

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed BOUGARA Boumerdes.



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Maintenance Industrielle
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique

Mémoire de Magister

Thème :

Vibrations des plaques stratifiées, influence de la cinématique

Présenté par : AGUIB SALAH

Soutenu le : 24 / 04 / 2006

Devant le jury composé par :

MM. S. RECHAK	Professeur	ENP El Harrach	Président
A. NOUR	Professeur	UMB. Boumerdes	Encadreur
B. NECIB	Professeur	UMM. Constantine	Examineur
A. KHALFI	Professeur	UDL. Sidi Bel Abbas	Examineur
M.O. SI-CHAIB	M.C	UMB. Boumerdes	Examineur

Année universitaire 2005/2006

Résumé :

Cette présente étude se concentre sur les vibrations libres en flexion des plaques minces symétriquement stratifiées en matériaux composites, ayant un comportement anisotrope avec divers états de frontières, différents matériaux et différentes épaisseurs. La solution du problème en 2D est obtenue en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz en milieu élastique homogène, en introduisant deux étapes essentielles : la discrétisation des équations non linéaires et la reconstitution des solutions (fréquences propres), basée sur la méthode de Graeff. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode utilisée.

Mots clefs : *Matériaux composites, plaques stratifiées, vibration, fréquence adimensionnelle, Rayleigh-Ritz.*

Abstract:

This present study concentrates on the free vibrations in inflection of the thin sections symmetrically laminated out of composite materials, having an anisotropic behavior with various states of borders, various materials and various thicknesses. The solution of the problem in 2d is obtained by using the method of Rayleigh-Ritz in homogeneous springy medium, by introducing two essential stages: the discretization of the nonlinear equations and the reconstitution of the solutions (Eigenfrequencies), based on the method of Graeff. The results obtained show the effectiveness of the method used.

Keywords : *materials composites, laminateds plates, vibration, frequency non-dimensional, Rayleigh-Ritz.*

ملخص

في هذه الدراسة تم التركيز على تحليل الاهتزازات الالتوائية الخاصة بالصفائح الرقيقة ذات الطبقات المتناظرة المكونة من المواد المركبة، والتي تملك ميزة تباين المواد وهذا مع الأخذ بعين الاعتبار الحالات التالية: اختلاف الحواف، اختلاف المواد المشكلة، واختلاف السمك. حل هذه المسألة يعتمد على المستوي دو بعدين وذلك باستعمال طريقة ريلي-ريتز في وسط متجانس. اعتمدنا في دراستنا على مرحلتين، الأولى هي خط معادلات الحركة، والثانية تشكيل حلول هذه الأخيرة وذلك بالاعتماد على طريقة قريف. النتائج المحصلة عليها تعبر عن فاعلية الطريقة المستعملة.

كلمات المفتاح : مواد مركبة، الصفائح ذات طبقات، الاهتزازات، تردد لا بعدي، ريلي-ريتز.

Remerciements

Ce travail a été accompli au Laboratoire Dynamique des moteurs et vibroacoustique de l'Université M'hamed Bougara de Boumerdès, Faculté des Sciences de l'Ingénieur (F.S.I.).

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de mémoire, le Professeur NOUR Abdelkader pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques. Ce fut un plaisir de travailler avec lui. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée dans la gestion de mon mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente. Bref, merci de m'avoir supporté pendant ces deux années et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour moi.

Merci également au Président du jury Le Professeur RECHAK Said ainsi qu'aux autres membres en l'occurrence le Professeur NECIB Brahim, le Professeur KHALFI Ali, le Docteur SI-CHAIB mohamed Ouali pour avoir accepté de juger et apprécier mon travail.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mr. Kadja Boualem, Directeur de la société modelage mécanique et gravure par commande numérique pour le soutien, l'encouragement qu'il m'a donné et ses appréciables conseils qui m'ont guidé de manière forte.

Il convient également de saluer Mr. Chikh Noureddine, enseignant à l'Université de Boumerdès pour sa gentillesse, son sérieux ainsi que ses conseils scientifiques appréciables.

Un remerciement spécial au cher frère Salah ROUABAH, qui par sa disponibilité permanente m'a permis à ce travail d'aboutir, tout en gardant une fidèle amitié durant plus de huit ans.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire, qui durant ces deux années m'ont permis de travailler dans un cadre agréable. Merci à tous mes collègues étudiants, les anciens et ceux encore en activité.

J'adresse un grand merci à mes collègues en post-graduation, surtout et notamment, Mahfoud, Toufik, Brahim, Mohammed, idriss, Ahmed, Saida (Gâteaux et eau froide), Bachir (Nazih) Kadda et enfin notre Farid Nougale qui a été un modèle à tous.

Je remercie tous les gens de mon passage, que j'ai connu ou rencontrer dans ma vie, sociale et universitaire, et à tous ceux que je n'ai pas cité avec tous mes excuses.

Je tiens à remercier particulièrement, Karim Meziani et Mohammad Boukhelf, pour beaucoup de choses, entre autres de m'avoir toléré d'habiter dans leur chambre universitaire pendant la période de préparation de mémoire.

Mes reconnaissances vont également à toutes les personnes de l'Université, M'hamed Bougara de Boumerdès et Jijel, surtout les personnes des bibliothèques, Ex-INGM et centrale, merci pour leur disponibilité.

Toute ma reconnaissance va aussi vers ma famille, en premier lieu ma mère et mon père, mes soeurs et frères. Merci à ceux qui, bien que très peu concernés par le sujet de vibration des plaques stratifiées en matériaux composites ont accepté de venir assister à ma soutenance.

Et pour clore, un grand merci à mon grand Professeur Tayeb KIRATI que le Dieu lui accorde sa miséricorde et l'accueille en son vaste Paradis, tout... et notamment à ceux qui ont su me supporter dans la dernière ligne droite.

Liste des tableaux et Figures

Tableaux

Tableau 1.1 : Caractéristiques des verres de renfort	10
Tableau 1.2 : Caractéristiques des fibres d'aramide	11
Tableau 1.3 : Caractéristiques des fibres de carbone.....	12
Tableau 1.4 : Caractéristiques des fibres métalliques et céramiques	13
Tableau 3.1 : Fonction poutre et conditions aux frontières	67
Tableau 3.2 : Valeurs des constantes λ_i et γ_i de la fonction poutre encadrée aux deux bords	69
Tableau 4.2 : Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre cotés Graphite/Epoxy.....	73
Tableau 4.3 : Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre cotés Graphite/Epoxy.....	75
Tableau 4.4 : Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy.....	77
Tableau 4.5 : Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy.....	78
Tableau 4.6 : Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy.....	79
Tableau 4.7 : Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur pour une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy.....	80
Tableau 4.8 : Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur pour une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy.....	80

Figures

Figure 1.1 : Influence du taux du renfort sur le comportement mécanique	14
Figure 1.2 : Transformation des renforts et construction des couches Composites.....	18
Figure 1.3 : Secteurs d'utilisation des matériaux composites	19
Figure 1.4 : L'exploitation de l'anisotropie.....	23
Figure 2.1 : Constitution et stratification d'une plaque	26
Figure 2.2 : Architecture d'une plaque symétriquement stratifiée	27
Figure 2.3 : Élément de plaque et système d'axe.....	28
Figure 2.4 : Modulation géométrique de stratifié.....	29
Figure 2.5 : Déformation d'une section dans le cadre d'un schéma au premier degré en l'absence de cisaillement transverse	30
Figure 2.6 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée.....	33
Figure 2.7 : Schématisation des moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée	33
Figure 2.8 : Schéma d'étude du comportement mécanique d'une structure stratifiée en matériaux composites	45
Figure 3.1 : Organigramme de transformation et résolution des équations d'un système physique par la méthode de Rayleigh-Ritz	54
Figure 3.2 : Plaque stratifiée avec système des coordonnées.....	55
Figure 3.3 : Plaque rectangulaire encastree	68
Figure 4.1 : Variation des fréquences adimensionnelles en fonction de nombre de termes de la série d'approximation «Rayleigh»	73
Figure 4.2 : Variation des fréquences adimensionnelles en fonction de nombre de termes de la série d'approximation «Ritz».....	76
Figure 4.3 : Variation des fréquences adimensionnelles en fonction de nombre de termes de la série d'approximation «Ritz».....	77
Figure 4.4 : Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur.....	81
Figure 4.5 : Influence des conditions aux frontières sur la fréquence fondamentale.....	82
Figure 4.6 : Influence de la géométrie de la plaque sur la fréquence	

fondamentale	83
Figure 4.7 : Influence des propriétés de la matière sur la fréquence fondamentale	84
Figure 4.8 : Influence de l'angle d'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale	85
Figure 4.9 : Influence de l'angle d'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale	86

Notations et Symboles

C_{ij}	: Coefficients de la matrice de rigidité $[C]$
$[C]$: Matrice des complaisances ou des rigidités
E_i	: Module d'Young dans la direction i
h	: Épaisseur de la plaque
e_k	: Épaisseur de la couche (Pli) k
a	: Longueur de la plaque
b	: Largeur de la plaque
G_{ij}	: Module de cisaillement
ν_{ij}	: Coefficient de Poisson
ε_i	: Déformation relative dans la direction i
ε_{ij}	: Tenseur de petite déformation
σ_i	: Contrainte dans la direction i
R	: Rapport longueur/largeur
θ	: Angle d'orientation des fibres
C_{ijkl}	: Tenseur des rigidités
Q_{ij}	: Tenseur de rigidité de plaque
Q_x, Q_y	: Forces de cisaillement respectivement dans les directions x et y
M_x, M_y	: Moments de flexion
M_{xy}	: Moment de torsion
N_x, N_y, N_{xy}	: Résultantes par unité de longueur
t	: Temps
u, v, w	: Composantes du vecteur des déplacements dans les directions x, y, z
ρ	: Masse volumique
ρ_s	: Masse surfacique
E_c	: Energie cinétique
U_d	: Energie de déformation
δW_f	: Travail des actions

- I_{xy} : Moment d'inertie rotatoire par unité de surface
 A_{ij} : Matrice de rigidité en membrane
 D_{ij} : Matrice de rigidité en flexion
 B_{ij} : Terme de couplage membrane/flexion-torsion
 F_{ij} : Cisaillement hors plan
 K_{ij} : Facteur de correction en cisaillement
 φ_i : Rotation $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial w}{\partial y} \right)$
 λ, μ : Coefficients de lamé
 $q(t)$: Coordonnées généralisées
 ψ_x, ψ_y : Rotation dans les directions x et y
 ξ, η : Paramètres adimensionnels « $\xi = x/a, \eta = y/b$ »
 ω : Pulsation naturelle
 A_{mn} : Coefficients
 m, n : Nombre de mode
 λ^2 : Fréquence propre « $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_x}$ »
 $[]$: Matrice carrée écrite sous la forme du tableau classique
 $\{ \}$: Matrice carrée écrite sous forme de vecteur

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET POSITION DU PROBLEME D'ELASTICITE ANISOTROPE

I.1. Introduction	9
I.2. Généralités sur les matériaux composites	10
2.1. Principales fibres et matrices	10
1. Fibres de renfort	10
1. Fibres de verre	10
2. Fibres de polymères	11
3. Fibres de carbone	12
4. Les renforts minéraux	12
5. Fibres métalliques et fibres céramiques	13
6. Influence du taux de renfort sur le comportement mécanique.....	14
2. Matrices	14
1. Matrices organiques	15
2. Matrices carbonées	16
3. Matrices métalliques	16
4. Matrices céramiques	17
5. Matrices ciment, béton et plâtre	17
2.2. Préparation des couches composites	17
2.3. Secteurs d'utilisation des matériaux composites	18
I.3. Position du problème d'élasticité anisotrope	19
3.1. Loi de comportement pour un milieu élastique anisotrope.....	19

1. Equation constitutive généralisée	19
2. Equation d'équilibre dynamique.....	20
3. Equation de compatibilité.....	20
3.2. Caractérisation de matériaux.....	20
1. Matériaux triclinique.....	21
2. Matériaux monoclinique.....	21
3. Matériaux orthotrope.....	21
4. Matériaux unidirectionnel.....	22
5. Matériaux isotrope	22
I.4. Conclusion	24

CHAPITRES II

ARCHITECTURE ET THEORIES DES PLAQUES STRATIFIEES

II.1. Introduction.....	26
II.2. Architecture des plaques stratifiées.....	26
2.1. Définition.....	26
2.2. Constitution et stratification des plaques stratifiées	26
2.3. Quelques différents types des plaques stratifiées	27
1. plaques symétriquement stratifiées	27
2. plaques antisymétriquement stratifiées.....	28
II.3. Théories des plaques stratifiées	29
3.1. Définition.....	29
3.2. Modélisation géométrique.....	29
3.3. Modélisation cinématique	30
3.4. Champ de déformation	31
3.5. Champ des contraintes.....	32
1. Expression générale	32

2. Expression des contraintes dans le cas d'une plaque à une seule couche.....	32
3.6. Résultantes et moments	33
3.7. Relation déformations-résultantes	35
1. Expression contraintes-déformations pour une couche	35
2. Prise en compte du cisaillement hors plan	35
3.8. Equation du comportement mécanique d'un stratifiée	35
1. Equation constitutive de la théorie classique	35
2. Equation constitutive de la théorie du premier ordre.....	36
3.9. Relation fondamentale de la dynamique appliquée pour un élément plaque.....	37
1. Expression des relations fondamentales de la théorie classique.....	38
1. Stratifié symétrique	39
2. Expression des relations fondamentales de la théorie du premier Ordre	40
2. Stratifié symétrique	41
3.10. Formulation énergétique de la théorie des stratifiées	42
1. Energie de déformation d'un stratifié	42
1. Energie de déformation d'un stratifié en fonction des déplacements	42
1. Energie de déformation d'un stratifié symétrique.....	43
2. Energie cinétique d'un stratifié.....	44
3. Travail des actions exercées sur le stratifié	45
1. Travail des actions exercées sur le stratifié dans le cas de flexion transversale.....	42
3.11. Organigramme générale de l'étude du comportement mécanique des stratifiés en matériaux composites.....	45
II.4. Conclusion	47

CHAPITRE III

ETUDE VIBRATOIRE DES PLAQUES MINCES STRATIFIEES EN MATERIAUX COMPOSITES

III.1. Introduction.....	49
III.2. Méthode de Rayleigh-Ritz	51
2.1. Choix des fonctions d'approximation	51
2.2. Discrétisation du principe de variation des déplacements	52
2.3. Calcul des solutions propres.....	54
2.4. Méthode de résolution du problème aux valeurs propres	55
1. Méthode basée sur le calcul du déterminant	56
1. Développement de l'équation caractéristique par la méthode de Graeff.....	56
2.5. Organigramme général.....	58
III.3. Vibration des plaques symétriquement stratifiées	59
3.1. Position du problème	59
3.2. Formulation du problème.....	59
1. plaques stratifiée symétriques orthotropes en absence de couplage flexion-torsion.....	60
1. théorie classique	60
2. théorie classique en présence d'inertie rotatoire.....	60
3. théorie du premier ordre.....	60
2. plaques stratifiée symétriques orthotropes en présence de couplage flexion-torsion.....	61
3.3. Méthode de résolution	61
3.4. Etude vibratoire des plaques stratifiées symétriques orthotropes en absence de couplage flexion-torsion	61
1. Plaques stratifiées orthotropes en appuis simples.....	62
1. Plaques orthotropes carrées	63
2. Plaques isotropes carrées.....	63
3. Calcul de fréquence et mode fondamental.....	64

2. plaques stratifiées orthotropes avec diverses conditions sur les bords	64
1. Energie de déformation.....	65
2. Solution approchée	65
3. Calcul de l'énergie de déformation approchée.....	65
4. Energie cinétique	67
5. Résolution du problème aux valeurs propres.....	68
6. Détermination des fréquences propres par l'approximation de Rayleigh	69
3.5. Etude vibratoire des plaques stratifiées symétriques orthotropes en présence de couplage flexion-torsion	69
1. Fonction d'essai.....	70
2. Plaque stratifiée rectangulaire encastree.....	72
III.4. Conclusion	74

CHAPITRE IV

MODELISATION NUMERIQUE

IV.1. Introduction	76
IV.2. Choix de matériaux composites	77
IV.3. Etude de convergence de la méthode de Rayleigh-Ritz	77
3.1. Etude de convergence dans le cas de la théorie classique	77
1. Validation et convergence de la méthode de Rayleigh	78
3.2. Etude de convergence dans le cas de couplage flexion-torsion	79
1. Validation et convergence de la méthode de Ritz.....	79

IV.4. Etude et analyse de l'influence de divers paramètres dynamiques et physiques sur comportement vibratoire des plaques	83
4.1. Etude de l'influence de couplage flexion-torsion sur les propriétés dynamiques de la plaque	84
4.2. Etude de l'influence de la géométrie de la plaque et les conditions aux frontières sur le comportement vibratoire.....	86
1. Influence des conditions aux frontières	87
2. Influence de la géométrie de la plaque.....	88
4.3. Etude de l'influence des propriétés de matière composite sur le comportement vibratoire de la plaque.....	89
4.4. Etude de l'influence d'angle de stratification des fibres sur le comportement vibratoire de la plaque.....	89
IV.5. Conclusion.....	92
 CONCLUSION GENERALE.....	 93
 BIBLIOGRAPHIE	 96
 ANNEXES	 103

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Durant la conception d'une structure mécanique au sens large du terme, certains paramètres de départ sont imposés (encombrement, poids, contraintes limites, durée de vie, prix, etc. ...). Le problème est souvent de déterminer de manière rationnelle ou par un choix judicieux, aidé par un calcul préliminaire, les paramètres restants afin d'assurer le bon fonctionnement du système. Dans le cadre des sollicitations statiques d'un élément de la structure, la résolution du problème fait souvent appel à la notion de résistance des matériaux ou à la mécanique des milieux continus. Une analyse statique donne des indications capitales quant à la résistance aux sollicitations des structures mais en réalité, l'analyse des vibrations s'avère indispensable, et l'étude et l'analyse des vibrations ont pris, au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement des techniques de plus en plus sophistiquées et des besoins plus variés dans les différents domaines : mécanique (transports, machines...), acoustique, optique, transmissions, etc.

D'un point de vue historique, Rayleigh fut l'un des premiers, en 1877, (Strutt 1945) à formulé la théorie des vibrations telle qu'on la connaît aujourd'hui. Il a introduit le concept fondamental d'oscillations d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre, et la notion de fréquences et de modes propres, montrant ainsi leur existence pour des systèmes discrets ou continus.

Ensuite, au cours des années 20, les besoins de structures légères en aéronautique ont permis de développer l'étude des problèmes de vibration et de dynamique. Il s'agissait entre autres de prédire le comportement aéroélastique des avions. Ainsi pendant une quarantaine d'années, on développa des méthodes plutôt analytiques avec des structures définies par un petit nombre de degrés de liberté (Rayleigh-Ritz ...), en linéaire.

Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation d'expressions variationnelles) puis le développement de codes éléments finis, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement des structures en dynamique. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement des résultats expérimentaux, avec entre autre le développement de techniques d'analyse modale (depuis 1960) et celui de logiciels consacrés à l'analyse vibratoire expérimentale des structures.

De nombreux ouvrages traitent du thème de la dynamique et des vibrations linéaires, entre autre celui de Géradin (1993), avec en introduction une bibliographie importante sur le sujet. On peut également citer Fertis (1995) ou encore Timoshenko (1954), Den Hartog (1960), Meirovitch (1967) ...

Cependant, la limitation de l'étude au cas linéaires occulte de nombreux phénomènes physiques, et pour certains systèmes, la prise en compte des non linéarités s'avère rapidement nécessaire si l'on souhaite en modéliser correctement le comportement réel.

Historiquement, la découverte des aspects de la physique non linéaire classique a débuté au XIX^{ème}, en mécanique céleste, avec la mesure ou plutôt l'observation des effets séculaires liés à la non linéarité de la loi d'attraction de Newton. Ces travaux ont servi de base d'inspiration à ceux de Poincaré, Lindstedt, Hill ou Liapunov et ont été ensuite prolongés en URSS et au Japon avec Krylov, Bogoliubov ou Hayashi ("Nonlinear oscillations in physical system"). Les progrès dans le traitement des équations différentielles ont conduit à une amélioration dans l'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Ces premières études, et d'autres qui ont suivi, Blaquière (1966), Minorski, Stoker, Hayashi (1985) ..., ont essentiellement été consacrées aux systèmes à un degré de liberté, ou alors limitées à l'approche "single mode", où la forme de la solution est donnée par celle du premier mode linéaire (voir Szemplinska-Stupnicka (1990a) ou Fertis (1995)). Cette hypothèse conduit aux mêmes phénomènes que pour un système à un degré de liberté. Ces approches ont permis de mettre en valeur des effets non linéaires sur des modèles ou avec des méthodes simples. Cependant, certains phénomènes constatés expérimentalement, tels que des combinaisons de résonance ou des résonances internes, ne sont pas visibles sur des modèles à un degré de liberté. Des travaux de Yamamoto (1956), Arnold (1955) ou encore Bennett et Eisley (1970) ont montré les limites d'une telle approche et présentent des études de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Rosenberg (1966) propose une approche originale, pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté, introduisant la notion de mode propre non linéaire. (Voir également l'ouvrage de Vakakis et al. (1996) à ce sujet). Pour terminer, il est important de citer deux livres qui font référence sur le sujet des vibrations, dédiés exclusivement au cas non linéaire et avec une approche plutôt analytique : Nayfeh et Mook (1979) qui traite de manière générale des oscillations non linéaires et de tous les phénomènes qui s'y rapportent, présentant des études qualitatives et quantitatives de celles-ci et l'ouvrage en deux tomes de Szemplinska qui effectue un bilan des différentes méthodes analytiques approchées pour le calcul de la réponse de systèmes à un degré de liberté (Szemplinska-Stupnicka (1990a)) ou à

plusieurs degrés de liberté (Szemplinska-Stupnicka (1990b)). On trouvera d'ailleurs dans ces ouvrages une bibliographie très complète sur le sujet.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux vibrations des plaques stratifiées en matériaux composites. Un bref article concernant ce sujet a été effectué pour déterminer l'influence de plusieurs facteurs (effet de couplage flexion-torsion, conditions aux frontières, propriétés de la matière, l'ordre de stratification,...) sur le comportement vibratoire. Parmi les nombreux travaux traitants le problème des vibrations des plaques stratifiées, on peut citer entre autre :

Witeny [69] considère une théorie d'ordre supérieur, qui inclut l'effet de cisaillement transverse et les déformations d'inertie rotatoire, basée sur une approche supposée comme une prolongation des théories développées par Reissner et Mindlin.

Wu et Vinson [78] ont étudié l'effet des déformations en cisaillement sur la fréquence fondamentale des plaques stratifiées en matériaux composites avec des états de frontières : encastres, simples et bords combinés. Cette solution est basée sur la méthode de Galerkin avec utilisation des fonctions analogues à ceux de Warburton. L'auteur a constaté que pour une plaque constituée des couches fortement anisotropes avec des appuis simples, l'effet de déformation transversale en cisaillement est significatif pour les petites et les grandes amplitudes.

A. A. KHDEIR [37] a présenté une procédure analytique puissante pour étudier la réponse dynamique des plaques en matériaux composites non symétriquement stratifiées de forme géométrique rectangulaire avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres libres. L'orthogonalité des principaux modes « fonctions propres » est employée pour découpler les équations de mouvement.

P.S. FREDERIKSEN [17] a présenté deux théories d'ordre supérieur pour analyser les vibrations flexionnelles des plaques rectangulaires symétriquement stratifiées ayant un comportement mécanique anisotrope, avec un état de frontières simplement appuyé sur les quatre bords, les deux théories utilisées expliquent la distribution parabolique des contraintes dans l'épaisseur de la plaque ; la première inclut le cisaillement transverse tandis que la deuxième néglige cet effet. Les équations régissant le mouvement de la plaque sont discrétisées par la méthode numérique de Ritz.

Hearmon [26] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'analyse des vibrations des plaques stratifiées orthotropes avec un état de frontières simplement appuyé, par limitation d'application de la théorie classique seulement.

D. J. Gorman et W. Ding [21] ont étudié les vibrations libres des plaques stratifiées épaisses. La méthode modifiée de Superposition-Galerkin est utilisée pour la linéarisation des équations de mouvement.

J. M. Lee, J. H. Chung et T. Y. Chung [42] ont étudié la vibration libre des plaques en matériaux composites symétriquement stratifiées par l'application de la théorie du premier ordre avec tous les bords sont encastres, la plaque possédant un comportement mécanique anisotrope. La méthode de Rayleigh-Ritz avec trois ensembles de différentes fonctions d'essai ont été appliquées à l'analyse.

H. Matsunaga [46] a étudié les fréquences et les efforts normaux des plaques croisées dans le cadre de la théorie du premier ordre avec l'épaisseur et l'inertie rotatoire variables. L'ensemble des équations dynamiques de la théorie d'élasticité bidimensionnelle est dérivé par le principe de Hamilton. Plusieurs ensembles des théories approximatives sont appliqués pour résoudre le problème aux valeurs propres d'une plaque stratifiée simplement soutenue.

Y.K. Cheung, D. Zhou [06] Ont proposé une méthode numérique informatique efficace très précise pour l'analyse des vibrations des plaques symétriquement stratifiées en matériaux composites avec des appuis intermédiaires. Un ensemble des fonctions sont développées à partir des solutions statiques d'un faisceau, dans lesquelles le faisceau est considéré comme une bande de largeur prise de la plaque est dans une direction parallèle au bords de cette dernière. Les équations régissant le mouvement de la plaque est dérivées par l'approche de Rayleigh-Ritz, pour démontrer l'exactitude et la convergence de cette méthode, plusieurs problèmes d'essai ont été effectués.

Yoshiki Ohta, Yoshihiro Narita, Kenta Nagasaki [70] ont présenté l'atténuation des ondes de vibration pour une plaque stratifiée constituée par des fibres en plastique renforcé avec l'utilisation de la théorie tridimensionnelle d'élasticité. Les équations de déplacements sont accrues sous forme d'une fonction polynomiale en fonction de coordonnée de l'épaisseur. La méthode de Ritz est employée pour la linéarisation d'équations régissant le mouvement de la plaque, aussi bien dans les calculs numériques des fréquences propres et constantes d'amortissement à différents rapports d'empilement et différentes épaisseurs.

Karim S. Numayr, Rami H. Haddad, Madhar A. Haddad [31] ont présenté l'étude des vibrations libres des plaques en matériaux composites symétriquement stratifiées avec différents états de frontières. Les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie rotatoire sur les fréquences normales sont étudiés par la considération des trois cas:

- théorie classique (TCS).

- théorie classique (TCS) avec augmentation de l'effet d'inertie rotatoire.
- théorie du premier ordre (TS).

La méthode de différence finie a été employée pour résoudre les équations du mouvement.

A.R. Setoodeh, G. Karami [53] ont employé la méthode des éléments finis pour étudier la statique, les vibrations libres et les réponses vibratoires d'une plaque stratifiée épaisse en élasticité tridimensionnelle avec un état de frontière mélangé et un état libre des bords seulement. La méthodologie utilisée pour la modélisation des plaques épaisses est basée sur les types de Winkler et de Pasternak.

Simon Wang, Yingshun Zhang [67] ont présenté la méthode de bande finie « finite strip method » pour l'analyse des vibrations libres des plaques stratifiées épaisses. Cette nouvelle méthode a été développée à base de la théorie des plaques en premier ordre.

Reaz A. Chaudhuri a, K. Balaraman, Vincent X. Kunukkasseril [52] ont étudié le problème de valeur limite de vibrations libres des plaques rectangulaires en plastique renforcé avec de fibres minces anisotropes. Les caractéristiques de vibrations transversales des plaques stratifiées anisotropes pour des combinaisons arbitraires des états de frontière sont théoriquement étudiées. Des résultats numériques présentent les fréquences naturelles et les fréquences de résonance d'une plaque à cinq couches symétriquement stratifiées et pour tous les bords encastés. L'influence des défauts possibles qui sont généralement produits dans le processus de fabrication apparaît sur la fréquence de résonance et expérimentalement obtenue.

Y. Hou¹, G. W. Wei et Y. Xiang [23] ont présenté la méthode de roman pour l'analyse de vibrations libres des plaques de Mindlin. La méthode proposée profite des bases locales de l'algorithme singulier discret de la convolution (DSC) et du Pb-2fonctions de frontière de Ritz pour arriver à une nouvelle approche, appelée la méthode de DSC-Ritz. Deux fonctions de base sont construites par l'utilisation des gains d'ordre de delta de DSC du type positif. L'énergie fonctionnelle de la plaque de Mindlin est représentée par les nouvelles fonctions construites des fonctions de base et est réduite au minimum sous le principe variationnel de Ritz. Des expériences numériques étendues sont considérées par différentes combinaisons des états de frontière de la plaque de Mindlin de forme rectangulaire et triangulaire.

Basant sur la littérature décrite précédemment, il est clair que le comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à des vibrations libres mérite bien d'être étudié puisque aucune des solutions approximatives ou exactes obtenues n'est couverte pas tous les états de frontières possibles, les facteurs géométriques, différents types des matériaux et les effets de déformation de cisaillement et/ou l'inertie rotatoire sur les

fréquences de vibrations. On conséquent, cette insuffisance des informations nous a permis d'investir dans ce domaine.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre traite quelques généralités sur les matériaux composites « fibre-matrice », plus quelques lois introductrices de l'élasticité linéaire anisotrope « loi de Hooke généralisée ». On propose dans le premier temps quelques références bibliographiques et historiques à propos des constituants des matériaux composites.

Dans le deuxième chapitre, on aborde les théories générales sous forme d'un système d'équations différentielles du seconde ordre, non linéaires représentant le comportement d'une structure stratifiée en matériaux composites. Pour des raisons pratiques, on écrit ce système sous forme énergétique.

Dans le troisième chapitre, on propose une méthode de résolution du problème défini au chapitre précédent. Dans un premier temps, on applique la méthode de Rayleigh-Ritz pour transformer le problème initial en un système algébrique linéaire. Ensuite, le système obtenu est résolu par une méthode de Graeff qui permet de construire les solutions en fonctions des paramètres qui sont les fréquences propres.

Le dernier chapitre propose les différentes simulations de vibrations libres des plaques minces symétriquement stratifiées anisotropes.

Chapitre I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX
COMPOSITES
ET
POSITION DU PROBLEME D'ELASTICITE
ANISOTROPE

I.1. Introduction

L'un des objectifs de l'industrie est de concevoir et d'élaborer des matériaux présentant un rapport performance-poids le plus élevé possible. Pour obtenir cela, ils accentuent la recherche pour avoir des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques maximales (caractéristiques divisées par la densité, tableau 1.1). Tous ces matériaux présentent un défaut majeur, ils sont fragiles et donc cassants ; un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure ; on n'obtient donc pas la résistance théorique espérée. Si ces mêmes matériaux sont fabriqués sous forme de fibres, leurs résistances pratiques sont augmentées considérablement. L'exemple le plus connu est celui du verre. Une plaque de verre casse facilement ; par contre, un ensemble de fibres de verre résiste à une contrainte de traction de l'ordre de 3 000 MPa, soit deux fois la résistance d'un acier très haute résistance. Cela tient au fait que :

- la probabilité d'avoir un défaut est plus faible sur une fibre que sur une plaque.
- un défaut dans une fibre n'entraîne que la rupture de celle-ci ; le défaut ne se propage pas.

Pour utiliser pratiquement ces fibres, il est nécessaire de les lier par une matrice. Cette dernière a un rôle mécanique important ; en traction elle retransmet l'effort d'une fibre cassée vers d'autres fibres ; en compression elle stabilise les fibres en flambage. Un tel matériau, constitué de fibres unidirectionnelles assemblées par une matrice, est hétérogène puisqu'il est constitué de deux phases distinctes (fibres et matrice). Les caractéristiques macroscopiques peuvent cependant être considérées comme indépendantes du point géométrique considéré mais elles sont bien évidemment très dépendantes de la direction étudiée. On est en présence d'un matériau homogène anisotrope. Les propriétés sont élevées uniquement dans la direction des fibres. Pour réaliser des structures soumises à des efforts multiaxiaux, il est nécessaire d'orienter cet élément de base (appelé pli ou monocouche) suivant des directions déterminées en fonction des sollicitations.

Le but de ce chapitre est de mettre l'accent sur les constituants (fibres et matrice) et le comportement anisotrope des matériaux composites tant du point de vue mécanique (relations, contraintes, déformations) tout en considérant ces milieux comme macroscopiquement homogènes. Bien que les comportements linéaires en petites déformations soient les seuls présentés aux cas des composites élastiques, Berthelot [03], Maurice [49], Bailon et Dorlot [29], Lekhnitskii [43], Whitney [69], et Chevalier [72].

I.2. Généralités sur les matériaux composites

Le terme matériau composite a longtemps été synonyme de matériau renforcé de fibres, mais on doit le prendre dans le sens le plus général et le considérer comme une association de deux : fibres et matrice, les fibres de renfort exercent une influence primordiale sur les propriétés mécaniques finales du matériau composite. Ces fibres qui peuvent être d'origine diverse, exigent des procédés de fabrications parfois complexes.

Nous nous contenterons ici de décrire brièvement les matrices et les principaux matériaux utilisés sous forme de fibres comme renfort dans les matériaux composites.

2.1. Principales fibres et matrices

2.1.1. Fibres de renfort

2.1.1.1. Fibres de verre

Ce sont là les premiers matériaux de renfort utilisés dans les matériaux composites de première génération, vers 1940. Selon leur composition chimique, on recense, parmi les verres de renfort les plus utilisés, les variétés E, R et S. Le tableau (1.1) résume les principales caractéristiques chimiques, physiques et mécaniques de ces variétés.

Tableau (1.1). Caractéristiques des verres de renfort

Caractéristiques	variété			
	E	R	S	Silice (SiO ₂)
<i>Composition chimique</i>				
SiO ₂	54	60	65	> 99.5
Al ₂	16	25	25	-
B ₂ O ₃	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Module d'Young (GPa)	75	80	84	72
Résistance à la traction (MPa)				
• Fibres vierges	3400	4400	4800	8800
• Fibres industrielles	2100	2500	2800	3500
Allongement à la rupture (ϵ^0) (fibres industrielles)	2.8	3	3.3	5

Variété	E	R	S	Silice (SiO ₂)
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Bonnes propriétés mécaniques ➤ Bonne tenue en corrosion à l'eau ➤ Résistance moyenne aux agents chimiques 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Très bonnes propriétés mécaniques ➤ Bonne tenue en corrosion à l'eau et aux agents chimiques 		<ul style="list-style-type: none"> ➤ Propriétés mécaniques élevées ➤ Haut résistivité
Utilisations	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Le plus répandu 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Les plus récents ➤ Optimisation des structures 		<ul style="list-style-type: none"> ➤ Haut performance ➤ Résistance à l'abrasion

2.1.1.2. Fibres de polymères

Plusieurs polymères naturels peuvent avoir une rigidité élevée (par exemple, 100 GPa pour des fibres de cellulose de bois). Par contre, la rigidité de la très grande majorité des polymères synthétiques est faible (1 à 10 GPa). Ce n'est que récemment qu'on a mis au point des fibres de polyamides aromatiques destinées à servir de fibres de renfort ; le module d'Young de ces fibres est égal ou supérieur à celui du verre. Ces fibres sont connues sous leur appellation commerciale « Kevlar », marque déposée de la compagnie Dupont Nemours. Leurs principales caractéristiques sont présentées dans le tableau (1.2).

Le coût de ces fibres est assez élevé.

Tableau (1.2). Caractéristiques des fibres d'aramide

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49
Module d'Young (GPa)	60	130
Résistance à la traction (MPa)	2700	3600
Allongement à la rupture (‰)	4.5	2
Masse volumique (kg/m ³)	1450	1450
Température max. d'utilisation (°C)	200	200
Température de dégradation (°C)	400	425

2.1.1.3. Fibres de carbone

Le graphite polycristallin est constitué de cristallites fortement anisotrope : son degré d'anisotropie dépend de ses conditions d'élaboration. Les remarquables propriétés des fibres de carbone résultant de la forte orientation préférentielle des cristallites parallèlement à l'axe des fibres. Ces propriétés sont essentiellement la rigidité et la résistance très élevée dans la direction longitudinale, associée à un très faible coefficient de dilatation linéique dans cette même direction.

Le tableau (1.3), présente les propriétés de ces types de fibres.

Tableau (1.3). Caractéristiques des fibres de carbone

Caractéristiques	Fibres à haute résistance	Fibres à haut module
Module d'Young (GPa)	180 à 230	350 à 420
Résistance à la traction (MPa)	2500 à 3400	1900 à 2300
Allongement en carbone (‰)	95 à 98	99
Masse volumique (kg/m ³)	1800	1900
Température max. d'utilisation (°C)	2000	2500

2.1.1.4. Renfort minéraux

Certain matériaux minéraux qu'on trouve naturellement sous forme fibreux ou lamellaire peuvent servir de renfort, notamment dans des matériaux composites moins chère ; il s'agit plus particulièrement de l'amiante et du mica.

L'amiante est constituée de fibres dont la section a environ 20µm de diamètre et dont la structure cristalline est formée de trois couches ; chacune de ces couches contient des ions Mg⁺⁺ et des radicaux OH⁻, et elle est reliée aux couches voisines par un plan formé de tétraèdre (SiO₄)⁴⁻. Même s'il est difficile d'obtenir des fibres individuelles, on peut assez facilement détacher des fibres dans la section à environ 10µm de diamètre et dont la longueur peut atteindre plusieurs centimètres. On peut utiliser de telles fibres d'amiante jusqu'à 500 °C, température à laquelle leur résistance mécanique chute brusquement. Leur module d'Young est voisin de 160 MPa et leur résistance mécanique peut atteindre 5500 MPa ; toutefois

l'endommagement dû aux procédés mécaniques d'obtention des fibres peut réduire considérablement cette résistance mécanique.

Le mica est un autre renfort minéral naturel qu'on utilise dans certains composites. Sa structure cristalline le rend facilement clivable ; on en fait des paillettes qu'on peut utiliser comme renfort pour certaines matrices. Le facteur de forme, s , de ces paillettes est bien entendu moins élevé que celui des fibres longues. Les imperfections produites sur les bords des paillettes réduisent la résistance de celles-ci à la traction ; par contre, lorsque les bords des paillettes ne constituent pas des zones de concentration de contraintes, la résistance peut atteindre 2500 MPa. Le module d'Young du mica est égal à 220 GPa et sa masse volumique est de 2800 kg/m³.

Les renforts en paillettes de mica offrent l'avantage de former des matériaux composites dont les propriétés sont bonnes dans deux directions déterminées par le plan des paillettes. Toutefois, les valeurs de la résistance mécanique obtenues avec telles paillettes ne peuvent atteindre celles que confèrent les fibres unidirectionnelles.

2.1.1.5. Fibres métalliques et fibres céramiques

Certains métaux (bore, béryllium) ou certains composés (Al₂O₃, SiC, Si₃N₄, BeO) sont dotés de rigidités spécifiques très élevées ; ils sont donc d'excellents renforts possible pour des matériaux composites.

Le tableau (1.4), présente les propriétés des fibres métalliques et des fibres céramiques

Tableau (1.4). Caractéristiques des fibres métalliques et céramiques

Caractéristiques	Bore (fibre)	SiC (fibre)	Al ₂ O ₃ (fibre)	SiC (trichite)	BeO (trichite)
Module d'Young (GPa)	300 à 420	480	500	840	720
Résistance à la traction (MPa)	3000 à 3700	2300	2000	21000	6900
Allongement en carbone (‰)	0.7 à 0.9	0.5	0.4	2 à 2.5	0.8
Masse volumique (kg/m ³)	2650	3200	4000	3200	3000
Température max. d'utilisation (°C)	500 à 700	900	800	1600	1500

2.1.1.6. Influence du taux de renfort sur le comportement mécanique

En fonction des propriétés recherchées, on distingue trois grands types de renforcement, figure (1.1).

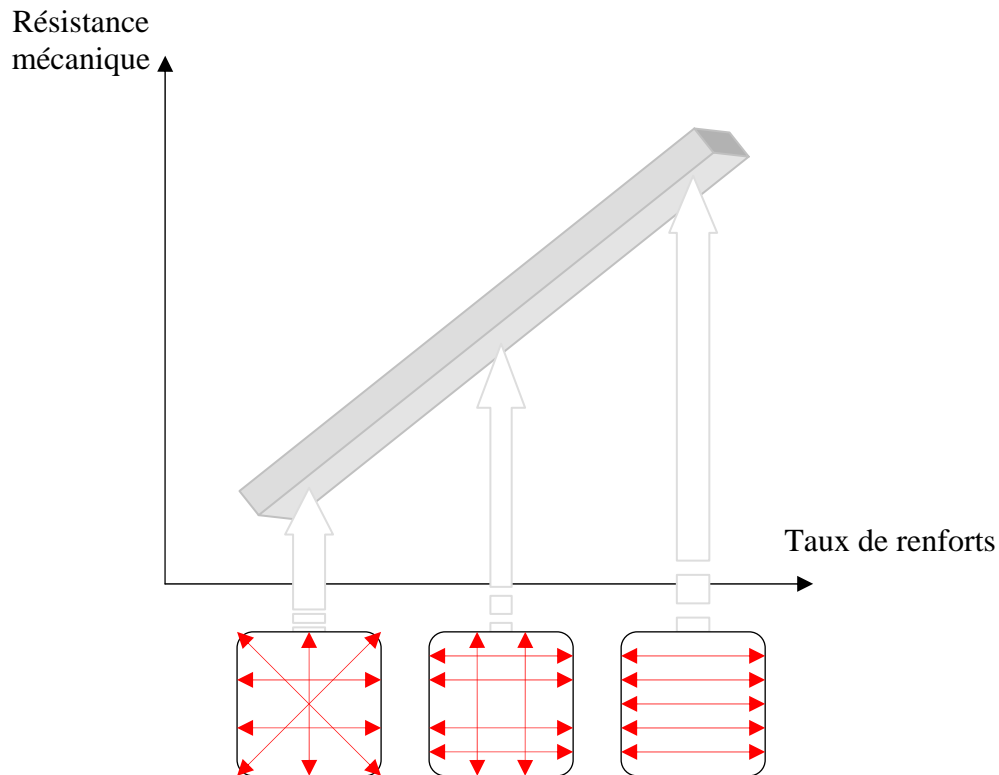


Figure (1.1). Influence de taux du renfort sur le comportement mécanique

2.1.2. Matrices

La matrice d'un matériau composite remplit fondamentalement les deux rôles suivants :

- Elle assure le transfert adéquat des contraintes mécaniques appliquées au matériau composite. Pour ce faire, elle doit adhérer suffisamment aux fibres afin que ce transfert soit optimal et les déplacements soient limités. En outre, la matrice ne doit pas être trop rigide, car elle risquerait alors de contrarier le travail des fibres. En fin, sa ductilité constitue également un paramètre important.
- Elle incorpore les fibres, c'est-à-dire qu'elle permet de fabriquer facilement le matériau composite, et ce coût le plus faible possible.

Ces exigences, parfois difficilement conciliables, font que le choix des matrices dépend en fait de l'utilisation à laquelle on destine le matériau composite.

2.1.2.1. Matrices organiques

Les matrices organiques sont faites des matières plastiques ; on peut les subdiviser en matrices thermoplastiques et en matrices thermodurcissables.

Les matrices thermoplastiques sont des polymères à chaîne linéaire, très répandus et peu coûteux (polyéthylène, polyéther, cétone), qu'on renforce en général avec des fibres ou des paillettes bon marché (amiante, mica, talc, fibres de cellulose et autres charges renforçantes, car le produit final est destiné à des utilisations de grande diffusion.

Pour obtenir des matériaux composites aux performances plus élevées, on utilise en général comme matrices des polymères thermodurcissables, appelés « résines » dans l'industrie des matériaux composites. Il existe plusieurs familles des résines thermodurcissables : les résines de polymères, les résines époxy, les résines phénoliques, les résines polyamides et les résines mélamines.

- Résines de polyester : on les associe en général à des fibres de verre, pour obtenir des matériaux composites économiques, à utiliser à la température ambiante.
- Résines époxy : elles possèdent de meilleures propriétés mécaniques, chimiques que les résines polyester, mais leur coût est élevé. Elles sont employées à grande échelle en aéronautique, ces résines permettent de fabriquer des matériaux composites dont les propriétés mécaniques sont bonnes et qu'on peut utiliser jusqu'à 150 ou 200 °C.
- Résines phénoliques : leur plasticité est faible et leurs propriétés mécaniques sont relativement médiocres ; toutefois, elles font preuve d'une bonne tenue à la chaleur (jusqu'à 400 °C).
- Résines polyamides : elles sont onéreuses, mais leurs propriétés ne sont pas altérées au-dessous de 400 °C.
- Résines mélamines : elles ressemblent aux résines phénoliques ; leurs propriétés électriques sont bonnes, et elles sont peu inflammables. Elles résistent bien à l'abrasion et puisqu'on peut facilement les colorer, on les utilise souvent pour fabriquer des panneaux protecteurs ou décoratifs.

2.1.2.2. Matrices carbonées

La production d'une matrice de carbone repose sur le même principe que celui utilisé pour fabriquer les fibres de carbone : carbonisation d'une matière organique à haute température. Les matrices de carbone sont constituées des grains de carbone pyrolytique qui se déposent à chaud sur les fibres, ce qui assure une liaison mécanique entre celle-ci et colmate les vides laissés entre elles. On obtient ainsi un matériau composite dont la masse volumique se rapproche de celle du carbone massif. On utilise principalement deux techniques pour fabriquer la matrice, c'est-à-dire pour imprégner d'un matériau carbone : la voie liquide et la voie gazeuse.

2.1.2.3. Matrices métalliques

La température maximale d'utilisation des polymères étant peu élevée, et le carbone risquant de s'oxyder à plus de 500 °C, il faut parfois envisager d'utiliser des matrices dont l'inertie chimique est meilleure à haute température. Puisque certains métaux ou alliages métalliques peuvent éventuellement satisfaire à cette exigence, on fait aujourd'hui d'importants efforts de recherche de développement dans cette voie.

Par rapport à une matrice polymérique, une matrice métallique présente en effet les avantages particuliers suivants.

- Sa ductilité et ses propriétés mécaniques supérieures améliorent les propriétés mécaniques de matériau composite, en particulier dans les directions qui s'écartent de celles des fibres de renfort.
- Par ailleurs, ces propriétés mécaniques supérieures améliorent la rigidité et la limite d'élasticité du matériau composite.
- Sa résistance à l'attaque de certains solvants est plus élevée, et la gamme de ses températures d'utilisation est plus vaste, si bien que le domaine d'utilisation du matériau composite est élargi.
- Pour certaines utilisations, sa meilleure conductibilité thermique et sa meilleure conductibilité électrique constituent un atout non négligeable.
- Puisque le problème des assemblages découle souvent de difficultés rencontrés au niveau des interfaces (soudage, brasage, collage, etc.), une matrice métallique offre des avantages importants, car il est plus facile d'y appliquer ces techniques. Par contre la matrice métallique présente aussi des inconvénients.

- La courbe de traction des matériaux composites à matrice métallique présente une discontinuité lorsque la limite d'élasticité de la matrice est atteinte ; c'est à dire au-delà de la valeur de contrainte critique.
- La masse volumique d'une matrice métallique est plus élevée que celle d'un polymère, ce qui entraîne une augmentation du poids du matériau composite.
- A cause de la réactivité possible plus élevée qui se produit entre la matrice et le renfort (solubilité), des problèmes peuvent survenir à l'interface « matrice-renfort » ; il peut en effet s'y former des composés intermétalliques fragiles, qui conduisent à une interface à faible cohésion et par conséquent, à un mauvais transfert des contraintes de la matrice au renfort.
- Cette réactivité potentiellement plus élevée rétrécit en outre la gamme des températures d'utilisation du matériau composite, car les fibres peuvent progressivement réagir avec la matrice, à haute température.
- En dernier lieu, les matériaux composites à matrice métallique sont en général plus difficiles à fabriquer que ceux à matrice polymérique ; ils sont donc plus coûteux.

2.1.2.4. Matrices céramiques

Grâce à leurs propriétés intrinsèques (caractère réfractaire, rigidité, résistance et bonne stabilité chimique), les céramiques sont potentiellement capables de bien jouer le rôle de matrices dans des matériaux composites ; dans ce cas ; les fibres de renfort ont principalement pour but d'améliorer la ténacité de telle matrices, ainsi que leur résistance au choc thermiques.

2.1.2.5. Matrice ciment, béton et plâtre

On peut améliorer considérablement les propriétés mécaniques de certains matériaux traditionnels et de grande diffusion, comme le ciment et le plâtre, par l'introduction des fibres dans la matrice.

2.2. Préparation des couches composites (fibre-matrice)

Cette opération constitue des étapes importantes de la filière des composites. Elle implique un haut niveau de savoir-faire, car elle détermine l'architecture du renfort.

On utilise trois compositions de base, figure (1.2).

- unidirectionnelle (fil)
- tissées
- tressée

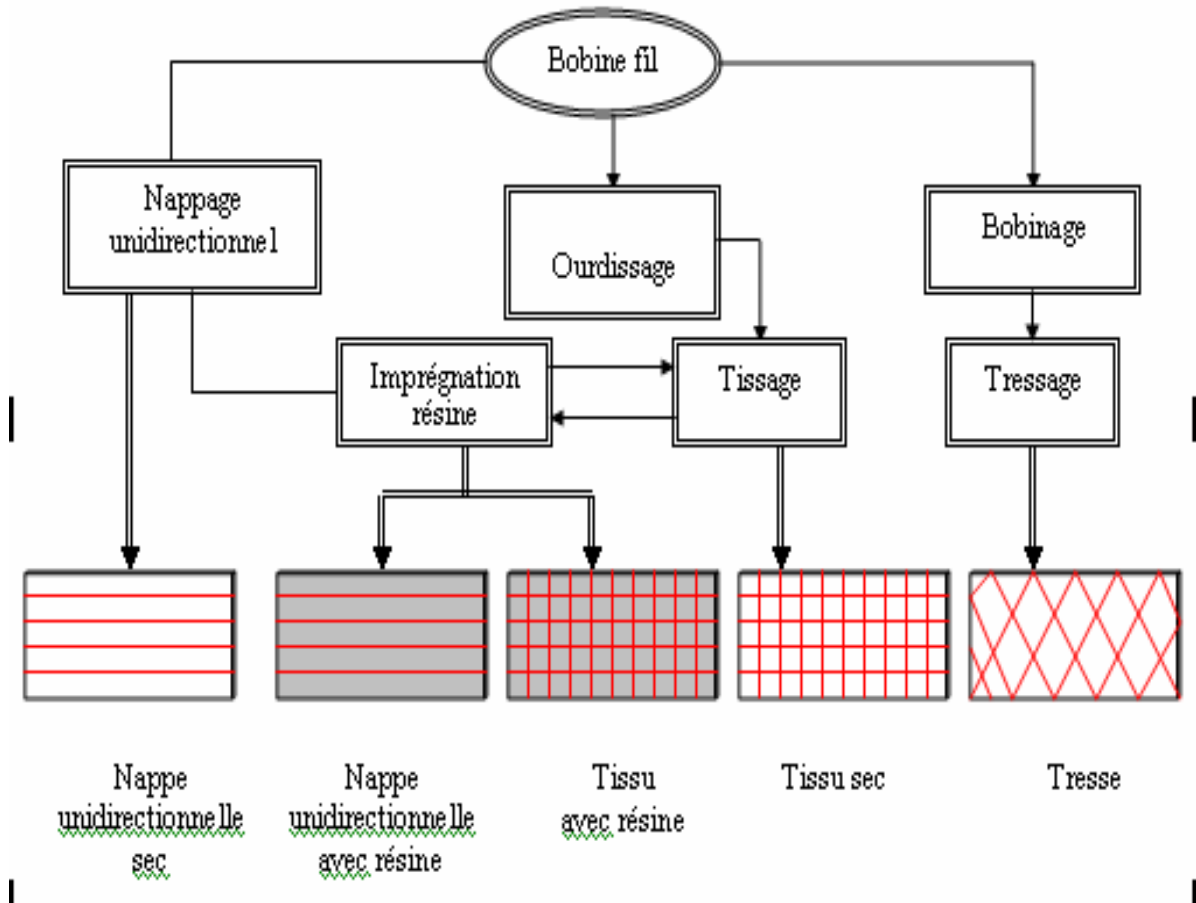


Figure (1.2). Transformation des renforts et construction des couches composites

2.3. Les secteurs d'utilisation des matériaux composites

La production de matériaux composites se développe rapidement dans le monde (environ + 6 % par an). Ces matériaux associent la matière plastique et le renfort en fibres, généralement de verre ou de carbone. Ils apportent à leurs utilisateurs des avantages importants grâce à leurs propriétés, notamment de légèreté ou de résistance. Ces avantages leur ont ouvert des marchés importants dans la construction automobile, l'aéronautique, ou encore le bâtiment, etc. figure (1.3).

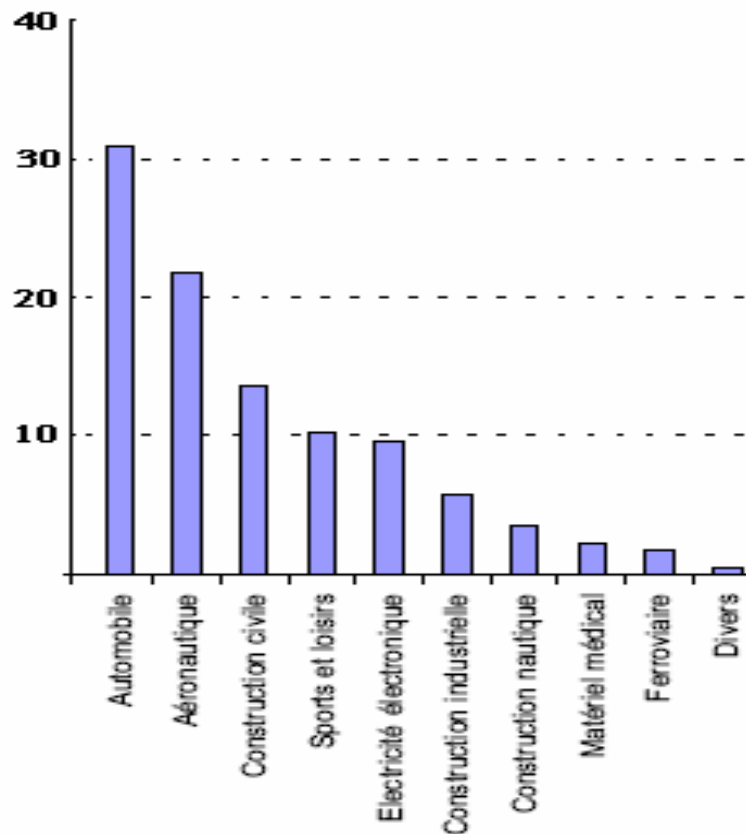


Figure (1.3). Secteurs d'utilisation des matériaux composites

I.3. Position du problème d'élasticité anisotrope

3.1. Loi de comportement pour un milieu élastique anisotrope

En mécanique des solides, la loi de comportement d'un milieu élastique s'écrit sous la forme des relations liant les contraintes et les déformations du milieu. Cette partie présente les équations constitutives des matériaux élastiques anisotropes.

3.1.1. Equation constitutive généralisée

L'équation constitutive d'un matériau élastique est exprimée classiquement par la loi de Hooke généralisée [lemaitre et chaboche, 1985].

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.1)$$

Où C_{ijkl} sont les composantes du tenseur d'ordre 4 des rigidités du matériau et σ_{ij} et ε_{kl} qui représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes du second ordre et des déformations. Cette relation (1.1) traduit une loi de comportement d'un matériau triclinique

3.1.2. Equation d'équilibre dynamique

L'équation fondamentale d'équilibre pour un solide élastique peut être représentée par l'intermédiaire des composantes du vecteur de déplacement sous la forme condensée.

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_i + f_i = 0 \quad (1.2)$$

Avec :

- $u = (u_1, u_2, u_3)^T$: Vecteur de déplacements.
- $f = (f_1, f_2, f_3)^T$: Vecteur de forces volumiques.

3.1.3. Équations de compatibilité

Les équations de compatibilité traduisent l'existence d'un lien entre les déplacements et les déformations, ainsi entre les déformations elles-mêmes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

3.2. Caractérisation de matériaux

Selon leur degré de l'anisotropie on distingue plusieurs types de matériaux [03].

3.1.2. Matériau triclinique

Cas général à matrice de rigidité complète.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{36} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

3.2.2. Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

avec 13 constantes d'élasticité

3.2.3 Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduit aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

avec 9 constantes d'élasticité

3.2.4. Matériau unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

5 constantes d'élasticité.

3.2.5 Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux classiques ou usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel, conduit à la matrice de rigidité :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Avec une constante d'élasticité ou coefficients de Lamé λ et μ :

$$C_{12} = \lambda \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \mu$$

D'où

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

En conclusion, les composites constituent désormais l'un des maillons de la nouvelle adéquation des matériaux. Jusqu'alors on réalisait les produits par déformation de la matière en quelque sorte par l'extérieur (métaux, verre, plastiques) ; maintenant on tend à organiser la matière à partir de sa structure interne. C'est à cette conception que les matériaux composites participent donc à cette révolution silencieuse qui marquera la grande mutation industrielle de la fin du siècle.

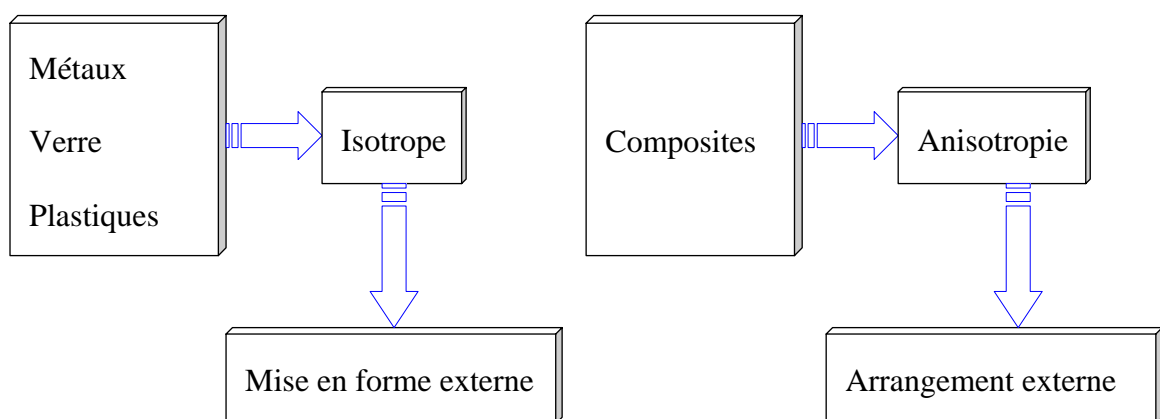


Figure (1.4). Exploitation de l'anisotropie

I.4. Conclusion

Ce chapitre est constitué de rappels et de définitions de notions liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques surtout mécaniques, plus une étude concernant le comportement mécanique dans le cadre d'élasticité linéaire anisotrope d'un matériau. Tout ceci est fait en vue de préparer la suite de l'étude consacrée aux plaques stratifiées.

Chapitre II
ARCHITECTURE
ET
THEORIES
DES PLAQUES STRATIFIEES

II.1. Introduction

Des matières composites, particulièrement des plaques stratifiées, ont largement répondues aux besoins des constructeurs dans divers genres des machines tel que les structures aéronautiques, astronomiques, marines et transport (automobiles etc.), à cause de leur haute rigidité, leur poids et à la haute résistance au choc et la forte anisotropie. Ces concepts donne une importance à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme de plaques constituées de couches différentes ou non.

II.2. Architecture des plaques stratifiées

2.1. Définition

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelles ou de tissus imprégnés de résines avec des orientations propres à chaque pli.

2.2. Constitution et stratification des plaques stratifiées

Les plaques stratifiées à base de fils unidirectionnel constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués, figure (2.1) de couches de fils unidirectionnels dans le sens est décalé l'un par rapport à l'autre.

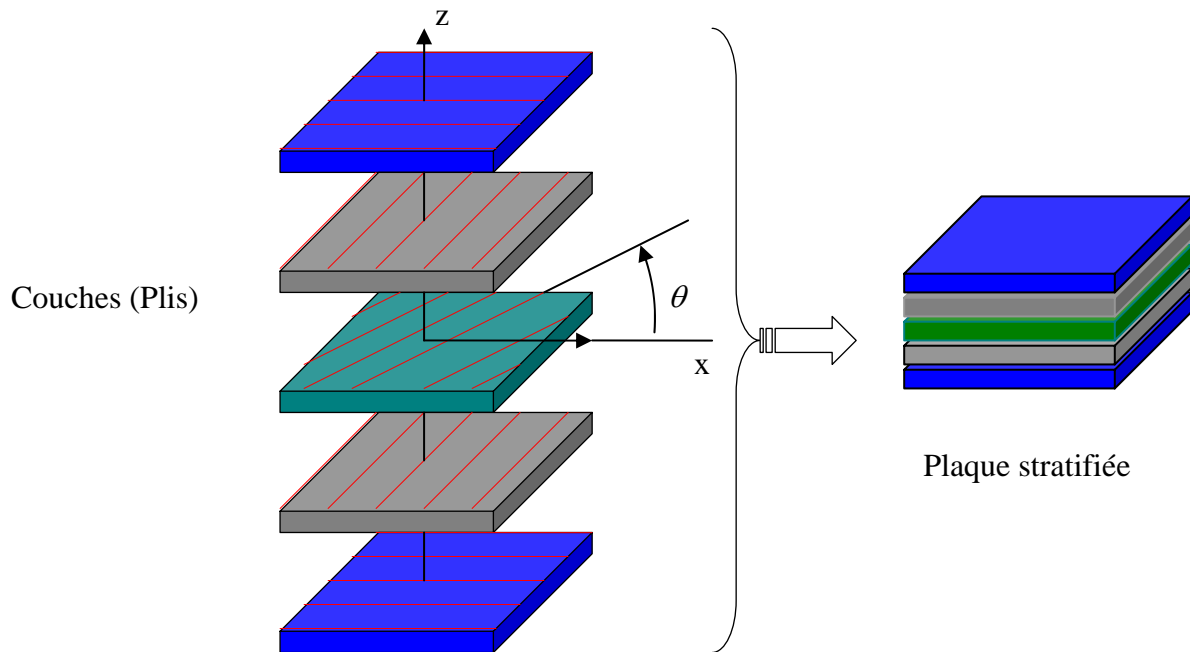


Figure (2.1). Constitution et stratification d'une plaque

2.3. Quelques différents types des plaques stratifiées

2.3.1. Plaques symétriquement stratifiées

Une plaque stratifiée est symétrique si son plan moyen est le plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique, figure (2.2). Pour une plaque à deux couches symétriques on a :

- La même matrice de rigidité $(Q_{ij})_k$.
- La même épaisseur e_k .
- des côtes opposées z_k et $-z_k$.

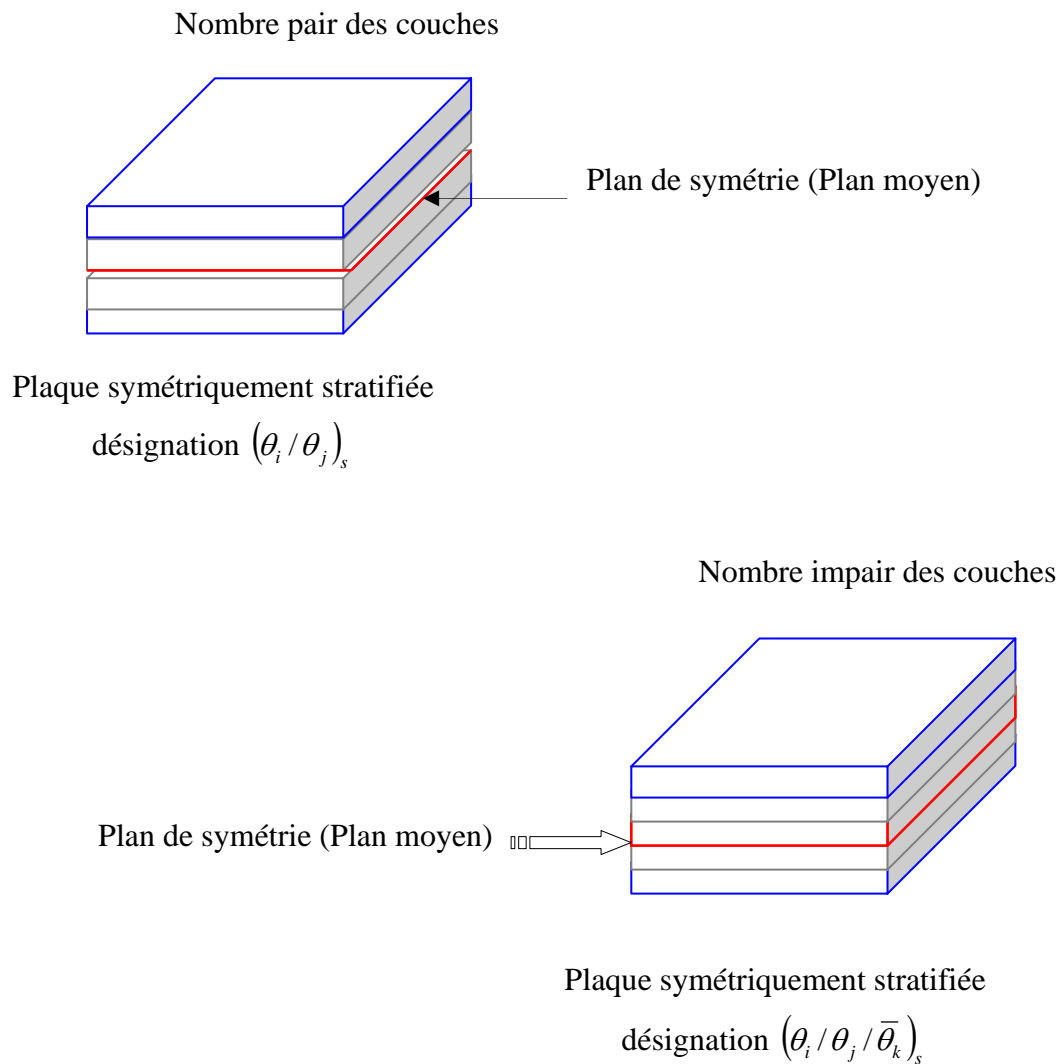


Figure (2.2). Architecture d'une plaque symétriquement stratifiée

2.3.2. Plaques antisymétriquement stratifiées

Les plaques stratifiées symétriques sont utilisées afin d'éliminer le couplage entre membrane et la flexion. Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation des plaques stratifiées non symétriques où le couplage membrane-flexion est nécessaire (conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche). Également, dans le cas où une meilleure rigidité au cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Une plaque stratifiée antisymétrique est constituée de couches en nombre impair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes antisymétriques

par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- Des cotes opposées z_k et $-z_k$.
- La même épaisseur e_k .
- Des orientations θ et $-\theta$ par rapport aux axes de référence de plaque stratifiée.

II.3. Théories des plaques stratifiées

3.1. Définition

Dans cette partie, nous nous intéressons aux plaques qui constituent une très grosse part de l'utilisation des composites en matériaux stratifiés.

D'une manière générale, Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles figure (2.3), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan moyen (référence) entre deux plans extrêmes qui est pris comme plan Oxy . L'axe Oz correspond à la direction de l'épaisseur.

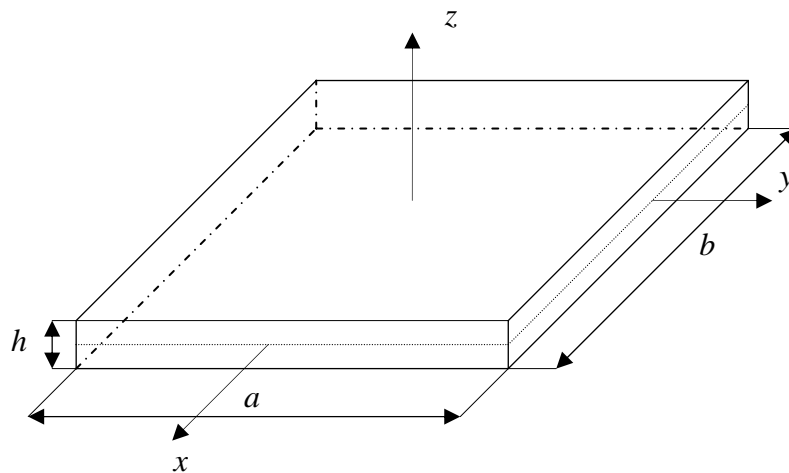


Figure (2.3). Élément de plaque et système d'axe

3.2. Modélisation géométrique

La figure (2.4), représente un élément stratifié de n couches numérotées de la face inférieure à la face supérieure.

La surface moyenne est choisie comme plan de référence Oxy (plan moyen) et l'axe Oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches.

Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

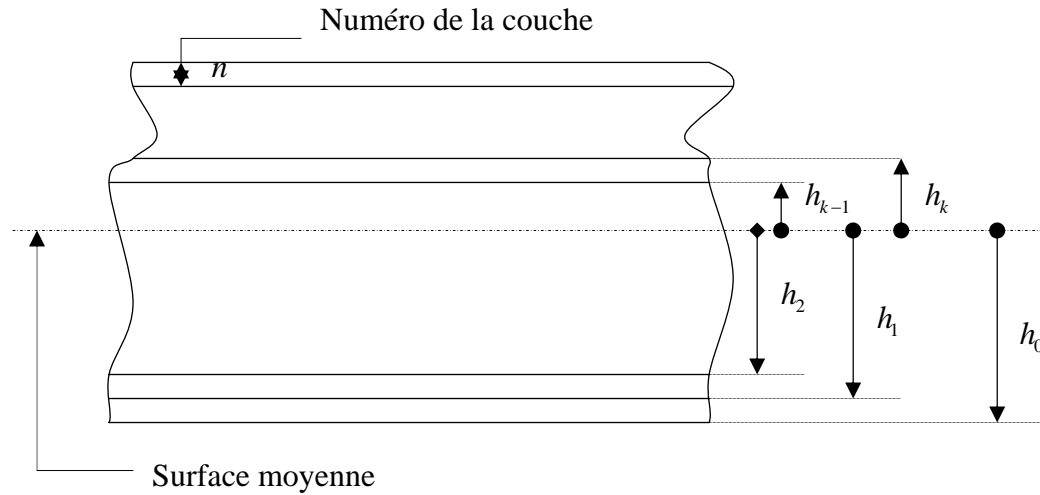


Figure (2.4). Modulation géométrique de stratifié

3.3. Modélisation cinématique (Champ de déplacement)

Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement selon la variable z (développement limité selon la variable z) [17].

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_1(x, y) + z^2\psi_1(x, y) + z^3\phi_1(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_2(x, y) + z^2\psi_2(x, y) + z^3\phi_2(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_3(x, y) + z^2\psi_3(x, y)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Comme z est resté faible devant les autres dimensions, on supposera qu'un schéma de premier degré est suffisant (*hypothèse de Hencky-Madlin*). Le champ de déplacement d'un point M_0 sera noté par la suite suivant l'une des notations [46] :

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0(x, y, 0) = u(x, y) \\
v_0 &= v_0(x, y, 0) = v(x, y) \\
w_0 &= w_0(x, y, 0) = w(x, y)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

La conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite, figure (2.5). En revanche, dans le cadre que nous nous sommes fixé, il n'y a pas d'hypothèse sur l'angle φ , alors que dans la théorie classique des plaques stratifiées, le cisaillement hors plan est négligé, si bien qu'une section normale au plan du stratifié reste normale au plan après déformation (*hypothèses de Love-Kirchhoff*), ce qui se traduit par les conditions [74] :

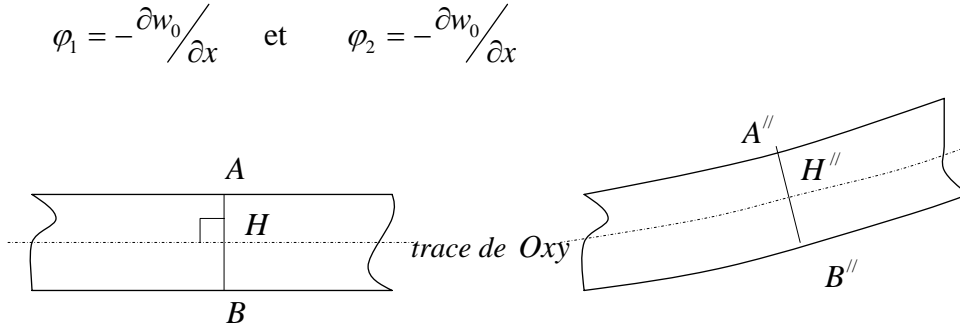


Figure (2.5). Déformation d'une section dans le cadre d'un schéma au premier degré en l'absence de cisaillement transverse

3.4. Champ de déformation

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (2.2) selon [70] :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma de premier degré avec cisaillement transverse, il est issu de deux contributions :

- Une déformation en membrane
- Une déformation en flexion et torsion

3.5. Champ des contraintes

3.5.1. Expression générale

L'état des contraintes au point M d'une couche k de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes du stratifié (Oxyz), s'exprime en fonction des champs des déformations. Il est donné comme suit [03] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{45} & 0 \\ C_{13} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Où C_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k .

La théorie des plaques a pour objectif de simplifier le problème à trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y) . La réduction du problème est obtenue par intégration suivant l'épaisseur. Cette intégration conduit à introduire les résultants qui seront définis prochainement.

3.5.2. Expression des contraintes dans le cas d'une plaque à une couche unidirectionnelle

Hypothèse de la théorie des plaques stratifiées : $\sigma_{zz} = 0$

L'état des contraintes et des déformations correspond à l'état de contraintes planes dans la couche k , ils s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q_{ij} suivant [17] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \varepsilon_{xx} + C_{23} \varepsilon_{yy} + C_{36} \gamma_{xy})$$

- La relation (2.5) montre que bien que le problème soit plan, la déformation ε_{xx} , n'est pas nulle.
- La discontinuité de la loi de comportement entre les couches implique la discontinuité des contraintes

3.6. Résultantes et moments

Les efforts auxquels est soumise la plaque sont donc les sommes des contraintes exercées sur chacune des n couches (indiquée k) constituant la plaque. Ils sont représentés par les figures (2.6) et (2.7), [03].

Dans le plan de la plaque, les efforts normaux et tranchants sont :

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (2.6)$$

En cisaillement,

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (2.7)$$

De même, on définit les moments de flexion et de torsion :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.8)$$

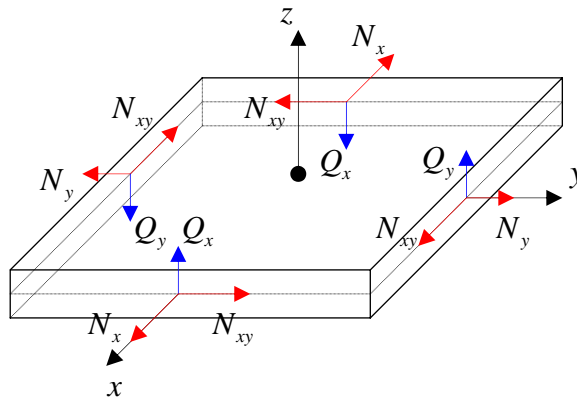


Figure (2.6). Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée

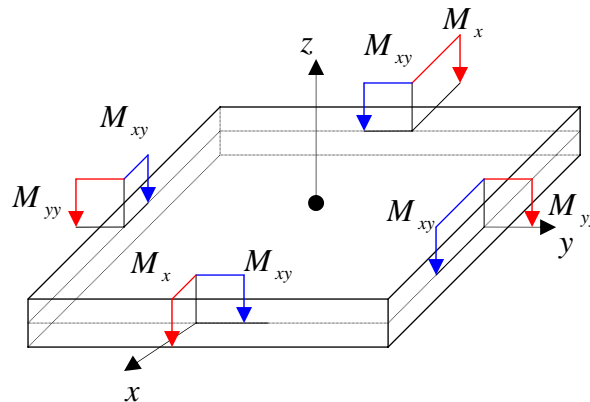


Figure (2.7). Schématisation des moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée

3.7. Relations déformations-résultantes

3.7.1. Expressions contraintes-déformations pour une couche

La relation contraintes-déformations dans une couche est donnée sous la forme [17] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R^k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_R^k + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R^k \begin{pmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{pmatrix}_R^k \quad (2.9)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R^k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}_R^k \quad (2.10)$$

3.7.2. Prise en compte du cisaillement hors plan

En combinant les équations (2.7) et (2.10), il vient [17] :

$$\begin{pmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}_R \quad (2.11)$$

Avec :

$$F_{ij} = \sum_1^n (h_k - h_{k-1}) C_{ij}^k = \sum_1^n e^k C_{ij}^k \quad \text{Pour } i, j = 4,5$$

3.8. Equation du comportement mécanique d'un stratifié

3.8.1. Equation constitutive de la théorie classique

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures dans le cadre de la théorie

classique. Elle s'obtient en regroupant les expressions (2.6) et (2.8) suivant une seule écriture matricielle sous la forme [02], [74] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

3.8.2. Equation constitutive de la théorie de premier ordre (prise en compte de cisaillement transverse)

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures avec prise de cisaillement transverse donnée sous forme matricielle, soit [12], [74]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Avec :

$$\blacktriangleright A_{ij} = \sum_1^n [h_k + h_{k-1}] p_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k e^k$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_1^n [(h_k)^2 - (h_{k-1})^2] \rho_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k e^k z^k \\ \text{➤ } D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_1^n [(h_k)^3 - (h_{k-1})^3] \rho_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k \left[e^k (z^k)^2 + \frac{(z^k)^3}{12} \right] \\ \text{➤ } H_{ij} &= K_{ij} F_{ij} \quad K_{ij} : \text{Facteur de correction en cisaillement} \end{aligned}$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , et D_{ij} font apparaître les variables e^k , épaisseur du pli k , et z^k , distance de la ligne moyenne du composite à la ligne moyenne du pli k

Identification des différentes contributions :

- A_{ij} : constituent la matrice de rigidité en membrane
- D_{ij} : représentent la matrice de rigidité en flexion-torsion
- B_{ij} : sont les termes de couplage membrane / flexion-torsion
- F_{ij} : représentent le cisaillement hors plan

3.9. Relation fondamentale de la dynamique appliquée pour un élément de plaque

Les équations de la Relation Fondamentale de la Dynamique sont obtenues à partir des équations fondamentales de la dynamique « EFD » en intégrant selon z (expression en fonction des résultantes) ou en multipliant par z , puis en intégrant (expression en fonction des moments) [03].

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_1 + \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_2 + \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_3 + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_1 - Q_{11} &= \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_2 - Q_{22} &= \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Avec :

$$\rho, R, I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz$$

$$F_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_1 dz$$

$$F_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_2 dz$$

$$F_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 dz$$

$$q = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right)$$

$$P_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_1 dz$$

$$P_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_2 dz$$

3.9.1. Expression des relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (2.12) des stratifiés dans la relation (2.15), en négligeant les termes de l'inertie rotatoire, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, en éliminant les résultantes de cisaillement, puis en tenant compte des expressions liants les déformations au déplacements, nous obtenons les trois relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés :

➤ Résultantes dans le plan

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (2.16)$$

$$- (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (2.17)$$

$$- (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

➤ Équation en moment de flexion et torsion

$$+ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (2.18)$$

$$- 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Ces équations associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure, permettent de trouver, en principe, les déplacements $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $w(x, y, t)$, solutions du problème d'élasticité.

3.9.1.1. Stratifié symétrique

Une simplification importante apparaît lorsque tous les termes B_{ij} sont nuls ainsi que les grandeurs R , où la structure est symétriquement stratifiée. Les relations fondamentales précédentes s'écrivent alors sous la forme [26]:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

3.9.2. Expression des relations fondamentales du comportement d'un stratifié tenant compte du cisaillement transverse (théorie de premier ordre)

Les relations fondamentales des stratifiés, en tenant compte de cisaillement transverse, sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (2.14) dans les relations fondamentales (2.15) des plaques. Soit [02] :

➤ Résultantes dans le plan :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ & + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} \\ & + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

➤ Résultantes de cisaillement hors plan

$$F_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

➤ Equation en moment de flexion et torsion

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} \\
& + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Ces équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solution $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$ et $\varphi_y(x, y, t)$. Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée.

3.9.2.1. Stratifié symétrique

Pour un stratifié symétrique, $B_{ij} = 0$ et $R = 0$, les équations (2.22) et (2.23) se réduisent respectivement aux équations (2.19) et (2.20) de la théorie classique. L'équation (2.24) est inchangée, alors que les équations (2.25) et (2.26) se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
& D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

La résolution de ces équations est toutefois complexe, et ne peut être menée de manière analytique dans le cas général, et qui est traitée par des méthodes numériques, ce qui suppose une écriture sous forme énergétique.

3.10. Formulation énergétique de la théorie des stratifiés

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique ou vibratoire des stratifiés.

Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse des stratifiés par les méthodes numériques.

3.10.1. Energie de déformation d'un stratifié

L'énergie de déformation d'un solide élastique (S) s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit [06] :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy dz \quad (2.29)$$

En tenant compte la théorie des plaques stratifiées : $\sigma_{zz} = 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint_v (Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2) dx dy dz \quad (2.30)$$

3.10.1.1. Energie de déformation d'un stratifié en fonction des déplacements

En substituant dans l'expression (2.30) les relations déformations-déplacements. En

intégrant ensuite suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons [08] :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ \begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - 2B_{16} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - 2B_{26} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ & - 4B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ & + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\} dx dy \quad (2.31)$$

3.10.1.1.2. Energie de déformation d'un stratifié symétrique

Dans le cas d'un stratifiée symétrique, les termes B_{ij} de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (2.31) de l'énergie de déformation se réduit comme suit :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
 + \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.32)$$

L'énergie de déformation apparaît comme une somme de deux termes :

- L'un fonction uniquement des déplacements $u(x, y)$ et $v(x, y)$ de membrane
- L'autre fonction uniquement des déplacements transverses $w(x, y)$.

Dans le cas de flexion pure, le premier terme est réduit à une constante C , et l'énergie

de déformation s'écrit:

$$Ud = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad (2.33)$$

Si la plaque stratifiée est orthotrope (l'axe de la plaque confondu avec les axes principaux), l'énergie de déformation est simplifiée comme suit :

$$Ud = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad (2.34)$$

$D_{16} = D_{26} = 0$, l'équation la plus réduite dans la théorie des stratifiés en cadre d'élasticité anisotrope.

3.10.2. Energie cinétique d'un stratifié

L'énergie cinétique d'un stratifié élastique est donnée par formule suivante [06] :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_v \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2.35)$$

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, le champ des déplacements (2.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y) &= v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

En remplaçant ces équations dans l'expression (2.35), l'énergie cinétique devient :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_v \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2.36)$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des rotations, en intégrant en z (suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie cinétique est réduite à :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \rho_s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.37)$$

ρ_s : Masse surfacique de la plaque stratifiée ($\rho_s = \rho h$)

3.10.3 Travail des actions exercées sur le stratifié

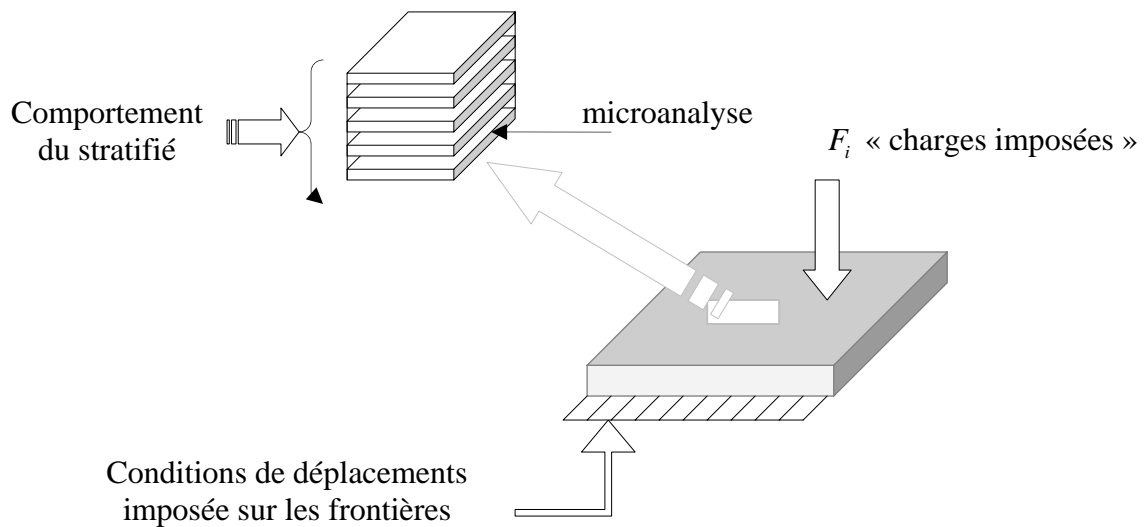
3.10.3.1. Travail des actions exercées sur le stratifié dans le cas de flexion transversale

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses. La variation du travail des actions s'écrit :

$$\delta W_f = \iint \left[\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \delta w dx dy \quad (2.38)$$

3.11. Organigramme général de l'étude du comportement mécanique des stratifiés en matériaux composites

L'étude de la mise en œuvre des matériaux composites a montré l'importance des stratifiés. L'architecture de ces matériaux nous permet maintenant de dégager les grandes lignes de l'étude de leur comportement mécanique, figure (2.8).



Connaître le comportement mécanique de la structure
 C'est connaître le champ des contraintes et le champ des déplacements
 en tout point de la structure

Processus d'étude :

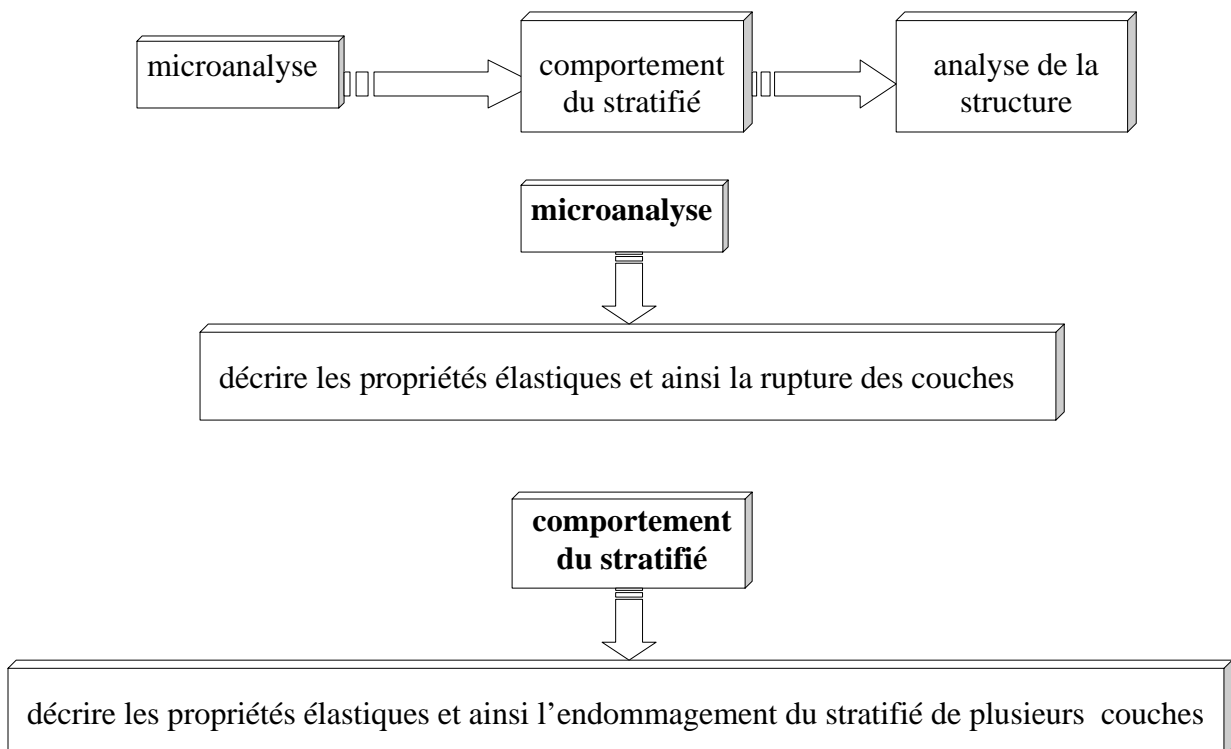


Figure (2.8). Schéma d'étude du comportement mécanique d'une structure stratifiée en matériaux composites

II.4. Conclusion

Au cours de ce chapitre, après l'introduction et une présentation de l'architecture des plaques stratifiées, on appelle en terme global une écriture des théories des stratifiés pour deux cas :

- théorie classique des stratifiés.
- théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse ou théorie du premier ordre.

Dans un premier temps, on a traité le problème sous forme du système d'équations différentielles non linéaires quadratiques qui n'est pas résolu analytiquement, et qui est traité par des méthodes numériques, ce qui suppose à la fin du chapitre une écriture énergétique de ces équations, ceci pour des raisons pratiques liées à l'application de la méthode numérique variationnelle de Rayleigh-Ritz présentée au chapitre suivant.

Chapitre III

ETUDE VIBRATOIRE DES PLAQUES MINCES STRATIFIEES EN MATERIAUX COMPOSITES

III.1. Introduction

Dans l'étude des vibrations libres des plaques stratifiées anisotropes, les vibrations de flexion sont généralement les plus importantes, de façon beaucoup plus large, elles ont fait l'objet de beaucoup de recherche [06], [17], [26], [67],..., elles sont dans la plupart des cas la ruine de la plaque. Les vibrations longitudinales peuvent également être négligeables devant les premières.

La vibration en flexion des plaques est modélisée essentiellement par deux théories :

- théorie des plaques minces exposée dans ce chapitre; le problème pour un espace à deux dimensions « étude concernant les plaques en flexion qui présente l'avantage d'utiliser une géométrie à 2D plus répandue en pratique »
- théorie des plaques épaisses.

Le comportement d'une plaque (système physique continu) est généralement représenté par un système d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites sur la frontière. Dans la plus part des cas, il n'est pas toujours possible de trouver des solutions analytiques à ces systèmes d'équations différentielles. Pour cela, il faudrait remplacer le système continu par un système discret équivalent dont le comportement est décrit par des équations algébriques, c'est-à-dire à des solutions approchées (fréquences propres). Pour obtenir ces dernières deux démarches sont possibles : la première consiste en un traitement purement numérique utilisant des discrétisations type éléments finis [14], [33], [67], ou différences finies [31], en temps et en espace. Ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul et surtout dans l'analyse des vibrations libres des plaques. On préfère en général la seconde démarche à savoir l'emploi des méthodes dites analytiques-numériques [06]. [17], [20], [21], [23], [42], [70], dans la plupart du temps, on cherche la solution approchée sous forme $u(x, t) = \sum_{k,l} \psi_k U_l(t)$.

Par ailleurs diverses hypothèses sur la forme de $\psi_k(x)$ ou $U_l(t)$ sont possibles, les principales sont citées ci-dessous :

Si on se limite à un $l=1$ et $U_1(t)$ harmonique, on aboutit à un problème aux conditions aux limites en $\psi_k(x)$, résolu ensuite par une méthode numérique. Ce type est très utilisé car il permet de transformer un système dynamique en un système d'équations algébriques, l'une

des méthodes les plus usuelles sont, les éléments finis pour Reddy et al (1981) ou Mei (1973), Galerkin dans Bennemar et al (1991) ou encore avec Ritz pour lewandowski (1987).

Nous lui préférons dans notre cas la méthode de Rayleigh-Ritz, car elle est mieux adaptée au genre de problème des vibrations libres des plaques stratifiées.

III.2. Méthode de Rayleigh-Ritz

Parmi les problèmes d'élastodynamiques gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles et dont certains ont été traités dans le chapitre précédent, il n'en existe qu'un petit nombre pour lesquels une solution analytique est disponible qui satisfait à la fois les équations différentielles dans le domaine et les conditions aux limites.

La nécessité de trouver une solution analytique exacte peut être contournée par l'application de la méthode cinématique de Rayleigh-Ritz à une fonctionnelle telle que le principe de variation des déplacements (1.1). Il en résulte alors un problème de substitution qui ne possède plus de n degrés de liberté. La solution de Rayleigh-Ritz est rarement exacte, mais s'améliore avec le nombre de degrés de liberté incorporés dans son expression.

La méthode de Rayleigh-Ritz commença en 1870 avec l'étude des problèmes de vibration par lord Rayleigh : l'approximation du champ de déplacement était toutefois limitée à une seule fonction (méthode de Rayleigh). En 1909, Ritz a généralisé la méthode de Rayleigh en construisant une approximation du champ à partir de plusieurs fonctions, chacune satisfaisant séparément les conditions aux limites essentielles (c'est-à-dire, les conditions aux frontières de type cinématique) et à chacune d'elle étant associé un degré de liberté.

2.1. Choix des fonctions d'approximation

La procédure de Rayleigh-Ritz pour un problème d'élastodynamique décrit par le principe de Hamilton commence par le choix de fonctions d'approximation pour le champ des déplacements. Chaque composante u_i du champ $u_i(x, y, z, t)$, $i = 1, 2, 3$, est décrite par une série dont le terme caractéristique est une fonction $f_{ij}(x, y, z)$ multipliée par une amplitude en fonction du temps, notée $q_j(t)$. Les q_j jouent le rôle de coordonnées généralisées. On écrit l'approximation de Rayleigh-Ritz sous la forme

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x, y, z) q_j(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Où chaque ensemble de fonctions décrivant un champ de déplacements particulier

$$f_j(x, y, z) = \begin{Bmatrix} f_{1j}(x, y, z) \\ f_{2j}(x, y, z) \\ f_{3j}(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

doit être admissible, c'est-à-dire qu'il satisfait séparément et les conditions de compatibilité interne (continuité C_0) et les conditions aux limites naturelles. Donc l'approximation résultante prend la forme matricielle

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^n f_j(x, y, z) q_j(t) \quad (3.2)$$

L'analyse doit estimer combien de termes n doit on inclure dans le développement pour obtenir la précision requise : les degrés de liberté de l'approximation sont les n amplitudes $q_j(t)$ que l'on détermine selon la procédure variationnelle ci-après.

2.2. Discrétisation du principe de variation des déplacements

Ecrivons l'approximation (3.2) sous forme matricielle

$$u(x, y, z, t) = N(x, y, z) q(t) \quad (3.3)$$

Où

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{Bmatrix}^T \quad (3.4)$$

Représente le vecteur des coordonnées généralisées, et la matrice N de dimension $3*n$ est la matrice d'interpolation des déplacements.

$$N(x, y, z) = \begin{Bmatrix} f_{11}(x, y, z) & \dots & f_{1n}(x, y, z) \\ f_{21}(x, y, z) & \dots & f_{2n}(x, y, z) \\ f_{31}(x, y, z) & \dots & f_{3n}(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

On évalue ensuite les composantes de la déformation par la relation

$$\varepsilon(X, t) = DN(x, y, z)q(t) = B(x, y, z)q(t) \quad (3.6)$$

Où la matrice $B(x, y, z)$ de dimension $6*n$ est la matrice d'interpolation des déformations calculée à partir de la matrice d'interpolation des déplacements par l'application de l'opérateur de dérivation.

$$B(x, y, z) = DN(x, y, z) \quad (3.7)$$

On calcule alors successivement :

➤ L'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{q}^T N^T N \dot{q} dv = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (3.8)$$

Avec la matrice des masses du système discrétisé

$$M = \int_v \rho N^T N dv \quad (3.9)$$

Par construction, elle est de dimension $n*n$, symétrique et définie positive.

➤ L'énergie potentielle interne

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T H \varepsilon dv = \frac{1}{2} \int_v q^T B^T H B q dv = \frac{1}{2} q^T K q \quad (3.10)$$

Où H est la matrice des coefficients de Hooke avec la matrice des raideurs du système discrétisé on a :

$$K = \int_v B^T H B dv \quad (3.11)$$

Tout comme la matrice des masses, elle est par construction de dimension $n*n$ et symétrique. Elle n'est toutefois que semi-définie positive, les modes rigides éventuels, u , étant solutions de

$$Bu = 0 \quad \text{Ou} \quad Ku = 0$$

Ce sont des modes de déplacements non nuls auxquels aucune énergie de déformation n'est associée.

➤ L'énergie potentielle externe

$$U_{ext} = - \int_{s_\sigma} (Nq)^T \bar{t} ds - \int_v (Nq)^T \bar{X} dv \quad (3.12)$$

Soit

$$U_{ext} = -q^T g \quad (3.13)$$

Avec le vecteur des charges

$$g = \int_{s_\sigma} N^T \bar{t} ds + \int_v N^T \bar{X} dv \quad (3.14)$$

Regroupant tous les termes, on obtient l'expression discrétisée du principe de variation des déplacements :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \left(\frac{1}{2} q^T K q - q^T g \right) \right] dt = 0 \quad (3.15)$$

Et on procède ensuite à la variation des coordonnées généralisées q qui fournit les équations du mouvement sous forme discrétisée :

$$Kq + M\ddot{q} = g(t) \quad (3.16)$$

2.3. Calcul des solutions propres

L'hypothèse de vibration libre et de mouvement harmonique fournit l'expression du problème aux valeurs propres discrétisé,

$$Kq = \omega^2 Mq \quad (3.17)$$

Dont les solutions sont des approximations au problème de Sturm-liouville.

Notons par $\omega_{i,c}^2$ les valeurs propres approchées calculées par la méthode de Rayleigh-Ritz, et $\omega_{i,e}^2$ les valeurs propres exactes du problème continu. Le résultat suivant permet de qualifier le type de convergence obtenu vers la solution du problème exacte :

- Le spectre des valeurs propres $\omega_{i,c}^2$ résultant de l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz au principe de variation des déplacements, est une borne supérieure aux fréquences exactes $\omega_{i,e}^2$.

2.4. Méthode de résolution du problème aux valeurs propres

Nous avons vu que, tant pour les systèmes discrets que pour les systèmes continus auxquels une méthode d'approximation de type Rayleigh-Ritz est appliquée, le problème de la détermination des modes et fréquences propres de vibration d'un système mécanique se ramène toujours au calcul des solutions propres du système homogène :

$$Kx = \omega^2 Mx \quad (3.18)$$

Où la matrice raideur \mathbf{K} et de masse \mathbf{M} sont presque toujours symétriques et définies positives. Elles deviennent toutefois semi-définies positive.

La méthode que l'on peut mettre en œuvre dans ce mémoire pour résoudre le problème (3.58) rentre dans la catégorie des méthodes basées sur le calcul du déterminant $\det(K - \omega^2 M) = 0$. Et nous supposons que les solutions propres sont toujours ordonnées de la manière suivante :

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

2.4.1. Méthodes basées sur le calcul du déterminant

2.4.1.1. Développement de l'équation caractéristique par la méthode de Graeff

La méthode de Graeff est basée sur le développement de l'équation caractéristique associée au système mécanique homogène. Nous la présentons néanmoins pour mémoire.

- ✓ L'équation caractéristique

$$dtm(K - \omega^2 M) \quad (3.19)$$

- ✓ Factorisation ($\omega^2 \equiv \lambda$)

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (3.20)$$

- ✓ Remplaçant λ par $-\lambda$, on obtient

$$\Delta(-\lambda) = (-1)^n (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2) \dots (\lambda + \lambda_n) \quad (3.21)$$

- ✓ et en multipliant (3.20) par λ , on obtient la nouvelle équation

$$\Delta_2(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \dots (\lambda^2 - \lambda_n^2) = 0 \quad (3.22)$$

- ✓ par application récursive du même procédé, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_4(\lambda) &= (\lambda^4 - \lambda_1^4)(\lambda^4 - \lambda_2^4) \dots (\lambda^4 - \lambda_n^4) = 0 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ \Delta_{2^p}(\lambda) &= (\lambda^{2^p} - \lambda_1^{2^p})(\lambda^{2^p} - \lambda_2^{2^p}) \dots (\lambda^{2^p} - \lambda_n^{2^p}) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

- ✓ en posant $\mu = \lambda^{2p}$, (3.23) est une équation de degré n en μ que l'on peut développer sous la forme

$$\Delta_{2p}(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \dots + a_{n-1}\mu + a_n = 0$$

- ✓ on obtient par identification les coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\lambda_1^{2p} + \dots + \lambda_n^{2p}) \\ a_2 &= (\lambda_1^{2p}\lambda_2^{2p} + \lambda_1^{2p}\lambda_3^{2p} + \dots + \lambda_{n-1}^{2p}\lambda_n^{2p}) \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \lambda_1^{2p} \dots \lambda_n^{2p} \end{aligned}$$

- ✓ si on fait l'hypothèse que les valeurs propres sont de modules distincts

$$|\lambda_1| \succ |\lambda_2| \succ \dots \succ |\lambda_n|$$

- ✓ pour p suffisamment grand, on obtient successivement les approximations des différentes valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1^{2p} &\approx -a_1 \\ \lambda_2^{2p} &\approx \frac{a_2}{\lambda_1^{2p}} = \frac{a_2}{a_1} \\ \lambda_3^{2p} &\approx -\frac{a_3}{\lambda_1^{2p}\lambda_2^{2p}} = -\frac{a_3}{a_2} \\ &\vdots \\ \lambda_n^{2p} &\approx -\frac{a_n}{a_{n-1}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

2.5. Organigramme général de résolution

Organigramme général de la résolution d'un système d'équations par la méthode de Rayleigh-Ritz, figure (3.1)

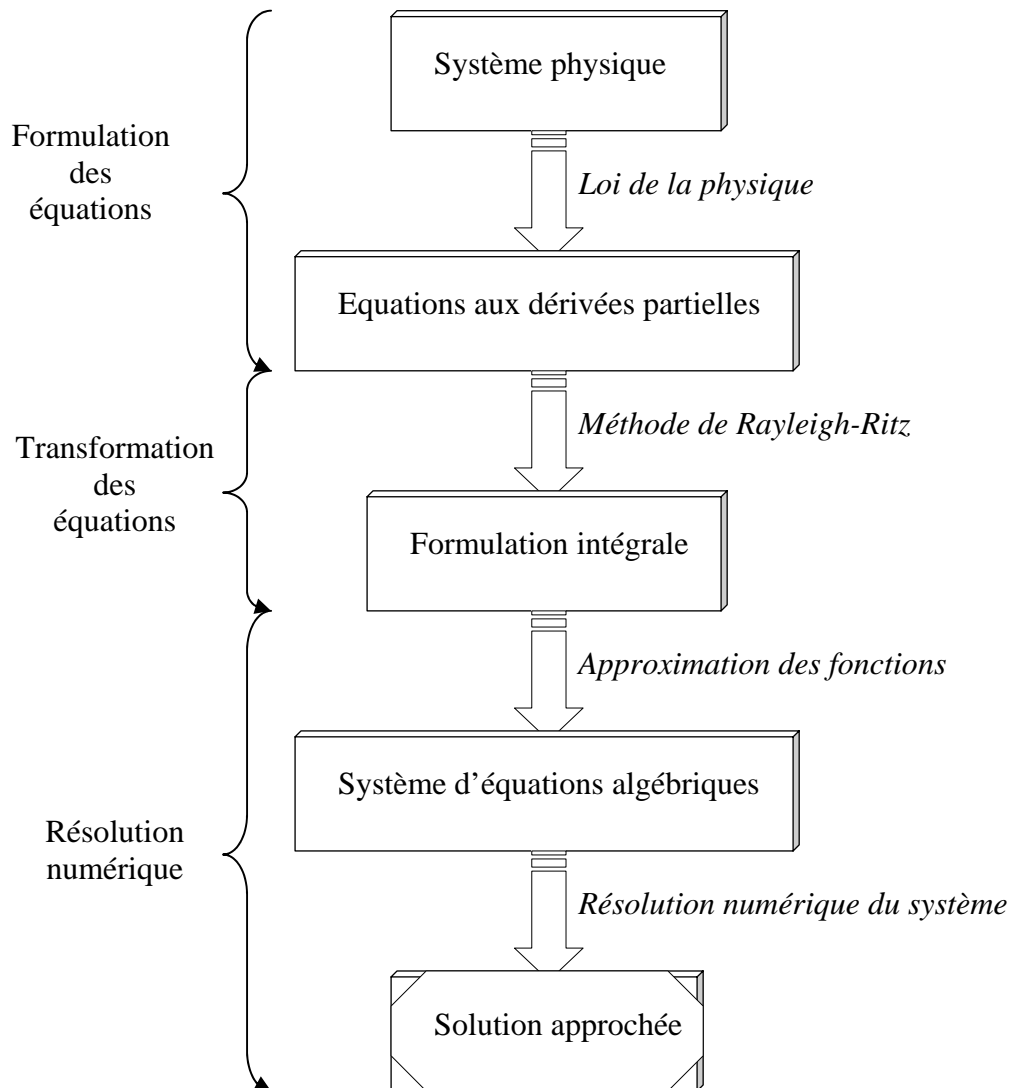


Figure (3.1). Organigramme de transformation et résolution des équations d'un système physique par la méthode de Rayleigh-Ritz

III.3. Vibration des plaques symétriquement stratifiées

3.1. Position du problème

On considère une plaque mince rectangulaire symétriquement stratifiée en matériau composite orthotrope dont la configuration géométrique et le système de coordonnées qui est montré dans la figure (3.2), avec les paramètres adimensionnels présentés comme suit [42].

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad R = a/b$$

Où

- ✓ a et b sont les dimensions de la plaque suivant x et y respectivement.

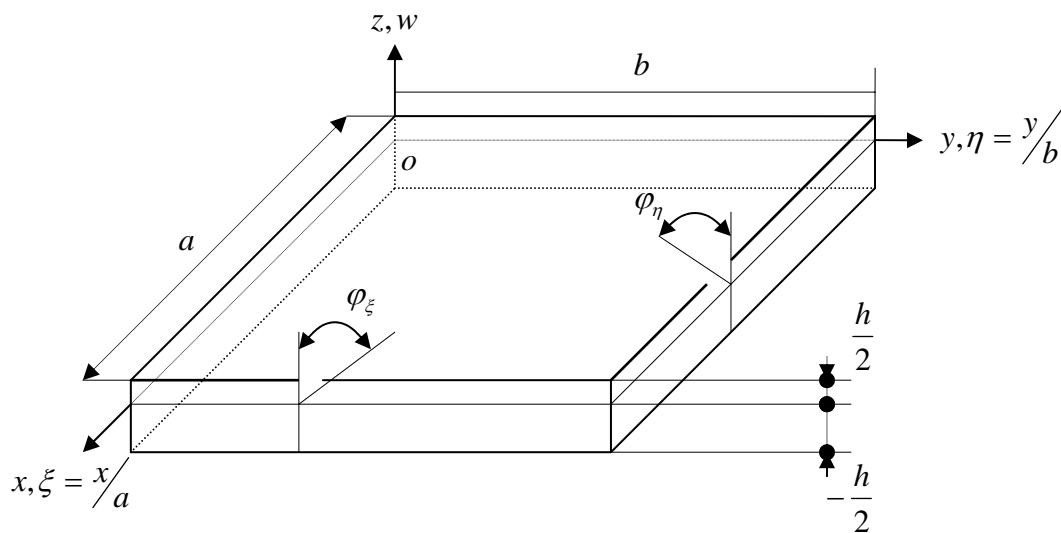


Figure (3.2). Plaque stratifiée avec système des coordonnées

- ✓ φ_ξ et φ_η : déformation de cisaillement dans le cadre d'un schéma du premier degré.
- ✓ h : épaisseur de la plaque.
- ✓ R : Rapport de la longueur/largeur.

3.2. Formulation du problème

Dans le but de concrétiser l'influence de la cinématique sur le comportement vibratoire (problème dynamique) des plaques stratifiées en matériau composite, cinq cas ont été considérés dans la formulation des équations du mouvement.

3.2.1. Plaques stratifiées symétriques orthotropes en absence de couplage flexion-torsion

Dans l'étude de vibration des plaques stratifiées orthotropes en absence de couplage flexion-torsion ($D_{16} = D_{26} = 0$), on distingue trois cas [31].

3.2.1.1. Théorie classique

Dans ce cas, l'équation dynamique du mouvement (2.18) devient :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

Où D_{11} , D_{22} , D_{66} et D_{12} sont les rigidités flexionnelles de la plaque.

3.2.1.2. Théorie classique en présence de l'inertie rotatoire

Pour ce cas, l'équation dynamique (2.22) devient :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - I \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Où $I = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho z^2 dz$: moment d'inertie rotatoire par unité de surface.

3.2.1.3. Théorie du premier ordre

Le champ de déformations est déduit du champ des déformations (3.3).

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Où ψ_x et ψ_y sont des rotations dans les directions, de x (ξ) et y (η) respectivement. L'application de l'équation de l'équilibre dynamique de rotation et de translation d'un élément infinitésimal donne les trois équations aux dérivées partielles suivantes :

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y^2} - \frac{5}{6} A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.22)$$

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - \frac{5}{6} A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{5}{6} A_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{5}{6} A_{44} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.24)$$

Où A_{44} , A_{55} sont les rigidités de cisaillement.

Ces équations ne peuvent pas être réduites à une équation comme dans les deux cas précédents, même en absence de l'inertie rotatoire.

3.2.2. Plaques stratifiées symétriques orthotropes en présence de couplage flexion-torsion

Dans le cas présent l'équation dynamique du mouvement à considérer est celle introduite en (3.20) sauf que les rigidités flexionnelles D_{12} et D_{26} sont ajoutées dans le côté droit. La forme générale de l'équation dynamique du mouvement aux dérivées partielles est comme suit [06]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

3.3. Méthode de solution

L'analyse de vibration libre des plaques stratifiées consiste à déterminer les fréquences propres de vibration. Cette recherche s'effectue généralement en exprimant le champ des déplacements sous la forme des équations (3.26) à (3.28) ci-dessous [59].

La séparation des variables suivante est employée:

- déplacement dans la direction z .

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

- fonction transversale de déplacement.

$$\psi_x(x, y, t) = \psi_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \psi_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Où t est le temps, ω la fréquence naturelle.

Les fréquences propres peuvent être déterminées directement en portant les relations (3.26) à (3.28) dans l'équation (3.20), ou par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les méthodes énergétiques, et dans ce cas l'énergie cinétique, s'exprime alors suivant [17] :

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \iint \rho h (u^2 + v^2 + w^2) dx dy \quad (3.29)$$

3.4. Étude vibratoire des plaques stratifiées symétriques orthotropes en absence de couplage flexion-torsion

3.4.1. Plaques stratifiées orthotropes en appuis simples

Dans le cas d'une plaque stratifiée symétrique orthotrope, pour lequel ($D_{16} = D_{26} = 0$) les fréquences propres de vibration sont obtenues analytiquement seulement dans le cas où tous les bords de la plaque sont simplement supporté. Et cela se fait par l'exploitation des équations (3.20) et (3.26). En régime de temps harmonique, le déplacement transversal $w(x, y, t)$ est de la forme [40] :

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.30)$$

A_{mn} : Coefficient à déterminer.

En usage de l'équation (3.20), et en utilisant l'expression du déplacement $w(x, y)$ précédente, on peut écrire l'équation de dispersion pour une plaque simplement supportée comme suit :

$$\left[D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \rho h \omega^2 \right] A_{mn} = 0 \quad (3.31)$$

D'où l'expression générale des fréquences propres :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^2 R^4 \right]} \quad (3.32)$$

3.4.1.1. Plaques orthotropes carrées

Dans le cas des plaques carrées où $R = a/b = 1$, l'expression des fréquences propres est donnée par :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{22} n^2 \right]} \quad (3.33)$$

3.3.1.2. Plaques isotropes carrées

Dans le cas des plaques isotropes où $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$, les fréquences propres se réduit à :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h} \sqrt{m^4 + 2m^2 n^2 R^2 + n^4 R^4}} \quad (3.34)$$

3.4.1.3. Calcul de fréquence et mode fondamentale

- la fréquence fondamentale de la plaque stratifiée symétrique orthotrope, est donnée pour $m = n = 1$ et s'exprime comme suit :

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho h} [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4]} \quad (3.35)$$

- le mode fondamental de vibration est donné par :

$$w(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (3.36)$$

A_{11} : Constante déterminée par les conditions aux frontières.

D'une façon plus compacte :

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{22}}{\rho h}} \quad (3.37)$$

Où

$$\lambda_{mn} = \sqrt{10m^4 + 2m^2n^2 + n^4}$$

3.4.2. Plaques stratifiées orthotropes avec diverses conditions sur les bords

Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenu les solutions exacte de l'équation (3.20) dans le cas d'une plaque en appuis simples sur ses quatre cotés. Dans le cas d'autres conditions d'appuis, il n'est pas possible de résoudre directement l'équation (3.20), la recherche des fréquences propres nécessite alors l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz. Nous cherchons donc l'énergie de déformation maximale et aussi l'énergie cinétique.

3.4.2.1. Energie de déformation

Dans le cas des plaques stratifiées orthotropes, l'énergie de déformation maximale est donnée par :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.38)$$

3.4.2.2. Solution approchée

La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une double série de Fourier,

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \quad (3.39)$$

Les fonctions $X_i(\xi)$ et $Y_j(\eta)$ doivent constituer des bases fonctionnelles, et sont choisies de façon à vérifier les conditions sur les frontières de la plaque. Les coefficients A_{ij} sont en suite déterminés par les conditions de stationnarités qui s'écrivent ici :

$$\frac{\partial U_{d \max}}{\partial A_{ij}} = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial U_{d \max}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial E_{c \max}}{\partial A_{ij}} \quad (3.40)$$

3.4.2.3. Calcul de l'énergie de déformation approchée

Le calcul de l'énergie de déformation approchée nécessite l'explicitation de chaque terme :

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$\circ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{dX_i}{dx} Y_j$$

D'où

$$\circ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{ij} A_{mn} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n \quad (3.41)$$

Et

$$\circ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{ij} A_{mn} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n \quad (3.42)$$

○

L'intégrale de ce terme s'écrit sous forme :

$$\circ \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \int_{x=0}^a \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_{y=0}^b Y_j Y_n dy \quad (3.43)$$

Pour exprimer les intégrales, il est plus pratique de faire un changement des variables :

$$\xi = x/a \quad \text{et} \quad \eta = y/b \quad (3.44)$$

Avec $0 \leq \xi \leq 1$ et $0 \leq \eta \leq 1$

Donc l'expression (3.43) s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{b}{a^3} \int_0^1 \frac{d^2 X_i}{d\xi^2} \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} d\xi \int_0^1 Y_j Y_n d\eta \quad (3.45)$$

De la même manière :

$$\circ \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{a}{b^3} \int_0^1 X_i X_m d\xi \int_0^1 \frac{d^2 Y_j}{d\eta^2} \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} d\eta \quad (3.46)$$

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{ab}{a^2 b^2} \left(\int_0^1 \frac{d^2 X_i}{d\xi^2} dX_m d\xi \int_0^1 \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} dY_j d\eta \right)$$

○

$$+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{ab}{a^2 b^2} \left(\int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} dX_i d\xi \int_0^1 \frac{d^2 Y_j}{d\eta^2} dY_n d\eta \right)$$

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{1}{ab} \int_0^1 \frac{dX_i}{d\xi} \frac{dY_j}{d\xi} d\xi \int_0^1 \frac{dY_j}{d\eta} \frac{dY_n}{d\eta} d\eta$$

○

3.4.2.4. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'une plaque stratifiée orthotrope est donnée comme suit :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \rho h \omega^2 w^2 dx dy$$

La fonction d'énergie cinétique maximum s'écrit à $U_{d \max} - E_{c \max}$ avec :

$$U_{d \max} - E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \rho h \omega^2 w \right] dx dy$$

Où les fonctions $X_i(\xi)$ et $Y_j(\eta)$ doivent vérifier les conditions aux frontières sur les côtés $\xi = 0$, $\xi = 1$ et $\eta = 0$, $\eta = 1$. Les coefficients A_{mn} sont déterminés par les conditions de stationnarité :

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (U_{d \max} - E_{c \max}) = 0$$

Avec : $m = 1, 2, \dots, M$ $n = 1, 2, \dots, N$

3.4.2.5. Résolution du problème aux valeurs propres

Les conditions (3.51) de stationnarité conduisent à un système d'équations homogènes de $M \times N$, en remplaçant l'expression (3.39) dans les expressions (3.38) et (3.49).

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} F^{22}_{im} T^{00}_{jn} + \left[D_{12} (F^{20}_{im} T^{02}_{jn}) + 4D_{66} F^{11}_{im} T^{11}_{jn} \right] R^2 + D_{22} F^{00}_{im} T^{22}_{jn} R^4 - \rho h a^4 \omega^2 F^{00}_{im} T^{00}_{jn} \right\} A_{ij} = 0 \quad (3.52)$$

Pour $m = 1, 2, \dots, M$ et $n = 1, 2, \dots, N$

Le système d'équations (3.52) dû au vibration flexionnelle de la plaque stratifiée orthotrope avec divers conditions sur les frontières, est donnée en fonction de la matrice de rigidité K_{imjn} , et de la matrice masse M_{imjn} par :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[K_{imjn} - \lambda_i^2 M_{imjn} \right] A_{ij} = 0 \quad (3.53)$$

Ce système d'équations en A_{ij} étant homogène, une solution non nulle n'est obtenue lorsque le déterminant du système est nul. Cette condition conduit à un problème aux valeurs propres dont les solutions sont des fréquences propres λ_i de vibration en flexion de la plaque.

Avec :

- $K_{imjn} = D_{11} F^{22}_{im} T^{00}_{jn} + \left[D_{12} (F^{20}_{im} T^{02}_{jn}) + 4D_{66} F^{11}_{im} T^{11}_{jn} \right] R^2 + D_{22} F^{00}_{im} T^{22}_{jn} R^4$
- $M_{imjn} = F^{00}_{im} T^{00}_{jn}$
- F^{rs}_{im} et T^{rs}_{jn} : intégrales sans dimensions.

$$\checkmark \quad F^{rs}_{im} = \int_0^1 \frac{d^r X_i(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s X_m(\xi)}{d\xi^s} d\xi$$

$$\checkmark \quad T^{rs}_{jn} = \int_0^1 \frac{d^r X_j(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s X_n(\xi)}{d\xi^s} d\xi$$

3.4.2.6. Détermination des fréquences propres par l'approximation de Rayleigh

L'approximation de type Rayleigh consiste à utiliser pour un mode donné, un seul terme de la série (3.39). La fréquence propre d'un mode est alors obtenue en égalant l'énergie de déformation maximum à l'énergie cinétique maximum associée au déplacement transverse $w(\xi, \eta)$, et dans ce cas l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 ab F_{im}^{00} T_{jn}^{00} A_{ij} \quad (3.54)$$

L'énergie de déformation maximum est déduite de la relation (3.52).

$$U_{d \max} = \frac{1}{2} ab \left[D_{11} F_{im}^{22} T_{jn}^{00} + 2 \left(D_{12} F_{im}^{20} T_{jn}^{02} + 2 D_{66} F_{im}^{11} T_{jn}^{11} \right) R^2 + D_{22} F_{im}^{00} T_{jn}^{22} R^4 \right] A_{ij}^2 \quad (3.55)$$

Par égalité de deux expressions (3.54) et (3.55), et en exprimant les coefficients de rigidité D_{ij} en fonction de D_{11} comme suit :

$$D_{22} = \alpha_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \alpha_{66} D_{11}, \quad \text{et} \quad D_{22} = \alpha_{22} D_{11}$$

Les fréquences propres de type Rayleigh est données par :

$$\lambda_{ij} = \frac{F_{im}^{22} T_{jn}^{00} + 2 \left(\alpha_{12} F_{im}^{20} T_{jn}^{02} + 2 \alpha_{66} F_{im}^{11} T_{jn}^{11} \right) R^2 + \alpha_{22} F_{im}^{00} T_{jn}^{22} R^4}{F_{im}^{00} T_{jn}^{00}} \quad (3.56)$$

3.5. Etude vibratoire des plaques stratifiées symétriques orthotropes en présence de couplage flexion-torsion

L'étude de vibration de plaques stratifiées symétriques en présence de couplage flexion-torsion se fait de la même manière qu'à la section 2.5. Dans le cas présent, l'énergie de déformation à considérer est celle introduite en (3.38) en ajoutant les termes en D_{16} et D_{26} [06].

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.57)$$

Le système d'équations aux valeurs propres (3.52) est modifié en introduisant les termes en D_{16} et D_{26} .

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{aligned} & D_{11} F_{im}^{22} T_{jn}^{00} + [D_{12} (F_{im}^{20} T_{jn}^{02}) + 4D_{66} F_{im}^{11} T_{jn}^{11}] R^2 + D_{22} F_{im}^{00} T_{jn}^{22} R^4 + \\ & 2D_{16} (F_{im}^{12} T_{jn}^{10} + F_{jn}^{21} T_{im}^{21}) R + 2D_{26} (F_{im}^{10} T_{jn}^{12} + F_{jn}^{01} T_{im}^{21}) R^3 - \rho h a^4 \omega^2 F_{im}^{00} T_{jn}^{00} \end{aligned} \right\} A_{ij} = 0 \quad (3.58)$$

3.5.1. Fonctions d'essai (fonctions d'approximation)

Nous choisissons comme fonctions d'approximation, les fonctions poutres $X_i(\xi)$ et $Y_j(\eta)$ telles que :

$$X_i(\xi) = \cos \frac{\lambda_i \xi}{a} - \cosh \frac{\lambda_i \xi}{a} - \gamma_i \left(\sin \frac{\lambda_i \xi}{a} - \sinh \frac{\lambda_i \xi}{a} \right) \quad (3.59)$$

$$Y_j(\eta) = \cos \frac{\lambda_j \eta}{b} - \cosh \frac{\lambda_j \eta}{b} - \gamma_j \left(\sin \frac{\lambda_j \eta}{b} - \sinh \frac{\lambda_j \eta}{b} \right)$$

Ces fonctions d'approximation, développée par D. Young [71] pour obtenir les fréquences propres des plaques rectangulaires isotropes, et adapté par J. M Whitney [69] à l'étude de la flexion des plaques stratifiées anisotropes. Ces fonctions constituent les fonctions de bases pour expliciter les modes de vibration en flexion des plaques stratifiées avec différents états de frontières par J. Kong et Y. K. Cheung [39]. Nous traitons ci-après le cas d'une plaque stratifiée anisotrope encastree sur ses quatre cotés, les autres cas sont reportés dans le tableau (3.1).

Tableau (3.1). Fonction poutre et conditions aux frontières [39]

Conditions aux frontières	Fonction poutre
<p style="text-align: center;"><u>SS-SS</u></p> <p style="text-align: center;">$\underline{\xi = 0}$ et $\underline{\xi = 1}$</p> $\begin{cases} X_i(\xi = 0) = 0 \\ X_{i,\xi\xi}(\xi = 0) = 0 \\ X_i(\xi = 1) = 0 \\ X_{i,\xi\xi}(\xi = 1) = 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$\underline{\eta = 0}$ et $\underline{\eta = 1}$</p> $\begin{cases} Y_j(\eta = 0) = 0 \\ Y_{j,\eta\eta}(\eta = 0) = 0 \\ Y_j(\eta = 1) = 0 \\ Y_{j,\eta\eta}(\eta = 1) = 0 \end{cases}$	$X_i(\xi) = \sin \frac{\lambda_i \xi}{a}$ $Y_j(\eta) = \sin \frac{\lambda_j \eta}{b}$ $\lambda_i = i\pi$
<p style="text-align: center;"><u>SS-EE</u></p> <p style="text-align: center;">$\underline{\xi = 0}$ et $\underline{\xi = 1}$</p> $\begin{cases} X_i(\xi = 0) = 0 \\ X_{i,\xi\xi}(\xi = 0) = 0 \\ X_i(\xi = 1) = 0 \\ X_{i,\xi\xi}(\xi = 1) = 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$\underline{\eta = 0}$ et $\underline{\eta = 1}$</p> $\begin{cases} Y_j(\eta = 0) = 0 \\ Y_{j,\eta\eta}(\eta = 0) = 0 \\ Y_j(\eta = 1) = 0 \\ Y_{j,\eta\eta}(\eta = 1) = 0 \end{cases}$	$X_i(\xi) = \gamma_i \left(\sin \frac{\lambda_i \xi}{a} - \sinh \frac{\lambda_i \xi}{a} \right)$ $Y_j(\eta) = \gamma_j \left(\sin \frac{\lambda_j \eta}{b} - \sinh \frac{\lambda_j \eta}{b} \right)$ $\lambda_i = (i + 0.25)\pi$ $\gamma_i = \frac{\sin(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i)}$

4.5.2. Plaque stratifiée rectangulaire encastrée

Nous considérons une plaque stratifiée encastrée sur quatre cotés, figure (3.3).

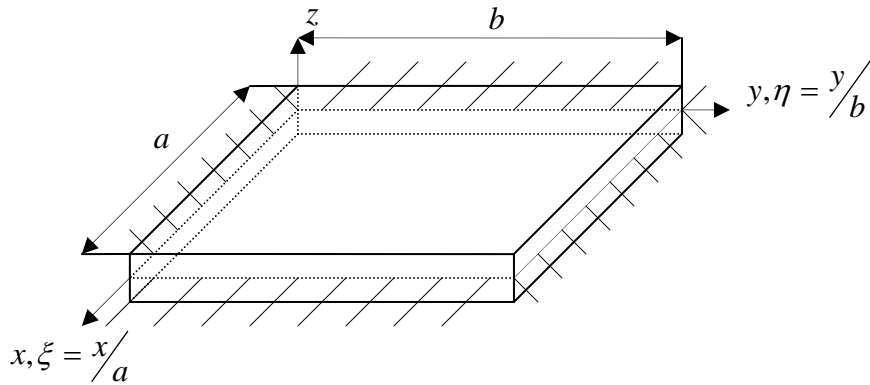


Figure (3.3). Plaque rectangulaire encastrée

➤ Les conditions aux frontières

$$\underline{\xi = 0} \text{ et } \underline{\xi = 1}$$

$$\begin{cases} X_i(\xi = 0) = 0 \\ X_{i,\xi}(\xi = 0) = 0 \\ X_i(\xi = 1) = 0 \\ X_{i,\xi}(\xi = 1) = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\underline{\eta = 0} \text{ et } \underline{\eta = 1}$$

$$\begin{cases} Y_j(\eta = 0) = 0 \\ Y_{j,\eta}(\eta = 0) = 0 \\ Y_j(\eta = 1) = 0 \\ Y_{j,\eta}(\eta = 1) = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

En remplaçant les relations (3.60) et (3.61) dans les fonctions (3.59), et après quelques simplifications, nous trouvons :

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1 \quad (3.62)$$

Les solutions de cette équation, ont été déterminées par D. Yeung [79]. Il en résulte que, pour vérifier les conditions sur les frontières $\xi = 1$ et $\eta = 1$, les coefficients λ_m et λ_n doivent être la solution de l'équation (3.62). D'où :

$$\gamma_i = \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \quad (3.63)$$

Quelques valeurs de λ_i et γ_i sont reportées dans le tableau (3.2).

Tableau (3.2). Valeurs des constantes λ_i et γ_i de la fonction poutre encastree aux deux bords [03]

i	λ_i	γ_i
1	4.7300408	0.98250222
2	7.8532046	1.00077731
3	10.9956078	0.99996645
4	14.1371655	1.00000145
5	17.2787596	0.99999994
6	20.4203522	1.00000000
7	23.5619449	1.00000000
8	26.7035376	1.00000000

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre et en première partie on ce décrit une méthode de résolution numérique pour le calcul des fréquences propres de vibration des plaques minces stratifiées en matériaux composites, et donc directement applicable au modèle des plaques décrit dans la deuxième partie. On a utilisé dans le premier temps la méthode de Rayleigh-Ritz, qui permet de transformer le système d'équations différentielles non linéaires de départ en un système algébrique. Ensuite, on a traité la méthode basée sur le calcul du déterminant permettant de résoudre ce dernier système par développement de l'équation caractéristique en se basant sur l'algorithme de Graeff.

Chapitre IV

MODELISATION NUMERIQUE

IV.1. Introduction

Ce chapitre propose quelques simulations numériques des vibrations libres des plaques minces stratifiées anisotropes. Les principaux exemples traités sont celui d'une plaque mince stratifiée orthotrope encadrée sur ses quatre cotés, en présence de couplage flexion-torsion, étudiée aux chapitres précédents.

Pour les calculs, on utilise la méthode de Rayleigh-Ritz, l'algorithme de Graeff, le logiciel Maple et le logiciel Matlab.

Les tableaux (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8), donnent les principaux résultats concernant les fréquences adimensionnelles, en utilisant les logiciels de calcul numérique, mentionnés ci-dessus, et a pour différents :

- Termes de la série (convergence de la méthode Rayleigh-Ritz).
- Différents rapports largeur- épaisseurs.
- Différentes conditions aux frontières.
- Différents matériaux.
- Orientation des fibres (changement d'angle et stratification).

IV.2. Choix des matériaux composites

Le choix des matériaux est une étape importante, qui doit être soigneusement argumentée sur le plan technique et économique. Les matériaux composites structuraux sont réalisés à partir d'empilement de plis constitués de fibres unidirectionnelles continues, qui apportent les caractéristiques mécaniques, enrobées dans une matrice de résine, qui assure la cohésion et la protection de l'ensemble. Sauf le cas très particulier, les fibres sont associées à une matrice afin de former le matériau composite, la proportion de fibres variant de 40 à 70 % suivant les méthodes de fabrication ou les applications. Dans les applications courantes, ces matrices sont organiques, généralement thermodurcissables et parfois thermoplastiques. Les plus utilisées dans les composites structuraux sont les résines époxydes.

Les propriétés mécaniques des divers matériaux utilisés au cours de ce mémoire sont données par le tableau (4.1), [06] et [31].

Matériaux	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	ν_{21}	G_{12} (GPa)	G_{21} (GPa)	ρ (kg/m ³)
Boron/époxy	224.649	12.753	0.256	0.0146	4.434	2.497	2440
Graphite/époxy	144.800	9.650	0.300	0.020	4.140	3.450	1389
Acier	207		0.270		83		7849

IV.3. Etude de convergence de la méthode Rayleigh-Ritz

3.1. Etude de convergence dans le cas de la théorie classique (Approximation de Rayleigh)

Nous considérons une plaque orthotrope carrée $\left(R = \frac{a}{b} = 1\right)$ encadrée sur ses quatre cotés constituée des plis anisotropes Graphite/époxy et de dimensions :

$$a = b = 30\text{cm} \quad h = 1.5\text{mm}$$

Les valeurs des fréquences propres obtenues par l'approximation de Rayleigh [03] sont comparées dans le tableau (4.2) avec les valeurs obtenues en utilisant une série de quatre termes (cas présent) et une série de huit termes.

Tableau (4.2). Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre cotés Graphite/Epoxy

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}$$

Modes	Approximation de Rayleigh	Approximation par série 4 termes	Approximation par série 8 termes
1	2.2216	2.2173	2.2133
2	2.7954	3.8805	3.8615
3	3.4854	3.4852	3.4366
4	4.2560	4.2466	4.2454

3.1.1. Validation et convergence de la méthode de Rayleigh

Ces résultats montrent que dans le cas des plaques stratifiées orthotropes symétriques où $D_{16} = D_{26} = 0$, l'écart d'erreur entre les valeurs des fréquences propres obtenues par l'approximation de Rayleigh, et les fréquences propres obtenues par un nombre élevé des termes de la fonction d'approximations donnée par la relation (3.39) est faible, ce qui conduit à dire que les approximations de Rayleigh sont suffisamment précises, figure (4.1).

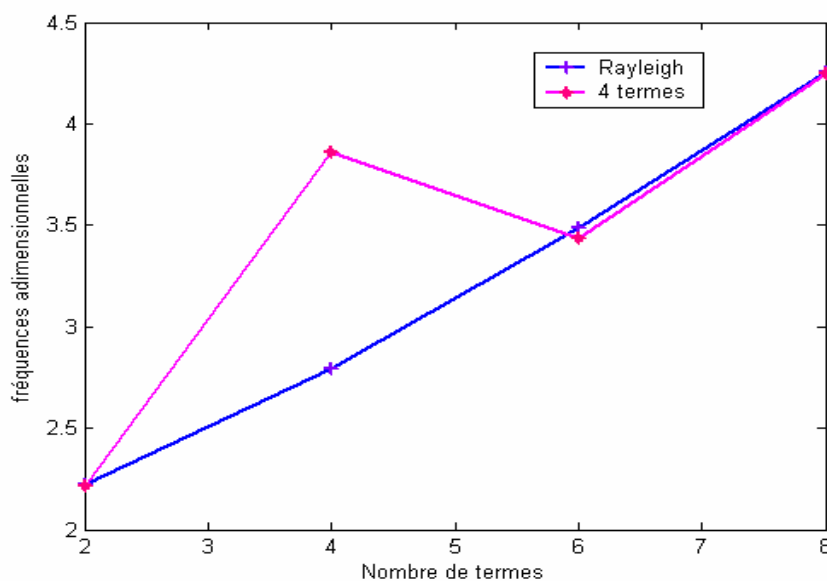


Figure (4.1). Variation des fréquences adimensionnelles en fonction du nombre de termes de la série d'approximation « convergence de la méthode de Rayleigh »

3.2. Etude de convergence dans le cas de couplage flexion-torsion (Approximation de Ritz)

Comme dans le cas de la théorie classique, il est possible d'expliciter l'approximation de Rayleigh (section 3.1), suivant des expressions analogues. Toutefois dans le cas présent, l'approximation de Rayleigh s'écarte notablement à des valeurs obtenues avec un nombre élevé de termes (approximation de Ritz). En effet, dans le cas où le terme de couplage flexion-torsion est présent, la déformée à un terme (approximation de Rayleigh) ne décrit pas assez correctement la déformée réelle de la plaque. La validité, l'acceptation des résultats et l'applicabilité de la méthode actuelle sont discutées en comparant les résultats numériques obtenus dans ce présent mémoire à ceux fournis par la littératures.

3.2.1. Validation et convergence de la méthode de Ritz

L'objectif principal du calcul de la convergence de la méthode de Ritz est d'obtenir une information sur le nombre de termes de la fonction d'approximation pour que les solutions approchées convergent vers les solutions exactes en utilisant :

- une plaque à une seule couche à stratification [0^0]
- une plaque à cinq couches à stratification [$0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$]

En employant les constantes technologiques suivantes :

$$\rho = 1389 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad E_1 = 144.80 \text{ GPa}, \quad E_2 = 9.650 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.30, \quad G_{12} = 4.14 \text{ GPa}$$

Tableau (4.3). Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encastree sur ses quatre cotés Graphite/Epoxy

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}$$

Nombre de termes	1	2	3	4	5	6
6x6	1.4567	3.1028	4.1356	5.8672	6.5366	7.4321
8x8	1.4514	3.1003	4.1032	5.8639	6.5357	7.4004
10x10	1.4506	3.0551	4.0671	5.8406	6.5239	7.3798
12x12	1.4503	3.0494	3.9953	5.8401	6.5234	7.3775
14x14	1.4503	3.0494	3.9953	5.8401	6.5234	7.3774
16x16	1.4503	3.0494	3.9953	5.8401	6.5234	7.3774
18x18	1.4503	3.0494	3.9953	5.8401	6.5234	7.3774

Les résultats des six premières fréquences sont donnés sous forme de paramètres adimensionnels $\omega_{ij} = \lambda_{ij} a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_1 h^2}}$ tableaux (4.3) et (4.4), en utilisant les fonctions de déplacement de la relation (3.39) avec le même degré de liberté en x et y .

La convergence des fréquences pour le cas de la plaque orthotrope à une seule couche a stratification $[0^0]$ est montrée dans le tableau (4.3). On constate que la convergence est très rapide et les solutions stabilisées à quatre ou cinq chiffres significatifs et se produisent à partir du terme 12x12, figure (4.2).

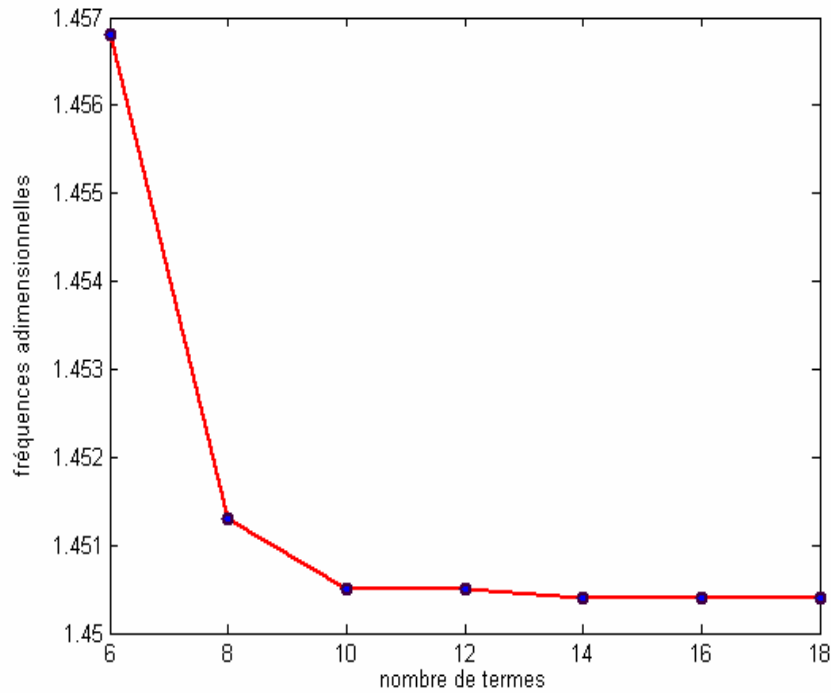


Figure (4.2). Variation des fréquences adimensionnelles en fonction du nombre de termes de la série d'approximation « convergence de la méthode de Ritz »

La convergence des fréquences adimensionnelles pour le cas de la plaque orthotrope multicouches à stratification $[0^0/90^0/0^0/90^0/0^0]$ est montrée dans le tableau (4.4) elle est légèrement plus lente figure (4.3), qui signifie l'existence probable d'une discontinuité des déplacements entre les couches.

Tableau (4.4). Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}$$

Nombre de termes	1	2	3	4	5	6
6x6	1.4575	4.7338	5.2445	5.4668	5.8501	7.9924
8x8	1.4521	4.7306	5.2407	5.4065	5.8334	7.9756
10x10	1.4510	4.7275	5.2398	5.4057	5.8307	7.9737
12x12	1.4508	4.7271	5.2398	5.4049	5.8302	7.9732
14x14	1.4508	4.7270	5.2398	5.4049	5.8302	7.9728
16x16	1.4508	4.7270	5.2398	5.4049	5.8302	7.9728
18x18	1.4508	4.7270	5.2398	5.4049	5.8302	7.9728

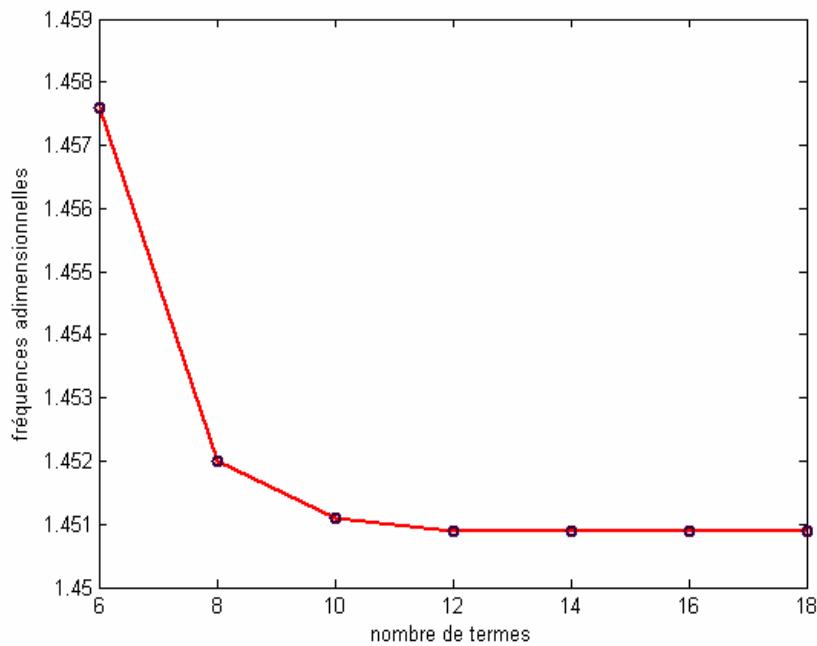


Figure (4.3). Variation des fréquences adimensionnelles en fonction du nombre de termes de la série d'approximation « convergence de la méthode de Ritz »

IV.4. Etude et analyse de l'influence de divers paramètres dynamique et physique sur le comportement vibratoire des plaques

Dans cette partie, on présente les résultats de simulation du comportement vibratoire pour une plaque stratifiée orthotrope (Graphite/époxy) encadrée sur ses quatre cotés $[0^0/90^0/0^0/90^0/0^0]$. Tandis que tous les calculs sont effectués pour une limitation à 14×14 termes de la série d'approximation, figures (4.3) et (4.4). Où les résultats sont comparés avec ceux de J. M. Lee, J. H. Chung et T. Y. Chung [42]. La plaque étudiée ici est celle sur laquelle nous avons mené l'essai de convergence, présentée au paragraphe précédent. Il s'agit d'une plaque mince en Graphite/époxy de constantes technologiques ($\rho = 1389$, $E_1 = 144.80$, $\nu_{12} = 0.30$ $G_{12} = 4.14$) de longueur 30Cm, de largeur 30Cm et d'épaisseur 1.5mm figure (3.2) du chapitre précédent. On simule avec la méthode de Ritz en utilisant les fonctions poutre de la section (2.7), chapitre III. La structure est soumise à une excitation libre selon l'axe z en flexion. Pour diminuer les temps de calcul, on utilise la symétrie de la plaque.

Les résultats obtenus en utilisant la méthode de Ritz ont été comparés à ceux obtenus par la même méthode [42]. Pour une plaque avec des conditions aux frontières variables, rapport de largeur-épaisseur et propriétés des matériaux, les fréquences propres calculées dans le cas d'inclure ou d'exclure le couplage en flexion-torsion sont énumérés dans les tableaux (4.5) et (4.6).

Tableau (4.5). Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encadrée sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy

Cas : sans effet de couplage flexion-torsion

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_1 h^2}}$$

Modes	Présent	R. Hearmon [26]
1(11)	2.2133	0.6324
2(12)	3.8615	1.3239
3(13)	3.4366	2.1667
4(14)	4.2454	3.3888

Tableau (4.6). Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encastree sur ses quatre côtés Graphite/Epoxy
Cas : avec effet de couplage flexion-torsion

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} a^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$$

Modes	Présent	J. M. Lee, J. H. Chung et T. Y. Chung [42]	
		Fonction poutre	Fonction polynomiale
1 (11)	1.4508	2.2216	2.2226
2 (12)	4.7270	3.3823	3.3923
3 (13)	5.2398	3.9297	3.9416
4 (14)	5.4049	4.7016	4.7202

La divergence des résultats trouvés dans le présent travail et ceux rapportés par J. M. Lee, J. H. Chung et T. Y. Chung [42], est notée. Cependant elles montrent la différence dans les caractéristiques de la plaque et l'effet de cisaillement transverse.

4.1. Etude de l'influence de couplage flexion-torsion sur les propriétés dynamiques de la plaque (comportement vibratoire)

Pour avoir une meilleure vision au sujet de l'effet d'inclure ou d'exclure le couplage flexion-torsion sur les propriétés dynamiques des plaques en matériaux composites avec différents rapports de largeur-épaisseur, on donne les résultats illustrés dans les tableaux (4.7) et (4.8) ci-dessous.

Tableau (4.7). Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur pour une plaque carrée orthotrope encastree sur ses quatre cotes Graphite/Epoxy

Cas : sans effet de couplage flexion-torsion

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} a^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$$

Rapport (a/h)	Présent	R. Hearmon [26]
10	1.3049	0.6324
20	1.3438	0.6324
30	1.3566	0.6324
40	1.3705	0.6324
50	1.3914	0.6324

Tableau (4.8). Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur pour une plaque carrée orthotrope encastree sur ses quatre cotes Graphite/Epoxy

Cas : avec effet de couplage flexion-torsion

$$\omega_{ij} = \lambda_{ij} a^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$$

Rapport (a/h)	Fréquences adimensionnelles
10	0.7345
20	1.0558
30	1.3027
40	1.3344
50	1.3912

Les résultats précédents, tableaux (4.4) et (4.5), mettent clairement en évidence l'influence de couplage flexion - torsion sur les fréquences adimensionnelles de la plaque. Cet effet est particulièrement important dont le rapport de la largeur sur l'épaisseur ; il est inférieur a 30, figure (4.4). Il résulte que la flexion et la torsion induites par les termes D_{16} et D_{26} dans l'équation (4.2) tendent à produire un décollement partiel de la plaque (surtout pour les plaques à bord simple). Cet effet est toutefois négligeable compte-tenu du rapport de la largeur sur l'épaisseur (a/h) qui suffisamment élevé (supérieur de 50).

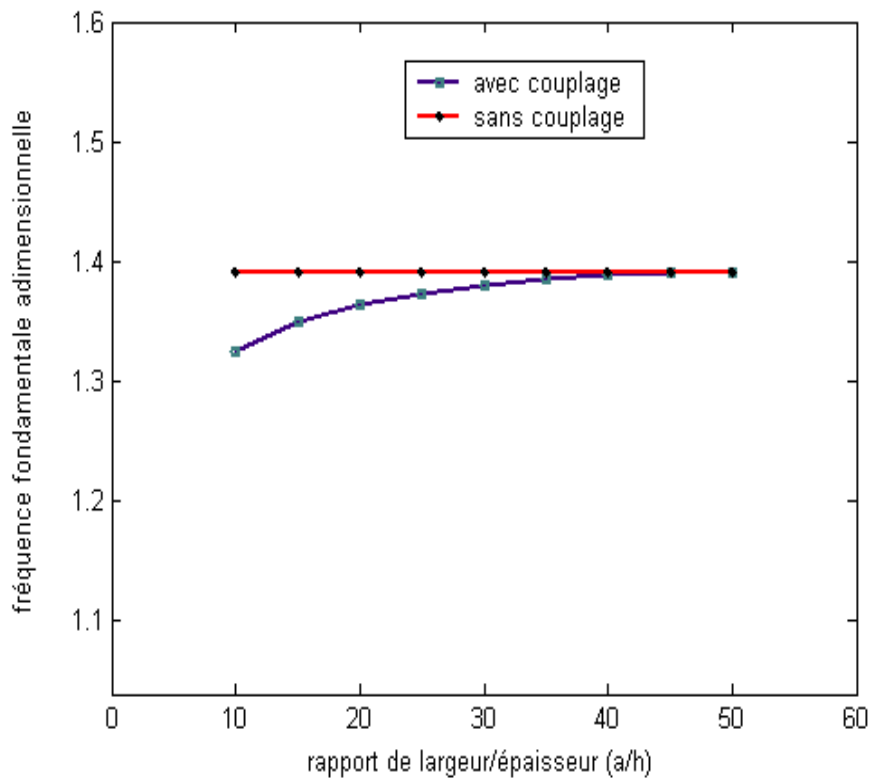


Figure (4.4). Influence du couplage flexion-torsion sur le rapport largeur-épaisseur

4.2. Etude de l'influence de la géométrie de la plaque et les conditions aux frontières sur le comportement vibratoire

4.2.1. Influence des conditions aux frontières

L'analyse des plaques à différents états aux frontières a été effectuée pour les cas suivants :

- ✓ plaque encastrée sur ses quatre bords.
- ✓ plaque encastrée-simple (fixée à partir de deux bords adjacents et simple dans les deux autres bords).
- ✓ Plaque simple sur ses quatre bords.

Les résultats obtenus présentés dans la figure (4.5), montrent que les fréquences fondamentales sont élevées pour les conditions de frontières fixes, moins élevés pour le cas fixe-simple et basses dans le cas où tous les bords sont simplement soutenus. Et ceci est dû à la rigidité de flexion qui est plus grande dans les plaques fixes (encastrée), et faible pour des

plaques à bords simples. Est plus particulièrement et dans les trois cas cité précédemment, les fréquences fondamentales changées par des accroissements plus élevés à des rapports largeur-épaisseur inférieurs à 25 et changés par des accroissements bas pour des rapports supérieurs à 25.

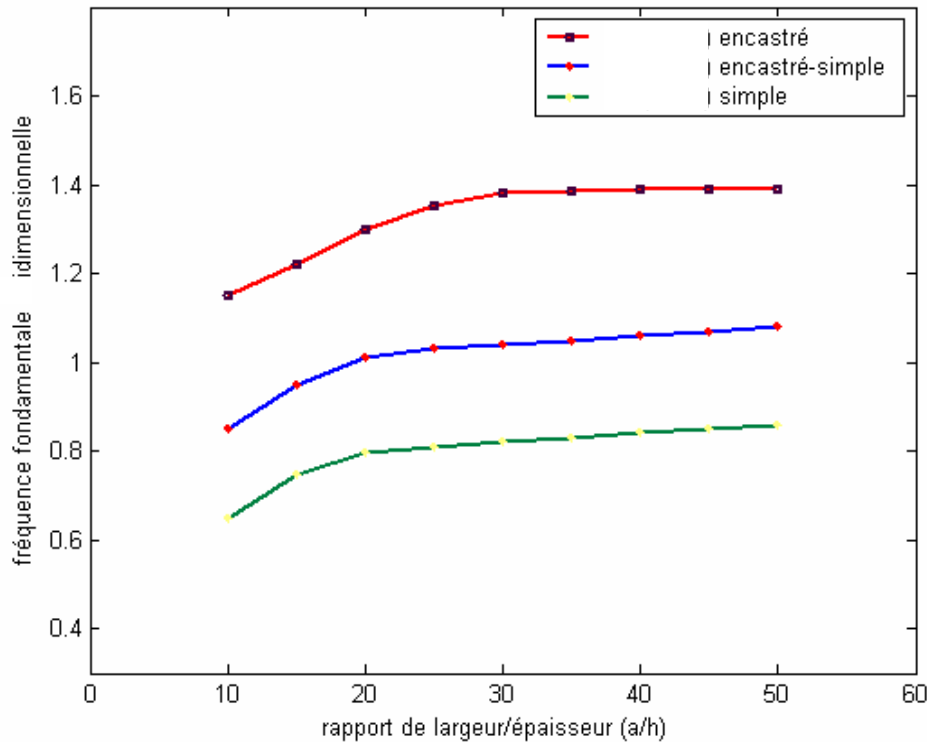


Figure (4.5). Influence des conditions aux frontières sur la fréquence fondamentale

4.2.2. Influence de la géométrie de la plaque

Pour étudier l'effet de la géométrie des plaques en matériaux composites sur le comportement vibratoire, nous ferons un allongement dans les dimensions en changeant le rapport longueur-largeur (a/b) figure (4.6). On voit que lorsque le rapport d'allongement est grand, la fréquence fondamentale augmente aussi; ainsi la rigidité est importante parce que le rapport (a/h) est diminué.

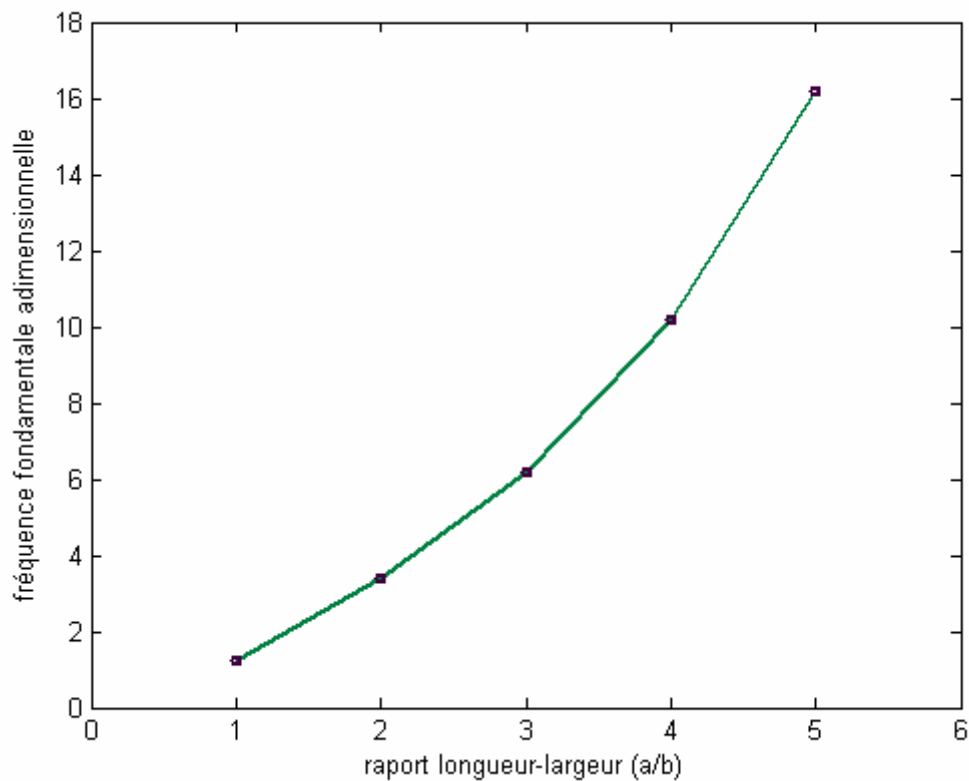


Figure (4.6). Influence de la géométrie de la plaque sur la fréquence fondamentale

4.3. Etude de l'influence des propriétés de matière composite sur le comportement vibratoire de la plaque

La figure (4.7), représente l'effet du rapport longueur-épaisseur sur la fréquence fondamentale pour une plaque faite de graphite/époxy, Boron/époxy et acier (matériau isotrope). On distingue un effet considérable sur les fréquences fondamentales des plaques réalisées en matière composite et un effet secondaire pour des rapports élevés. D'autre part, la courbe correspondante au matériau isotrope (acier) est restée presque constante c'est-à-dire indépendante du rapport longueur-épaisseur. Ceci est dû à la différence dans les propriétés élastiques entre le filament des fibres et le matériau de la matrice.

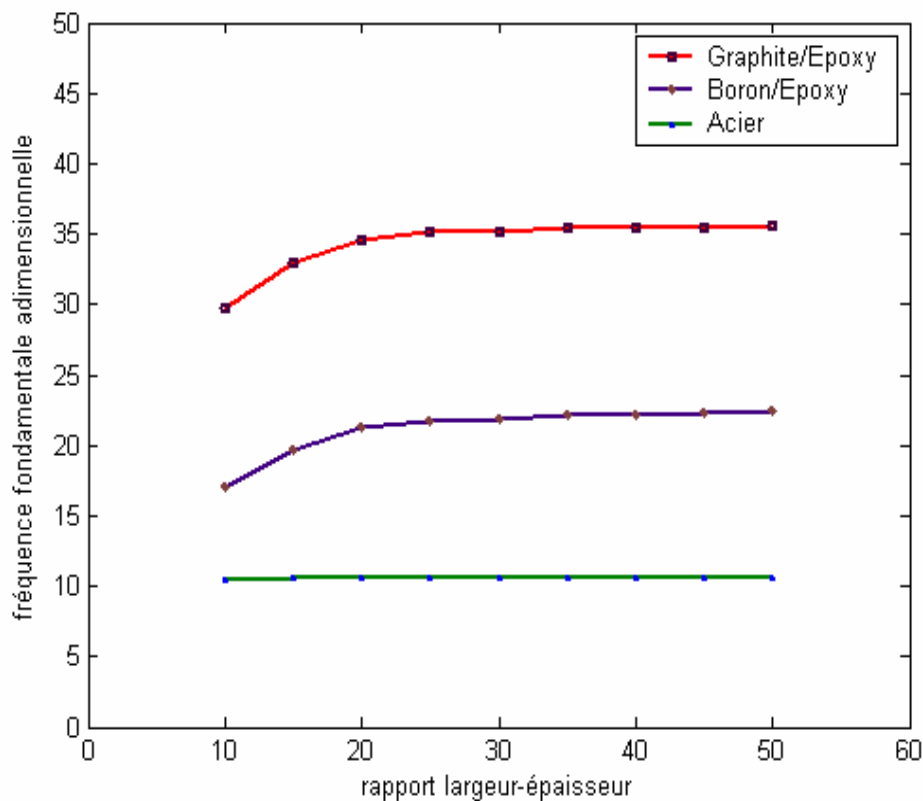


Figure (4.7). Influence des propriétés de la matière sur la fréquence fondamentale

4.4. Etude de l'influence de l'angle de stratification des fibres sur le comportement vibratoire de la plaque

Pour expliquer l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences fondamentales, nous étudions les deux cas suivants :

- ✓ Plaque carrée encastree sur ses quatre bords en Graphite/époxy
- ✓ Plaque rectangulaire encastree sur ses quatre bords en Graphite/époxy

Pour la plaque carrée, on constate une symétrie de la courbe pour un angle de 45° , figure (4.8), et un point maximal qui représente la fréquence fondamentale maximale, ainsi que les deux composantes maximales qui sont égales dans chaque direction du plan neutre de la plaque.

Pour la plaque rectangulaire, on découvre qu'il n'y a pas de symétrie figure (4.9), et la fréquence fondamentale maximale est située dans la plage des angles variant de 60° à 80° , parce que les dimensions ne sont pas égales et les composantes résultantes de la fibre dans la direction courte et longue sont différentes. La composante dans la direction longue était plus petite à celle dans la direction courte. D'ailleurs, il est très clair que la fréquence fondamentale est augmentée ou diminuée proportionnellement en changeant l'ordre de stratification et le nombre des plis (couches).

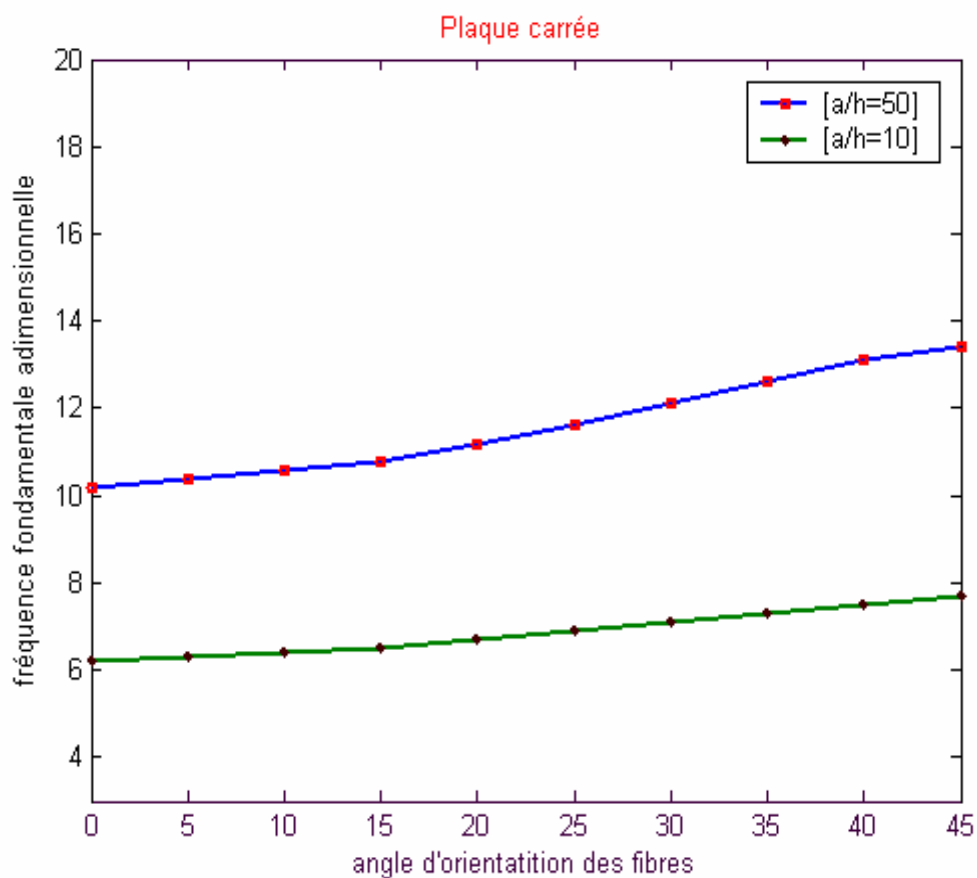


Figure (4.8). Influence de l'angle d'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale

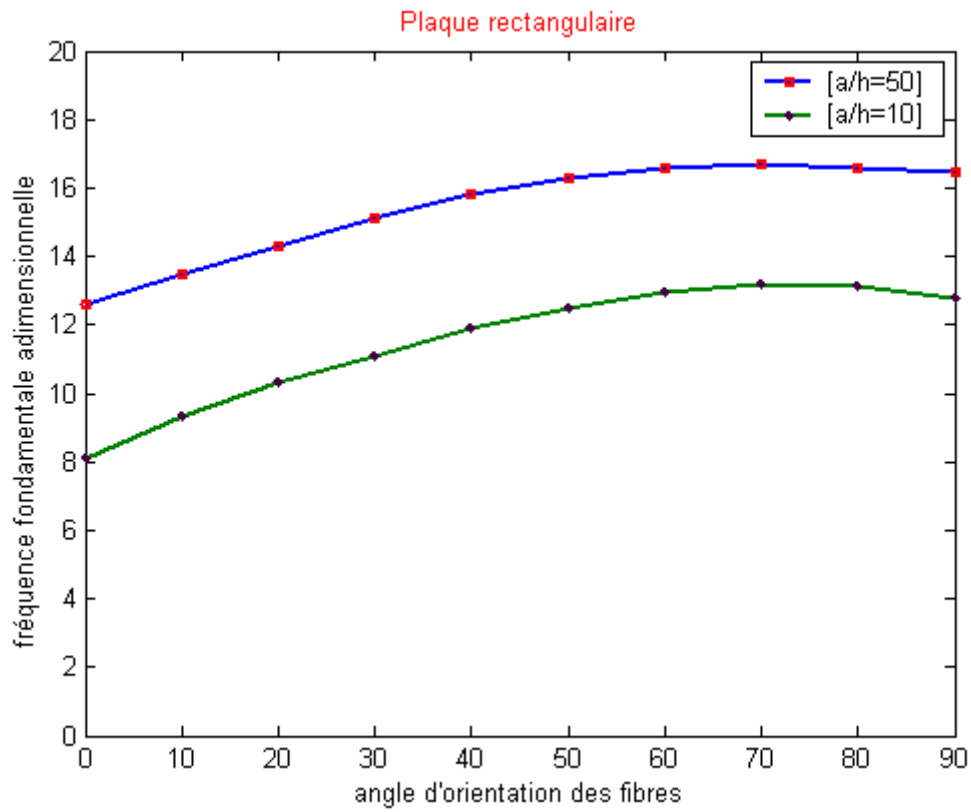


Figure (4.9). Influence de l'angle d'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale

IV.5. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude des plaques stratifiées anisotropes, en simulant leur comportement vibratoire par l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Pour ce qui est de l'outil numérique, il s'est avéré robuste pour la détermination des fréquences propres, assez simple à piloter, mais il est limité pour certaines structures simples.

En ce qui concerne les résultats proprement dits, seul le cas d'une plaque carrée encadrée sur ses quatre bords a été détaillé. On simule :

- La convergence de la méthode utilisée (stabilité).
- L'effet de couplage flexion-torsion.
- L'effet de la géométrie de la plaque et des conditions aux frontières.
- L'effet des propriétés de la matière composite.
- L'effet de l'angle d'orientation des fibres et de l'ordre de stratification.

Pour la plaque encadrée, les résultats obtenus de simulation constituent une base intéressante pour des comparaisons avec les travaux effectués dans ce domaine, malgré on constate une divergence entre les présent résultats et les résultats obtenus par J. M. Lee, J. H. Chung et T. Y. Chung [42].

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire constitue une contribution à l'étude des vibrations libres des plaques minces symétriquement stratifiées en matériaux composites possédant un comportement mécanique anisotrope élastique par deux approches analytique et numérique. Dans ce cadre, un outil destiné au calcul des fréquences propres des plaques minces a été utilisé. Dans un premier temps, le problème d'élasticité en petits déplacements discrétisés par la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'écriture d'un système d'équations algébriques linéaires dépendant des paramètres adimensionnels. Par application de l'algorithme de Graeff, on effectue la construction des solutions approchées (fréquences propres). Pour la méthode de Rayleigh-Ritz qui a été développée dans cette étude, elle reste valable quelque soit le nombre de termes retenus dans la série d'approximation, d'où une souplesse de manipulation appréciable surtout dans le cas des vibrations libres. On dispose donc d'un outil numérique efficace, assez simple à utiliser et qui permet de traiter une large classe des structures simples (poutres, plaques et coques).

Les résultats obtenus ont été comparés avec succès à des exemples traités par les auteurs [42], on prend en compte et en point de vue technique, l'absence de prise en compte de cisaillement transverse ce qui constitue également un effet important sur le comportement vibratoire de la plaque, surtout en vue des comparaisons. Ces limites sont cependant assez faciles à résoudre ; il suffit de choisir l'ordre des fonctions de cisaillement et d'implémenter dans les calculs, en introduisant notamment les termes de cisaillement transverse dans les équations énergétiques.

Les diverses simulations présentées dans le chapitre IV montrent l'étendue des possibilités offertes par la méthode proposée. Appuyé sur ces dernières, les conclusions suivantes peuvent être tirées:

- ❖ le couplage flexion-torsion a un effet non négligeable dans l'analyse dynamique des plaques stratifiées en matériaux composites, son effet induit un changement capital dans les fréquences normales.
- ❖ L'orientation des fibres a un grand effet sur le comportement vibratoire de la plaque, et aussi l'ordre de stratification.

- ❖ La géométrie de la plaque et les conditions aux frontières ont un effet important surtout dans le cas des plaques à bords encastés, ainsi que les matières constituant les couches.

En particulier et en se basant sur la littérature, Le cisaillement transverse a un effet considérable sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées notamment pour des plaques encastées.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [01] S. ABRATE, Vibration of point-supported rectangular composite plates.
Composites science technology 53 (1995) 325-332.
- [02] M. Allanne, P. Berthier et J. Der Hagopian, Mécanique des vibrations linéaires. 2^{ème} édition Masson 1986.
- [03] J. M. Berthelot, Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des structures ». 3^{ème} édition Technique documentation 1999.
- [04] R. Benamar, M.M.K. Bennouna, et R.G. White. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures-part 1: simply supported and clamped-clamped beams.
Journal of Sound and Vibration 149(2) (1991) 179–195.
- [05] J.L. Batoz et G. Dhatt. Modélisations des structures par éléments finis - volume 2 : poutres et plaques. Hermès, 1990.
- [06] Y. K. Cheung, D. Zhou, Vibration analysis of symmetrically laminated rectangular plates with intermediate line supports.
Computers and Structures 79 (2001) 33-41
- [07] Chih-Ping Wu, Chia-Ying Lee, Differential quadrature solution for the free vibration analysis of laminated conical shells with variable stiffness.
Int. J. of Mech. Scie. 43 (2001) 1853–1869.
- [08] J. Chen and D. J. Dawe, Linear transient analysis of rectangular laminated plates by a finite strip-method superposition method.
Composite structures 35 (1996) 213-228.
- [09] C. C. CHEN, C. W. LIM, S. KITIPORNCHAI and K. M. LIEW, Vibration of symmetrically laminated thick super elliptical plates.
Journal of Sound and Vibration 220(4) (1999) 659-682.
- [10] J. Charles CRAVEUR, Modélisation des structures, calcul par éléments finis. Deuxième édition, Masson, Paris 1997.
- [11] D. J. DAWE AND DONGYAO TAN, Finite strip buckling and free vibration analysis of stepped rectangular composite laminated plates.
Int. J. Numer. Meth. Engng. 46 (1999) 1313-1334
- [12] DONGYAO TAN and D. J. DAWE, General strip analysis for buckling and vibration of prismatic composite laminated plate and shell structures.
Composite part B29B (1998) 377-389.
- [13] Dong, and In lee, Vibration behaviours of thermally postbuckled anisotropic plates using first-order shear deformable plate theory.

Computers and structures 63(3) (1997) 371-378.

[14] Y. M. Desai, G. S. Ramtekkar and A. H. Shah, Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model.
Composite Structures 59 (2003) 237–249

[15] J.P. Den Hartog, *Vibrations mécaniques*. Dunod, 1960.

[16] Daniel Gay, *Matériaux composites*, 4^{ième} édition, Paris, Hermes 1997.

[17] P. S. FREDERIKSEN, Single-layer plate theories applied to the flexural vibration of completely free thick laminates.
Journal of Sound and Vibration 186 (5) (1995) 743-759.

[18] D.G. Fertis. *Mechanical and structural vibrations*, Wiley interscience, 1995.

[19] M. GANAPATHI, B. P. PATEL AND M. TOURATIER, Influence of amplitude of vibrations on loss factors of laminated composite beams and plates.
Journal of Sound and Vibration 219(4) (1999) 730-738.

[20] D. J. GORMAN and W. DING, The superposition-Galerkin method for free vibration analysis of rectangular plates.
Journal of Sound and Vibration 194 (2) (1996) 176-187.

[21] D. J. Goraman and Wei Ding, Accurate free vibration analysis of laminated symmetric cross-ply rectangular plates by the superposition-Galerkin method.
Composites structures 31 (1995) 129-136.

[22] M. Géradin et D. Rixen, *Théorie des vibrations – Application à la dynamique des structures*. Masson 1993.

[23] Y. Hou, G. W. Wei, and Y. Xiang, DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates.
Int. J. Numer. Meth. Engng 62 (2005) 262–288.

[24] B. Harras, R. Benamar, R.G. White, Investigation of non-linear free vibrations of fully clamped symmetrically laminated carbon-fibre-reinforced PEEK (AS4/APC2) rectangular composite panels.
Composites Science and Technology 62 (2002) 719–727.

[25] Ronald S. Harichandran and Mohamad K. Naja, Random vibration of laminated composite plates with material of Non-Linearity.
Int J. Non-linear Mechanics, Vol32-4 (1997) 707-720.

[26] R. Hearmon The frequency of flexural vibrations of rectangular orthotropic plates with clamped and simply supported edges.
Journal of applied mechanics 16 (1995) 537-542.

[27] Jordan Z. Zhang, T. Y. Ng, and K. M. Liew, Three-dimensional theory of elasticity for free vibration analysis of composite laminates via layerwise differential quadrature modelling.

Int. J. Numer. Meth. Engng 57 (2003) 1819–1844

[28] Jacquess Quiblier, Propagation des ondes en milieu géophysique et géotechnique. Edition TECHNIP 1997.

[29] Jean-Paul Bailon et Jean-Marie Dorlot, Des matériaux. Troisième édition, Press Internationales-Polytechnique, Québec 2001.

[30] José Ouin, Mécanique des structures. Edition Casteilla, Paris 1997.

[31] Karim S. Numayr, Rami H. Haddad, Madhar A. Haddad, Free vibration of composite plates using the finite difference method.
Thin-Walled Structures 42 (2004) 399–414.

[32] S. J. Kim and J. Y. Song, Virtual reality sound generated from vibrating structures.
Journal of Sound and Vibration 258(2) (2002) 309–325.

[33] Kyo-Nam Koo, Vibration and damping analysis of composite plates using finite elements with layerwise in-plane displacements.
Computers and Structures 80 (2002) 1393–1398.

[34] H. R. H. Kabir, A. M. Al-khaleefi, Reaz A. Chaudhuri, Free vibration analysis of thin arbitrary laminated anisotropic plates using boundary-continuous displacement Fourier approach.
Composite structures 53 (2001) 469-476.

[35] M. Kolli and K. Chandrashekhara, Non-linear static and dynamic analysis of stiffened laminated plates.
Int J. Non-linear Mechanics, Vol32-1 (1997) 89-101.

[36] G. KRIZHVSKY and Y. STAVSKY, Refined theory for vibrations and buckling of laminated isotropic plates.
J. Int. Mech. Scie. 38(5) (1996) 539-555.

[37] A. A. KHDEIR, Forced vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates with various boundary conditions.
Journal of Sound and Vibration 188 (2) (1995) 257-267.

[38] T. Y. KAM and F. M. LAI, Maximum stiffness design of laminated composite plates via a constrained global optimization approach.
Composite structures 32 (1995) 391-398.

[39] J. KONG and Y. K. CHEUNG, Vibration of shear-deformable plates with intermediate line supports: a finite layer approach.
Journal of Sound and Vibration 184(4) (1995) 639-649.

[40] S. J. Leea, J. N. Reddyb, and F. Rostam-Abadic, Transient analysis of laminated composite plates with embedded smart-material layers.
Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004) 463-483.

- [41] C. Lalanne. Vibrations sinusoïdales. Hermès, 1999.
- [42] J. M. LEE J. H. CHUNG AND T. Y. CHUNG, Free vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plates.
Journal of Sound and Vibration 199(01) (1997) 71-85
- [43] S. G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Science publishers 1944.
- [44] R. Lewandowski, Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beam.
Journal of sound and vibration 114(01) (1987) 91-101.
- [45] A. V. Marchuk and V. G. Piskunov, Solution of dynamic deformation problems for prestressed laminated plate based on the three-dimensional theory of elasticity. *Mechanics of composite materials 36 (2000) 579-592*
- [46] H. Matsunaga, Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory.
Composite Structures 48 (2000) 231-244.
- [47] MAKARAND G. JOSHI and SHERRILL B. BIGGERS, Thickness optimization for maximum buckling loads in composite laminated plates.
Composites part B27B (1996) 105-114.
- [48] Mang-Kao Yeh and Yui-long You, Vibration of laminated plates with adhesive joints.
Composites engineering Vol5-8 (1995) 983-993
- [49] Maurice Reyne, Technologie des composites. Deuxième édition, Hermès, Paris 1995.
- [50] A.H. Nayfeh et D.T. Mook. Nonlinear Oscillations. Wiley interscience, New York, 1979.
- [51] L. Meirovitch. Analytical Methods in Vibrations. The Macmillan Company, 1967.
- [52] Reaz A. Chaudhuri, K. Balaraman, Vincent X. Kunukkasseril, A combined theoretical and experimental investigation on free vibration of thin symmetrically laminated anisotropic plates.
Composite Structures 67 (2005) 85-97
- [53] A. R. Setoodeh, G. Karami, Static, free vibration and buckling analysis of anisotropic thick laminated composite plates on distributed and point elastic supports using a 3-D layer-wise FEM.
Engineering Structures 26 (2004) 211-220
- [54] Sheng Li, Deyou Zhao, Numerical simulation of active control of structural vibration and acoustic radiation of a fluid-loaded laminated plate.
Journal of Sound and Vibration 272 (2004) 109-124
- [55] A. R. Setoodeh and G. Karami, A solution for the vibration and buckling of composite laminates with elastically restrained edges.

Composite Structures 60 (2003) 245–253

[56] W. Szemplinska-Stupnicka. The behavior of nonlinear vibrating systems –Volume I- Fundamental concepts and methods: application to single-degree-of-freedom systems. Kluwer Academic Publishers, 1990 a.

[57] W. Szemplinska-Stupnicka. The behavior of nonlinear vibrating systems –Volume II- Advanced concepts and application to multi-degree-of-freedom-systems. Kluwer Academic Publishers, 1990b.

[58] J.S. Strutt (Lord Rayleigh). Theory of sound. Dover publications, 1945.

[59] Taner Timarci, Metin Aydogdu, Buckling of symmetric cross-ply square plates with various boundary conditions.

Composite Structures 68 (2005) 381–389.

[60] O. Thomas. Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Octobre 2001.

[61] J. P. TABLOT and J. WOODHOUSE, The vibration damping of laminated plates. *Composites part A28A* (1997) 1007-1012.

[62] S. Timoshenko, Théorie des vibrations, Librairie Polytechnique Ch. Béranger 1954.

[63] S. Timoshenko et Young, Dynamique supérieure, Librairie Polytechnique Béranger 1950.

[64] Thomas Gmur, Dynamique des structures, analyse modale numérique. Romandes Lausanne 1997.

[65] D. Vuksanovic, Linear analysis of laminated composite plates using single layer higher-order discrete models.

Composite Structures 48 (2000) 205-211.

[66] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, V.N. Pilipchuk, et A.A. Zevin. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. John Wiley and Sons, inc., Wiley Series in Nonlinear Science, 1996.

[67] S. Wang. Y. Zhang, Vibration analysis of rectangular composite laminated plates using Layerwise B-spline finite strip method.

Composite Structures 68 (2005) 349–358.

[68] S Wang and D. J. Dawe Spline finite strip analyses of the buckling and vibration of composite prismatic plates structures.

Int. J. Mech sciences, Vol39-10 (1997) 1161-1180.

[69] J. M. Whitney, Structural analysis of laminated anisotropic plates.

Technomic publishing company (1987).

- [70] Yoshiki Ohta, Yoshihiro Narita, and Kenta Nagasaki. On the damping analysis of FRP laminated composite plates.
Composite Structures 57 (2002) 169–175.
- [71] D. Young, Vibration of rectangular plates by Ritz method.
Journal of applied mechanics 17 (1950) 448-453.
- [72] Yvon Chevalier, Comportement élastique et viscoélastique des composites.
Techniques d'ingénieur, Traité plastiques et composites A7 750
- [73] Yvon Chevalier, Essais dynamiques sur composites.
Techniques d'ingénieur, traité plastiques et composites AM5 400.
- [74] Yvon Chevalier, Comportement des structures stratifiées planes en matériaux composites.
Communication, 1^{ière} Workshop-L.M.D.V, Université de Boumerdès, Mars 2004.
- [75] Pierre Odru, Calcul et conception des structures composites.
Techniques d'ingénieur, Traité plastiques et composites A7 792.
- [76] Jadues Plusquellec, Vibration.
Techniques d'ingénieur, Traité sciences fondamentales A410.
- [77] Jan Courbon, Plaques minces élastiques.
Techniques d'ingénieur, Traité sciences fondamentales A310.
- [78] Wu, Vinson. Nonlinear oscillations of laminated especially orthotropic plates with clamped and simply supported edges.
Journal of Acoustical Society of America 1971, 49(5):1561-1568
- [79] Catalogue général, serveur internet <http://ppur.epfl.ch>.
- [80] divers documentations internet (cours.pdf)

ANNEXES

Annexe A.

La fonction caractéristique des vibrations libres flexionnelles d'une poutre, vérifiant les conditions d'encastement aux deux extrémités d'une poutre s'écrit :

$$X(\xi) = \cos \lambda_i \xi - \cosh \lambda_i \xi - \gamma_i (\sin \lambda_i \xi - \sinh \lambda_i \xi) \quad (\text{A.1})$$

Où ξ est la variable réduite :

$$\xi = x/a$$

Et a la longueur de la poutre.

Les valeurs de λ_i et γ_i pour i variant de 1 à 8 sont portées dans le tableau (III.2)

Tableau B.1. Valeurs des intégrales $T_{mi}^{22} = \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} \frac{d^2 X_i}{d\xi^2} d\xi$

$i = m$	T_{mi}^{22}
1	500.564
2	3803.537
3	14617.630
4	39943.799
5	89135.407
6	173881.316
7	308208.452
8	508481.543

$$T_{mi}^{22} = \begin{cases} \lambda_i^4 & \text{si } i = m \\ 0 & \text{si } i \neq m \end{cases}$$

Tableau B.2. Valeurs des intégrales $T_{mi}^{02} = \int_0^1 X_m \frac{d^2 X_i}{d\xi^2} d\xi$

m/i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-12.3026	0	9.73079	0	7.61544	0	6.10804	0
2	0	-46.0501	0	17.1289	0	15.1946	0	13.1366
3	9.73079	0	-98.9048	0	24.3499	0	22.9842	0.00011
4	0	17.1289	0	-171.586	0	31.2764	0	30.5784
5	7.61544	0	24.3490	0	-263.998	0	38.0302	0.00019
6	0	15.1946	0	31.2764	0	-376.150	0	44.6689
7	6.10804	0	22.9842	0	38.0302	0	-508.041	0.00025
8	0	13.1366	0	30.5784	0.00019	44.6689	0	-695.672

$$T_{mi}^{20} = T_{im}^{02} \quad T_{mi}^{11} = \int_0^1 \frac{dX_m}{d\xi} \frac{dX_i}{d\xi} d\xi = -T_{mi}^{02}$$

Tableau B.1. Valeurs des intégrales $T_m^0 = \int_0^1 X_m d\xi$

$m = i$	T_m^0
1	-0.8308615
2	0
3	-0.3637694
4	0
5	-0.2314981
6	0
7	-0.169753
8	-0.0000011

Tableau B.3. Valeurs des intégrales $T_{mi}^{01} = \int_0^1 X_m \frac{dX_i}{d\xi} d\xi$

m/i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-3.34201	0	-0.90692	0	-0.43047	0	-0.25251
2	3.342016	0	-5.51610	0	-1.72622	0	-899817	0
3	0	5.516101	0	-7.63279	0	-2.53243	0	-1.39655
4	0.906926	0	7.632796	0	-9.70395	0	-3.30882	0
5	0	1.726226	0	9.703955	0	-11.7523	0	-4.06143
6	0.430472	0	2.532434	0	11.75229	0	-13.7872	0
7	0	0.899817	0	3.308823	0	13.78716	0	-15.8135
8	0.250151	0	1.396553	0	4.061433	0	15.81346	0

$$T_{mi}^{10} = T_{im}^{01}$$

Tableau B.4. Valeurs des intégrales $T_{mi}^{12} = \int_0^1 \frac{dX_m}{d\xi} \frac{d^2 X_i}{d^2 \xi} d\xi$

m/i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-122.065	0	-559.584	0	-40.8514	0	-31.1808
2	122.0650	0	-476.673	0	-234.420	0	-166.628	0
3	0	476.6737	0	-1186.45	0	-568.599	0	-410.048
4	559.5845	0	1186.455	0	-2370.41	0	-1102.17	0
5	0	234.4200	0	2370.414	0	-4146.66	0	-1873.97
6	40.8514	0	568.5990	0	4146.662	0	-6633.60	0
7	0	166.6288	0	1102.168	0	6633.601	0	-9949.64
8	31.1808	0	410.0485	0	1873.970	0	9949.642	0

$$T_{mi}^{21} = T_{im}^{12}$$

Annexe B.

B.1. Matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimée dans les axes d'orthotropie

Si les raisonnements élémentaires mentionnés sont étendus aux différentes sollicitations du matériau, la matrice de souplesse elle vient :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}_{Rortho} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -v_{12}/E_1 & -v_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_1 & 1/E_2 & -v_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_1 & -v_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}_{Rortho} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_{Rortho}$$

Les constantes de rigidité sont déduites en inversant la matrice de souplesse :

$$C_{11} = \frac{1 - v_{23}v_{32}}{E_2 E_3 \eta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - v_{13}v_{31}}{E_1 E_2 \eta}$$

$$C_{33} = \frac{1 - v_{12}v_{21}}{E_1 E_2 \eta}$$

$$C_{12} = \frac{v_{21} + v_{31}v_{23}}{E_2 E_3 \eta} = \frac{v_{12} + v_{32}v_{13}}{E_1 E_2 \eta}$$

$$C_{13} = \frac{v_{31} + v_{21}v_{32}}{E_2 E_3 \eta} = \frac{v_{13} + v_{12}v_{23}}{E_1 E_2 \eta}$$

$$C_{23} = \frac{v_{32} + v_{12}v_{31}}{E_1 E_3 \eta} = \frac{v_{23} + v_{21}v_{13}}{E_1 E_2 \eta}$$

$$C_{44} = G_{23}$$

$$C_{55} = G_{13}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

Avec
$$\eta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, les équation précédentes se simplifient à :

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

B.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux s'écrit :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

2.1. Expression des constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

B.3. Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux

3.1. Constantes de rigidité d'un composite orthotrope en dehors de ses axes principaux

$$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 6Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

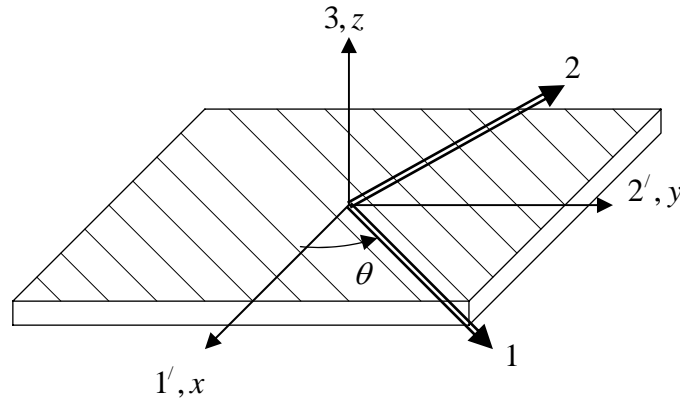


Figure (B.1). Axes principaux (1,2,3) d'une couche stratifiée et axes de référence (1',2',3) = (x, y, z) du stratifié

3.2. Constantes de rigidité réduites en fonction des angles multiples de l'orientation

$$Q'_{11} = \Omega_1 + \Omega_2 \cos 2\theta + \Omega_3 \cos 4\theta$$

$$Q'_{12} = \Omega_4 - \Omega_3 \cos 4\theta$$

$$Q'_{16} = \frac{1}{2} \Omega_2 \sin 2\theta + \Omega_3 \sin 4\theta$$

$$Q'_{22} = \Omega_1 - \Omega_2 \cos 2\theta + \Omega_3 \cos 4\theta$$

$$Q'_{26} = \frac{1}{2} \Omega_2 \sin 2\theta - \Omega_3 \sin 4\theta$$

$$Q'_{66} = \Omega_5 - \Omega_3 \cos 4\theta$$

Avec :

$$\Omega_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22})$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$\Omega_5 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_4)$$

En conclusion :

- il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

- Le comportement élastique est décrit par 9 modules indépendants :

- ✓ 3 modules d'Young : E_1, E_2, E_3

- ✓ 3 modules de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$

- ✓ 3 modules de cisaillement : G_{12}, G_{13}, G_{23}