

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Financières

Les Coefficients de Sensitivité des options et Méthodes d'estimation

par

SELMANE CHAIMA

BOUDARENE FAYNA

Soutenu le 06 juillet 2023, devant le jury composé de

Mme.CHEMERIK	UMBB	Président
Mr.ZITOUNI	UMBB	Examineur
Mme.MEDDAHI	UMBB	Promotrice

Année universitaire : 2022 /2023

Table des matières

1	Les Instruments Financiers	11
1.1	Introduction	11
1.2	Concept de marché financier	11
1.3	Types de marché financier :	12
1.3.1	Les marchés des titres	13
1.3.2	Le marché des produits dérivés	13
1.4	Produits primaires	14
1.4.1	Les actions	14
1.4.2	Les obligations	14
1.4.3	Le billet de trésorerie	14
1.5	Produits dérivés	15
1.5.1	Les contrats à terme de type Forward	15
1.5.2	Les contrats à terme de type future	16
1.5.3	Les options	16
1.5.4	Les swaps	23
2	Modèle de Black-Scholes et l'évaluation des options	24
2.1	Les notions fondamentales	24
2.2	Équations Différentielles Stochastiques	25
2.3	Présentation du modèle Black Scholes	26
2.3.1	Résolution de l'équation de Black-Scholes	26
2.3.2	Simulation de la solution du modèle de Black-Scholes	28
2.3.3	Notions Protefeuille	29

2.4	Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes	30
2.4.1	Hypothèses	31
2.4.2	Énoncé de L'EDP de Black Scholes	31
2.4.3	Résolution de l'équation aux dérivées partiels de Black-Scholes	33
2.5	La Formule de modèle Black et Scholes	39
2.5.1	Simulation du prix des options Call et Put sous matlab	41
2.5.2	Simulation de la fonction d'un call	42
2.5.3	Simulation de la fonction d'un put	43
2.6	Les Rendements	43
2.7	Estimation des paramètre du modèle de black scholes	44
2.8	Simulation des équations différentielle stochastique	46
2.8.1	Schéma d'Euler- Maruyama	46
2.8.2	Schéma de Milstein	47
2.8.3	Schéma d'Euler-Maruyama sur Modèle Black-Scholes :	48
2.8.4	Schéma de Milstein sur modèle Black Scholes	49
2.9	Estimation de la volatilité	50
2.9.1	La Méthode historique	50
2.9.2	La Formule de la Volatilité implicite	52
3	Les Coefficients de sensivité des options et Méthdoes d'estimation	53
3.1	Introduction	53
3.2	Les Grecques	54
3.2.1	Delta d'une option	54
3.2.2	Gamma d'une option	58
3.2.3	Thêta d'une option	60
3.2.4	Véga d'une option	64
3.2.5	Rhô d'une option	66
3.3	Méthodes d'estimation des grecques	70
3.3.1	Monte Carlo	70
3.3.2	Cadre théorique	70
3.3.3	Méthode des trajectoires (pathwise method)	71
3.3.4	Méthode du rapport de vraisemblance	75
3.3.5	Résultats donnés par les deux méthodes	80

Table des figures

1.1	Représentation d'un contrat d'option	17
2.1	Programme de simulation de la solution du modèle de Black-Scholes	29
2.2	Représentation de 100 trajectoires d'un actif financier	29
2.3	Représentation la simulation du option d'achat par le code Matlab	43
2.4	Représentation la simulation du option de vente par le code Matlab	43
2.5	La simulation de Schéma d'Euler	47
2.6	Une représentation graphique de schéma d'Euler	47
2.7	La simulation de schéma de Milstein	48
2.8	Une représentation graphique de schéma de Milstein	48
2.9	Simulation de modèle Black Scholes par le schéma d'Euler-Maruyama	49
2.10	Comparaison de l'approximation d'Euler-Maruyama et d'une trajectoire de L'EDS précédente(La Solution exacte du modèle Black Scholes)	49
2.11	Simulation de modèle Black Scholes par le schéma Milstien	50
2.12	Comparaison de l'approximation de Milstien et d'une trajectoire de L'EDS précédente (La Solution exacte du modèle Black Scholes)	50
3.1	Programme Matlab pour calculer le delta d'un call	55
3.2	Evolution du Delta d'un call par rapport au sous-jacent	56
3.3	Programme Matlab pour calculer le delta d'un put	57
3.4	Evolution du Delta d'un put par rapport au sous-jacent	57
3.5	Programme matlab qui calcule le gamma d'une option	59
3.6	Évolution du Gamma par rapport au sous-jacent	59
3.7	Programme matlab qui calcule le thêta d'un call	62

3.8	Évolution du theta par rapport au temps	62
3.9	Programme matlab qui calcule le thêta d'un put	63
3.10	Évolution du thêta par rapport au temps	63
3.11	Programme matlab qui calcule le vega d'une option	66
3.12	Évolution du vega par rapport a la volatilité	66
3.13	Programme matlab qui calcule le Rhô d'un call	68
3.14	Évolution du Rhô par rapport au taux d'intérêt sans risque	68
3.15	Programme matlab qui calcule le Rhô d'un put	69
3.16	Évolution du Rhô par rapport au taux d'intérêt sans risque	69
3.17	Simulation du Delta et Gamma par la méthode des trajectoires	75
3.18	estimation Delta et Gamma par la méthode du rapport de vraisemblance	80
3.19	Table des estimateurs	80

Liste des tableaux

2.1	Tableau de calcul du prix d'une option	41
2.2	les déterminants du prix des options	41

Remerciement

Toute nos gratitude, grâce et remerciements vont à dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience le courage et la volonté pour élaborer ce modeste travail.

Nos remerciements s'adressent tout naturellement à notre promotrice, Madame **S.MEDDAHI**, pour sa patience, et surtout pour sa confiance et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Nous remercions vivement Madame **CHEMERIK** enseignante à l'univerité de M'hamed Bougara pour avoir accepter d'évaluer ce travail et participer à ce jury.

Toutes nos reconnaissances aux membres jury monsieur **ZITOUNI** qui nous feront l'honneur de juger notre modeste travail.

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants du département des mathématiques et département mathématiques pour leur soutien inestimable et leur instruction.

Enfin, nous devons beaucoup à tous ceux qui nous ont aidés et qui de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce travail

Dédicas

A mes très chers parents.

A mes sœurs et mon frère.

A toute ma famille et mes amies.

CHAIMA

Dédicas

A mes très chers parents.

A mon mari

A ma sœur et mon frère.

A toute ma famille et mes amies.

FAYNA

Introduction générale

La Finance en tant que domaine d'étude se divise essentiellement en deux spécialités : Finance d'entreprise, qui s'intéresse aux choix de financement et d'investissement des entreprises, et la finance des marchés, qui étudie le comportement des marchés financiers, en particulier ce qui détermine les prix des actifs et la façon dont les investisseurs composent et gèrent leur portefeuille d'actifs, la première utilise essentiellement des modèles mathématiques simples, alors que la finance de marché s'appuie sur des modèles mathématiques complexes dans le but de comprendre et de quantifier les phénomènes régissant sur les marchés financiers.

L'importance des marchés financiers n'a cessé de croître depuis maintenant plus de cinquante ans. Ce phénomène est dû à l'apparition des taux de change flottants et des produits dérivés dans les années 70. En 1973, un nouveau modèle est apparu pour évaluer le prix des options sans connaître le cours final de l'action à la date d'échéance en utilisant une nouvelle méthode dite : portefeuille de couverture, il s'agit du célèbre modèle black-scholes-merton[6] , ce modèle considère que le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu, contrairement au modèle binomial (modèle Cox Ross-Rubinstein) (1979) [8] qui suit un processus stochastique en temps discret, l'apparition de ce modèle a révolutionné le monde de la finance et le fonctionnement des marchés financiers, ce qui a valu à Merton et Scholes le prix Nobel de l'économie en 1997.

Très utilisés dans la gestion de risque pour mesurer l'influence des différents paramètres sur le prix d'une option, les grecques sont d'une grande importance en finance. Cependant, leur calcul n'est souvent pas évident et nous disposons rarement de formules fermées pour cela. La simulation devient alors d'une grande utilité car elle permet d'obtenir de bonnes approximations de ces grecques. Dans ce projet nous nous attachons 'a l'étude et 'a la compréhension de différentes méthodes de simulation ainsi qu'à leur mise en œuvre sur les options.

Nous nous intéressons dans ce mémoire, aux coefficients de sensibilité des options et méthodes d'estimation de ses paramètres.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré des notions ainsi que les instruments financiers basiques, nous discutons des

marchés financiers et expliquons les contrats d'options avec précision.

Dans le deuxième chapitre, nous avons tenté d'introduire le modèle Black Scholes, qui est fondamentalement basé sur la méthode EDP pour l'évaluation des options, tout en énonçant initialement des idées fondamentales essentielles à la compréhension de ce modèle et nous présentons la volatilité historique et implicite. Pour la simplicité, nous limitons notre attention au cas d'une option d'achat européenne. Ensuite, nous présentons des applications numériques et les graphes de simulation des prix du sous-jacent et, ainsi les formules de calcul des options d'achat (Call) et de vente (Put) de modèles de Black-Scholes .

Le troisième chapitre présente différents paramètres de sensibilités de l'option par rapport à ses déterminants, avec l'élaboration de leurs formules correspondantes, selon le modèle de Black Scholes, aussi bien pour un call et pour un put. Ensuite, nous traitons de manière détaillée les diverses techniques d'estimation des paramètres des Greeks. Nous estimons ces coefficients avec deux méthodes, la méthode des trajectoires et la méthode du rapport de vraisemblance.

Nous terminons ce chapitre avec des applications numériques (estimation et simulation).

Nous utilisons le logiciel MATLAB pour faire toutes les applications de ce travail.

Les Instruments Financiers

1.1 Introduction

A travers ce chapitre, nous allons procéder à la présentation des instruments financiers, pour ce faire nous avons scindé ce chapitre en trois sections principales :

- La première section est consacrée à la présentation de marché financier.
- La deuxième section traite les produits primaire (les actions, les obligations.....).
- La dernière section traite les produits dérivés.

1.2 Concept de marché financier

Le marché financier est un segment du marché des capitaux qui organise la rencontre directe entre les agents économiques ayant des excédents de capitaux avec ceux ayant des besoins de capitaux afin de financer leur investissement, l'expansion de leur activité ou leur déficit. Un tel besoin de financement peut provenir d'entreprises ou même d'organismes publics. On parle alors de financement direct ou désintermedié et de ce fait le marché financier est un marché de l'épargne longue.

Pour assurer ce besoin de financement ces différentes entités sont amenées à émettre notamment des actions ou des obligations appelées valeurs mobilières, ainsi elles vont chercher à vendre ces titres, ce qui a pour corollaire qu'elles vont tendre à se vendre elles mêmes au moyen de la communication financière auprès d'investisseurs potentiels (qu'ils s'agisse de particuliers, d'entreprises ou d'investisseurs institutionnels) ainsi le marché financier n'est pas seulement un lieu de financement mais aussi un lieu de placement qui permet aux particuliers d'accroître leurs richesses en devenant les associés des entreprises par l'achat des actions ; ou les créanciers de ces sociétés et de collectivités publiques en achetant des obligations. Autrement dit, le marché financier peut être défini comme le point de rencontre entre l'offre et la demande de valeurs mobilières, il s'équilibre par les

prix qui déterminent le coût des capitaux que les investisseurs peuvent se procurer.

En plus d'être un lieu de financement et de placement, on peut reprocher aux auteurs suscités d'avoir donné des définitions simplistes et ont omis le rôle subtil dévolu au marché financier qui est la gestion des risques. En effet, de la déréglementation financière et la forte concurrence qui ont caractérisé le monde à partir des années 1980, est issu un réel décloisonnement et éclatement entre les titres de propriété et les titres de créance pour donner naissance à une multitude d'actifs financiers dont le nombre n'est limité qu'à l'imagination des financiers. La plus large partie de ces actifs est destinée à la gestion des risques, auxquels sont confrontés les différents agents dans le cadre de leurs activités économiques, tels les risques de taux ou les risques des changes... Désormais, ces innovations financières nous permettent de définir le marché financier comme étant un lieu d'émission et d'échange d'instruments financiers. Ce marché est composé du marché primaire et du marché secondaire. [1]

Marché primaire

Appelé aussi le marché du neuf, est le marché où sont émis les nouveaux actifs financiers pour la première fois par les sociétés commerciales privées ou publiques en quête de financement à long terme.

Marché secondaire

Appelé aussi le marché de l'occasion, c'est l'espace où s'organisent les négociations et les opérations d'échanges (sur des marchés de gré à gré ou sur des marchés organisés) des actifs financiers déjà existants sur le marché primaire ce qui facilite la liquidité de ce dernier, et est divisé en.

Marché officiel : Le marché organisé est un marché financier régulé et géré par une entreprise de marché plus explicitement les transactions passent par l'intermédiaire d'une chambre de compensation, donc les acheteurs et les vendeurs n'entrent pas directement en contact. Cette chambre de compensation assure le bon déroulement des opérations pendant toute la durée de la transaction. [4]

Le marché de gré à gré : Un marché de gré à gré, est l'espace où les acheteurs et les vendeurs se rencontrent pour déterminer ensemble les conditions de la transaction. [7]

1.3 Types de marché financier :

Les classifications des marchés peuvent être variées. D'un point de vue financier, ils peuvent se distinguer en fonction de plusieurs critères : la classe d'actif, la maturité des instruments financiers, et la taille de l'entreprise. On peut distinguer les marchés à création qui correspondent aux marchés de titres de richesses et nous avons les marchés à somme nulle qui correspondent aux marchés de produits dérivés.

1.3.1 Les marchés des titres

La deuxième distinction se situe naturellement entre les titres. On distingue essentiellement les titres de propriété et les titres de dettes. On classe alors les titres en marché des actions, marché des obligations et celui des produits dérivés (marché conditionnel).

Le marché des actions

Le marché des actions est un marché où sont vendues et achetées des actions de différents types d'entreprises.

Le marché de l'emprunt obligataire

Ce marché désigne l'endroit où les titres sont émis, vendus ou achetés.

1.3.2 Le marché des produits dérivés

La volatilité du taux de change, des taux d'intérêt et du taux d'inflation qui prévalait lors des années 1970 et 1980 est la raison mentionnée le plus fréquemment pour expliquer l'apparition des produits dérivés.

En effet, ces derniers constituent une réponse du secteur financier aux demandes répétées de leurs clients désirant obtenir des instruments qui leur permettraient de mieux gérer le risque. Les produits dérivés ont été conçus pour rendre les opérations de couverture de risque moins coûteuses qu'avec les actifs financiers classiques.

Les produits dérivés permettent en effet de transférer sans grands frais certains risques aux institutions mieux aptes à les gérer en raison de leurs plus grandes réserves et aptitudes financières.

Sans négliger l'importance primordiale de la demande d'instruments permettant de mieux gérer le risque, d'autres facteurs ont contribué à la naissance d'un marché pour les produits dérivés.

Une concurrence plus vive sur les marchés financiers a créé des facteurs d'ordre qui ont favorisé le développement de marchés pour les produits dérivés. Un autre élément à l'origine de la multiplication des produits dérivés est le déplacement géographique de l'épargne et de l'investissement au niveau international.

Ces événements ont favorisé l'apparition de nouveaux instruments financiers permettant de gérer les risques à moindre frais et pouvant être échangés sur les marchés internationaux dans le but de réduire le coût et les risques associés aux prêts et emprunts internationaux. La mondialisation des marchés financiers a elle aussi favorisé le développement du marché des produits dérivés, le secteur bancaire s'exposant davantage aux devises des autres pays. Les produits dérivés permettent en effet d'étaler le risque de change et de se procurer des devises étrangères.

Enn, les télécommunications et l'avènement de l'informatique ont contribué au développement et à l'évolution du marché des produits dérivés. De nouvelles techniques ont accéléré massivement les calculs, qui sont aussi

devenus plus précis, et ont facilité la transmission de l'information aux intéressés. Ces progrès ont rendu la constitution et l'implantation des produits dérivés à la fois commodes et abordables.

1.4 Produits primaires

1.4.1 Les actions

Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable, son prix est défini par sa cotation en bourse, elle peut être achetée ou vendue à n'importe quel moment, le détenteur d'une action devient un associé proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, il a des droits sur le management, les bénéfices et l'actif social. Une action est un produit très volatil, liée à la fois aux performances de l'entreprise et la situation du marché, sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre de la demande.

1.4.2 Les obligations

Une obligation est une reconnaissance de dette de la part de l'émetteur, elle représente une participation dans un prêt à long terme pour laquelle le détenteur de l'obligation perçoit des intérêts.

L'émetteur peut être :

- Un organisme public, belge ou étranger.
- Une entreprise privée, belge ou étrangère.
- Un organisme international.
- Un établissement de crédit (bon de caisse).

Les obligations sont l'un des instruments financiers parmi les plus répandus dans le monde. Leur principe est simple : un taux d'intérêt qui donne droit au paiement d'un coupon périodique, une durée d'emprunt, un prix d'achat et un prix de remboursement à l'échéance.

1.4.3 Le billet de trésorerie

Le billet de trésorerie est un emprunt qui peut être émis par une société à action où qui a un capital important, il a comme avantage de réduire le coût de financement et le taux d'intérêt qui sont plus faibles que ceux qui sont exigés par les banques. En plus, le bon de trésorerie a généralement une durée de 10 jours à 1

an, alors que les crédits bancaires ont des durées de plus de 3 ans.

1.5 Produits dérivés

Les instruments (ou produits) financiers dérivés ont été mis au point pour couvrir les risques liés au change, aux taux d'intérêt et principalement à la volatilité. Ils sont appelés dérivés en ce sens qu'ils "dérivent" des instruments financiers sous-jacents qu'ils entendent couvrir. Ils peuvent être utilisés dans un but de couverture ou spéculatif.

Un instrument financier dérivé donne à son détenteur le droit ou l'obligation d'acheter ou de vendre une valeur sous-jacente (par exemple, une action, une devise, un indice boursier) à un prix fixé préalablement et pendant une période déterminée.

Un produit dérivé ne doit pas être confondu avec un investissement dans la valeur sous-jacente. Après l'expiration de sa période d'exercice, il perd toute valeur.

Les principales catégories d'instruments financiers dérivés sont : les options, les warrants et les futures.

1.5.1 Les contrats à terme de type Forward

Le contrat à terme de type Forward constitue un engagement d'acheter ou de vendre une certaine quantité de supports à une date d'échéance future et à un prix spécifié au moment où le contrat est passé. Si la date d'échéance, le prix de l'actif support au contrat est supérieur au prix spécifié, l'acheteur du contrat réalise un profit dans le contraire il réalise une perte.

Ce qui veut dire que l'acheteur du contrat sera gagnant si le prix du contrat Forward monte par rapport au prix initial du contrat ou si le prix comptant du support est supérieur à l'échéance au prix d'achat du contrat à terme, dans la mesure où l'acheteur ne dénoue son opération et vice versa.

Le contrat à terme Forward a deux caractéristiques complémentaires en premier lieu de risque du contrat est symétrique : l'acheteur du contrat réalise un gain ou une perte selon le sens de mouvement du prix de l'actif qui représente exactement la perte ou le gain du vendeur.

Par ailleurs, la valeur du contrat à terme Forward est versée par le débiteur seulement à l'échéance, aucun paiement entre les deux parties n'intervient avant cette date.

1.5.2 Les contrats à terme de type future

Le contrat à terme de type Future est semblable au contrat Forward. Il s'agit de contrats en vertu desquels deux parties acceptent d'effectuer une transaction sur un actif financier ou un produit quelconque, à un prix donné et à une date ultérieure. Essentiellement, une des deux parties accepte d'acheter l'actif que veut bien lui vendre la seconde. Les deux doivent honorer leurs engagements et aucune ne peut réclamer de frais.

Comme Forward, le Future présente un profil symétrique. Mais à l'inverse du contrat Forward, le risque de crédit, c'est-à-dire le risque de défaut d'un des deux contrats, peut être complètement éliminé dans le contrat Future grâce à deux mécanismes spécifiques : le dépôt de garantie et l'appel de marge d'une perte, l'existence d'une chambre de compensation et la standardisation des contrats d'autre part.

1.5.3 Les options

Une option est un instrument financier pouvant être utilisé à diverses fins, en vue notamment de protéger un portefeuille contre un risque, de réaliser un complément de rendement ou de spéculer sur les évolutions à la hausse comme à la baisse d'actifs aussi différents que des matières premières (pétrole, blé, métaux, or, ...), des taux d'intérêt, des cours de change, et des actions.

L'option est un contrat entre un acheteur, appelé aussi détenteur, et un vendeur, appelé aussi émetteur, donnant le droit au détenteur de l'option de négocier une certaine quantité d'une valeur sous-jacente à un prix fixé d'avance (prix d'exercice) et ce à une date déterminée (option dite de style européen) ou pendant une période convenue (style américain).

L'option confère un droit à son acheteur/détenteur, mais donne une obligation à son vendeur/émetteur si le détenteur de l'option manifeste la volonté de procéder à une transaction, le vendeur a l'obligation de procéder à cette transaction. En échange de son obligation, le vendeur reçoit une prime.[9]

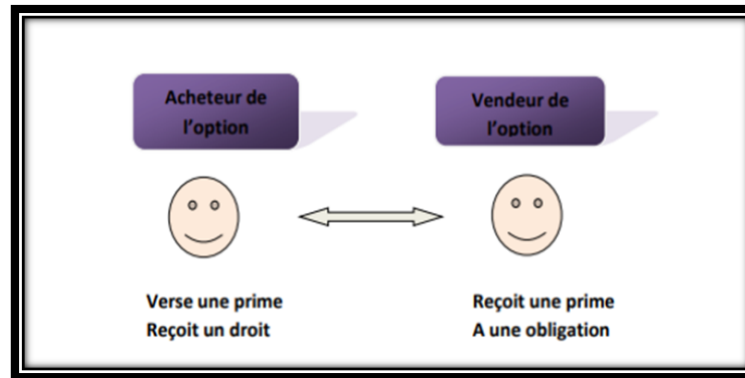


FIGURE 1.1 – Représentation d'un contrat d'option

Lors de l'acquisition d'une option, l'acheteur (le détenteur) paie une prime au vendeur. Le détenteur obtient aussi le droit de décider de la suite des événements. Quant au vendeur (le signataire), il doit se soumettre à la décision du détenteur. Il importe de comprendre qu'un contrat d'option représente un droit de la part de l'acheteur et une obligation de la part du vendeur d'effectuer une transaction à une date future

La définition de l'option révèle un caractère central de l'approche. Il s'agit de l'asymétrie. Cette dernière reflète le fait que le détenteur de l'option bénéficie des évolutions favorables sans avoir à supporter les situations défavorable, ce qui met le vendeur dans une situation d'obligation.

Dans le jargon financier/boursier, la distinction concernant le prix d'exercice des options revient souvent. De cette distinction découle les notions suivantes : à la monnaie, dans la monnaie, en dehors de la monnaie. Ces termes désignent l'écart qui peut exister entre le cours du sous-jacent et le prix d'exercice

- **Option dans la monnaie** : une option est dite dans la monnaie renvoie au degré de différence entre le prix de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice. Pour l'option d'achat, lorsque le prix d'exercice de l'option est inférieure au prix de l'actif sous-jacent. alors qu'une option de vente est dans la monnaie lorsque le prix d'exercice de l'option est supérieur au prix du sous-jacent.
- **Option hors de la monnaie** : une option d'achat est en dehors de la monnaie lorsque le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent. Tans dis qu'une option de vente est dite en dehors de la monnaie lorsque le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent. Ce qui signifie que le prix d'exercice ne joue pas en faveur de l'investisseur.
- **Option à la monnaie** : il s'agit du schéma le plus classique, une option est à la monnaie quant son prix d'exercice avoisine son cours du sous-jacent. Dans ce cas de figure la valeur intrinsèque de l'option est nulle.

Les types d'options

L'option d'achat :

Une option d'achat appelée aussi call est un contrat entre deux parties d'une durée précise donnant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent à un prix prédéterminé.

L'acheteur de l'option n'exercera son droit que si le cours du sous-jacent est supérieur au point mort (point auquel il n'y a ni perte ni profit). L'acheteur d'un call ne le fait donc que s'il anticipe une hausse du cours du sous-jacent.

- Exercer l'option, le cours du sous-jacent affiché par le marché étant supérieur à son prix d'exercice, l'option est dite dans la monnaie, l'acheteur peut exercer l'option et acheter le sous-jacent à un prix moins cher que le prix du marché;
- Annuler l'option, le cours du sous-jacent étant inférieur au prix du marché, l'acheteur n'aura aucun intérêt à exercer l'option, l'option est dite en dehors de la monnaie.[12]

L'option de vente :

une option de vente appelée put est une entente entre deux parties donnant à son détenteur le droit et non l'obligation de vendre un actif sous-jacent à un prix stipulé à l'avance durant une durée période donnée.

Il exercera son option de vente si le cours du sous-jacent évolue dans un sens favorable à ses anticipations et qu'il se trouve en-dessous du prix d'exercice 1. L'acheteur de l'option de vente (PUT) ne le fait donc s'il anticipe une baisse du cours du sous-jacent.

A l'échéance, si le cours du sous-jacent affiché par le marché est inférieur au prix d'exercice fixé, l'option est dite dans la monnaie et peut être exercé. Dans le cas où le cours du sous-jacent est supérieur au prix fixé, l'option est dite en dehors de la monnaie et l'acheteur n'a aucun intérêt à l'exercer.

Styles d'exercices

Une option européenne :

Une option européenne est une option d'achat ou de vente, elle a la particularité d'avoir une date d'exercice fixée à l'avance; la date d'échéance .

La valeur d'une option européenne, étant donné qu'elle donne moins de possibilités d'exercice relativement aux autres types d'option est moins onéreuse.

Une option américaine :

Une option américaine peut être exercée à tout moment entre l'instant initial et la date finale fixée.[3] En effet, l'acheteur d'une option américaine bénéficie de plus de droit que l'acheteur d'une option européenne, puisqu'il peut exercer à tout moment son droit, alors que le second doit attendre l'échéance pour décider et qui permet

donc aux investisseurs d'avoir une plus grande flexibilité. De ce fait la grande majorité des options sont des options américaines.

Cependant ce privilège additionnel a un prix. Il est intégré à la prime de l'option ; c'est pourquoi la valeur de la prime américaine est généralement supérieure à celle des options européenne.

Une option Bermudeenne :

C'est une option intermédiaire entre les options américaines et européennes, elle peut être exercée à plusieurs dates entre son émission et son échéance.

Les stratégies d'options

oAchat d'une option d'achat (call) :

Cette stratégie intervient dans le cas d'une anticipation d'un marché haussier avec une volatilité forte ; il s'agit de l'anticipation d'une hausse sensible à court terme de l'actif support. Plus la hausse anticipée est grande plus le prix d'exercice du call acheté devrait être élevé.

Dans ces circonstances, l'acquisition d'une option d'achat permet à son acquéreur de Profiter du mouvement de marché à la hausse avec l'assurance d'un risque connu à l'avance et dans tous les cas, la perte est limitée au montant de la prime versée, ainsi que la création d'effet de levier. Néanmoins, le risque de perdre la totalité de l'investissement est non négligeable.

La particularité de ce type de stratégie est dans le fait que la hausse doit survenir dans une courte période, l'option cesse d'exister après sa date d'échéance. L'option cesse d'exister après sa date d'échéance.

oAchat d'une option de vente (Put) :

L'investisseur recourt à cette stratégie dans le cas de l'anticipation d'une baisse du cours du sous-jacent avec une volatilité forte. Plus la baisse anticipée est forte plus le prix d'exercice du put acheté devrait être faible.

Il escompte une chute rapide du cours. Dès que le cours du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice le return perçu par son détenteur sera plus important que la chute. Plus la baisse anticipée est forte plus le prix d'exercice du put acheté devrait être faible.

Cette stratégie permet de protéger les titres contre une baisse du cours et de créer un effet de levier. Ce dernier est lié à la possibilité de réaliser un rendement supérieur avec la même mise de fond. Comme pour l'achat d'un call, la perte est limitée au montant de la prime.

o Vente d'une option d'achat (call) :

C'est la stratégie la plus risquée et la plus spéculative au quelle recourent les investisseurs dans le cas d'anticipation d'un marché baissier avec une faible volatilité. Plus l'anticipation à la baisse est forte plus le prix d'exercice devra être dans la monnaie. Le gain reste limité quel que soit la baisse du cours par contre la perte

sera importante si le cours augmente fortement.

Cette stratégie permet de se protéger et d'accroître le rendement du portefeuille de l'investisseur.

○ **Vente d'une option de vente (put) :**

C'est une opération au quelle recourent les investisseurs dans le cas de l'anticipation d'un marché haussier avec une volatilité faible, autrement dit l'anticipation d'une hausse limité du cours de l'actif sous-jacent. Elle présente un risque important, le gain est limité aux prix de l'option.

La valeur d'une option

La valeur d'une option se définit selon ce qu'elle peut rapporter à son détenteur s'il décide d'exercer immédiatement, ou encore selon ce qu'elle peut lui apporter dans le futur. Mais valoriser n'est pas chose aisée, elle varie en fonction de l'offre et de la demande sur le marché sur lequel elle est négociée.

Théoriquement, le prix d'une option se résume à l'équation qui additionne la valeur intrinsèque de la dite option avec sa valeur temps comme suit :

$$\text{Valeur d'une option (prime d'option)} = \text{valeur intrinsèque} + \text{valeur temps}$$

Les composantes de la valeur d'une option

La valeur ou la prime d'une option peut se décomposer en deux termes :

○ **La valeur intrinsèque :**

La valeur intrinsèque d'une option à un instant t est simplement le gain réalisé par l'acquéreur (compte tenu de la prime) si l'option était exercée en t [10]. En d'autres termes, la valeur intrinsèque représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option. Elle est donc positive ou nulle, selon que l'option pourrait ou non être exercée par son détenteur.

Plus précisément, la valeur intrinsèque d'une option d'achat correspond à la différence entre le cours du sous-jacent et le prix d'exercice, deux possibilités sont alors envisageables, à savoir :

○ Quand le cours du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, la valeur intrinsèque est alors positive et l'option est en jeu

○ Quand le cours du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, la valeur intrinsèque est nulle et l'option est à parité, car par définition la valeur intrinsèque ne peut pas être négative.

Notons la valeur intrinsèque d'option d'une option d'achat :

$$\text{La valeur intrinsèque} = \text{cours du titre sous-jacent} - \text{prix d'exercice}$$

$$\text{La valeur intrinsèque(Call)} = \text{MAX}(S - K, 0) [2]$$

En ce qui concerne l'option de vente, la valeur intrinsèque correspond à la différence entre le prix d'exercice et

le cours de l'actif sous-jacent. Elle n'est différente de zéro que si le cours de l'actif est inférieur au prix d'exercice. De la même façon :

- Valeur intrinsèque supérieur à zéro, l'option est dite en jeu ou dans la monnaie.
- Valeur intrinsèque inférieure à zéro, l'option est dite hors-jeu ou en dehors de la monnaie.

Notons que la valeur intrinsèque d'une option de vente :

La valeur intrinsèque = prix d'exercice – cours du sous-jacent

La valeur intrinsèque(Put) = MAX (K – S, 0)

○ **La valeur temps :**

La valeur temps d'une option est la portion de la prime de l'option qui représente le temps qui reste à courir jusqu'à l'échéance du contrat de l'option. En d'autres termes, la valeur temps représente le surplus de la valeur par rapport à sa valeur intrinsèque.

Plus la durée de vie d'une option est longue, plus la probabilité [11] d'avoir une valeur intrinsèque est importante donc plus la valeur temps sera importante. En effet, la valeur temps revêt un caractère plutôt probabiliste dans la mesure où elle représente les chances de pouvoir exercer l'option à maturité, autrement dit la chance que l'option ait une valeur intrinsèque à la date d'échéance.

Cette valeur est influencée par un certain nombre de paramètres à savoir :

- Le temps restant à courir avant l'échéance, plus l'échéance sera lointaine plus le sous-jacent est susceptible à varier à la hausse comme à la baisse. La valeur temps diminue donc au fur et à mesure que le temps passe
- L'écart entre le cours du sous-jacent et le prix d'exercice de l'option. En effet, l'augmentation ou la baisse du cours du sous-jacent respectivement entraîne une augmentation de la valeur temps d'une option d'achat et de vente respectivement, mais cette augmentation n'est pas sans limite, dès que le cours du sous-jacent cote le prix d'exercice. toute hausse (voir baisse) du sous-jacent engendre une baisse de la valeur temps
- La volatilité du sous-jacent, plus elle est élevée plus le cours du sous-jacent est sujet à des variations à la hausse comme à la baisse

La valeur temps d'une option d'achat :

La valeur temps = prime + prix d'exercice – cours du titre sous-jacent

La valeur temps d'une option de vente :

La valeur temps= prime – prix d'exercice + cours du sous-jacent.

Les déterminants des options

Plusieurs facteurs influencent la prime d'une option dont notamment les déterminants suivants :

Actif sous-jacent [5]

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'options peut être un actif physique (matières premières ou agricoles), un instrument financier (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique.

Pay-off

Pay-off de l'option : est la fonction qui donne la valeur réelle échangée à la maturité en fonction du prix de l'actif sous-jacent à cette date. Le pay-off représente le flux de trésorerie entre l'émetteur/le vendeur de l'option (décaissement) et l'acheteur (encaissement).

Taux sans risque

c'est le taux d'intérêt d'un placement sûr auquel on prête de l'argent avec un risque de défaillance nul ou quasi nul. Il se caractérise par une rentabilité certaine.

Le prix d'exercice [13]

Il correspond au prix auquel le détenteur de l'option peut exercer son droit, c'est-à-dire au prix auquel l'acheteur peut acquérir l'actif sous-jacent durant la période de vie, c'est un prix de référence, en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent, l'option peut être levée si le prix d'exercice est avantageux et que l'investisseur peut réaliser un profit.

Date d'échéance [14]

C'est la date de fin de validité du contrat. Pour les contrats d'options, les dates d'échéance sont standardisées (le 3ème vendredi du mois d'échéance)..

La volatilité

La volatilité est une mesure des fluctuations du sous-jacent pour une période donnée. Pour les options, il faut distinguer deux types de volatilités :

- **La volatilité historique** : elle mesure les variations, les fluctuations erratiques de tout sous-jacent tel qu'elles l'ont été dans le passé.

- **La volatilité implicite** : elle mesure quant à elle les variations de tout sous-jacents telles qu'elles sont anticipées dans le futur, elle est estimée en fonction de la volatilité historique et d'autres paramètres qui concernent le mouvement du sous-jacent ainsi que d'autres paramètres en relation avec le marché.

1.5.4 Les swaps

Un Swap (de l'anglais to swap signifiant échanger) est une opération d'échange de flux d'intérêts et/ou de devises, portant sur un montant et une durée définis à l'avance.

Les premières opérations de swaps sont apparus vers la fin des années 1970, après une décennie riche en événements sur le plan économique et financier, qui ont à la fois suscité les besoins de couverture auxquels les swaps répondaient, et fourni les conditions de leurs réalisations.

Les Swaps étant des produits complexes, aux caractéristiques très spécifiques, de ce fait une présentation simplifiée nous aidera à en comprendre le principe, les types et les caractéristiques.

Modèle de Black-Scholes et l'évaluation des options

2.1 Les notions fondamentales

Définition du Processus stochastique

Un processus stochastique à valeurs réelles, défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , est une famille de variable aléatoire noté $X := (X_t, t \in I)$, où I est une partie de \mathbb{R}^+ . X est donc une fonction de deux variables qui fait correspond à $(t, \omega) \in I * \Omega$, l'image $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$.

Remarque :

- Si I est une partie de \mathbb{N} , on parle de processus stochastique à temps discrete.
- Si I est un intervalle de \mathbb{R}^+ , on parle de processus stochastique à temps continu.

Mouvement brownien standard

Le mouvement brownien a été découvert en 1827 par le botaniste britannique Robert Brown (1773-1858). En 1900, Louis Bachelier l'utilise le premier pour modéliser la dynamique des cours de la bourse, puis en 1905 Albert Einstein mit en évidence le mouvement brownien en étudiant la dynamique moléculaire, ainsi que ses relations avec l'équation de la diffusion.

La première étude mathématique est faite par Norbert Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence de mouvement brownien puis Paul Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien, et c'est le début d'une activité de recherche intense, continuant de nos jours.

Définition :

Un processus stochastique à temps continu $B := (B_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , est dit un mouvement Brownien standard s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

- (i) $B_0 = 0$.

(ii) Les incréments de B_t sont indépendants : pour toute suite finie de temps $0 \leq t_1, \dots, t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

(iii) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, l'incrément $B_{t+s} - B_s$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $(t+s)$.

(iv) Pour tout $B(\omega)$ sur un ensemble de probabilité 1, $B_t(\omega)$ est une fonction continue de t .

Caractérisation :

B est un mouvement Brownien standard si et seulement c'est un processus gaussien, centré, continue, de fonction de covariance : $\Gamma(t, s) = Cov(B_s, B_t) = s, s, t \geq 0$

Mouvement Brownien géométrique

Soit B_t un mouvement Brownien et μ, σ sont constants, le processus

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

est appelée Brownien géométrique.

Ce processus est aussi appelé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \ln x$$

2.2 Équations Différentielles Stochastiques

On appelle l'équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) par un terme dépendant d'une variable de bruit blanc. Les équations différentielles s'écrivent sur la forme suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2.1)$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x'(t)$ et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1 ère est impliquée) avec $f(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x . Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit

$$dx(t) = f(t, x(t))dt \quad (2.2)$$

Les EDS sont des généralisations des équations(2.2) où la dynamique déterministe d'évolution f est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un Mouvement Brownien W et une intensité de bruit $\sigma(t, x)$:

$$dX_t = \mu(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dW_t \quad (2.3)$$

Où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t X_t , mais ne peut dépendre que du temps σ_t ou de la valeur (X_t) en temps t (σ_{X_t}) ou même de la constante σ .

2.3 Présentation du modèle Black Scholes

[E] La dynamique de l'actif risque dans le modèle Black et scholes est donnée par l'EDS suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.4)$$

$$S_0 = x_0 \geq 0$$

B_t est un mouvement brownien standard avec les coefficients :

- μ est un coefficient de diffusion.
- σ est un coefficient de volatilité.

a partir (2.4) admet une unique solution ,donnée par le brownien géométrique.

2.3.1 Résolution de l'équation de Black-Scholes

l'équation de Black-Scholes s'écrit de la façon suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad (2.5)$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.6)$$

En intégrant (2.6) on trouve :

$$\int_0^t \frac{dS_t}{S_t} = \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW_t \quad (2.7)$$

Car μ et σ sont des constantes, et puisque W_t est un mouvement Brownien alors : $\int_0^t dW_t = W_t$.

On considère à présent la fonction $f(t, x) = \log x$, en utilisant la formule d'Itô :

$$df(t, S_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} < dS_t; dS_t > \quad (2.8)$$

On a :

$$\begin{aligned} f'_t(t, x) &= 0 \\ f'_x(t, x) &= \frac{1}{x} \\ f''_{xx}(t, x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.8) avec $x = S_t$:

$$df(t, S_t) = 0 dt + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t} (dS_t)^2 \quad (2.9)$$

On a :

$$(dS_t)^2 = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$
$$(dS_t)^2 = S_t^2 \sigma^2 dt$$

On obtient :

$$df(t, S_t) = 0dt + \frac{1}{S_t}(S_t(\mu dt + \sigma dW_t)) - \frac{1}{2S_t^2}(S_t^2 \sigma^2 dt)$$

$$df(t, S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t \quad (2.10)$$

En intégrant (2.10), on aura :

$$\int_0^t df(s, S_t) = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds + \int_0^t \sigma dW_s$$
$$f(t, S_t) - f(0, S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \int_0^t dW_s$$
$$f(t, S_t) - f(0, S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$

De la formule précédente, on a :

$$\log S_t - \log S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$
$$\log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$

$$S_t = S_0 + e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (2.11)$$

De là, on a la solution de l'équation de Black-Scholes qui est :

$$S_t = S_0 + e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

2.3.2 Simulation de la solution du modèle de Black-Scholes

Dans cette partie nous réaliserons un programme sous Matlab afin de simuler la solution du modèle de Black-Scholes pour 100 échantillons d'un actif.

```
%Prog : Simulation de 100 échantillons d'un actif
%Parametre initiaux
T=1;
N=100;
Dt=T/N;
u=0.3;
sigma=0.3;
szero=1;
%Solution exacte du Black & Scholes
S=szero*cumprod(exp((u-sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*randn(N,N)));
%Figure
plot(S)
```

FIGURE 2.1 – Programme de simulation de la solution du modèle de Black-Scholes

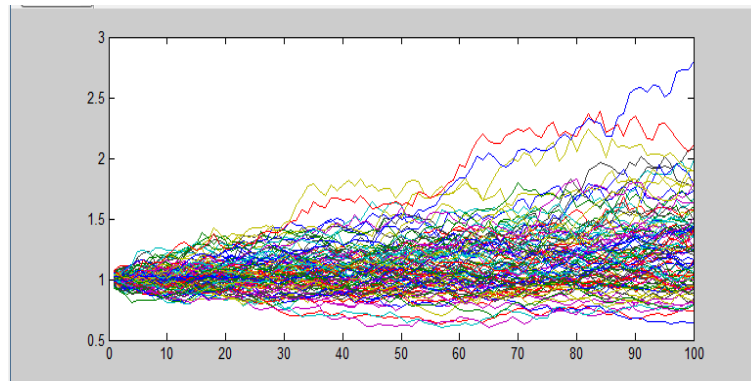


FIGURE 2.2 – Représentation de 100 trajectoires d'un actif financier

2.3.3 Notions Portefeuille

Portefeuille : Un Portefeuille est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent provenir de différentes classes : actions, obligations, produits dérivés, matières premières, fonds, cash, etc. L'investisseur, pour diminuer son risque, procède souvent à une diversification de ses actifs. Ces derniers possèdent chacun une volatilité qui leur est propre et sont plus ou moins corrélés entre eux. La détention de plusieurs actifs différents tend donc, généralement, à diminuer la volatilité globale du portefeuille. [15]

Portefeuille autofinancée : C'est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent.

Il consiste en une répartition d'un capital entre l'actif sans risque $B(t)$ et l'actif risqué $S(t)$.

Tout portefeuille peut être rendu autofinancé en rajoutant de l'actif sans risque. En d'autres termes si nous considérons un agent qui a la possibilité d'investir dans les actifs de base du marché; La stratégie du portefeuille est la donnée d'un processus adapté $\nabla = (\beta_n, \phi_n)$ ou β_n et ϕ_n représentent le nombre de parts investis dans l'actif non risqué B_n et l'actif risqué S_n à la date t , dont la valeur est déterminée sur la base des informations disponibles juste avant t .

β et ϕ peuvent prendre des valeurs positives ou négatives correspondant à un achat ou une vente et ils sont supposés indéfiniment fractionnables.

Donc la valeur (ou richesse) de ce portefeuille à la date nT est définie par :

$$V_n^\nabla = \beta_n B_n + \phi_n S_n$$

Donc un portefeuille est dit autofinancé si pour tout n :

$$\beta_n B_n + \phi_n S_n = \beta_{n+1} B_n + \phi_{n+1} S_n$$

L'arbitrage : L'arbitrage est la possibilité de réaliser un profit sans risque et sans apport de fonds par une combinaison de deux ou plusieurs transactions.

L'exemple le plus simple est fourni par une même action cotée dans deux bourses différentes à deux prix différents. L'achat au prix le plus bas et la vente simultanée au prix le plus élevé procurent bien un profit sans risque et sans mise de fonds.

Une telle situation ne peut évidemment pas durer si les marchés fonctionnent correctement, c'est-à-dire si l'information est rapidement diffusée, si les frais de transaction ne sont pas excessifs. Devant l'afflux des ordres d'achat, le prix le plus bas monte et devant l'afflux des ordres de vente, le prix le plus haut baisse, jusqu'à l'égalité des deux prix, c'est-à-dire la disparition de la situation d'arbitrage.

Marché complet : On dit qu'un marché est complet si l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée et de plus si tout produit financier peut être répliqué par une stratégie autofinancée afin de le couvrir contre tout risque.

2.4 Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes

L'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes-Merton doit être vérifiée par tout produit dérivé lié à une action ne versant pas de dividendes, elle repose sur un raisonnement d'arbitrage, il s'agit de construire un portefeuille sans risque consistant en une position sur le produit dérivé et une position sur l'actif sous-jacent. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'espérance de rentabilité du portefeuille doit être égal au taux sans risque, r .

2.4.1 Hypothèses

- Le marché est complet.
- Le marché est efficient donc tout est évalué d'une manière rationnelle, sur ces entrefaites l'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée.
- Le temps est continu.
- Le rendement de l'actif sous-jacent (action) S suit un mouvement brownien géométrique.
- Les rendements réalisés suivent un modèle log-normale.
- Le taux d'intérêt sans risque existe et il est invariable.
- Le détenteur de l'action sous-jacente ne perçoit aucun dividende pendant la période de l'évaluation de l'option sur action.
- Pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
- Le marché est friction [15]

2.4.2 Énoncé de l'EDP de Black Scholes

On se préoccupe par une option de type européen (de prix noté E_t à l'instant t) sur actif risqué S (ayant l'équation (2.6) comme élément représentative de l'évolution de son prix) qui rapporte à son détenteur $H = h(S_t)$ à l'échéance T notons que h est la fonction de Pay-Off, alors on a la relation :

$$E_t = h(S_t) \quad (2.12)$$

De plus, on suppose qu'il existe une application $u \in C^{1,2}([0, T], \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_+)$ telle que pour $t \in [0, T]$ on ait : $E_t = u(t, S_t)$ dont on lui applique le lemme d'Itô

Il nous résulte l'équation suivante :

$$dE_t = du(t, S_t) = \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(S_t, t)}{\partial S_t^2} [\sigma(S_t)]^2 dt \quad (2.13)$$

En remplaçant dS_t par l'équation (2.6) :

$$dE_t = du(t, S_t) = \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(S_t, t)}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt$$

$$dE_t = du(t, S_t) = \left(\frac{\partial u(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} (\mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(S_t, t)}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2) \right) dt + \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \quad (2.14)$$

Étant donné qu'on est dans un marché complet, l'existence d'un portefeuille est considérable qui se présente comme suit : $\forall t \in [0, T]$ notée (X_t, Y_t) où :

X_t : représente pour chaque instant t la quantité d'actif sans risque supposée un zéro coupon, noté B_t détenus dans le portefeuille

Y_t : est la quantité de l'actif risqué S dans le portefeuille à chaque instant t telle que la richesse V_t associée à l'instant final T soit : $V_t(X, Y) = h(S_t)$, autrement dit d'après l'équation (2.12) :

$$V_t(X, Y) = E_t \quad (2.15)$$

Donc en introduisant la condition d'autofinancement on déduit l'équation qui s'écrit en temps continu :

$$\forall t \in [0, T] : dV_t(X, Y) = X_t dB_t + Y_t dS_t = dE_t = du(t, S_t) \quad (2.16)$$

Or en remplaçant (2.6) dans l'équation (2.16) on obtient :

$$dE_t = (rX_t B_t + \mu Y_t S_t) dt + \sigma Y_t S_t dW_t$$

En faisant une simple identification avec l'équation (1.13) on a d'une part :

$$\sigma Y_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t}$$

$$Y_t = \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t}$$

Et d'autre part :

$$rX_t B_t + \mu Y_t S_t = \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(S_t, t)}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma^2 \quad (2.17)$$

D'où on déduit que :

$$X_t = \frac{\left[u(S_t, t) - S_t \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} \right]}{B_t} \quad (2.18)$$

Enfin on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial t} + r S_t \frac{\partial u(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right\} = r u(S_t, t)$$

$$u(S_t, T) = h(S_t) \quad (2.19)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces relation soient satisfaite et que U soit solution de l'EDP parabolique suivante :

$$\left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + r x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} = r u(x, t)$$

$$u(x, t) = h(x) \forall x \in \mathfrak{R}_+$$

2.4.3 Résolution de l'équation aux dérivées partiels de Black-Scholes

Afin de résoudre l'EDP de Black-Scholes pour les deux principales cas : un Call européen et un Put européen, nous allons procéder à divers changements de variable pour nous ramener à une équation de la chaleur du type :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \quad (2.20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

De solution v définit comme suit :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, 0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy \quad (2.21)$$

$$v(x, 0) = u_0(x)$$

Tout d'abord nous transcrivons l'équation de Black-Scholes pour une option Call européenne, notons sa valeur $C(\cdot)$, qui correspond au u précédemment, où S représente le prix du sous-jacent, et $t \in [0, T]$, T étant la maturité.

On a :

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} + rS_t^2 \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} = rC(S_t, t) \forall t \in [0, T], S \in \mathfrak{R}_+ \quad (2.22)$$

$$C(S_t, t) = (S_t - E)^+ = \max(S_t - E, 0), \forall S \in \mathfrak{R}_+$$

Nous commençons par la suppression des coefficients de S et S^2 de l'équation de Black-Scholes.

Pour ce faire on pose : $S = Ee^x = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, $C(S, t) = E v(x, \tau)$

On a donc :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{E} C \left(Ee^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{E} C(S, t) \quad (2.23)$$

Ensuite on dérive l'équation (2.23) par rapport à x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S}$$

On dérive une deuxième fois par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) S \\ &= \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{E} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\end{aligned}$$

Maintenant on dérive par rapport à τ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

En introduisant ces équations dans l'EDP de Black-Scholes (2.22) on obtient :

$$-\frac{E\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{E\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + rE \frac{\partial v}{\partial x} - rE v = 0$$

Soit en divisant par : $\frac{E}{2}\sigma^2$

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + rE \frac{\partial v}{\partial x} - rE v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \text{ avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

On a alors comme condition initiale (en $\tau = 0$ puisque la condition est en $t=T$)

$$v(x, 0) = \frac{1}{E} C(Ee^x, T) = \frac{1}{E} \max(Ee^x - E, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

Nous procédons à un changement de variable afin d'aboutir à une équation similaire à (2.20), on pose :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (2.24)$$

On réinjecte dans l'équation (1.24) :

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} - ku \right) \right)$$

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} - ku$$

En regroupent les termes par dérivée :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta)u$$

On doit éliminer les termes en $\frac{\partial u}{\partial x}$ et u alors on a besoin de résoudre les équations suivantes : $(2\alpha + k - 1) = 0$

et $\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta = 0$

Ce qui donne : $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$ et $\beta = -\frac{1}{4}(k-1)^2$

On a donc :

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2 \tau} u(x, \tau) \quad (2.25)$$

Donc la relation devient :

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) = u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) \\ v(x, 0) &= u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

En ayant cette condition on reconstitue le système qui représente l'équation qui se rapproche de celle de la chaleur après les nombreuses modifications :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \forall x \in \mathfrak{R}, \forall \tau > 0$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) = u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \quad (2.27)$$

Notons alors ça solution v comme suit :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y, 0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

On résout l'équation dans le but d'évaluer le prix de l'option Call européenne, on commence par poser $m = \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y, 0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(m\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{m^2}{2}} dm$$

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} dm$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} dm$$

Notons les intégrales par :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} dm \dots I_1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} dm \dots I_2$$

Nous nous intéressons au premier intégral I_1 dont on va essayer de le ramener à la loi de répartition normale centrée réduite :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} dm$$

On a la relation (1.25) dont on lui ajoute la quantité suivante : $e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}$

Ce qui donne :

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{m^2}{2}} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} dm$$

Après simplification on obtient :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{2\sqrt{\Pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}^2} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} dm$$

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{2\sqrt{\Pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}^2} dm$$

On pose : $\theta = m - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$ et $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$

L'intégrale devient :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{2\sqrt{\Pi}} \int_{-d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\theta)^2} d\theta$$

On note que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite s'écrit sous la forme suivante : $N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}(s)^2} ds$ et on sait aussi que $N(d_1) + N(-d_1) = 1$ ce qui nous amène à déduire :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_1) \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Par le même calcul on trouve :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

À présent que l'on a l'expression de u revenons à l'expression de C . Rappelons quelques variables importantes :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

$$C(S, t) = E v(x, \tau) \quad \text{et} \quad k = \frac{2r}{\sigma^2} = \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2$$

Ainsi que : $x = \ln \frac{S}{E}$

D'où :

$$C(S, t) = E e^{\frac{1}{2}(k-1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \times \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right)$$

$$C(S, t) = E e^{\frac{1}{2}(k-1) \ln \frac{S}{E}} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2 \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2} \times \left(e^{\frac{1}{2}(k+1) \ln \frac{S}{E}} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2 \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1) \ln \frac{S}{E}} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2 \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2} N(d_2) \right)$$

Après simplification on trouve :

$$\begin{cases} C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases}$$

On a trouvé l'équation qui caractérise le prix d'une option call européenne. Maintenant si on veut avoir l'équation d'un Put européen de même maturité T et de prix d'exercice E, il suffit seulement d'utiliser la relation parité Call-Put :

$$C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}$$

Et donc on obtient :

$$\begin{aligned} P(S, t) &= SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ee^{-r(T-t)} \\ P(S, t) &= S(d_1 - 1) - Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \end{aligned}$$

On simplifie cette équation :

$$\begin{cases} P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases}$$

2.5 La Formule de modèle Black et Scholes

Nous introduisons en premier lieu les notations qui seront utilisées dans la suite de l'étude. Les variables sont :

- V : la valeur de l'option d'achat, Qu'on notera C dans le cas d'une option d'achat (call) et P dans le cas d'une option de vente (put).
- S : le prix actuel du sous-jacent
- X : le prix d'exercice
- r : le taux d'intérêt sans risque

- T : la durée de vie de l'option
- σ : La volatilité du sous-jacent
- N : probabilité d'une distribution normale

La formule de base pour l'évaluation d'une option européenne sur un actif ne payant pas de dividendes est la suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui permet de calculer la valeur d'une option européenne en fonction du temps et de la valeur du sous-jacent. En effectuant plusieurs changements de variables, tout en considérant r et σ constants, la solution est la suivante :

Prix d'une option d'achat (call) :

Le prix théorique d'une option d'achat est calculé par la formule suivante :

$$C = SN(d1) - Xe^{-rt}N(d2)$$

Prix d'une option de vente (put)

Le prix d'une option de vente est calculé par la formule suivante :

$$P = Xe^{-rt}N(-d2) - SN(-d1)$$

où :

$$d1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d2 = d1 - \sigma \sqrt{T}$$

Les termes $N(d1)$ et $N(d2)$ représentent le nombre de sous-jacent que l'on doit acheter aujourd'hui pour se couvrir et la probabilité que l'option finisse dans l'argent. Donc les termes $N(d1)$ et $N(d2)$ vont se modifier avec les mouvements du sous-jacent et vont modifier le portefeuille de couverture de manière continue.

2.5.1 Simulation du prix des options Call et Put sous matlab

Nous souhaitons calculer le prix d'un call et d'un put européen sur une action sous-jacente qui cote actuellement (S) unité monétaire, d'échéance T avec un prix d'exercice K , et une volatilité de la rentabilité σ . Avec un taux sans risque r . Les données du calcul d'évaluation de l'option sont présentées dans le tableau suivant :

Nous avons montré dans le chapitre précédent, que la solution de l'équation d'un call de prix S , de strike K et de maturité T est :

Alors Maintenant, pour mieux constater l'impact des paramètres de l'équation de Black Scholes sur le prix

S	K	σ	T	r
100	100	0.1	300	0.05

TABLE 2.1 – Tableau de calcul du prix d'une option

des Calls et des Puts, nous avons opté pour une augmentation respective des valeurs de ces derniers, ce qui a donné les valeurs suivantes après calcul :

S	K	σ	T	r	C	P
100	100	0.1	300	0.05	5.91	1.88
120	100	0.1	300	0.05	30.38	0.02
100	130	0.1	300	0.05	4.50	24.79
100	100	0.3	300	0.05	14.80	8.70
100	100	0.1	330	0.05	6.32	28.32
100	100	0.1	300	0.1	8.75	0.86

TABLE 2.2 – les déterminants du prix des options

Interprétations

- et on pour $S = 120$ on remarque que les valeurs de Put sont inférieures à zéro. Cela se fait en calculant la valeur intrinsèque, où sa valeur en cas de vente est égale à $(K-S)$ et les valeurs de Call sont supérieures à zéro. Parce que la valeur intrinsèque en cas d'achat est sa valeur $(S-K)$ dans ce cas on n'exerce pas l'option de vente (Put) et exerce l'option d'achat (Call). et donc nous disons qu'une . Une augmentation du prix de l'action sous-jacente implique une augmentation du prix du call et une baisse du prix du put.

- D'après les tableaux on remarque que pour $K = 130$ les valeurs de Put sont supérieures à zéro en calculant la valeur intrinsèque $(K-S)$ et les valeurs de Call sont inférieures à zéro où sa valeur en cas de vente est égale à $(S-K)$ dans ce cas on exerce l'option de vente (Put) et n'exerce pas l'option d'achat (Call). et donc nous disons

qu'une augmentation du prix d'exercice implique une baisse du prix du call et une augmentation du prix du put.

- Une augmentation de la volatilité l'action implique une augmentation du prix du call et du prix du put.
- Une augmentation du temps restant jusqu'à l'échéance implique une augmentation du prix du call et du prix du put.
- Une augmentation du taux sans risque implique une augmentation du prix du call et une baisse du prix du put.

2.5.2 Simulation de la fonction d'un call

on

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2)$$

avec : d_1 et d_2 donnés précédemment.

$N(.)$ est la distribution cumulative de la loi normale. A des fins pédagogiques, voici le programme d'évaluation d'un call

```

function C=CallBs (S,K,t,sigma,r)
S=100;
K=100;
t=300;
sigma=0.1;
r=0.05;
T=t/365;
%calcul de d1
d1=(log(S/K) + (r+0.5*sigma^2) *T) / (sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
%calcul de N1
N1=0.5* (1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
C=S*N1-K*exp(-r*T)*N2
end

```

FIGURE 2.3 – Représentation la simulation du option d'achat par le code Matlab

2.5.3 Simulation de la fonction d'un put

La formule utilisée pour le calcul d'un put européen est :

$$P(t, S_t) = -S_t N(-d_1) + K \exp(-rT) N(-d_2)$$

Le programme Matlab permettant ce calcul :

```

function P=PutBs (S,K,t,sigma,r)
S=100;K=100;t=300;sigma=0.1;r=0.05;T=t/365
%calcul de d1
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2) *T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
%calcul de N1
N1=0.5*(1+erf(-d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(-d2/sqrt(2)));
P=K*exp(-r*T) *N2-S*N1
end

```

FIGURE 2.4 – Représentation la simulation du option de vente par le code Matlab

2.6 Les Rendements

Dans le modèle de Black-Scholes, l'expression de la dynamique d'un actif S s'écrit :

$$\frac{\partial S_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t. \text{ Elle admet comme solution : } S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}.$$

Où :

- S_t désigne la valeur d'un titre à la date $t \in [0, \infty[$ qui prend la valeur S_0 en $t = 0$.
- μ est le paramètre de dérive.
- σ est la volatilité.
- B_t est le Brownien standard.

Par conséquent, le rendement de l'actif entre t et $t+h$ vaut :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \times (t+h) + \sigma B_{t+h}}}{S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}}$$

De plus comme B_{t+h} et B_t sont des mouvements Brownien standard, la différence $B_{t+h} - B_t$ est de même loi que B_t . Ceci nous amène à $\frac{S_{t+h}}{S_t} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma B_h}$ variable aléatoire log-normale indépendante de t , de moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance σ^2 .

Nous poserons par la suite $r(h) = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma B_h$.

Ainsi, pour un échantillon x_1, \dots, x_n iid de rendement, la vraisemblance de rendement sur une période de ce modèle s'écrit :

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}}$$

2.7 Estimation des paramètre du modèle de black scholes

Utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de notre modèle.

Nous avons les données suivantes :

$$\text{Prix } S(0) = S_0, \quad S(h) = s_h, \dots, S(nh) = S_{nh}, \quad 1 \leq j \leq n$$

d'où on extrait les rendements : $x_j = \ln(s_j) - \ln(s_{j-1})$, $1 \leq j \leq n$

Proposition : Les estimations de μ et σ , par la méthode du maximum de vraisemblance, dépendent seulement des rendements X_1, \dots, X_n et sont données par :

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{h} + \frac{S_x^2}{2h},$$

$$\hat{\sigma} = \frac{S_x}{\sqrt{h}},$$

$$\text{Où : } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\text{Et : } S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

Preuve : D'après la loi jointe des rendements, les rendements forment un bruit blanc (i.e. des observations indépendantes de même loi), gaussien. La fonction de densité jointe des rendements, étant donné S_0 , est le produit des densités gaussiennes

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} e^{-\frac{(x_j - h(\mu - \frac{\sigma^2}{2}))^2}{2\sigma^2h}}$$

Que l'on veut maximiser, pour $\mu \in \mathfrak{R}$ et $\sigma > 0$, cela équivaut à minimiser

$$\begin{aligned} g(\mu, \sigma) &= -\ln(L(\mu, \sigma)) \\ &= -\ln\left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} e^{-\frac{(x_j - h(\mu - \frac{\sigma^2}{2}))^2}{2\sigma^2h}}\right) \\ &= -\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}}\right)^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{(x_j - h(\mu - \frac{\sigma^2}{2}))^2}{2\sigma^2h}}\right) \end{aligned}$$

On voit que :

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma^2} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{x} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 h} \sum_{j=1}^n \left(x_j - \mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} \right) - \frac{n}{\sigma} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{x} \right)$$

Les deux dérivées sont nulles donc :

$$\frac{n}{\sigma^2} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{x} \right) = 0$$

$$\frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 h} \sum_{j=1}^n \left(x_j - \mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} \right) - \frac{n}{\sigma} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{x} \right) = 0$$

$\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ sont données par :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{h} + \frac{\sigma}{2} = \frac{\bar{x}}{h} + \frac{S_x^2}{2h} = \frac{1}{2h} (2\bar{x} + S_x^2) \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n x_j} = \frac{S_x}{\sqrt{h}} \end{cases}$$

2.8 Simulation des équations différentielle stochastique

2.8.1 Schéma d'Euler- Maruyama

Cette méthode consiste à calculer une approximation de $X(t)$ sur une discrétisation de l'intervalle $[0; T]$

Soit $X(t); t \in [0; T]$ le processus de diffusion solution de l'équation. Fixons un pas de temps $\Delta t > 0$ et notons τ_i la suite des instants de discrétisation

$$\tau_i = i \Delta t$$

Soit (W_i) la suite des incèments de la discrétisation correspondante du mouvement Brownien $W_t, t \geq 0$.

$\forall i \geq 0$

$$\Delta W_i = W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i}$$

Le schéma d'Euler-Maruyama est donné par :

$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i) \Delta t + \sigma(X_i, t_i)(\Delta W_i)$$

Par définition du mouvement Brownien, la suite (ΔW_i) est une suite de vecteur aléatoire, indépendants et de meme loi.

Chacune des coordonnées de ΔW_i suit la loi normale $N(0; \Delta t)$ de moyenne 0 et de variance Δt (d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$)

Donc le schéma d'Euler-Maruyama devient :

$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i) \Delta t + S(X_i, t_i) \sqrt{\Delta t}(Z_i)$$

Où Z sont des variables i :i :d de loi $N(0; 1)$.

Ce schéma à un ordre forte convergence égale à 1/2

Exemple on a l'EDS suivant :

$$dS_t = 0.03dt + 0.15dW_t$$

le programme en MATLAB nous donne la simulation de Schéma d'Euler

```
%la simulation de Schéma d'Euler
n=1000;
T=10;
dt=T/n;
a=0.03;
b=0.15;
y(1)=2;
for i=1:n
    w=sqrt(dt)*rand;
    y(i+1)=y(i)+a*y(i)*dt+b*y(i)*w;
end
plot(y)
```

FIGURE 2.5 – La simulation de Schéma d'Euler

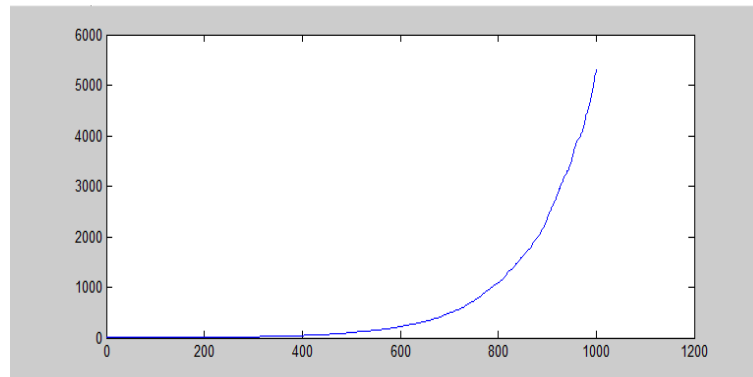


FIGURE 2.6 – Une représentation graphique de schéma d'Euler

2.8.2 Schéma de Milstein

Milstein a proposé une approximation du second ordre, utilise à nouveau le calcul stochastique différentiel. le schéma itératif est le suivant :

$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i) \Delta t + S(X_i, t_i)(\Delta W_i) + \frac{1}{2}S(X_i, t_i)\frac{dS}{dX}(X_i, t_i)[(W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i})^2 - \Delta t]$$

où $i = 1, 2, 3, 4 \dots$

en prend le meme exempl

$$dS_t = 0.03dt + 0.15dW_t$$

Le programme en MATLAB nous donne la simulation de shéma de Milstein

```

%Simulation de Schéma de Milstein
n=1000;
T=1;
dt=T/n;
a=0.03;
b=0.15;
y(1)=2;
for i=1:n
    w=sqrt(dt)*rand;
    y(i+1) = y(i) + a*y(i)*dt+b*y(i)*w+0.5*b^2*y(i)*dt*(randn^2-1);
end
plot(y)
    
```

FIGURE 2.7 – La simulation de shéma de Milstein

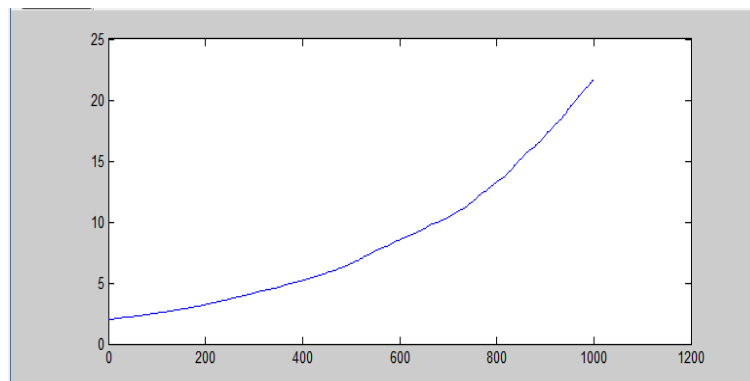


FIGURE 2.8 – Une représentation graphique de schéma de Milstein

2.8.3 Schéma d’Euler-Maruyama sur Modèle Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec $S_0 = 1$

et μ et σ sont des réels constantes, par identification avec l’èquation (3)

$$b(X_i, t_i) = \mu S_t \text{ et } S(X_i, t_i) = \sigma S_t$$

La solution analytique ou explicite de ce problème est connue :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

On prend $\mu = 2$; $\sigma = 1$ sur l'intervalle $[0; 1]$ avec $\Delta t = 1/1000$. Le logiciel Matlab donne le programme suivant :

```

%EM methode Euler-Maruyama pour EDS" black scholes"
% EDS is dX = mu*X dt + sigma*X dW, X(0) = Xzero,
% mu = 2, sigma = 1 and Xzero = 1.
% discrétisation des trajectoires browniens [0,1] & dt = 2^(-8).
% Euler-Maruyama utilise temps de discrétisation R*dt.

randn('state',500)
mu = 2; sigma = 1; xzero = 1;
T = 1; N = 2^8; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW);
Xtrue = xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*W);
plot([0:dt:T],[xzero,Xtrue],'b'), hold on

R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
Xem = zeros(1,L);
Xtemp = xzero;
for j = 1:L
    Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
    Xtemp = Xtemp + Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp*Winc;
    Xem(j) = Xtemp;
end
emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end));
plot([0:Dt:T],[xzero,Xem],'m--'), hold off
legend('solution exact','Schema Euler ','location','best')
    
```

FIGURE 2.9 – Simulation de modèle Black Scholes par le schéma d’Euler-Maruyama

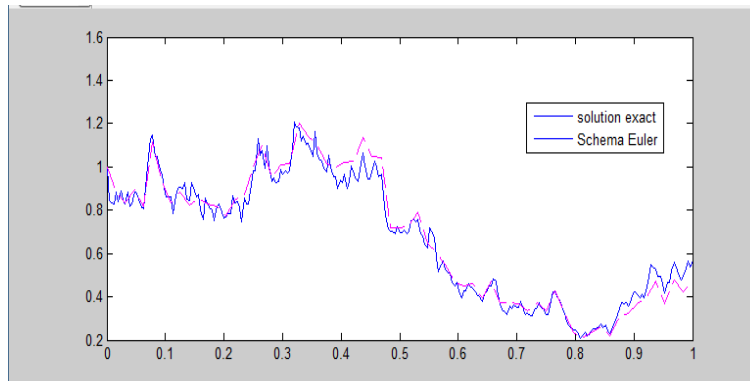


FIGURE 2.10 – Comparaison de l’approximation d’Euler-Maruyama et d’une trajectoire de L’EDS précédente(La Solution exacte du modèle Black Scholes)

2.8.4 Schéma de Milstein sur modèle Black Scholes

```

%Schéma Milstein pour EDS" black scholes"
% EDS is dX = mu*X dt + sigma*X dW, X(0) = Xzero,
% mu = 2, sigma = 1 and Xzero = 1.
% discrétisation des trajectoires browniens [0,1].
randn('state',500)
mu = 2; sigma = 1; Xzero =1;
T = 1; N = 2^8; dt = 1/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW);
Xtrue = Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'b'), hold on
R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
    Winc = sum(dW(:,R*(j-1)+1:R*j),2);
    Xtemp = Xtemp + Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp.*Winc+...
        0.5*sigma^2*Xtemp.*(Winc.^2 - Dt);
    Xem(j) = Xtemp;
end
plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem],'r--'), hold off
legend('solution exact','Schema Milstein','location','best')

```

FIGURE 2.11 – Simulation de modèle Black Scholes par le schéma Milstien

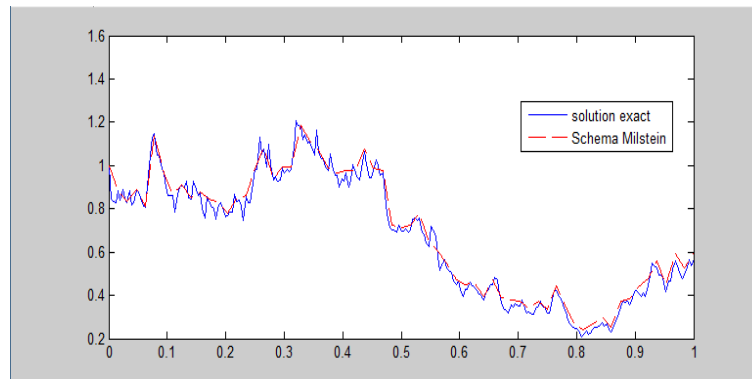


FIGURE 2.12 – Comparaison de l’approximation de Milstien et d’une trajectoire de L’EDS précédente (La Solution exacte du modèle Black Scholes)

2.9 Estimation de la volatilité

2.9.1 La Méthode historique

L’estimation de la volatilité, à partir des données historiques, a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black Scholes (1972)[10], Galai (1977) et Finnerty (1978). La volatilité historique est mesurée par l’écart type du rendement R_t du sous-jacent, durant la période qui précède l’émission des options. Si on fait abstraction des dividendes, si on désigne par $S_t d_t$ et S_t le cours du sous-jacent, respectivement, au début et à la fin de période, ce rendement s’écrit :

$$R_t = \frac{S_t - S_t - d_t}{S_t - d_t} = \frac{dS}{S} = dLnS$$

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique suivant l’équation $\frac{dS}{S} = \mu d_t + \sigma d_z$ où d_z est un processus de Wiener-Lévy (ce qui est équivalent à dire que la variable d_z suit une loi normale centrée de variance d_t). Il est équivalent d’affirmer que R_t suit une loi log-normale ou

que $Ln(1 + R_t)$ suit une loi Normale ,ou encore, $ln(S_t/S_{t-1})$ suit une loi Normale. La volatilité σ du rendement instantané est supposée être constante dans le modèle de Black Scholes. Avec des observations rapprochées du cours du sous-jacent il est possible d'estimer la volatilité instantanée. Suivant l'hypothèse de constance de la volatilité de Black Scholes , la meilleure estimation de la volatilité, pour des données journalières ,est la racine carrée de la variance empirique sans biais (σ^2) ,donnée par les formules suivantes :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(Ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \mu \right)^2,$$
$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

avec n est le nombre de jours ouvrables passés et , par conséquent , le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité. En général, on retient un nombre de jours , égal à la durée de vie résiduelle de l'option.

Dans la formule de Black Scholes, l'unité de temps pour mesurer les paramètres est, par convention, l'année. Ceci est vrai , en particulier, pour la volatilité. Ainsi, si on considère un nombre de jours ouvrables de 250 par an, la volatilité annualisée est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{AN} = \sigma \sqrt{\frac{250}{\Delta_t}}$$

L'hypothèse de Black Scholes concernant la stationnarité du prix du sous-jacent n'est pas conforme à la réalité. D'ailleurs la volatilité historique ne peut être que stochastique, rien qu'en considérant une période de calcul , sous la forme d'une fenêtre coulissante, dans le temps.

En fait , sa valeur dépend du nombre d'observations à considérer pour son calcul , ainsi que l'intervalle de temps entre deux observations consécutives. Cette approche a été critiquée, principalement, pour le fait qu'elle suppose que la perception du risque par les investisseurs est, uniquement, reliée à la variabilité des cours des actions dans le passé. Par conséquent , nous pouvons dire qu'elle représente une estimation biaisée de la volatilité des marchés, ce qui se traduit dans l'écart important constaté entre le prix de marché de l'option et son prix théorique.

En considérant un passé égal, dans sa durée, à la durée de vie résiduelle d'une option (jours ouverts uniquement), les résultats du calcul de la volatilité historique, pour l'ensemble de la base journalière, sont illustrés dans la figure 01, avec des données, triées, selon la chronologie

2.9.2 La Formule de la Volatilité implicite

on :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} C^{BS(\sigma)} = (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} C^{BS(\sigma)} = S_t \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} = S_n(d_1)\sqrt{T-t} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma^2} = \frac{S_n(d_1)\sqrt{T-t}}{\sigma} \left\{ \frac{\log^2 m}{\sigma^2(T-t)} - \frac{\sigma^2(T-t)}{4} \right\} \quad (2.30)$$

ou $m = \frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}$ est le moneyness de l'option. on montre que la fonction $\sigma \rightarrow C^{BS(\sigma)}$ est convexe sur l'intervalle $(0, \sqrt{\frac{2|\log m|}{T-t}})$ et concave sur $(\sqrt{\frac{2|\log m|}{T-t}}, \infty)$ ceci implique que l'équation $C^{BS}(\sigma) = C$

$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ < C < S_t$$

peut être résolu par la méthode de Newton en utilisant l'algorithme suivant :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2|\log m|}{T-t}}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C^{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)}$$

car la série $(\sigma_n) \geq 0$ sera monotone. En pratique, lorsque C est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée $\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$ devient trop petite, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bisection. La solution $I(C)$ de l'équation $C^{BS}(\sigma_n) = C$, ou C est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la volatilité implicite de cette option. Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule I à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que :

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Les Coefficients de sensibilité des options et Méthodes d'estimation

3.1 Introduction

Les grecques sont des dérivées d'une valeur d'option par rapport à différents paramètres. Ils permettent de quantifier la sensibilité d'une option à ses différents paramètres et sont utilisés dans les stratégies de réplcation et de couverture d'options ou de portefeuilles d'options. Ils sont appelés grecques parce qu'ils sont représentés par des lettres grecques (exception faite de Vega qui bien que considéré comme grecques n'est pas une lettre grecque).

- Le Delta Δ d'une option représente la variation du prix de l'option par rapport à la variation de l'actif sous-jacent.
- Le Gamma Γ d'une option se définit comme la variation du Δ par rapport à celle de l'actif sous-jacent.
- Le Thêta Θ d'une option détermine la sensibilité de l'option par rapport à une variation de la durée de vie de l'option.
- Le Vega d'une option (également appelé Lambda Λ) équivaut à la variation de l'option par rapport à la volatilité.
- Le Rho d'une option représente la sensibilité de l'option par rapport à une variation du niveau des taux d'intérêt.

Il existe d'autres grecs comme speed (ordre 3), charm (ordre 2), color (ordre 3), etc., mais nous nous étendons sur ceux cités ci-dessus, qui ont plus d'applications.

Les Grecques ont été les premiers à développer une méthode pour estimer la valeur des options européennes. La méthode des trajectoires consiste à simuler de nombreux scénarios possibles pour le prix de l'actif sous-jacent à l'aide d'un modèle stochastique, tel que le modèle de Black-Scholes. Ensuite, la valeur de l'option est

estimée en calculant la moyenne des paiements futurs actualisés pour chaque scénario. Cette méthode est très utile pour les options complexes avec plusieurs sources de risque.

La méthode du rapport de vraisemblance est une autre technique utilisée pour estimer la valeur des options européennes. Cette méthode se concentre sur l'estimation de la volatilité implicite, qui est la volatilité du prix de l'actif sous-jacent qui rend la valeur théorique de l'option égale au prix du marché observé. Cette méthode repose sur l'hypothèse que les prix du marché sont efficaces et que les participants au marché utilisent toutes les informations disponibles pour évaluer les options.

Notre étude débutera tout d'abord par la définition des greeks, nous présenterons les méthodes d'estimations et l'extension que nous en tirerons. Par la suite nous testerons nos propositions par simulation Monte Carlo puis analyserons les résultats obtenus.

3.2 Les Grecques

les sensibilités du prix du call à ses divers paramètres sont couramment regroupées sous le vocable "Les grecques" dans la littérature financière. Ces "grecques" sont de toute première importance s'agissant de la couverture des portefeuilles. Les sections qui suivent portant sur les principales grecques.

3.2.1 Delta d'une option

Le Delta mesure la sensibilité du prix de l'option au prix de son sous-jacent, c'est à dire une action dans le cas d'une option écrite sur une action. Il est, donc, la dérivée partielle première de la valeur de l'option, par rapport au cours du sous-jacent. C'est, donc, la pente de la courbe qui relie le prix de l'option au cours du sous-jacent. On peut écrire :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Delta d'un CALL

Le delta d'un call, calculé à partir de la formule de Black Scholes, est égale à :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} [SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)]$$

En dérivant, par rapport au prix du sous-jacent, on obtient :

$$\Delta_C = N(d_1) + SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Comme, on a : $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$, en dérivant par rapport au prix du sous-jacent, on peut écrire : $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$

En tenant compte de ces égalités dans l'équation précédente du Delta, cette équation devient :

$$\Delta_C = N(d_1) + \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} [SN'(d_1) - Ke^{-rT} N'(d_2)]$$

En tenant compte de l'équation de base ($[SN'(d_1) - Ke^{-rT} N'(d_2)]$), l'expression définitive du Delta pour un call est donc :

$$\Delta_C = N(d_1)$$

Puisque le Delta d'un call est équivalent à une probabilité, il est compris entre zéro et l'unité : $0 \leq \Delta_C \leq 1$

Simulation et graphes

```
% Paramètre du modèle Black Scholes
sigma=0.25;
div=0.03;
r=0.1;
K=100; % Prix d'exercice de l'option
T=0.2; % échéance de l'option
% Prix de l'actif sous-jacent
S=80:150;
% Calcul du Delta pour chaque prix de l'actif sous-jacent
d1=(log(S/K)+(r-div+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
del=normcdf(d1);
% Affichage de graphe
plot(S,del)
xlabel('Prix de l'actif sous-jacent')
ylabel('Delta')
title('Graphe de Delta d un call en fonction du Prix de l'actif sous-jacent')
```

FIGURE 3.1 – Programme Matlab pour calculer le delta d'un call

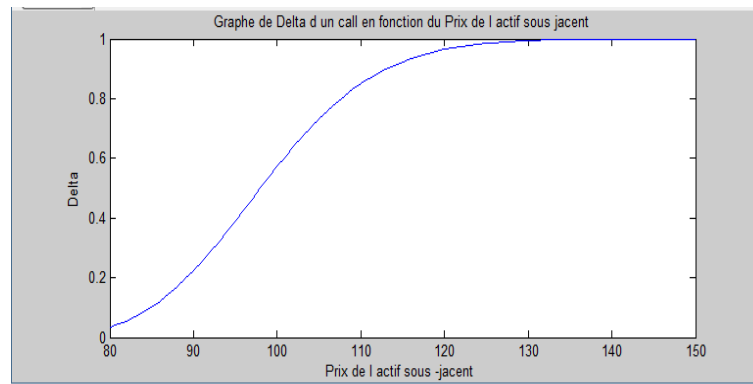


FIGURE 3.2 – Evolution du Delta d'un call par rapport au sous-jacent

Interprétation du Delta en cas d'achat

D'après le graphe on remarque que : A travers la courbe, on voit que le delta dans le cas d'achat prend des valeurs positives et est confiné entre 0 et 1 alors : Lorsque le prix d'exercice (le prix d'exercice égal 100) est supérieur au prix de l'actif sous-jacent, le delta reviendra à 0 ,et lorsque le prix d'exercice est égal au prix de l'actif sous-jacent, le delta devient 0.5 ,et lorsque le prix d'exercice est inférieur au prix d'origine, le delta se rapproche de 1.

Le delta d'un PUT

On peut recourir à la parité put-call pour calculer le delta d'un put européen écrit sur une action qui ne verse pas de dividendes. On a la relation suivante entre un put et un call en vertu de la parité put-call :

$$C - P = S - Ke^{-rT}$$

En dérivant, cette équation, membre à membre, par rapport au prix du sous-jacent, on peut écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial P}{\partial S} = 1$$

Soit : $\Delta_C - \Delta_P = 1$ donc, le Delta d'un put est donné par la relation :

$$\Delta_P = \Delta_C - 1 = N(d_1) - 1$$

Comme $N(d_1) < 1$, le delta d'un put est toujours négatif. Le prix d'un put est d'autant plus élevé que le prix de l'action se situe en deçà du prix d'exercice.

Simulation et graphes

```

% Paramètre du modèle Black Scholes
sigma=0.21;
r=0.05;
K=95; % Prix d'exercice de l'option
T=0.8; % échéance de l'option
%Prix de l'actif sous-jacent
S=60:140;
%Calcul du Delta pour chaque prix de l'actif sous-jacent
d1=(log(S/K)+(r-div+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
N=@(x)normcdf(x);
del=-N(-d1);
%Affichage de graphe
plot(S,del)
xlabel('Prix de l actif sous -jacent ')
ylabel('Delta')
title('Graphe de Delta d un Put en fonction du Prix de l actif sous jacent')

```

FIGURE 3.3 – Programme Matlab pour calculer le delta d'un put

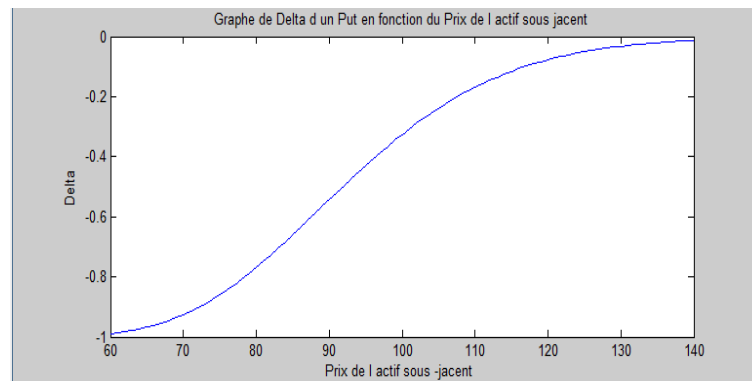


FIGURE 3.4 – Evolution du Delta d'un put par rapport au sous-jacent

Interprétation du Delta en cas de vente

On remarque qu'en cas de vente : le delta prend des valeurs négatives confinées entre 0 et -1 donc : Dans le cas où le prix d'exercice (prix d'exercice égal 95) est plus petit et inférieur au prix de l'actif sous-jacent le delta sera nul, Dans le cas où le prix d'exercice est très proche du prix de l'actif sous-jacent, alors le delta se rapproche à 0.5, Dans ce dernier cas, le prix d'exercice est supérieur au prix de l'actif sous-jacent donc le delta devient -1 .

Nous résumons cela dans :

Le delta d'une option très en de dans de la monnaie (Deep In The Money ou DITM) est très proche de 1 (call) et de -1 (put). Toute variation du sous-jacent est répercutée intégralement sur la prime de l'option ce qui veut dire que l'option se déplacera point par point avec le sous-jacent.

Le delta d'une option très en de hors de la monnaie (Out of The Money ou OTM) est proche de 0, ce qui signifie que tout mouvement sur le cours du sous-jacent a un impact négligeable sur la prime de l'option. Dans ce cas, la position est dite « *deltaneutre* » et correspond à une stratégie qui est insensible à l'évolution du cours du sous-jacent.

Le delta peut être aussi interprété comme la probabilité qu'une option finisse dans la monnaie (In The Money

ou ITM). L'investisseur qui connaît le delta d'une option peut donc avoir une idée quant à la variation future du prix de l'option.

3.2.2 Gamma d'une option

Le Gamma est la sensibilité du delta par rapport au cours du sous-jacent. C'est donc, la dérivée du Delta par rapport au sous-jacent par conséquent la dérivée seconde de la valeur de l'option, par rapport au cours du sous-jacent, soit :

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad \text{Pour un call, et}$$

$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \quad \text{Pour un put}$$

Gamma d'un call

Le Gamma d'un call ne peut être connu, sous une forme analytique, que lorsque la relation qui lie la valeur de l'option à ses déterminants est connu elle-même sous forme analytique, comme c'est le cas pour le modèle de Black Scholes.

Conformément à ce modèle, le Gamma d'un call peut s'écrire :

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}(N(d_1)) = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S}$$

$$\Gamma_C = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Selon le modèle de Black Scholes le Gamma du call n'est autre que la fonction de densité de probabilité du prix du sous-jacent qui suit une loi log-normale de moyenne $\ln\left(Kr^{-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)$ et d'écart type σ . le terme de l'exponentielle n'est autre que le drift du processus du logarithme de la valeur du sous-jacent à l'échéance.

Gamma d'un put

Le Gamma d'un put, selon le modèle de Black Scholes, s'écrit comme suit :

$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(N(d_1) - 1) = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} = \Gamma_C$$

Ce qui est conforme à la relation de parité call-put qui donne le même résultat, en dérivant deux fois, par rapport au prix du sous-jacent, membre à membre. Ce résultat est, également, confirmé par le graphique ().

Simulation et graphe

```
function [gamma]=call_gamma(S,K,r,sigma,T)
%calcul le gamma d'un call europeen
sigma=0.21; %la volatilité du sous-jacent
r=0.05; %taux d'intérêt sans risque
K=95; % Prix d'exercice de l'option
T=0.5; %durée jusqu'a l'échéance du call
S=60:130; %Prix de l'actif sous-jacent
%Calcul du Delta pour chaque prix de l'actif sous-jacent
gamma=blsgamma(S ,K ,r ,T ,sigma)
%Affichage de graphe
plot(S,gamma,'r')
xlabel('Prix de l actif sous -jacent ')
ylabel('Gamma')
title('Graphe de Gamma d une option en fonction du Prix de l actif sous jacent')
```

FIGURE 3.5 – Programme matlab qui calcule le gamma d’une option

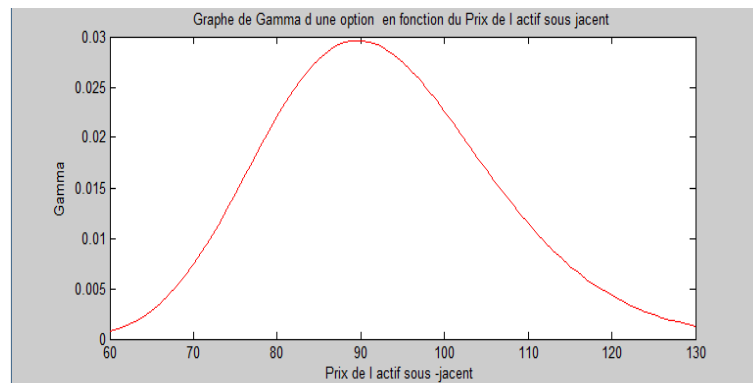


FIGURE 3.6 – Évolution du Gamma par rapport au sous-jacent

Interprétation du Gamma

Le delta d’une option n’est pas une valeur fixe et varie si le prix du sous-jacent augmente ou diminue. Le gamma mesure la variation du delta pour une variation d’une unité dans le prix du sous-jacent.

De la courbe suivante, on note que :

Le gamma d’une option achetée (call ou put) est toujours positif et entre 0 et 1.

Le gamma prend sa valeur la plus élevée lorsque le prix d’exercice est très proche ou égal au prix de l’actif sous-jacent. c’est à dire que Le gamma est maximal pour les options à la monnaie (At The Money ou ATM). Il tend vers zéro pour les options très en de dans de la monnaie (Deep In The Money ou DITM) ou en de hors de la monnaie (Out of The Money ou OTM).

Et nous disons que :

Un gamma faible indique que les variations constatées sur le sous-jacent ont peu d’effet sur le delta de l’option.

Un gamma fort indique que les variations du sous-jacent agissent fortement sur le delta.

3.2.3 Thêta d'une option

Le passage du temps est une autre source de la variation de la valeur d'une option. D'une manière générale (sauf pour les puts européens) les valeurs des options sont d'autant plus élevées que leurs échéances sont éloignées. La valeur d'une option diminue, en général, au fil du temps, toutes choses égales par ailleurs.

La sensibilité de la valeur d'une option au passage du temps est désignée par Thêta. Elle est donc la dérivée première de la valeur de l'option par rapport au temps. Soit :

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{Pour un call, et}$$

$$\Theta_P = \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{Pour un put}$$

Le Thêta d'un call et celui d'un put, selon le modèle de Black Scholes, sont représentés, dans la figure ()

Thêta d'un call

Selon le modèle de Black Scholes, on peut établir l'expression analytique du Thêta pour un call. Soit :

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial T}$$

Soit, en remplaçant la valeur de l'option par son expression dans la formule de Black-Scholes, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2))$$

Soit, en dérivant, par rapport à la durée de vie résiduelles T, on a :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + rKe^{-rT}N(d_2) - Ke^{-rT}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}$$

Or, la quantité d_1 , relative à la formule de Black Scholes, peut s'écrire, sous la forme :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\sqrt{T}$$

En dérivant cette quantité, par rapport à la durée de vie résiduelle T, on a :

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{1}{\sqrt{T}}$$

Soit, en réarrangeant cette expression, on obtient :

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} = -\frac{1}{2T} \left[\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\sqrt{T} \right] + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{1}{\sqrt{T}}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} = -\frac{d_1}{2T} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{1}{\sqrt{T}}$$

D'un autre côté, on a : $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

En dérivant la quantité d_2 , par rapport à la durée de vie résiduelle de l'option T, il vient :

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{1}{2\sqrt{T}}\sigma = -\frac{d_1}{2T} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{1}{2\sqrt{T}}\sigma = -\frac{\partial d_1}{\partial T} + \frac{r}{\sigma\sqrt{T}}$$

En remplaçant les dérivées de d_1 et d_2 , par rapport à T, par leur expression, la dérivée de la valeur de l'option par rapport à T, s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = SN'(d_1) \left[-\frac{\partial d_1}{\partial T} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{1}{\sqrt{T}} \right] + rKe^{-rT}N(d_2) - Ke^{-rT}N'(d_2) \left[-\frac{d_1}{2T} + \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} \right]$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{S'(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(d_2) + [SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)] \left(-\frac{\partial d_1}{\partial T} + \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Or, d'après la relation de base () on a $SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2) = 0$. D'où la formule définitive du Thêta de l'option d'achat, suivant le modèle de Black-Scholes qui n'est autre que l'opposé de la dérivée de la valeur du call par rapport à la durée de vie résiduelle de l'option :

$$\theta_C = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

Le Thêta d'un call, calculé selon le modèle de Black Scholes, est toujours négatif, ce qui se confirme sur le graphique suivant

Simulation et graphes

```

%definition des parametre
S=50;
K=55;
r=0.05;
T=linspace(0,1,100);
sigma=0.3;
%calcul de theta
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
theta=(-S.*normpdf(d1)*sigma./(2*sqrt(T)))-r*K*exp(-r*T).*(1-normcdf(d2));
%Affichage du graphe
plot(T,theta)
xlabel('temps jusqu a expiration ')
ylabel('theta')
title('valeur de theta en fonction temps jusqu a expiration ')

```

FIGURE 3.7 – Programme matlab qui calcule le thêta d'un call

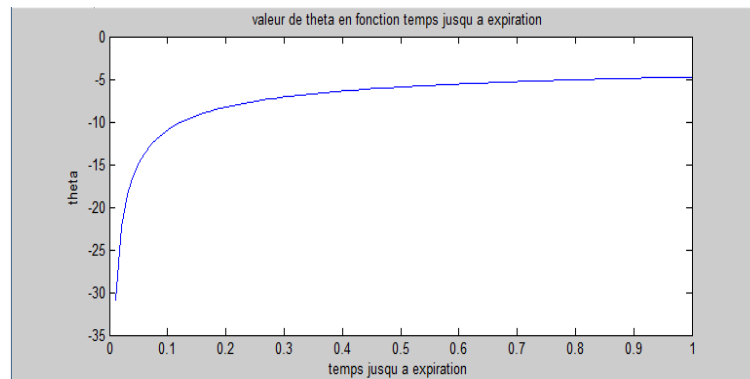


FIGURE 3.8 – Évolution du theta par rapport au temps

Thêta d'un put

La relation de parité call-put s'écrit : $C - P = S - Ke^{-rT}$

En dérivant, par rapport au temps, on peut écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} = -rKe^{-rT}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\Theta_P = \Theta_C + rKe^{-rT}$$

D'où l'expression analytique du thêta d'un put, selon le modèle de Black-Scholes :

$$\theta_P = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}(1 - N(d_2))$$

Le Thêta d'un put est parfois positif parfois négatif, comme c'est illustré dans la figure suivante

Simulation et graphes

```

%definition des parametre
S=50;
K=55;
r=0.05;
T=linspace(0,1,100);
sigma=0.3;
%calcul de theta
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
theta=(-S.*normpdf(d1)*sigma./(2*sqrt(T)))+r*K*exp(-r*T).*(1-normcdf(d2));
%Affichage du graphe
plot(T,theta)
xlabel('temps jusqu a expiration ')
ylabel('theta')
title('valeur de theta en fonction temps jusqu a expiration ')

```

FIGURE 3.9 – Programme matlab qui calcule le thêta d'un put

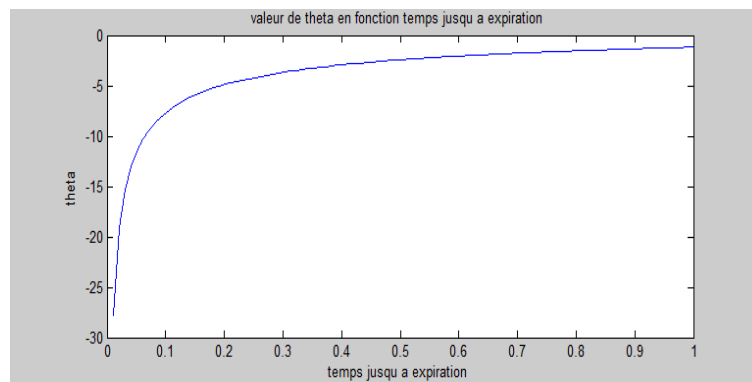


FIGURE 3.10 – Évolution du thêta par rapport au temps

Interprétation du Thêta

Le Thêta mesure la variation de la prime (prix) d'une option (call ou put) lorsque le temps restant à maturité (durée résiduelle) se réduit d'une unité.

Et maintenant, à travers la courbe, nous remarquons que :

La valeur de thêta augmente avec l'augmentation de la date d'expiration du contrat.

Le Thêta indique donc la valeur qui va être retranchée du prix de l'option à chaque unité de temps.

La valeur du Thêta est également influencée par la proximité du cours du sous jacent avec le prix d'exercice.

Lorsque l'option est à la monnaie (prix d'exercice = cours du sous jacent), la valeur temps est très importante du fait que la valeur intrinsèque elle est très faible. Plus le prix d'exercice est éloigné, plus la probabilité que le cours l'atteigne est faible et par conséquent, la valeur temps sera faible et le Thêta aussi.

3.2.4 Véga d'une option

Contrairement, à l'une des hypothèse du modèle de Black Scholes, la volatilité du sous-jacent n'est pas constante, dans la pratique. elle est même stochastique. En élaborant leurs stratégies, les opérateurs doivent tenir compte de cette source de risque, constituée par le caractère aléatoire de la volatilité future du sous-jacent.

Ainsi, la sensibilité de la valeur de l'option à un changement de la volatilité, désignée par la lettre Véga, présente, dans la pratique, un intérêt certain. Le Véga est la dérivée de la valeur de l'option, par rapport à la volatilité. Soit :

$$v_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad \text{Pour un call, et}$$

$$v_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad \text{Pour un put}$$

Véga d'un call

Selon le modèle de Black Scholes, on peut établir l'expression analytique du Véga pour un call. Soit :

$$v_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)) = S \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma}$$

En calculant les dérivées par rapport à la volatilité, le Gamma du call s'écrit :

$$v_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

Or, on a

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Cette quantité peut se mettre sous la forme :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + rT}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}$$

En posant $A = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + rT}{\sqrt{T}}$, la quantité d_1 s'écrit, sous la forme :

$$d_1 = \frac{A}{\sigma} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}$$

Par conséquent, la dérivée de d_1 , par rapport à la volatilité, s'écrit :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{A}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{T} = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{A}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) + \sqrt{T} = -\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{T}$$

D'un autre côté, on a $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Ainsi, la dérivée de d_2 , par rapport à la volatilité, s'écrit :

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T} = -\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{T} - \sqrt{T} = -\frac{d_1}{\sigma}$$

L'expression du Véga devient, donc :

$$v_C = SN'(d_1)\left(-\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{T}\right) - Ke^{-rT}N'(d_2)\left(-\frac{d_1}{\sigma}\right)$$

En réarrangeant cette équation, il vient :

$$v_C = S\sqrt{T}N'(d_1)\left(-\frac{d_1}{\sigma}\right) [SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)]$$

Or, d'après la relation $([SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)])$, on a $SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2) = 0$. Par conséquent, le Véga d'un call selon le modèle de Black Scholes s'écrit :

$$v_C = S\sqrt{T}N'(d_1)$$

Véga d'un put

D'après la relation de parité call-put, on a : $C - P = S - Ke^{-rT}$

Soit, en dérivant membre à membre, par rapport à la volatilité, on a :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} - \frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0$$

Ainsi, selon le modèle de Black Scholes, le Véga du put s'écrit :

$$v_P = v_C = S\sqrt{T}N'(d_1)$$

Simulation et graphes

```
%definition des parametre du call
S=100;
K=105;
r=0.05;
sigma=linspace(0,1,100);
T=0.5;
%calcul de vega pour chaque valeur de sigma
d1=(log(S/K)+(r+sigma.^2/2)*T)./(sigma*sqrt(T));
vega=S.*normpdf(d1).*sqrt(T);
%Affichage du graphe
plot(sigma, vega,'r')
xlabel('la volatilité')
ylabel('vega')
title('valeur de vega en fonction de la volatilité pour un call')
```

FIGURE 3.11 – Programme matlab qui calcule le vega d’une option

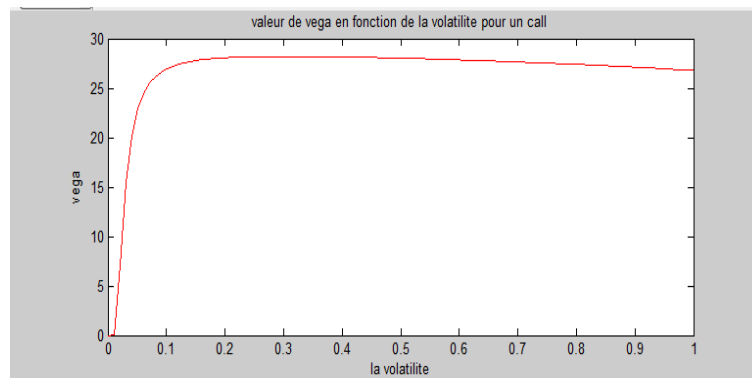


FIGURE 3.12 – Évolution du vega par rapport a la volatilité

Interprétation du Véga

Le véga mesure la variation du prix d’une option pour une variation de 1 dans la volatilité implicite.

A travers la courbe, on dit que chaque fois que la valeur de la volatilité augmente, la valeur de Vega augmente avec elle.

En revanche, le véga d’un call (achat) est égal au véga d’un put (vente), car la volatilité implique que la possibilité de gain ou de perte soit équivalente pour les deux parties

3.2.5 Rhô d’une option

Le rho mesure l’influence d’une variation du taux d’intérêt r sur la valeur d’une option. Cette sensibilité n’est pas très importante. Elle est souvent négligé dans la pratique.

La valeur du call augmente et celle du put diminue quand le niveau du taux d’intérêt r augmente.

Le Rho est, donc, la dérivée première de la valeur de l’option, par rapport au taux d’intérêt r .

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} \quad \text{pour un call, et}$$

$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{pour un put}$$

Rho d'un call

Selon le modèle de Black Scholes, le Rho peut être déterminé, comme suit :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2))$$

En décrivant, par rapport au taux d'intérêt r , on obtient :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + TKe^{-rT}N(d_2) - Ke^{-rT}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r}$$

Or, on a : $\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\sqrt{T}}{\sigma}$

On peut, donc, écrire :

$$\rho_C = TKe^{-rT}N(d_2) + (SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2))\frac{\sqrt{T}}{\sigma}$$

Or, d'après la relation $([SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)])$, on a : $SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2) = 0$

Ainsi, en simplifiant l'équation précédente, on obtient l'expression analytique du Rho d'un call, selon le modèle de Black Scholes :

$$\rho_C = TKe^{-rT}N(d_2)$$

Le Rho d'un call est , donc, toujours positif, comme c'est illustré dans la figure.

Simulation et graphes

```

%definition des parametre du call
S=100;
K=105;
r=linspace(0,1,100);
T=0.5;
sigma=0.2;
%calcul de Rho pour chaque valeur de r
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
Rho=K*T*exp(-r*T).*normcdf(d2);
%Affichage du graphe
plot(r,Rho,'y')
xlabel('taux d interet sans risque')
ylabel('Rho')
title('valeur de Rho en fonction taux d interet sans risque pour un call')

```

FIGURE 3.13 – Programme matlab qui calcule le Rhô d’un call

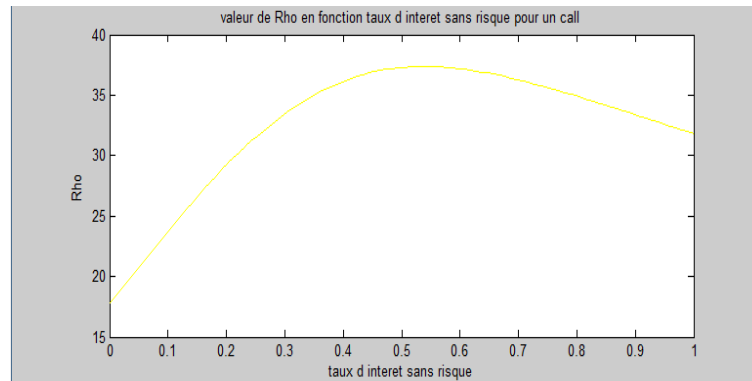


FIGURE 3.14 – Évolution du Rhô par rapport au taux d’intérêt sans risque

Interprétation du Rhô en cas d’achat

La valeur du Rho est toujours positive.

La valeur du Rho en cas d’achat augmente avec l’augmentation de la valeur de taux d’intérêt sans risque.

Rhô d’un put

D’après la relation de parité call-put, on a : $C - P = S - Ke^{-rT}$. En dérivant cette equation, membre à membre, par rapport au taux d’intérêt r , on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = TKe^{-rT}$$

Ce qui revient à écrire : $\rho_P = \rho_C - TKe^{-rT}$

D’où l’expression définitive du Rhô d’un put, selon le modèle de Black Scholes :

$$\rho_P = TKe^{-rT}(N(d_2) - 1) < 0$$

Simulation et graphe

```
%definition des parametre du Put
S=100;
K=105;
r=linspace(0,1,100);
T=0.5;
sigma=0.2;
%calcul de Rho pour chaque valeur de r
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
Rho=-K*T*exp(-r*T).*normcdf(-d2);
%Affichage du graphe
plot(r,Rho,'g')
xlabel('taux d interet sans risque')
ylabel('Rho')
title('valeur de Rho en fonction taux d interet sans risque pour un put')
```

FIGURE 3.15 – Programme matlab qui calcule le Rhô d'un put

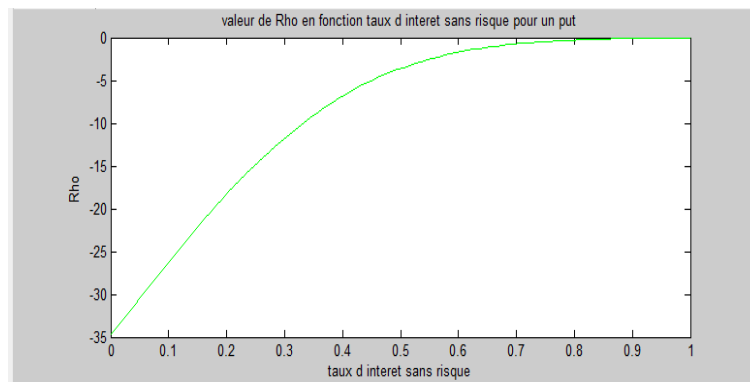


FIGURE 3.16 – Évolution du Rhô par rapport au taux d'intérêt sans risque

Interprétation du Rhô en cas de vente

En cas de vente, la valeur du Rho est toujours négative.

Le même changement dans le cas de la vente, une augmentation du taux d'intérêt, entraîne une augmentation de la valeur du Rho.

Et de lui c'est :

Lorsque le taux d'intérêt augmente, le prix d'achat augmente et le prix de vente diminue.

Une baisse du taux d'intérêt entraîne une hausse du prix de vente et une baisse du prix d'achat.

3.3 Méthodes d'estimation des grecques

3.3.1 Monte Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo ont pour objectif d'effectuer des calculs numériques des fonctionnelles de variables aléatoires. Ces méthodes remontent à l'époque de Laplace et Buffon qui ont effectués le calcul de la valeur numérique de π en utilisant la simulation de variable aléatoire, en pratique l'idée directrice consiste à réaliser une série d'expériences et ensuite calculer la moyenne des valeurs obtenues de chacune d'elles.

Principe de la méthode

Dans le cas d'une option, le problème de l'évaluation de son prix s'écrit pour $0 < t < T$:

$$M_f = E^Q[f(S_t)]$$

On utilisant le principe de base des méthodes de Monte-Carlo qui consiste à générer un grand nombre de trajectoires afin de calculer le prix de l'actif, Pour $0 < t < T$, en simulant N trajectoires indépendantes S_t^1, \dots, S_t^N . Pour chacune de ces trajectoires, on calcule alors le montant $f(S_t^i)$ des pay-offs correspondants ensuite considérons a_N un estimateur du prix dont il doit converger vers le paramètre M_f .

Les techniques de simulation par Monte-Carlo utilisent la loi forte des grands nombres pour estimer la valeur étudiée qu'on recherche M_f , donc si les courbes $S^i = [S_t^i, 0 < t < T]$ et $1 \leq i \leq N$, représentent N trajectoires indépendantes distribuées suivant une même loi, alors

$$a_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S^i) \rightarrow M_f$$

La détermination du nombre N de simulations nécessaires pour obtenir un estimateur satisfaisant du prix constitue l'un des problèmes auquel se trouve confronté le praticien. Plus la variance de $f(S^i)$ obtenu par l'utilisation du théorème central limite est élevée, plus le nombre de simulations nécessaires à l'obtention d'un estimateur précis est important. Si la réalisation d'une simulation est très coûteuse en temps de calcul, il est intéressant de développer une approche jouant non pas sur N mais sur V afin de réduire le ratio $\frac{V}{N}$.

3.3.2 Cadre théorique

Soit Φ la valeur à l'échéance d'une option européenne portant sur un actif qui verse des dividendes. Dans le cas d'une option d'achat, on a

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) \tag{3.1}$$

pour un prix d'exercice K et une maturité $T > 0$.

Le prix de l'option au temps $t = 0$ est donné par

$$V = e^{-rt} E[\Phi(S_T)] \quad (3.2)$$

avec E désignant l'espérance en monde neutre au risque. Comme c'est une espérance, elle peut être estimée sans biais par simulation.

En monde neutre au risque, l'équation différentielle stochastique du prix de l'actif sous-jacent S_t est la suivante :

$$dS_t = S_t(r - \delta)dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.3)$$

où r est le taux sans risque, δ le taux de paiement des dividendes, σ la volatilité et W un mouvement brownien standard.

Sous la mesure neutre au risque, $\ln(\frac{S_T}{S_0})$ suit une loi normale d'espérance $(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T$ et de variance $(\sigma^2 T)$.

3.3.3 Méthode des trajectoires (pathwise method)

La méthode des trajectoires repose sur la relation entre la fonction de paiement (payoff) et le paramètre étudié (σ, r, S, T). Ici, le prix de l'actif sous-jacent est modélisé par un mouvement brownien géométrique et s'écrit sous la forme

$$S_T = S_0 e^{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T}Z} \quad (3.4)$$

où Z est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Pour obtenir une estimation de Vega, $\frac{dV}{d\sigma}$, les auteurs dérivent S_T par rapport à la volatilité puisque celle-ci n'affecte V qu'à travers S_T ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{dS_T}{d\sigma} &= S_T(-\sigma T + \sqrt{T}Z) \\ &= \frac{S_T}{\sigma} [\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par la suite il suffit d'évaluer la variation de Φ par rapport à S_T pour arriver à la variation de V par rapport à σ :

$$\frac{dV}{d\sigma} = e^{-rt} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{d\sigma} \right] \quad (3.6)$$

$$= e^{-rt} E \left[\Phi'(S_T) \frac{S_T}{\sigma} \ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T \right] \quad (3.7)$$

Cette expression de Vega est facilement calculée par le biais de la simulation et les auteurs montrent que les résultats obtenus sont sans biais.

Dans le cas de l'option d'achat, on trouve que

$$\frac{d\Phi}{dS_T} = 1_{(S_T \geq K)} \quad (3.8)$$

où 1 désigne la fonction indicatrice de l'événement $S_T \geq K$. On note cependant que lorsque que $S_T = K$ la fonction de paiement n'étant plus dérivable, il est plus difficile de justifier le changement de variables de dérivation mais le résultat reste similaire. On obtient alors

$$\frac{dV}{d\sigma} = e^{-rt} E \left[1_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{\sigma} [\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T] \right] \quad (3.9)$$

En appliquant le même raisonnement on obtient l'expression suivante de Delta

$$\frac{dV}{dS_0} = e^{-rt} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{S_T}{S_0} \right] = e^{-rt} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{S_T}{S_0} \right]$$

ce qui donne

$$\frac{dC}{dS_0} = e^{-rt} E[1_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{S_0}] \quad (3.10)$$

pour l'option d'achat.

L'expression obtenue de Rho est

$$\frac{dV}{dr} = -TV + e^{-rt} E[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{r}] = -TV + Te^{-rt} E[\frac{d\Phi}{dS_T} S_T]$$

ce qui donne

$$\frac{dC}{dr} = KTe^{-rt} E[1_{(S_T \geq K)}] \quad (3.11)$$

pour l'option d'achat.

Quant à Theta, la dérivée par rapport à t , elle est évaluée par

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dT} = rV - e^{-rt} E[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{dT}]$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= re^{-rt} E[\max(S_T - K, 0)] \\ &- e^{-rt} E[1_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{2T} (\ln(\frac{S_T}{S_0}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T)] \quad (3.12) \end{aligned}$$

pour l'option d'achat.

Cette méthode peut être difficile à appliquer pour le calcul du Gamma. En effet, dans le cadre de l'option d'achat européenne, Broadie et Glasserman

expriment Gamma, en partant de (10), comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dS_0^2} &= E[e^{-rt} (\frac{S_T}{S_0})^{\frac{\partial}{\partial_0}} 1_{(S_T(S_0) \geq K)}] = E[e^{-rt} (\frac{K}{S_0}) g(K)] \\ &= E[e^{-\delta T} \frac{n(d_1) K}{S_0 \sigma \sqrt{T}}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

où

$$d_1(x) = \frac{\ln(\frac{S_0}{x}) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = -d(x) + \sigma \sqrt{T}^3 \quad (3.14)$$

et

$$g(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{T}} n(d(x)),$$

avec $x \geq 0$ et $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

En partant de (4) et (10), on remarque que la dérivée seconde par rapport à S_0 est nulle. Pour être en mesure de déterminer l'expression de Gamma les auteurs supposent le cas d'un payoff exponentiel. Ainsi,

$$V = E[e^{-rt} e^{-S_T}] \quad (3.15)$$

En dérivant deux fois cette expression par rapport à S_0 et sachant que $\frac{dS_T}{dS_0} = \frac{S_T}{S_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dS_0^2} &= E[e^{-rt} e^{-S_T} [(\frac{dS_T}{dS_0})^2 - \frac{d^2S_T}{dS_0^2}]] \\ &= E[e^{-rt} e^{-S_T} (\frac{S_T}{S_0})] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Simulation

```

function rep = trajectoire
r=0.1; % taux d'interet
k=100; %Strike price
sigma=0.25; % la volatilité
div=0.03; %Dividend yield = delta
T=0.2; %Maturité
S0=110; % valeur initial

NStep = floor(T*365.25); %Number of time step
DeltaT = 1/365.25; %Length of a step
NTraj = 100000; %Number of paths
m = 30; %Number of days used to calculate the arithmetic average
S1 = zeros(2*NTraj,m); % Storage of the values
SAve = zeros(2*NTraj,1); % Average values
%Parameters initialization
dW = zeros(2*NTraj,1);
S = S0*ones(2*NTraj,1);
dW=sqrt(DeltaT)*randn(NTraj,NStep);
dW=cat(1,dW,-dW);
%End of parameters initialization

%Storing the simulation values
j=1;
for i=1:NStep
S = S + S.*(r-div)*DeltaT + sigma*dW(:,i);
if i > NStep - m
Si(:,j) = S;
j=j+1;
end
end
%End of Storing the simulation values
%Computing the average value
SAve = sum(Si,2)/m;
%Estimation of DELTA
EstimDel = exp(-r*T)*(SAve>=k).*SAve/S0;
Del = sum(EstimDel)/(2*NTraj);
DelError = sqrt((EstimDel - Del)'*(EstimDel - Del)/(2*NTraj))/sqrt(NTraj);

%Printing the result for DELTA
fprintf('\n Option's DELTA: %f', Del);
fprintf('\n Standard error: %f', DelError);
%End of Estimation of DELTA

%Estimation of GAMMA
d = zeros(2*NTraj,1);
g = zeros(2*NTraj,1);
w=m*(k - SAve) + Si(:,m);
for i=1:2*NTraj
if (w(i,1)>0)
d(i,1) = (log(w(i,1)/Si(i,m-1))-(r-div-0.5*sigma^2)*DeltaT)/...
(sigma*sqrt(DeltaT));
g(i,1) = normpdf(d(i,1))/(w(i,1)*sigma*sqrt(DeltaT));
end
end
EstimGam = exp(-r*T)*(k/S0)^2*m*g;
Gam = sum(EstimGam)/(2*NTraj);
GamError = sqrt((EstimGam - Gam)'*(EstimGam - Gam)/(2*NTraj))/sqrt(NTraj);
% Printing the result for GAMMA
fprintf('\n Option's GAMMA: %f', Gam);
fprintf('\n Standard error: %f', GamError);
%End of Estimation of GAMMA
rep = 1;

```

FIGURE 3.17 – Simulation du Delta et Gamma par la méthode des trajectoires

3.3.4 Méthode du rapport de vraisemblance

La méthode du rapport de vraisemblance est basée sur la relation entre la fonction de densité du prix de l'option et le paramètre étudié. Le rapport de vraisemblance est obtenu en partant de la valeur de l'option :

$$V = e^{-rt} E[\Phi(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z})] \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
 &= e^{-rt} \int_0^{+\infty} \Phi(x) \frac{e^{\frac{-1}{2\sigma^2 T}(\ln(\frac{x}{S_0}) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}}{x\sigma\sqrt{2\Pi T}} dx
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Soit f la densité de la variable x :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^{\frac{-1}{2\sigma^2 T}(\ln(\frac{x}{S_0}) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}}{x\sigma\sqrt{2\Pi T}} \\
 &= \frac{e^{\frac{-1}{2}(\frac{\ln(\frac{x}{S_0}) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}})^2}}{x\sigma\sqrt{2\Pi T}} \\
 &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} n(d(x))
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

et

$$d(x) = \frac{\ln(\frac{x}{S_0}) - (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Le prix de l'option peut alors être écrit de la manière suivante :

$$V = \int_0^{+\infty} \Phi(x) e^{-rt} f(x) dx \tag{3.20}$$

Le premier greek évalué ici est Vega, la dérivée première par rapport à σ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{d\sigma} &= \frac{\partial}{\partial\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-rt} \Phi(x) f(x) ds \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-rt} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial\sigma}(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-rt} \Phi(x) \frac{\partial \log f}{\partial\sigma}(x) f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$= E[e^{-rt} \Phi(S_T) \frac{\partial \log f}{\partial \sigma}(S_T)] \quad (3.21)$$

puisque la fonction de paiement ne dépend pas d'aucun des paramètres S_0, σ, t, T

Sachant que

$$\frac{d \ln(f(x))}{d\sigma} = -d \frac{\partial d}{\partial \sigma} - \frac{1}{\sigma}$$

et

$$\frac{\partial d}{\partial \sigma} = \frac{\ln(\frac{S_0}{x}) + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma^2 \sqrt{T}}$$

Il devient facile d'implanter (21). En refaisant le même exercice mais cette fois ci en dérivant par rapport à S_0 , on obtient l'expression sans biais suivante de Delta :

$$\frac{dV}{dS_0} = E[e^{-rt} \Phi(S_T) \frac{\partial \log f}{\partial S_0}(S_t)] \quad (3.22)$$

De plus,

$$\frac{\partial \ln(f(S_T))}{\partial S_0} = \frac{d(x)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(\frac{x}{S_0}) + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T}{S_0 \sigma^2 T}$$

Comme les expressions (21) et (22) sont des espérances, elles peuvent être facilement estimées par simulation.

L'estimateur sans biais de Rho est évalué comme suit :

$$\frac{dV}{dr} = E[e^{-rt}\Phi(S_T)(-T + \frac{d\sqrt{T}}{\sigma})]$$

tandis que celui de Theta est donné par

$$\frac{-dV}{dT} = E[e^{-rt}\Phi(S_T)(r + d\frac{\partial d}{\partial T} + \frac{1}{2T})] \quad (3.23)$$

où

$$\frac{\partial d}{\partial T} = \frac{(-\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T)}{2\sigma T^{\frac{3}{2}}}$$

Concernant le calcul de la dérivée seconde Gamma, les auteurs l'expriment en partant de l'équation (20) :

$$\frac{d^2V}{dS_0^2} = \frac{\partial^2}{\partial S_0^2} \int_0^{+\infty} e^{-rt}\Phi(x)f(x)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-rt}\Phi(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial S_0^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-rt}\Phi(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(x)} f(x) dx$$

$$= E[e^{-rt} \Phi(S_T) \frac{\partial^2 f(S_T)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(S_T)}] \quad (3.24)$$

avec

$$\frac{\partial^2 f(S_T)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(S_T)} = \frac{d^2 - d\sigma\sqrt{T} - 1}{S_0^2 \sigma^2 T}$$

Cette formule permet également d'obtenir un estimateur sans biais de Gamma.

Il est à noter cependant que dans le cas du rapport de vraisemblance, le paramètre étudié pourrait ne pas apparaître dans la fonction de densité, auquel cas un changement de variables s'imposerait pour rendre la méthode applicable.

Simulation

```
function rep = varisemblance
r=0.1; %taux d'interet
k=100; %Strike price
sigma=0.25; %la volatilité
delta=0.03; %Dividend yield
T=0.2; %Maturité
S0=110; % la vaalure initial
NStep = floor(T*365.25); %Number of time step
Delta = 1/365.25; %Length of a step
NTraj = 100000; %Number of paths
%Simulation of paths
dW = zeros(2*NTraj,1);
S = S0*ones(2*NTraj,1);
Temp=zeros(NTraj,1); dW = cat(1,Temp, -Temp);
for i=1:NStep
Temp = sqrt(Delta)*randn(NTraj,1);
dW = cat(1,Temp,-Temp);
S = S + S.*(r-delta)*Delta + sigma*dW;
end
%End of Simulation of paths
```

```

%Computation of the values used in the estimators formulae
d = (log(S/S0) - (r - delta - 0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
ddsig= (log(S0) - log(S) + (r - delta +0.5*sigma^2)*T)/(sigma^2*sqrt(T));

%Estimation of DELTA
EstimDel = exp(-r*T)*max(S-k,0).*1/(S0*sigma^2*T).*(log(S/S0) - (r -delta - 0.5*sigma^2)*T);

Del = sum(EstimDel)/(2*NTraj);
DelError = sqrt((EstimDel -Del)^(EstimDel -Del)/(2*NTraj))/sqrt(NTraj);
%Printing the result for DELTA
fprintf('\n DELTA of the option: %f ', Del);
fprintf('\n Standard error: %f ', DelError);
%End of Estimation of DELTA
%Estimation of GAMMA
EstimGam = exp(-r*T)*max(S-k,0).*(d.*d-d*sigma*sqrt(T) -1)/(S0^2*sigma^2*T);
Gam = sum(EstimGam)/(2*NTraj);
GamError = sqrt((EstimGam -Gam)^(EstimGam -Gam)/(2*NTraj))./sqrt(NTraj);
%Printing the result for GAMMA
fprintf('\n GAMMA of the option: %f ', Gam);
fprintf('\n Standard error: %f ', GamError);
%End of Estimation of GAMMA
rep = 1;

```

FIGURE 3.18 – estimation Delta et Gamma par la méthode du rapport de vraisemblance

3.3.5 Résultats donnés par les deux méthodes

En utilisant le programme MATLAB voici les résultats obtenues des deux méthodes.

Méthode	Rapport de vraisemblance				Trajectoire			
	Delta	Gamma	Erreur de Delta	Erreur de Gamma	Delta	Gamma	Erreur de Delta	Erreur de Gamma
S_0								
90	0.174	0.029	0.0013	0.015	0.172	0.0302	0.012	0.0015
100	0.561	0.040	0.0017	0.0016	0.5609	0.0411	0.0016	0.0016
110	0.867	0.020	0.0012	0.0010	0.8693	0.0197	0.0011	0.0010

FIGURE 3.19 – Table des estimateurs

Ces deux méthodes d'estimation des greeks requièrent un certain travail analytique dans le calcul des dérivées, des intégrales et dans la vérification des conditions de changement de variables afin d'obtenir des résultats fiables et sont plus complexes pour ce qui est de l'évaluation de la dérivée seconde. D'après le tableau on remarque que les erreurs des deux méthodes sont pratiquement similaires et qu'il n'y a pas une grande différence entre ces deux

méthodes.

Conclusion générale

Les contrats d'options sont utilisés pour couvrir un portefeuille, ce qui signifie que l'objectif est de compenser toute évolution défavorable d'autres investissements. Les contrats d'options sont également utilisés pour spéculer sur la hausse ou la baisse du prix d'un actif.

Le succès du marché des options est dû aux mathématiciens **Fisher Black**, **Myron Scholes**, grâce à l'équation de Black-Scholes qui a été développée dans les années 1970 et qui permet théoriquement de déterminer la prime exacte que touche le client, Call et Put, et la stratégie que le vendeur devra faire. Des options sont suivies pour couvrir le risque.

Cette mémoire a également abordé les coefficients de sensibilité, ou comme on les appelle en grecques, qui affectent fortement la valeur des contrats d'options. La hausse ou la baisse du prix des contrats d'options est le résultat d'une variation de la valeur de ces coefficients. Par conséquent, chaque investisseur dans des contrats d'options doit connaître ces facteurs et comment ils les affectent. Sur les contrats d'options, qu'ils soient négatifs ou positifs, nous disons donc que les coefficients de sensibilité ne sont peut-être pas les plus controversés, mais ils constituent la base pour bien comprendre la théorie d'options.

En fin de compte, nous avons présenté deux méthodes d'évaluation des Grecs, où chaque méthode et méthode de son travail. Pour la méthode des trajectoires repose sur la relation entre la fonction de paiement (payoff) et le paramètre étudié, et La méthode du rapport de vraisemblance est basée sur la relation entre la fonction de densité du prix de l'option et le paramètre étudié. Et enfin, nous avons vu que la méthode des trajectoires est plus précise que celle du rapport de vraisemblance et les estimateurs sont plus précis.

Bibliographie

[1] Abada.(2004). modèles financiers avec sauts. mémoire de magister en mathématiques. université de mentouri – Constantine, école doctorale – pole de Constantine.

[2] Aboura S. (2008). « le marché d’option », édition économisa, Paris.

[3] Amelon tl. (2010).cardebat.jm, « les nouveaux défis de l’internationalisation », édition de boeck, bruxelles.

[4] Bachelier l.(1900)théorie de la spéculation : annales scientifiques de l’école normale supérieure, paris.

[5] Binck Fr.(2013). Comprendre la bourse. Les options.

[6] Black. F and Scholes. M. (1973). The pringing of option and corporate liabilities.Journal of Political Economy.

[7] Boni Ella, Genot Boris et Momein Audrey, (2005).Un modèle de détection des sauts dans un processus de cours boursiers.

[8] Cox. J. C. Ross. A. S. Rubinstein. M.(1979). Option pricing : a simplified approach.Journal of Financial Economics . North-Holland Publishing Company.

[9] El Karoui N.(2004). « Couverture des risques dans les marchés financiers », Ecole Polytechnique.

[10] Esch L, « Asset Risk Management.(2003). la finance orientée risques », édition De Boeck, 1ere édition,

Bruxelles.

[11] Jean-Etienne Palard.(2017). Céline Barrédy, gestion financière.1re édition.

[12] Marion A, Brach.(2002). «Real option in practice», edition Wiley, Canada.

[13] Mazouni F et Mendas K.(2017).Méthodes d'estimations de la volatilité des indices boursiers.Université M'hamed Bougara Boumerdes.

[14] QUIRY Pascal.(2013). LE FUR Yann, pierre vernimmen : Finance D'entreprise, Edition Dalloz, 2013.

[15] Taleb Aimad.(2002).Modèles à intensité et copules appliqués à la détermination des probabilités de défaut d'un portefeuille.