul par rapport à la commande u , alors la dimension de la dynamique des zéros ou la dynamique de la commande est identique à celle du système.

Dans le cas où le degré relatif de la sortie, par rapport à la commande u , est identique à la dimension du système, il s'agit du bouclage linéarisant statique.

4.2. CAS MULTIVARIABLE

Ce cas est identique à celui du chapitre 3. Il s'agit de m sous systèmes monovariables découplés. Ceci nous permet de transposer facilement les résultats obtenus dans le cas monovariable au cas multivariable. La forme normale dynamique devient:

$$\dot{Z}_{(i,j)} = Z_{(i+1,j)} \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.5a)$$

$$\dot{Z}_{(n-1,j)} = - \sum_{p=1}^{n-1} C_{(p,j)} Z_{(p+1,j)} \quad (4.5b)$$

$$\mu_j \dot{Z}_{(n,j)} = -\mu_j \sum_{p=1}^{n-1} C_{(p,j)} Z_{(p+1,j)} - s_j \quad (4.5c)$$

$$y_j = Z_{(1,j)} \quad (4.5d)$$

où $j = 1, \dots, m$.

Pour chaque sous système, La dynamique lente s'obtient pour $\mu_j = 0$, telle que:

$$\dot{Z}_{(i,j)} = Z_{(i+1,j)} \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.6a)$$

$$\dot{Z}_{(n-1,j)} = - \sum_{p=1}^{n-1} C_{(p,j)} Z_{(p+1,j)} \quad (4.6b)$$

$$y_j = Z_{(1,j)} \quad s_j = 0 \quad (4.6c)$$

Aussi la dynamique des zéros pour chaque sous système se présente comme suit:

$$c_j \left[0, U_{1,j}, U_{2,j}, \dots, U_{d_j,j} \right] + \left[\frac{\partial Z_{n,j}}{\partial U_{d_j,j}} \dot{U}_{d_j,j} \right]_{z=0} + w_j = 0 \quad (4.7)$$

avec:

$$U_j = (U_{1,j}, U_{2,j}, \dots, U_{d_j,j})^T$$

4.3. APPLICATION A LA MACHINE ASYNCHRONE

Le modèle de la machine asynchrone est donné par les équations (2.26) et (2.27) dans le deuxième chapitre.

4.3.1. CALCUL DE LA COMMANDE

La commande équivalente est obtenue, par la procédure de calcul du chapitre 3, pour $s = 0$ selon la relation (3.36).

Cette même procédure est utilisée dans le calcul de la commande grand gain pour $\dot{s} = -M$ s.

4.3.2. RESULTATS DE LA SIMULATION

Les résultats de la simulation sont présentés pour les valeurs initiales suivantes :

$$i_{ds0}=0, \quad i_{qs0}=0, \quad i_{mro}=20, \quad \omega_{m0}=0$$

Pour la commande grand gain et la commande équivalente, les matrices λ_1 , et λ_2 ont les mêmes valeurs que dans le cas du régime glissant dynamique. Les valeurs de la matrice grand gain M_d sont calculées selon la relation (3.22). Les valeurs de t_r , sont choisies, respectivement, 0.01 secondes et 0.06 secondes. Ces matrices deviennent:

$$M_d = \begin{bmatrix} 1400, & 0 \\ 0 & ,2200 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} ,60 & , 0 \\ 0 & ,110 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} ,900 & , 0 \\ 0 & , ,90 \end{bmatrix}$$

Dans les deux cas, dynamique grand gain (DGG) et dynamique équivalente (DEQ), Trois types d'expériences ont été menées sur le modèle, à savoir: une perturbation par la consigne, une autre par les paramètres T_r et J et une dernière par la charge C_r . Pour chaque perturbation, le signal a été retardé de 0.3 secondes.

Les courbes de réponse, dans le cas de la Dynamique Grand Gain (DGG), sont données par les figures (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4). Pour la dynamique équivalente (DEQ), les réponses sont illustrées par les figures (4.5) (4.6), (4.7) et (4.8).

Dans le cas de la DGG, Les valeurs de pointe des commandes, des courants statoriques et des sorties i_{mr} et ω_m sont résumées, respectivement, dans les tableaux (4.1a), (4.1b), et (4.1c). Les temps de réponse des sorties sont résumés dans le tableau (4.1d).

Tableau 4.1a. -valeurs de pointe des commandes i_{dref} et i_{qref} du système perturbé(SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DGG.

variation du paramètre	$i_{dref}[A]$			$i_{qref}[A]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	75,38	29,06	30,04	139,96	5,98	5,99
J	75,38	29,06	30,04	139,96	5,98	5,99
C_r	75,38	29,06	22,24	139,96	5,98	43,09
y_{d2}	75,38	15,36	30,04	139,96	-259,41	-5,99

Tableau 4.1b. - valeurs de pointe des courants i_{ds} et i_{qs} du système perturbé(SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DGG.

variation du paramètre	$i_{ds}[A]$			$i_{qs}[A]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	69,03	28,00	28,00	126,09	-00,01	-00,00
J	69,03	28,00	28,00	126,09	-00,02	-00,00
C_r	69,03	27,39	27,89	126,09	-00,01	34,34
y_{d2}	69,03	24,38	28,00	126,09	-242,54	00,00

Tableau 4.1c. -valeurs de pointe des sorties i_{mr} et ω_m du système perturbé(SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DGG.

variation du paramètre	$i_{mr}[A]$			$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	28,00	28,00	28,00	300,08	300,00	300,00
J	28,00	28,00	28,00	300,08	300,00	300,00
C_r	28,00	27,89	27,89	302,40	288,29	302,40
y_{d2}	28,04	27,64	28,00	300,08	-300,00	-300,00

Tableau 4.1d. - temps de réponse t_r et gain M_d des sorties i_{mr} et ω_m , pour les variations de y_{d2} , T_r , J , et C_r , dans le cas de la DGG.

variation du paramètre	$i_{mr}[A]$		$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$	
	t_r	M_{d1}	t_r	M_{d2}
T_r	0,030	1400	0,049	2200
J	0,030	1400	0,049	2200
C_r	0,030	1400	0,049	2200
y_{d2}	0,030	1400	0,098	2200

Quant à la dynamique équivalente (DEQ), les valeurs de pointe des commandes i_{dref} et i_{qref} , des courants statoriques i_{ds} , i_{qs} , et des sorties i_{mr} et ω_m , sont résumées dans les tableaux (4.2a), (4.2b), (4.2c). Alors que les temps de réponse des sorties sont résumés dans le tableau (4.2d).

Tableau 4.2a. -valeurs de pointe des commandes i_{dref} et i_{qref} du système perturbé(SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DEQ.

variation du paramètre	$i_{dref}[A]$			$i_{qref}[A]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	73,56	29,73	30,04	141,92	5,99	5,99
J	73,56	29,73	30,04	141,92	5,99	5,99
C_r	73,56	21,66	22,45	141,92	5,99	42,93
y_{d2}	73,56	17,27	30,04	141,92	-253,56	-5,99

Tableau 4.2b. - valeurs de pointe des courants i_{ds} et i_{qs} du système perturbé(SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DEQ.

variation du paramètre	$i_{ds}[A]$			$i_{qs}[A]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	66,36	28,00	28,00	128,03	-00,00	-00,00
J	66,36	28,00	28,00	128,00	-00,00	-00,00
C_r	66,36	27,82	28,00	128,03	-00,00	34,21
y_{d2}	66,36	26,02	28,00	128,03	-237,46	-00,00

Tableau 4.2c. - Valeurs de pointe des sorties i_{mr} et ω_m du système perturbé (SP), pour une variation de la consigne y_{d2} et les variations des paramètres T_r , J , et C_r , dans le cas de la DEQ.

variation du paramètre	$i_{mr}[A]$			$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$		
	max	min	finale	max	min	finale
T_r	28,00	27,99	28,00	300,00	299,99	300,00
J	28,00	27,99	28,00	300,00	299,99	300,00
C_r	28,00	27,98	28,00	300,00	288,15	300,00
y_{d2}	28,03	27,89	28,00	299,99	-299,99	-299,99

Tableau 4.2d. - temps de réponse t_r et gain M_d des sorties i_{mr} et ω_m , pour les variations de y_{d2} , T_r , J , et C_r , dans le cas de la DEQ.

du paramètre	$i_{mr}[A]$		$\omega_m[\text{tours}/\text{min}]$	
	t_r	M_{d1}	t_r	M_{d2}
T_r	0,031	1400	0,055	2200
J	0,031	1400	0,055	2200
C_r	0,031	1400	0,055	2200
y_{d2}	0,031	1400	0,110	2200

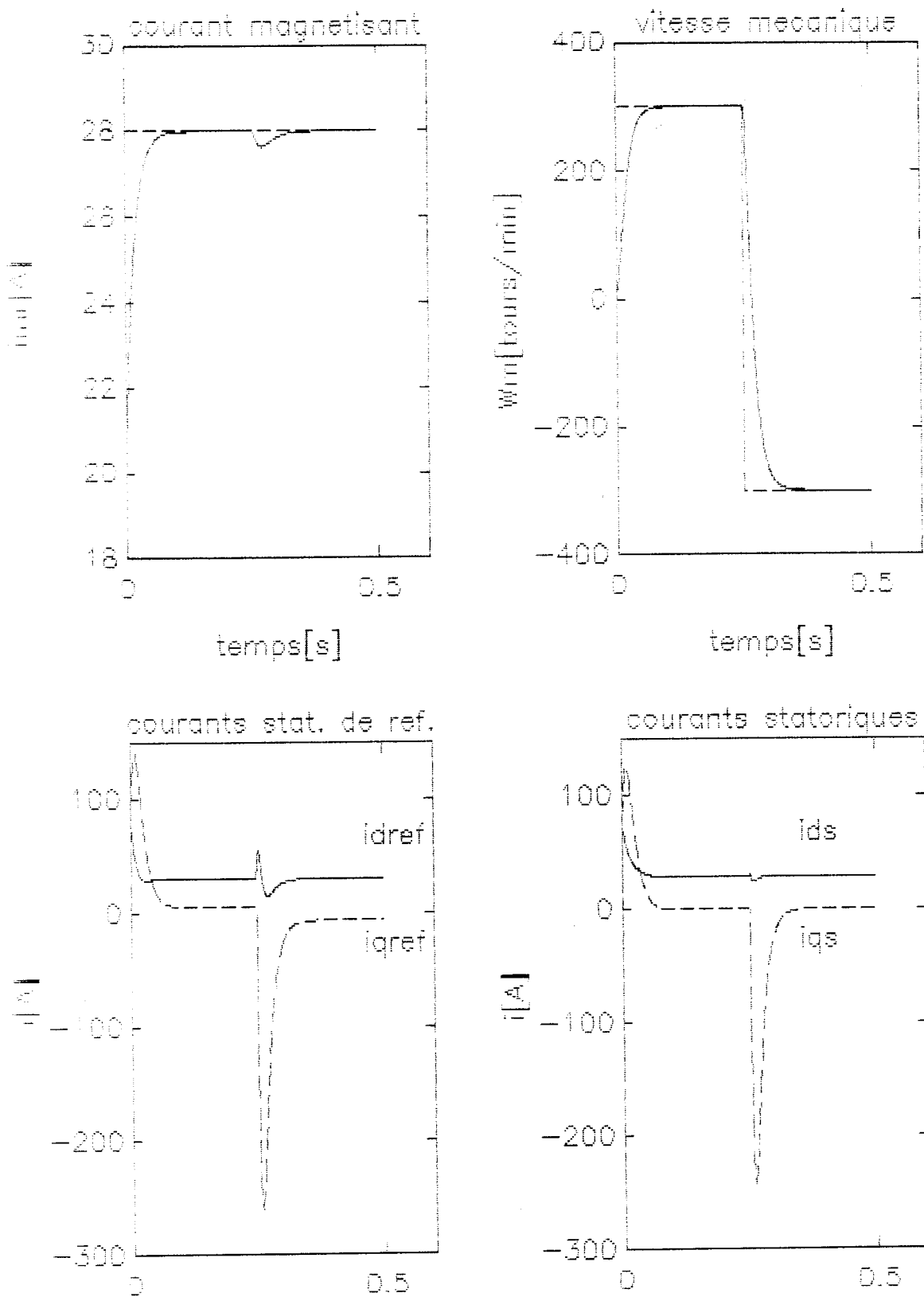


Figure 4.1.— DGC avec asservissement de vitesse

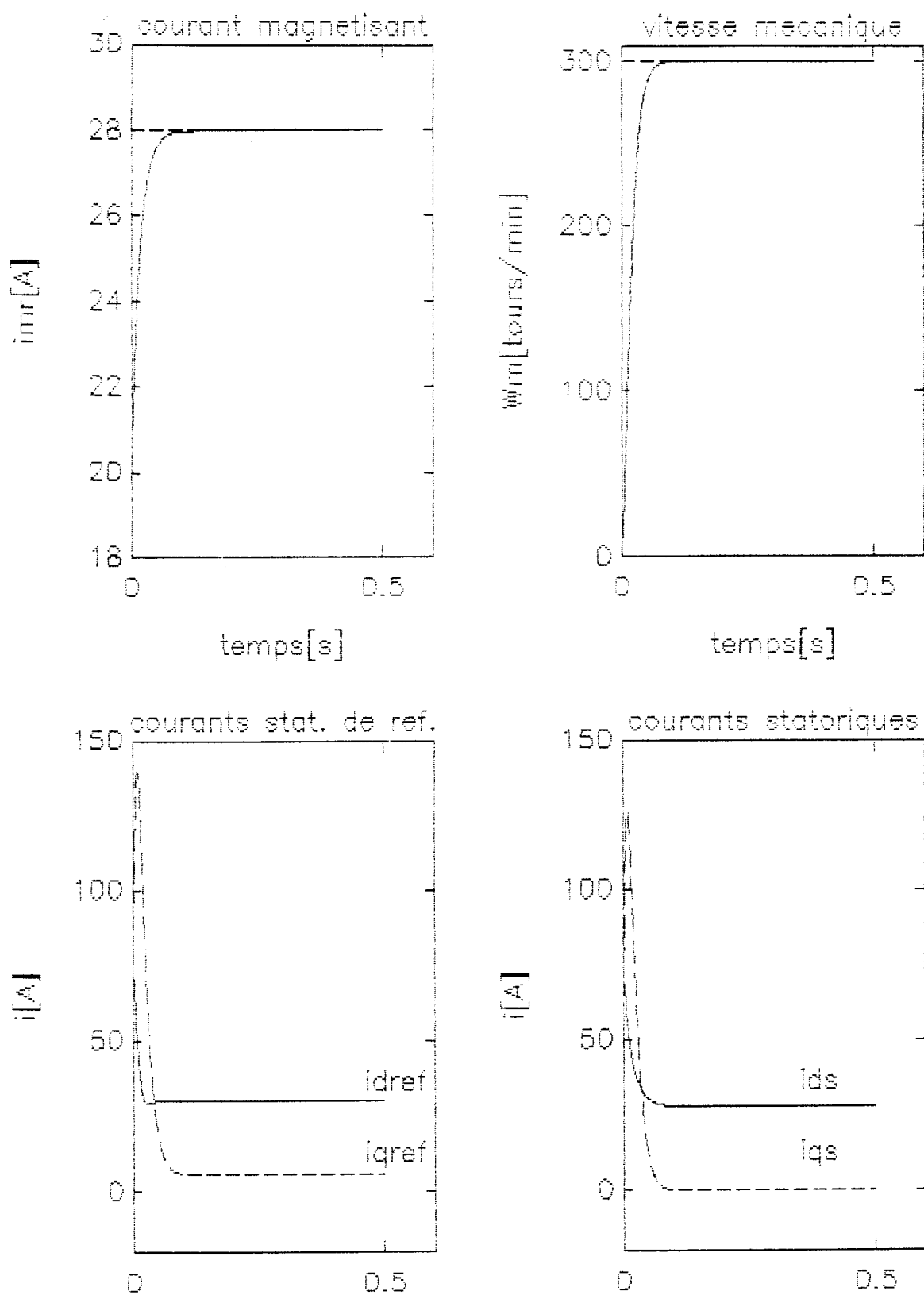


Figure 4.2.— DGC avec perturbation par T_r , ($T_r \rightarrow 2T_r$)

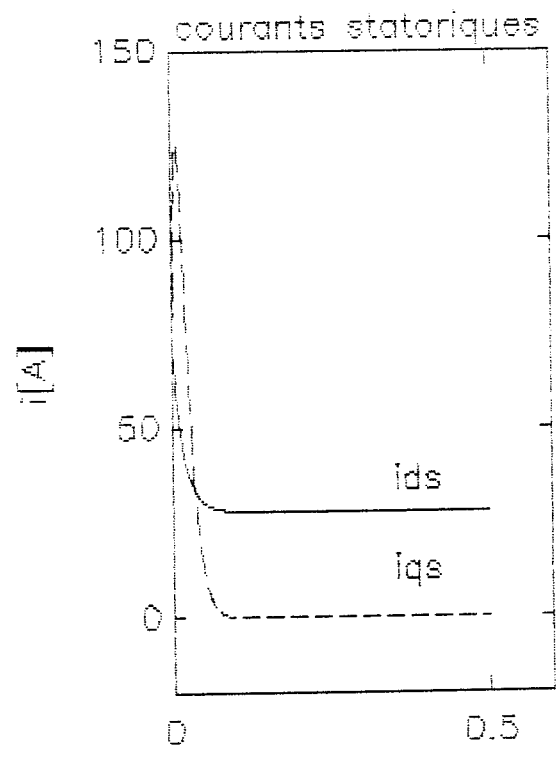
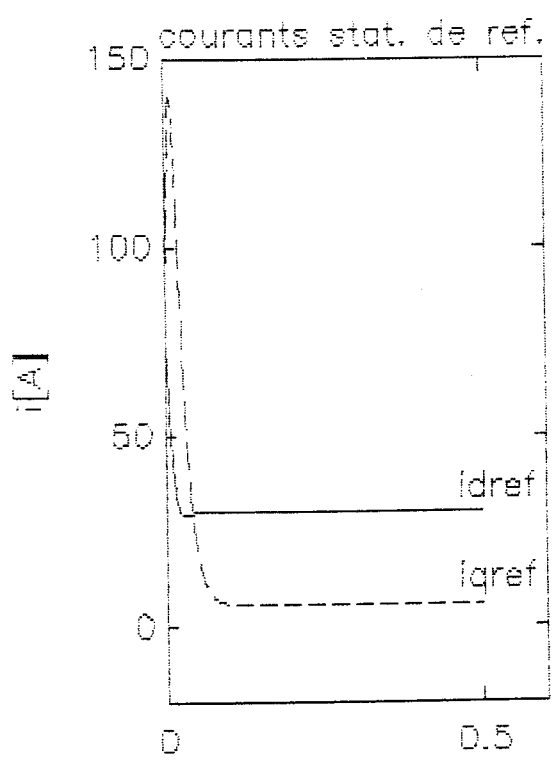
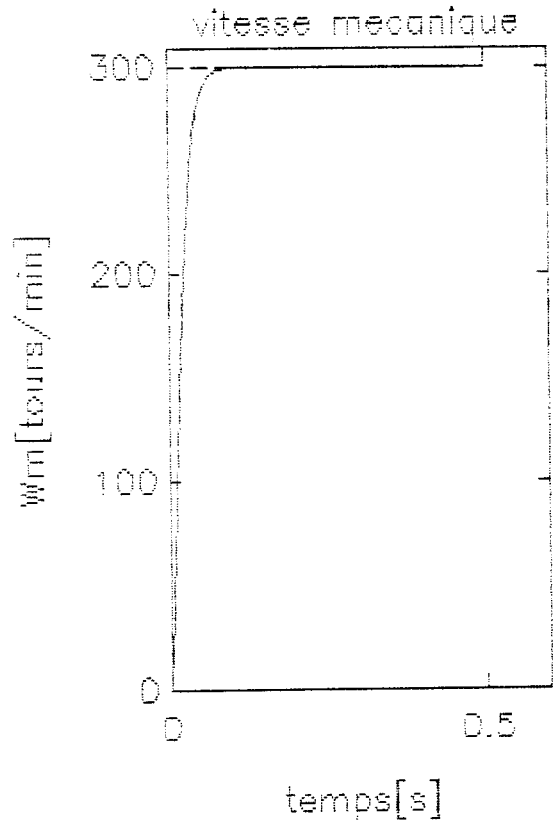
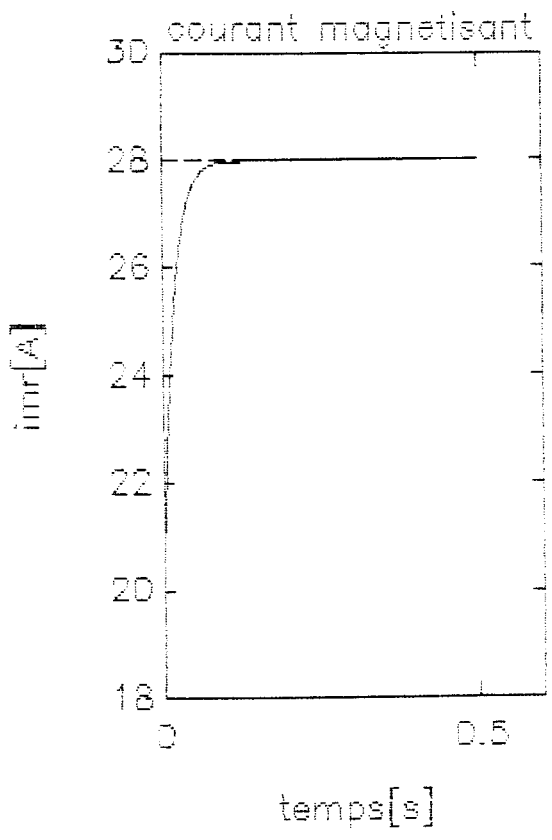


Figure 4.3.- DGG avec perturbation par J, ($J \rightarrow 2J$)

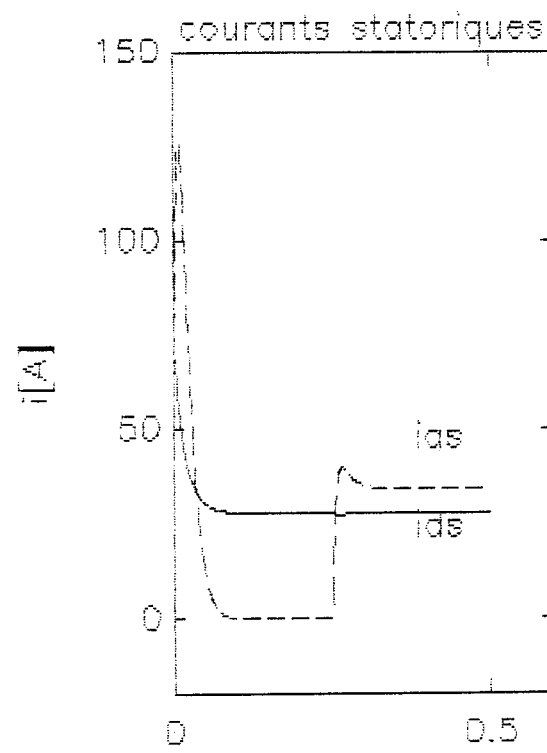
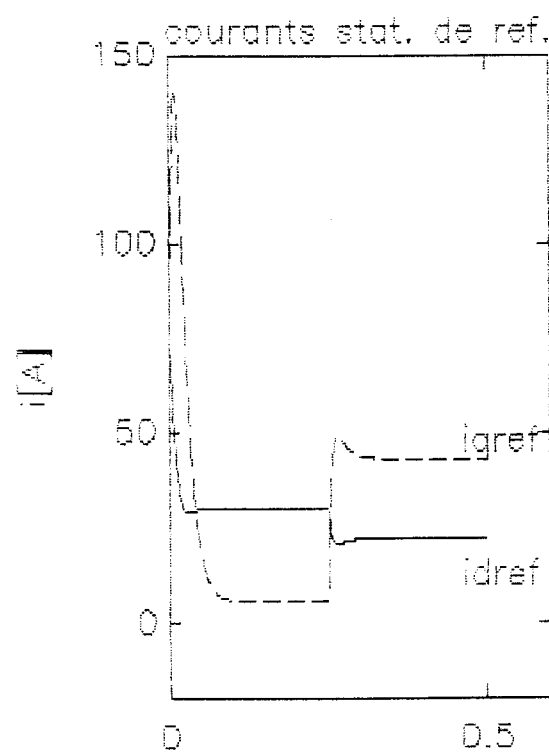
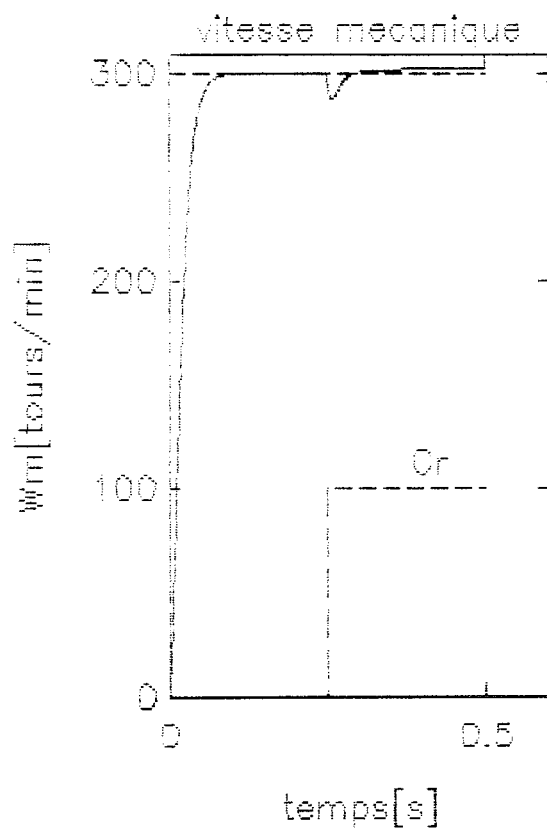
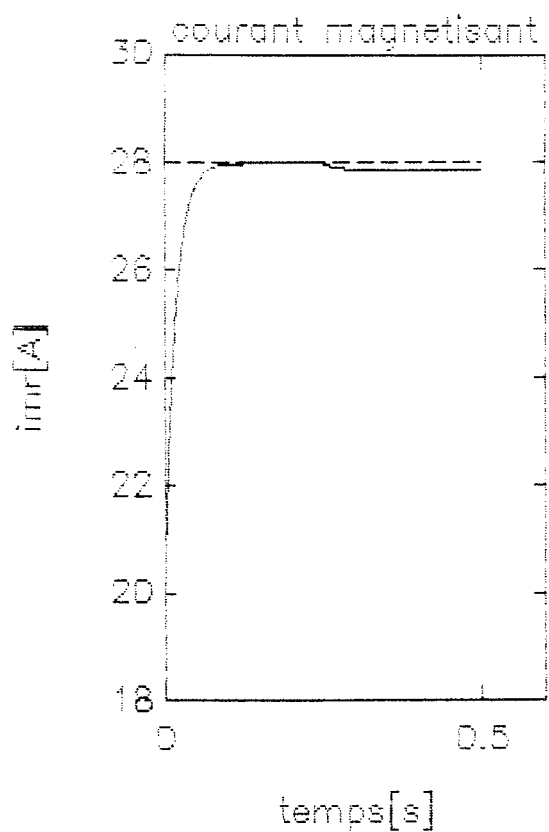


Figure 4.4. — DGG avec perturbation par la charge C_r

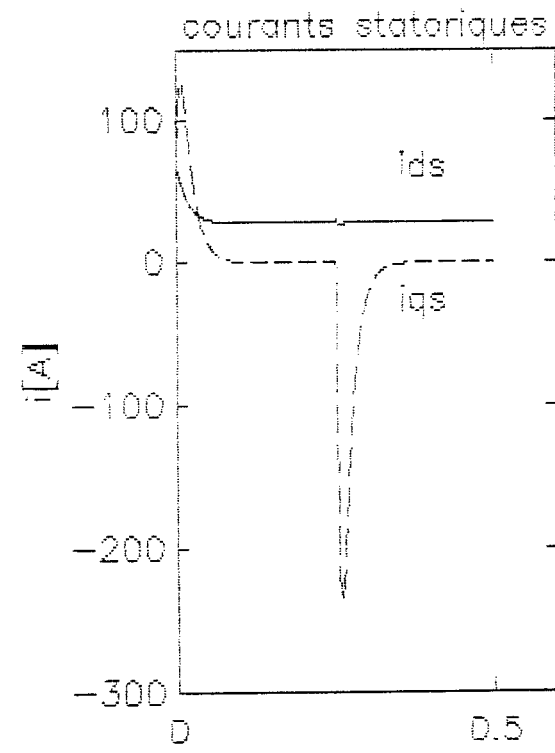
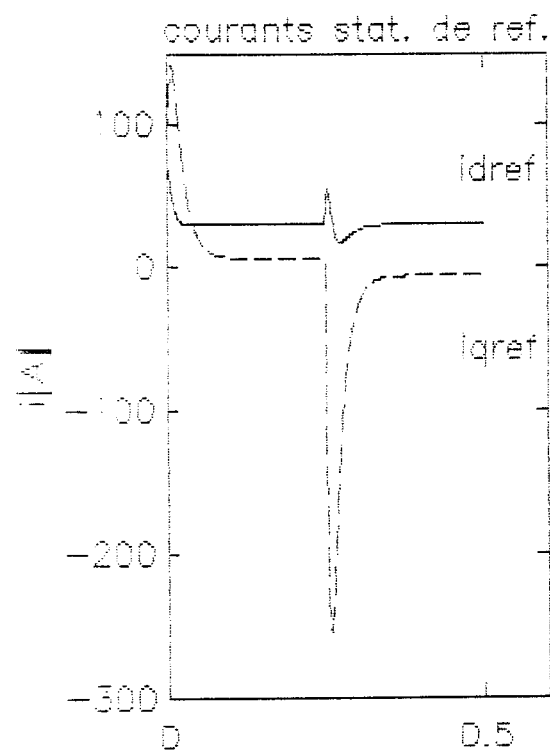
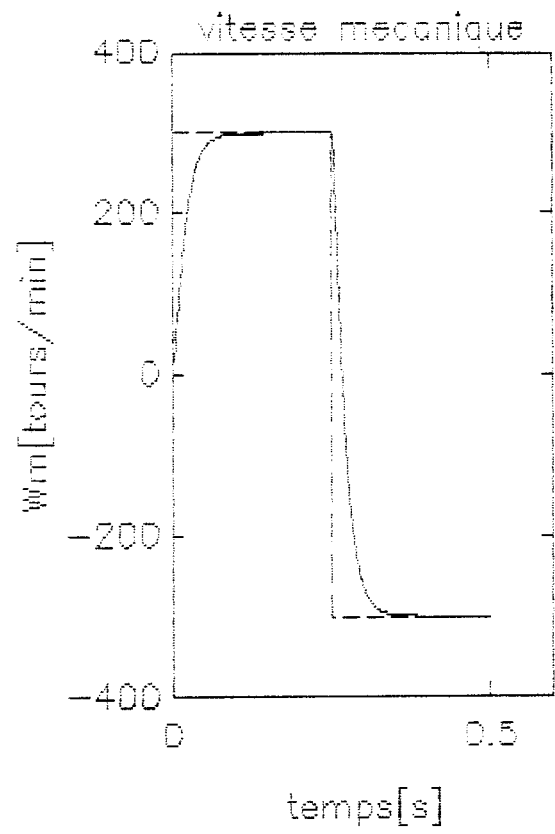
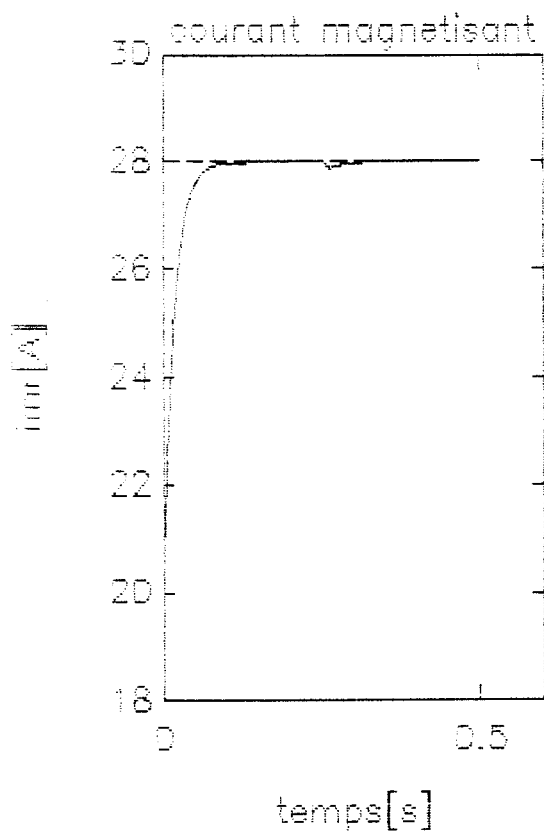


Figure 4.5.— DEQ avec asservissement de vitesse

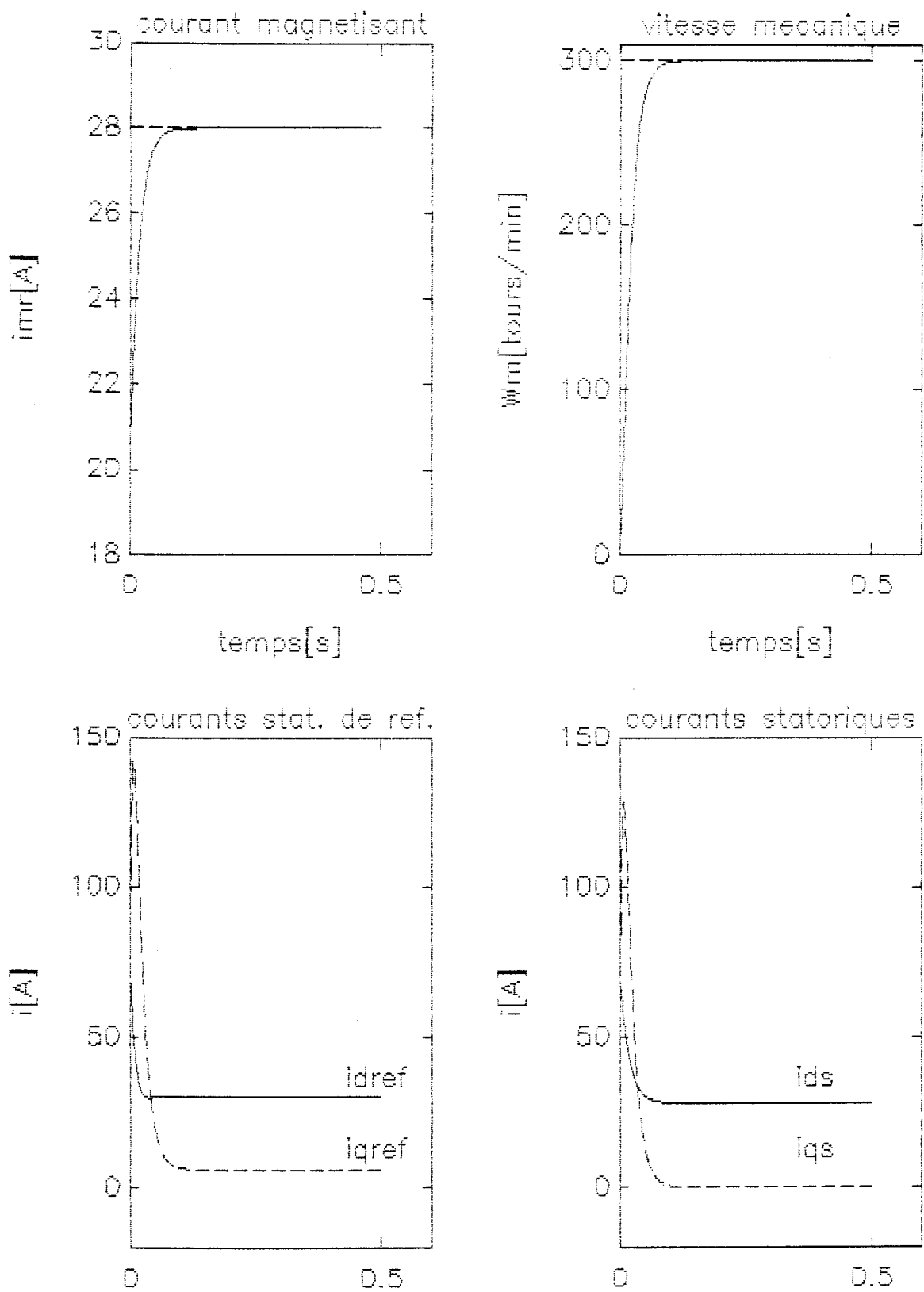


Figure 4.6.— DEQ avec perturbation par T_r , ($T_r \rightarrow 2T_r$)

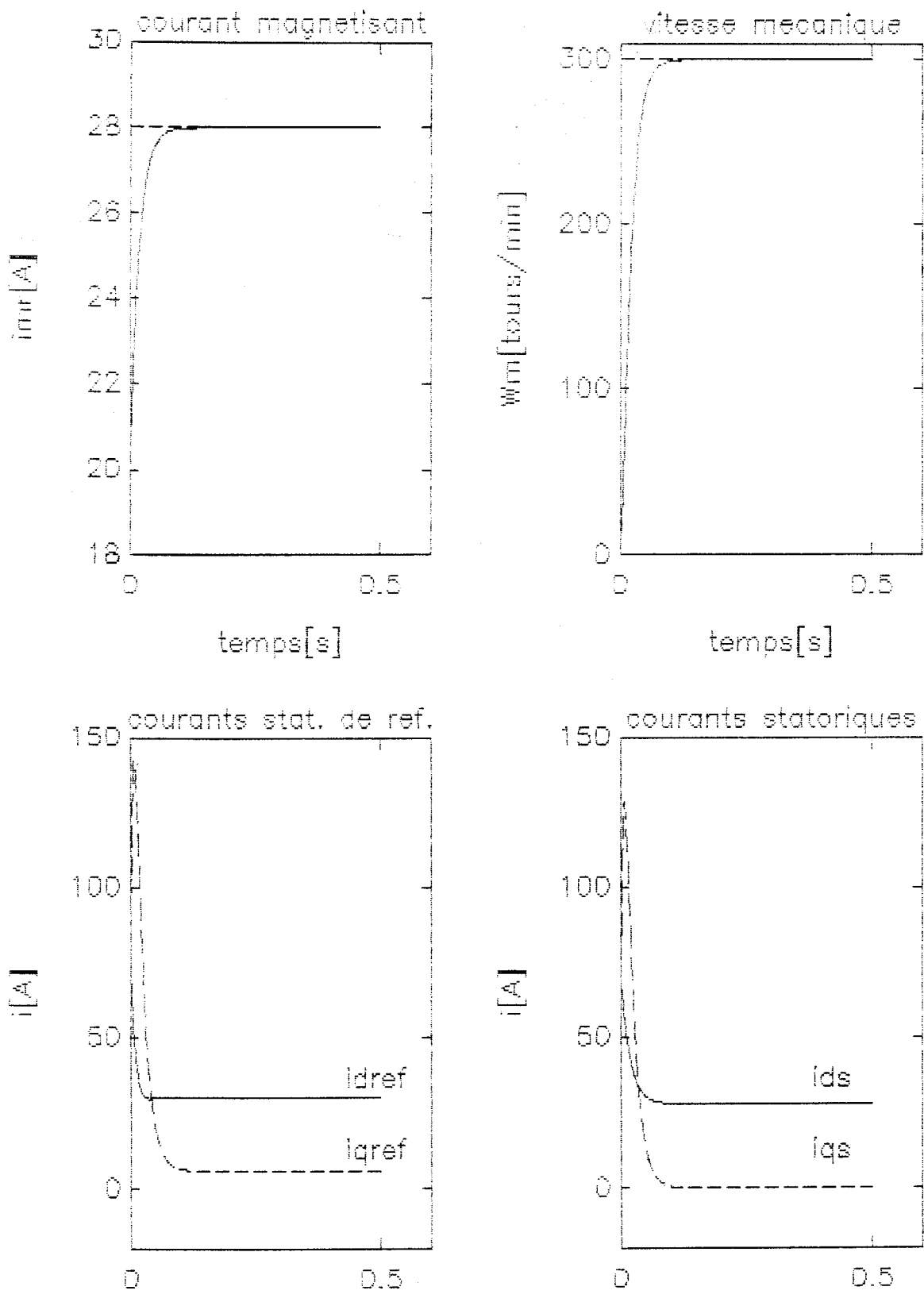


Figure 4.7.- DEQ avec perturbation par J, ($J \rightarrow 2J$)

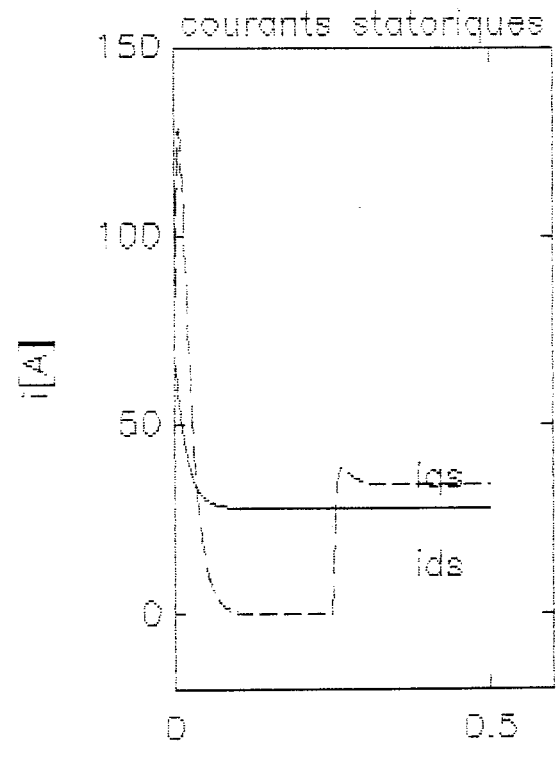
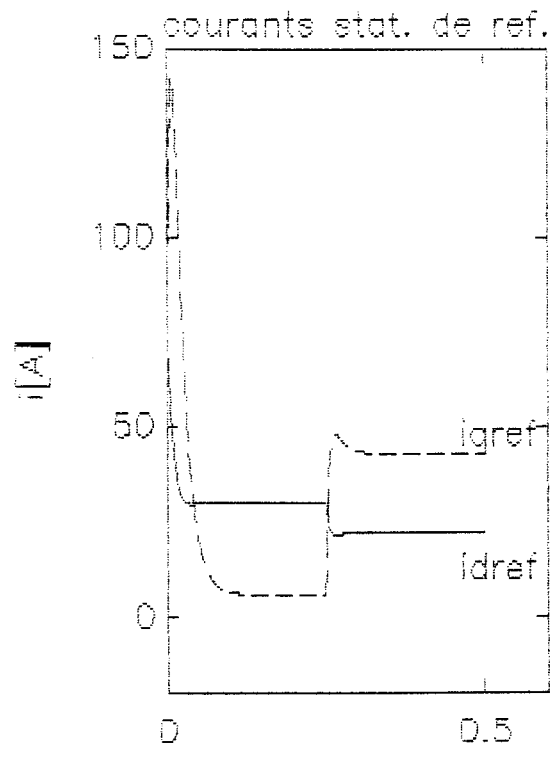
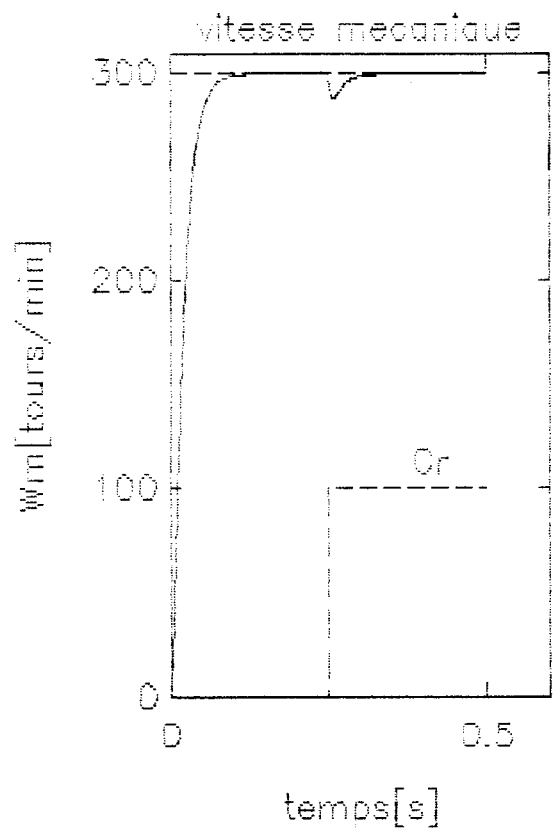
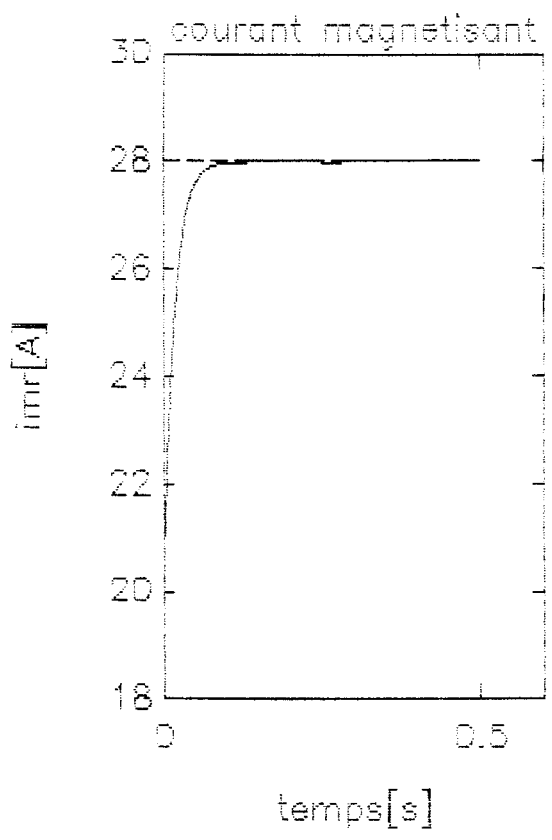


Figure 4.8.— DEQ avec perturbation par la charge ω_r

4.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré, par l'utilisation de la forme normale dynamique, que la dynamique équivalente et la dynamique grand gain sont identiques au voisinage de la surface glissante. Ce résultat est confirmé par une application à la machine asynchrone. La stabilisation de la machine asynchrone a été effectuée par un retour d'état discontinu.

les résultats du test de la robustesse se résument comme suit:

- le temps de réponse des sorties est de l'ordre de 3 centièmes de la seconde pour le courant magnétisant i_{mr} et du double pour la vitesse mécanique. Dans le cas de la dynamique grand gain (DGG), nous avons pris les mêmes valeurs des gains du régime glissant dynamique.
- l'incertitude sur les paramètres T_r et J est supposée 100 %. Son effet sur les sorties est négligeable. Les courants statoriques, varient légèrement, mais sans dépasser les valeurs limites.
- la perturbation par la charge passe, instantanément, de zéro à sa valeur nominale. Sa compensation est effectuée en l'introduisant dans la commande. Elle provoque une chute instantanée du courant magnétisant rotorique i_{mr} et de la vitesse ω_m puis, un retour très rapide à la valeur désirée sans erreur statique dans le cas de la dynamique équivalente. Une erreur statique négligeable, dans le cas de la dynamique grand gain, est constatée.

- La perturbation par la consigne de la vitesse, pour une inversion de la vitesse (300 \longrightarrow -300), provoque une demande forte, en courant statorique i_{qref} (i_{qs}), qui dépasse la valeur limite de 70 % environ.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail est l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires par la technique du régime glissant, qui permet un bouclage discontinu. Dans le premier chapitre, les notions fondamentales de cette technique, sont présentées puis une relation, qui définit la robustesse en fonction de la surface glissante est proposée.

Dans le deuxième chapitre, l'analyse et la synthèse des régimes glissants sont effectuées sur la base de la forme normale statique. Une généralisation de la définition du degré relatif statique nous a permis de faire une analogie entre le régime glissant continu et et le régime glissant discret. Cette analogie est utilisée pour développer une procédure de calcul de la commande numérique pour ensuite l'appliquer à la machine asynchrone.

Le troisième chapitre présente l'analyse et la synthèse du régime glissant sur la base de la forme normale dynamique. Seul le cas du système continu est pris en considération. Une relation entre les deux types du degré relatif est proposée. A travers cette relation, la forme normale statique est vue comme une forme particulière où la commande est statique. L'existence d'une commande dynamique, dans la forme normale dynamique a permis de développer un algorithme pour le calcul de la commande numérique. Cet algorithme est utilisé pour la commande de la machine asynchrone. En outre, une condition pour le rejet de la perturbation, est présentée.

Dans le quatrième chapitre, l'analyse du comportement du système au voisinage de la surface glissante est effectuée.

Conclusion générale

L'identité entre la dynamique équivalente et la dynamique grand gain est montrée. Cette identité est confirmée par une application à la machine asynchrone.

La comparaison des différentes versions de la technique de la commande en régime glissant, appliquées à la machine asynchrone, pour une consigne de i_{mr} de 28 A et une consigne de ω_m de 300 tours/min est présentée au tableau ci :

Tableau C.1.-Les différentes versions de la commande en régime glissant et la dynamique grand gain

version			régime glissant statique	régime glissant dynamique	dynamique grand gain	dynamique équivalente
V a l é r e d e p o i n t e	régulation de vitesse	i_{dref}	85,50	173,20	75,38	73,56
		i_{qref}	45,218	131,91	139,96	141,92
		i_{ds}	79,43	166,61	69,03	56,36
		i_{qs}	38,58	113,61	126,09	128,00
		i_{mr}	28,01	32,76	28,00	28,00
		ω_m	300,00	320,08	300,08	300,00
	asser- visse- ment de vitesse	i_{dref}	85,50	173,20	75,38	73,56
		i_{qref}	45,21	-375,70	-259,41	-253,56
		i_{ds}	79,43	166,61	69,03	56,36
		i_{qs}	-50,29	-348,59	-242,54	-237,46
	i_{mr}	88,01	32,76	28,04	28,03	
	ω_m	300,00	-348,89	300,08	299,99	
Robustesse par rapport à ΔC_r	i_{mr}	0,01	00,00	0,20	0,00	
	ω_m	0,01	30,30	2,40	0,00	
Temps de réponse	i_{mr}	0,018	0,038	0,031	0,031	
	ω_m	0,194	0,102	0,049	0,055	

En régime glissant dynamique, certaines opérations supplémentaires sont nécessaires pour le calcul de la commande dynamique (voir fig. 2.1 et 3.1). Il s'en suit, que l'algorithme de calcul de la commande en régime glissant statique est plus simple.

Les différentes applications à la machine asynchrone montrent ce qui suit:

- le régime glissant dynamique possède toujours une dimension supérieure à celle du régime statique.

- le rejet de la perturbation extérieure n'est possible que lorsque le degré relatif statique du système, par rapport à celle-ci, est égal ou est supérieur au degré relatif du système par rapport à la commande.

- la commande équivalente réagit plus vite, lors de la compensation de la perturbation par la charge, mais elle est plus sensible aux incertitudes sur les paramètres.

- la commande en régime glissant statique est la seule à ne pas dépasser, en amplitude, les valeurs maximales imposées par la technologie de la machine.

- [1] V.I. UTKIN, Sliding mode in control and optimisation Springer Verlag 1992.
- [2] V.I. UTKIN, Sliding modes and their application in VSS, Mirpublishers Moscow, 1974.
- [3] A. ISIDORI, Nonlinear control systems, Springer Verlag, 1989.
- [4] M. FLIESS, Generalised controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics, IEE Trans. on Automatic Control, 35, 9, 1990.
- [5] A.G. LUKYANOV, Methods of reducing equation for dynamic systems to regular form, Automation and Remote Control, 42, 4 1981.
- [6] S.I. ZINOBER, Two approaches to hyperplane design in multivariable sliding control, int. J. control 44, 1, 1986.
- [7] W. LEONHARD, Control of electrical drives, Springer Verlag 1990.
- [8] F. BLASCHKE, A new method for the structural decoupling of AC induction machine, Proc. 2nd IFAC Symp. on multivariable technical control systems, 1971.
- [9] G. FIGALLI, An optimal feedback control for bilinear model of induction motor drives, Int. J. control, 39, 5, 1984.
- [10] A. Bellini, A field oriented adaptive control of induction motors useful to reduce the parameters variations and the measurment errors, Int. conf. on elect. machines, ICEM, 1984.

- [11] H. SIRA-RAMIREZ, Differential geometric methods in variable structure control, Int. J. control, 48, 4, 1988.
- [12] R. MARINO, P. VALICI, Nonlinear control of induction motors: a simulation study, ECC, Grenoble July 1991.
- [13] H. BLOMBERG, Algebraic theory of multivariable linear systems, Academic Press, London, 1983.
- [14] M. FLIESS, F. MESSEGER, sur la commande en régime glissant C.R. Acad. Sci. Paris, 1991.
- [15] M. FLIESS, Nonlinear control theory and differential algebra, Proc. I.I.A.S.A. Conf. of modelling adaptive control, Hungary, July, 1986.
- [16] H. BÜHLER, Reglage par mode de glissement, Press Polytechnique Romande de Lausanne, 1986.
- [17] H. HASHIMOTO, Variable structure strategy in motion control, 10th W. conf. of IFAC, Munich, Germany, 5,3,1987.
- [18] J.J. SLOTINE, S.S. SASTRY, Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators, Int. J. control, 38, 2, 1983.
- [19] S. KOROVIN, Higher order sliding modes, Proc. of the IEEE international workshop on VSS and Lyapunov control of uncertain dynamical systems. University of Sheffield, Angleterre, 1992.

[20] P.M. FRANK, Robustness and sensitivity: a comparison of the two methods, Proc. IASRED symp. on applied control and Estimation, Copenhagen, Denmark, 1983.

[21] G. BARTOLLINI, Variable structure systems nonlinear in the control. IEEE trans. on automatic control. 30, 7, July, 1985.

[22] H. SIRA-RAMIREZ, nonlinear discrete structure systems in quasi-sliding mode, int. J. control, 54, 5, 1991.

[23] S.V. DRAZKUNOV, V.I. UTKIN, on discrete-time sliding modes, Proc. of the IFAC symp. on NLS, Italy, 1989.

[24] S.Z. SARPTURK, Discrete variable structure systems with pseudo-sliding mode, IEEE, trans. on automatic control, 32, 9, 1987.

[25] A.F. FILIPPOV, Differential equation with discontinuous righthand side, 1963.

[26] S.V. PANTALOS, Commande non lineaire du moteur asynchrone aspects discrets et continus, école supérieure d'électricité, Paris, 1991

[27] E.R. KOLCHIN, Differential algebra and algebraic groups, Academic Press, New York, 1973.

[28] M. FLIESS, Automatique et corps différentiels, forum math., 1, 1989.

[29] M. FLIESS, F. MESSEAGER, Vers une stabilisation discontinue, forum math, 1, 1991.

[30] F. MESSAGER, Sur la stabilisation discontinue des systèmes, thèse de doctorat en sciences automatique, Orsay, Paris, 1992.

[31] H. SIRA-RAMIREZ, on the dynamical sliding modes control of nonlinear systems, Int. J. control, 57, 5, 1993.

[32] A. SABANOVIC and D.B. ISOSIMOV. "Application of Sliding Modes to induction Motor Control", IEEE Transaction on Industry Applications, Vol. IA 17 N° 1, January / February 1981.

[33] A. SABANOVIC and B. BILALOVIC, "Sliding Mode Control of AC Drives", IEEE Transacton. on Industry Application, Vol.25, N° 1 January / February, 1989.

[34] S. IFRAH, H. CHEKIREB, "commande par Mode de Glissement, Application au moteur asynchrone", COMEAI 93, Djelfa Algerie, mai, 1993.

[35] H. MARKOVETZ, "Modelisation d'un moteur asynchrone et étude en simulation d'une commande linéaire quadratique, rapport final, E.S.E, Juillet 1990.

Rappel d'algèbre différentielle [28], [29], [30]:

corps différentiel:

c'est un corps commutatif K muni d'une dérivation unique notée $\frac{d}{dt} = \dot{}$, qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\forall a, b \in K, \quad \frac{d}{dt}(a+b) = \dot{a} + \dot{b}$$

$$\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}$$

Une constante, dans K , est un élément $c \in K$ tel que $\dot{c} = 0$. L'ensemble des constantes de K , est un sous-corps de K , appelé le corps de constantes.

extension différentielle L/K :

C'est une extension donnée par deux corps différentiels K, L avec $K \subset L$.

Un élément de L est dit différentiellement algébrique sur K si, et seulement si, il satisfait une équation différentielle algébrique à coefficients dans K .

L'extension L/K est dite différentiellement algébrique si, et seulement si, tous les éléments de L sont différentiellement algébrique sur K .

Un élément $a \in L$ est dit différentiellement transcendant sur K si, et seulement si, il n'est pas différentiellement algébrique sur K . En d'autres termes, aucune équation

différentielle algébrique, à coefficients dans K , n'est vérifiée par l'élément a .

L'extension L/K est dite différentiellement transcendante sur K s'il existe au moins un élément de L qui est différentiellement transcendant sur K .

Soit k un corps différentiel de base. Supposons que l'élément primitif x existe tel que, pour $L = k\langle u, x \rangle$ et $K = k\langle u \rangle$, le vecteur d'état $x = (x_1, \dots, x_n)$, dit vecteur d'état généralisé, constitue une base de transcendance de l'extension L/K .

Définition 1 [28]:

Le degré de transcendance n de l'extension $k\langle u, x \rangle/k\langle u \rangle$ est le plus petit entier n , tel que $x^{(n)}$ soit $k\langle u \rangle$ -algébriquement dépendant de $x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$.

Dans le cas où l'extension L/K est finiment engendrée, un résultat fondamental est énoncé par le théorème suivant [28]:

Théorème:

Si l'extension L/K est finiment engendrée, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- i) l'extension L/K est différentiellement algébrique sur K ;
- ii) Le degré de transcendance de l'extension L/K est fini.

Définition 2 [28]:

Une dynamique est une extension différentielle algébrique K/L finiment engendrée.

Forme canonique généralisée [28]

Soit k un corps différentiel de base. On note $k\langle u \rangle$ le corps différentiel engendré par k et les composantes de l'entrée $u=(u_1, \dots, u_m)$. Une *dynamique* est une extension différentiellement algébrique $K/k\langle u \rangle$ finiment engendrée. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une base de transcendance de $K/k\langle u \rangle$, qui est de degré de transcendance fini. Les dérivées \dot{x} sont $k\langle u \rangle$ -algébriquement dépendantes de x . Il s'ensuit:

$$C_i \left(\dot{x}_i, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

où les C_i sont des polynômes à coefficients dans k . Si, localement, $\frac{\partial C_i}{\partial \dot{x}_i} \neq 0$, il existe un élément primitif Z_1 qui conduit à la forme canonique généralisée explicite suivante:

$$\dot{Z}_i = Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{Z}_n = C \left(Z, u, \dot{u}, \dots, u^{(d)} \right)$$

où

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$$

Théorème de la fonction implicite [3]

Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts tels que la fonction :

$$F: A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est infiniment dérivable

avec:

$$[x, y] = [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] \in A \times B$$

Soient les deux conditions suivantes: définies, localement, telles que:

- i) la fonction F satisfait, au point $[x^0, y^0] \in A \times B$, l'égalité suivante:

$$F[x^0, y^0] = 0 \quad (\text{B.1})$$

- ii) la matrice:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

est non singulière au point $[x^0, y^0]$.

Si ces deux conditions sont vérifiées, alors nécessairement, il existe un voisinage A_0 de x^0 dans A , un voisinage B_0 de

y^0 dans B et une fonction unique, infiniment dérivable:

$$G: A_0 \longrightarrow B_0$$

telle que pour tout $x \in A_0$, la fonction F satisfait la relation suivante:

$$F(x, G(x)) = 0 \tag{B.3}$$

Annexe C: schéma fonctionnel et Paramètres de la machine
asynchrone.

La dynamique de la machine asynchrone (associée à un onduleur de tension) est régit par les équations différentielles suivantes:

$$\frac{d i_{ds}}{dt} = -\alpha i_{ds} + \omega_{mr} i_{qs} + \beta i_{dref} \quad (c.1)$$

$$\frac{d i_{qs}}{dt} = -\alpha i_{qs} - \omega_{mr} i_{ds} + \beta i_{qref} \quad (c.2)$$

$$\frac{d i_{mr}}{dt} = \frac{1}{T_r} i_{ds} - \frac{1}{T_r} i_{mr} \quad (c.3)$$

$$\frac{d \omega_m}{dt} = \frac{K_0}{J} i_{qs} i_{mr} - \frac{C_r}{J} \quad (c.4)$$

où :

$$\omega_{mr} = p \omega_m + \frac{i_{qs}}{T_r i_{mr}} \quad (c.5)$$

$$\alpha = \frac{1 + \alpha_1}{\sigma T_s}, \quad \alpha_1 = \frac{K E}{R_s}, \quad \beta = \alpha - \frac{1}{\sigma T_s}, \quad T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (c.6)$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1+\sigma_r)(1+\sigma_s)}, \quad K_0 = \frac{2 p M}{1 + \sigma_r}, \quad T_s = \frac{L_s}{R_s} \quad (c.7)$$

i_{ds}, i_{qs} : les courants statoriques dans le repère (d,q)

i_{mr} : le courant magnétisant rotorique

R_s, R_r : les résistances statorique et rotorique

J : l'inertie

M : l'inductance mutuelle

L_s, L_r : les inductances statorique et rotorique

K, E : gain et tension à l'entrée de l'onduleur

p : le nombre de paires de pôles

σ_s, σ_r : les coefficients de fuite statorique et rotorique

Annexe C: schéma fonctionnel et Paramètres de la machine asynchrone.

ω_m : la vitesse mécanique

C_r : le couple résistant

A partir de ces équations, nous pouvons déduire le schéma fonctionnel suivant:

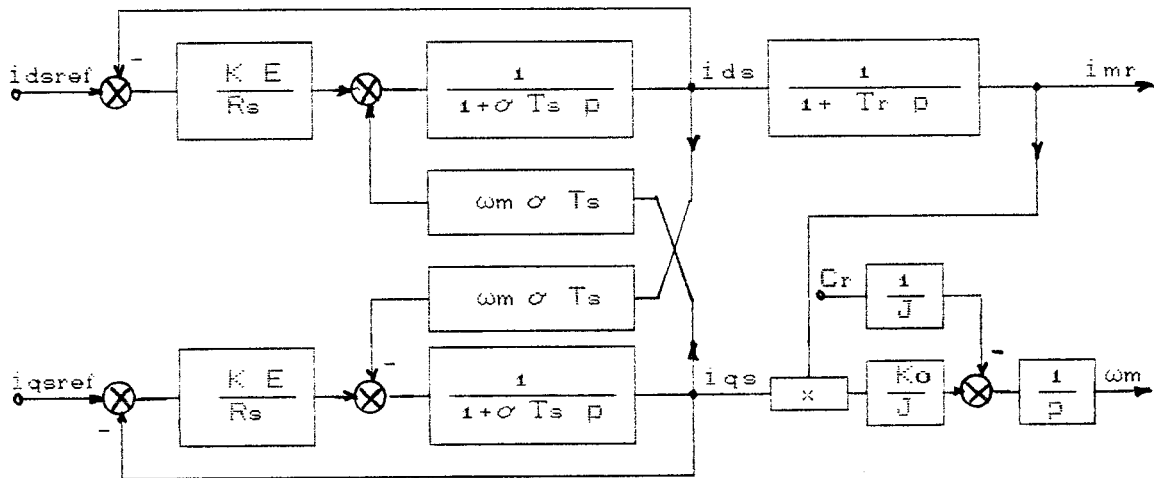


schéma fonctionnel de la machine asynchrone associée à un onduleur

Les valeurs des paramètres de la machine utilisée dans la simulation sont:

Inductance mutuelle M	M = 0,1608 H
Coefficient de fuite rotorique σ_r	$\sigma_r = 0,027$
Coefficient de fuite statorique σ_s	$\sigma_s = 0,027$
Inductance du rotor L_r	$L_r = 0,165142$ H
Inductance du stator L_s	$L_s = 0,165142$ H
Résistance du rotor R_r	$R_r = 1,47 \Omega$
Résistance du stator R_s	$R_s = 0,877 \Omega$
Inertie J	$J = 0,03 \text{kg.m}^2$
Nombre des paires de pôle p	p = 1
Tension nominale (effective) U_{nom}	$U_{nom} = 180$ V
Vitesse nominale V_{mnom}	$V_{mnom} = 1000$ tours/min

Annexe C: schéma fonctionnel et Paramètres de la machine
asynchrone.

Valeur maximale admissible du courant i_{dmax}	$I_{dmax} = 150 \text{ A}$
Valeur maximale admissible du courant i_{qmax}	$I_{qmax} = 150 \text{ A}$
Valeur nominale du couple résistant	$C_{rnom} = 100 \text{ N m}$
Période d'échantillonnage T_e	$T_e = 0.001 \text{ s}$
Gain de l'onduleur K	$K = 10$