الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامعة أمحمد بوقرة بومـرداس

كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Et des Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات و تطبيقات في

بحوث العمليات 01

موجهة لطلبة: السنة الثالثة و الأولى ماستر

تخصص: اقتصاد كمي

من إعداد: د. مقران يزيد

قسم: العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية 2019/2018

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامـعة أمحمد بوقرة بومــرداس

كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Et des Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات و تطبيقات في

بحوث العمليات 01

موجهة لطلبة: السنة الثالثة و الأولى ماستر

تخصص: اقتصاد كمي

من إعداد: د. مقران يزيد

قسم: العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية 2019/2018


بسم الله الرحمن الرحيم
رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي
وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك
في عبادك الصالحين

النمل 19

البرنامج:[1]

مادة بحوث العمليات (1):

1-/ الفصل الأول: بحوث العمليات

- ماهية بحوث العمليات

- تذكير بالبرمجة الخطية مع التركيز على مسائل النقل و التعيين (التخصيص)

2-/ الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

- عموميات حول البرمجة بالأعداد الصحيحة

- برمجة الأعداد الصحيحة الثنائية

3-/ الفصل الثالث: التحليل الشبكي

- نظرية البيان

- الجريان (التدفق) الأعظمي

- طريقة CPM/GANT

- طريقة PERT/MPM

4-/ الفصل الرابع: البرمجة الديناميكية

- حالة اليقين (الأكادة)

- مبدأ الأمثلية لـ BELMAN

- تخصيص الموارد

- حالة العشوائية (الاحتمالية)

[1] وفق المدونة الجديدة لبرامج مواد الوحدات الأساسية لعروض التكوين في طور الليسانس المنبثقة عن اجتماع اللجنة البيداغوجية الوطنية لميدان التكوين في العلوم الاقتصادية والتسيير و العلوم التجارية المنعقد بتاريخ 11 و 12 جانفي 2015 بجامعة الإخوة منتوري بقسنطينة.

الفهرس

الفصل الأول: بحوث العمليات

الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

الفصل الثالث: التحليل الشبكي

الفصل الرابع: البرمجة الديناميكية

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف المرسلين نبينا محمد و على آله وصحبه والتابعين إلى يوم الدين أجمعين.

إن التطور و التقدم الصناعي والتقني وخاصة بعد الحرب العالمية الثانية أدى إلى اتساع في حجم المنشآت وكذلك تعدد وتنوع فعالياتها، وقد نتج عن هذا الاتساع، ظهور مشاكل في مجالات الإنتاج والتخزين والنقل وغيرها مما يستوجب المعالجة من خلال سلسلة من القرارات الإدارية التي تستند إلى أسس علمية بعيدة عن التخمين والحدس.وقد تبلورت هذه الأسس في مجموعة من النظريات والأساليب الإحصائية الرياضية في موضوع بحوث العمليات.

وتعتبر بحوث العمليات من أهم وأحدث الموضوعات التي يساعد الإلمام بها وتطبيقها في رسم السياسات ووضع الخطط بما يتفق و الأهداف مع ضمان الاستخدام الأمثل للطاقات والإمكانات.

وانطلاقا من شعورنا بأهمية هذا الموضوع وكذلك الشعور بحاجة الطالب إلى مرجع جديد مطابق للبرامج الجديدة للجامعة الجزائرية في هذا المجال ، فلقد توكلنا على الله بتقديم هذه المطبوعة تحت عنوان "محاضرات و تطبيقات في بحوث العمليات 1" و التي تتناول برنامج بحوث العمليات وفق منظورين، إذ يهتم المنظور الأول بطرح المشكلة بشكل واضح ومعمق مع حلها بالأسلوب اليدوي لنتيح للطالب فهم القواعد الأساسية في إيجاد الحل، فيما يهتم المنظور الثاني بحل المشكلة ذاتها والتوصل إلى ذات النتائج من خلال تطبيق البرمجيات الجاهزة مثل برنامج (WinQSB) وبرنامج (Excel) الشائع الاستعمال، اختصارا للجهد والوقت وتماشيا مع التطورات الحاصلة في هذا المجال و كذلك، وهو الأهم،تقديم وسيلة للطالب لتطبيق المعارف المكتسبة من خلال دراسة هذا الموضوع لإنجاز مذكرة التخرج بحكم أن المطبوعة موجهة بالدرجة الأولى إلى طلبة السنة لثالثة اقتصاد كمي لطور الليسانس و طلبة السنة الأولى ماستر اقتصاد كمي.

ومن أجل هذا قمنا بتجزئة المطبوعة إلى أربعة فصول، حيث سنتناول في الفصل الأول عموميات حول بحوث العمليات وكذلك التذكير بالبرمجة الخطية[1]، مع التركيز على مسائل النقل و التعيين (التخصيص). أما في الفصل الثاني و المتعلق ببرمجة الأعداد الصحيحة، سنتطرق فيه لمحورين أساسيين هما:- عموميات حول البرمجة بالأعداد الصحيحة، و - برمجة الأعداد الصحيحة الثنائية. وبعد ذلك وفي الفصل الثالث سنتطرق لموضوع التحليل الشبكي والذي من خلاله سنتعرف على نظرية البيان و الجريان أو التدفق الأعظمي و أهم الطرق المستخدمة في التحليل الشبكي:- طريقة CPM/GANT و- طريقة PERT/MPM. ونختم هذه المطبوعة بالفصل الرابع و الأخير و المتعلق بالبرمجة الديناميكية حيث سنتطرق فيه لمبدأ الأمثلية لـ BELMAN و كذلك تخصيص الموارد عبر هذا المفهوم.

ويجد الطالب في هذه المطبوعة أمثلة محلولة و تمارين تطبيقية مقترحة عند نهاية كل فصل وهذا حتى يتسنى له التعود على حل المسائل يدويا و باستعمال البرمجيات كما تطرقنا له آنفا .

د. مقران يزيد

[1] أتحدث هنا عن التذكير بالبرمجة الخطية، بحكم دراسة الطلبة هذا الجانب في مادة رياضيات المؤسسة خلال السنة الثانية علوم اقتصادية.

الفصل الأول:

بحوث العمليات

الفصل الأول: بحوث العمليات

سنتعرض في هذا الفصل في البداية لعموميات حول بحوث العمليات و بالبرمجة الخطية و مختلف تقنياتها، ثم سنتعرض بعد ذلك لمسائل النقل و بعدها لمسائل التعيين أو التخصيص.

1. ماهية بحوث العمليات:

1-1- مفهوم بحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي حققت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة. إذ أن صناعة القرارات وتطبيقاتها في أي مجال من المجالات يتطلب اللجوء إلى الأساليب العلمية التي تمكن صانعي القرارات والقائمين على تنفيذها من الوصول إلى الغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة.

هنالك عدة تعاريف لبحوث العمليات منها التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية حيث عرفت بحوث العمليات على أنها تطبيق الطرق العلمية على المشاكل المعقدة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة من الأفراد ، المعدات، المواد والأموال في ميدان الصناعة والتجارة والحكومة والدفاع، والمدخل المميز هو إعداد نموذج علمي للنظام يتضمن قياسا للعوامل المختلفة كالصدفة والخطر ،وبمقتضى هذا النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة عوائد مخلف القرارات والإستراتيجيات البديلة وذلك بهدف مساعده الإدارة في تحديد سياساتها وإجراءاتها بأسلوب علمي.[1]

نستنتج من هذا التعريف أن: بحوث العمليات هي تطبيق لأساليب علمية رياضية من أجل حل المشاكل المعقدة داخل المؤسسة الصناعية والمشاكل المحيطة بها.

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد وضعت تعريفا مختصرا يتمثل في أن بحوث العمليات هي التي تهتم بالتحديد العلمي لأفضل تصميم وتشغيل لنظم المعامل والآلة، وذلك عادة في الظروف التي تتطلب تخصيصا للموارد المتاحة.[2]

من هذا التعريف يمكن أن نلاحظ أنه يرتكز على العوامل والظروف القائمة في المصنع الإنتاجي، لذا فإنه يركز على العامل ، الآلات والموارد المتاحة ووضع نماذج رياضية لها من أجل الاستخدام الأمثل.

أما بالنسبة ل .Charchman G و .Ackoff R فان بحوث العمليات هي ، تطبيق الأساليب العلمية و الطرق و الأدوات الخاصة بالنظام بهدف إمداد الإدارة بحلول مثلى لمعالجة هذه المشاكل.[3]

كما عرف Dantzig بحوث العمليات بأنها علم الإدارة.[4]

وعرفWagner بحوث العمليات بأنها مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات.[5]

[1] Herman c.c and Magee f. : « Operation Reaserch for Management », The new english library LTD, London
[2] Herman c.c and Magee f. :Opct.
[3]محمد راتول:" بحوث العمليات"، ديوان المطبوعات الجزائرية، بن عكنون، الجزائر، 2006. ص 3
[4] Dantzig : « Management Science in the world of to day and to morrow », G.B., 1967. P107
[5] Wanger : « principles of operations research », New york, USA, 1969. P4

ويعرفها .Miller M و .Sttar M على أنها نظرية القرارات التطبيقية و استخدام الطرق العلمية و الرياضية في حل المشاكل التي تواجه المنفذين.[6]

أما Morse و Kimball فكان تعريفهما كالتالي: بحوث العمليات هي تطبيق الأسلوب العلمي عن طريق توفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات الإدارية.[7]

و كل هذه التعاريف تكاد تشترك في بعض المصطلحات الأساسية و لعل أهم المصطلحات التي شملتها هذه التعاريف، الطريقة العلمية، الأساليب و الأدوات، و يقصد بها الأساليب الرياضية و الإحصائية، مشاكل المديرين، القرارات، الحلول المثلى، و هي مصطلحات تنم عن فهم كل باحث لبحوث العمليات غير أننا نرى أن بحوث العمليات تطورت لتأخذ مفهوم أوسع، لدرجة أن هناك من يضفي صفة العلمية، لتطورها المستمر و استخدامها لأساليب البحث العلمي فيقول: إن علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعة من الطرق، و الوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد.

1-2- نشأة و تطور بحوث العمليات:

على مر العصور، كان سعي الإنسان وبحوثه من أجل السيطرة على الطبيعة وفهمهما فهما صحيحا، فما حملته أفكاره وابتكاراته ساعد على تشكل العلوم.

كما إن بحوث العمليات وإن كانت تعتبر أساليب رياضية حديثة نسبيا إلا أن بعض جذورها العلمية وبعض الأسس التي يرتكز عليها، لها تاريخ قديم يتطور بتطور البشر ومرور الزمن، فكلمة قرر مثلا هي من خصائص الإنسان وذاته، ذلك أن القرار بحد ذاته يضم الاختيار الأمثل من بين عدة حلول ممكنه. فنظرية الاحتمالات Probability Theory يرجع تاريخ العمل بها إلى القرن السابع عشر، كذلك فإن نماذج مراقبه الجودة لـ Ford Harris و Wilson R.M في بداية القرن السابق، كما قدم Markov A.W دراسات أولية عن النماذج الديناميكية Dynamic Models، كذلك ينسب الفضل إلى الباحث Erlang خلال حياته إلى 1929 في تقديم التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار واستعمالاتها الهاتفية في مصنع Copenhagen telephone.

رغم الجهود السابقة إلا أن بحوث العمليات قد نشأت فعليا مع بداية الحرب العالمية الثانية في الميدان الصناعي المدني، حيث تم تكوين فريق من العلماء تحت إشراف القيادة السكرية للقوات الإنجليزية بقيادة الأستاذ Placket P.M.S من جامعة مانشيستر لدراسة المشاكل التكتيكية و الإستراتيجية من أجل تطوير جهاز الرادار وتحديد المواقع المثلى عليه لمعرفة قدوم طائرات العدو ومحاولة الربط بينها وبين المدفعية المضادة للطائرات، وبتقدم البحوث اتسعت الدراسة لتشمل مهام أخرى منها نظام الدفاع الجوي، الأرضي والبحرية. الفريق ضم الكثير من العلماء في الاختصاصات التالية : (الرياضيات ، الجيولوجيا،

[6] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص3

[7] Morse P.M and Kimball G.E : « Methods of operations reasearch», New york, USA, 1955. P1

الفيزياء الفلكية، فروع أخرى من العلوم وضباط من الجيش)، وسمي الفريق مجموعة بحوث العمليات العسكرية Army Operational Research Groupe، وقد نجح الفريق في حل الكثير من المشاكل العسكرية ، وخاصة القدرة في استغلال الموارد المحدودة من الرجال والمعدات وإنتاج الأسلحة .

بعد الحرب العالمية الثانية خرجت كل دول الحرب منهكة اقتصاديا، مما استدعى الأمر إعادة البناء الاقتصادي بفعالية ودقة و سرعة، هذه النظرة الجديدة للحياة، حولت الكثير من علماء بحوث العمليات من الميدان العسكري إلى تطبيق تجاربهم في الميدان الاقتصادي المدني، بهذا بدأت بحوث العمليات في الانتشار في المنظمات الصناعية والتجارية الكبيرة، ومما ساهم في تطويرها كثيرا تطور الحاسبات الآلية في الخمسينات مع ملاحظة أن تلك الحاسبات كانت محدودة جدا مقارنة بما هو متاح اليوم، هذه المحدودية كان لها تأثير في اتجاهين:[8]

- الشركات التي لها القدرة على امتلاك الحاسبات الإلكترونية استطاعت التطور والنمو بسرعة محدثة طفرة اقتصادية كبيرة كان لها الأثر في الاقتصاديات المحلية ثم بعد ذلك الدولية.
- الهوة التي حدثت بين المؤسسات الإنتاجية والصناعية شجعت الكثير في تخصيص ميزانية كبيرة على البحث والتنمية مما أدى بالبحث إلى بلوغ درجة التطور الحالية.

ومن أهم نجاحات بحوث العمليات تعدد أساليبها مع تعدد المشاكل الاقتصادية، الإدارية والاجتماعية.

1-3- خطوات دراسة و تطبيق بحوث العلميات (منهج بحوث العمليات):

عادة تحتاج دراسة و حل أي مشكلة من مشاكل بحوث العمليات إلى فريق بحث متكامل، حيث يقوم أحد أو بعض أعضائه بمعالجة المشكلات التي تنشأ بصدد صياغة العلاقات الرياضية، وبعضهم يقوم ببناء وصياغة النموذج المناسب للمسألة المدروسة و بعضهم الأخر يتخصص في إيجاد الأسلوب الأمثل لحل النموذج المصاغ وهكذا. إن المراحل الأساسية التي يقوم فيها أي فريق بحث مكلف بدراسة مشكلة ضمن مفاهيم بحوث العمليات تتلخص فيما يلي:[9]

- تحديد المشكلة أو تعريف المسألة.
- صياغة (بناء) النموذج.
- حل النموذج.
- فحص فعالية النموذج.
- تجربة حل النموذج.
- تنفيذ حل النموذج.
- تحسين النموذج.

[8] بوقرة رابح:"بحوث العمليات"، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر، 2009. ص 17،16.
[9] صبحي المحمد، إبراهيم نائب:"بحوث العمليات"، مديرية الكتاب و المطبوعات الجامعية، حلب، سوريا، 2008. ص 19.

1-3-1- تحديد المشكلة:

لتشخيص الدقيق للمشكلة ومحاولة تصنيفها ضمن إحدى المشكلات المعروفة كأن تكون مشكلة إنتاج أو مشكلة تسويق أو مشكلة تخزين... الخ.

1-3-2- صياغة (بناء) النموذج:

يقصد بصياغة النموذج بأنه: تمثيل لمكونات المشكلة المدروسة، وتحديد العوامل المؤثرة فيها والظروف المحيطة بها و وأسلوب الربط بينها.

1-3-3- حل النموذج:

يقصد بحل النموذج بأنه: إيجاد مجموعة قيم متغيرات القرار التي من خلالها يتم التوصل إلى الحل الممكن للمشكلة المدروسة، ومن ثم إيجاد الحل الأمثل من بينها.

1-3-4- اختبار صلاحية أو فعالية النموذج:

يقصد باختبار صلاحية النموذج: إظهار قدرة النموذج في تمثيل مكونات المشكلة المدروسة.

1-3-5- تجربة حل النموذج:

إن الهدف من تجربة حل النموذج، هو التحقق من دقة النتائج المتحصل عليها من تطبيق النموذج وثبوت صلاحيته.

1-3-6- تنفيذ حل النموذج:

يقصد بتنفيذ حل النموذج، بأنه: وضع الحل المقترح للنموذج موضع التطبيق ومتابعة تطبيقه، للتأكد من صلاحية النموذج أو عدم صلاحيته، وهذا يعني تحويل النموذج المفاهيمي إلى النموذج العملياتي في العالم الحقيقي والواقعي.

1-3-7- تحسين النموذج:

يقصد بتحسين النموذج بأنه: إدخال التعديلات الضرورية في حالة ثبوت حاجة النموذج في مرحلة التنفيذ لذلك، بهدف تحقيق النتائج المطلوبة من تطبيقه بما ينسجم وحالة الواقع.

1-4- أنواع النماذج:

نواجه في حياتنا العملية الكثير من المواقف و المشاكل التي يمكن معالجتها ضمن علم بحوث العمليات، و هذه المواقف تأخذ صيغا و نماذج متنوعة حسب نوع الموقف المدروس و فيما يلي أهم النماذج التي يعالجها علم بحوث العمليات:[10]

[10] منار الفرا:"المادة النظرية في بحوث العمليات والبرمجة الخطية"، الجامعة الإسلامية، غزة، فلسطين، 2014. ص 13.

1-4-1- النماذج الرياضية المحددة:

هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات معروفة لدى متخذ القرار، أي أنها بمنأى عن المؤثرات الاحتمالية (داخلية كانت أم خارجية)، منها على سبيل المثال (نماذج البرمجة الخطية، النموذج المقابل، ونماذج النقل والتخصيص).

1-4-2- النماذج الرياضية الاحتمالية:

هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات احتمالية غير واضحة لدى متخذ القرار، ويكون هذا النوع من النماذج عرضة للمؤثرات الداخلية والخارجية منها على سبيل المثال (نماذج السيطرة على المخزون، نموذج صفوف الانتظار، ونموذج المعولية أو Reliability model) .

1-4-3- النماذج الرياضية الإستراتيجية:

هي النماذج التي يتم صياغتها من قبل متخذ القرار بناءاً على موقف معين، متخذ من قبل متخذ قرار آخر يعمل في نفس البيئة، ويطلق على الموقف المذكور (بالإستراتيجية). ويتسم هذا النوع من النماذج بالبساطة كون المنافسة بموجبه تتم بين اثنين فقط من متخذي القرار، منها على سبيل المثال (نموذج نظرية المباريات).

1-4-4- النماذج الرياضية الإحصائية والمحاسبية:

إن لهذا النوع من النماذج الرياضية استخدامات ثابتة ومعروفة، وتتسم بالبساطة والصفة الخطية، منها على سبيل المثال (مؤشر الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، الارتباط والانحدار) في حالة النماذج الإحصائية، وكذلك (مؤشر الفائدة البسيطة والمركبة، إقساط الاندثار، حساب الخسائر والمتاجرة) في حالة النماذج المحاسبية والمالية.

1-5- مجالات تطبيق بحوث العمليات:

تستخدم بحوث العمليات في عدة مجالات يمكن تلخيصها في النقاط التالية:[11]

1-5-1- الصناعة والتجارة والزراعة: (توزيع الإنتاج، الاستخدام الأمثل للموارد، مراقبة المخزون)

1-5-2- النقل والمواصلات: (تنظيم المواصلات البرية، تنظيم الرحلات الجوية، تنظيم حركة المرور، تنظيم استخدامات الهاتف).

1-5-3- التخطيط: (تنظيم استخدام القوى العاملة، تخطيط المشروعات، التخطيط الاقتصادي، جدولة الأعمال).

1-5-4- التسويق والمبيعات: (رسم سياسات التسعيرة، رسم السياسات التسويقية، بحوث التسويق، الدعاية والإعلان).

[11] منار الفرا،مرجع سبق ذكره. ص 7.

1-5-5- المجال العسكري: (رسم الاستراتيجيات العسكرية المثلى، إيجاد الخطط المثلى لزرع الألغام،إيجاد الخطط المثلى لعمليات الهجوم والدفاع والانسحاب، الاستخدام الأمثل للمعدات والذخائر العسكرية).

والجدول التالي يلخص أهم النماذج و أساليب بحوث العمليات كل حسب مجالات تطبيقها في منظمة الأعمال.[12]

1-6- تركيبة المصفوفة لاستخدام أساليب بحوث العمليات في وظائف المنشاة ضمن منظمة الأعمال:

الجدول رقم (1-1)

الوظائف / الأساليب	الإنتاج وإدارة العمليات	النقل و التسويق	التخزين	إدارة الموارد البشرية	الإدارة المالية
البرمجة الخطية	تخطيط الإنتاج			الاستغلال الأمثل للموارد البشرية	توزيع الموارد الحالية بشكل امثل
نماذج النقل	تداول بين خطوط الإنتاج	تسويق المصانع	نقل المشتريات من المخزن		
شبكات الأعمال	تنفيذ المشاريع	تدفق الموارد و السلع			
تحليل القرار	طرح منتج حديث		تحديد مصدر الشراء الأفضل		تحديد أفضل الفوائد المستثمرة
السيطرة على المخزون			تحديد حجم الدفعة الاقتصادية		

[12] مؤيد عبد الحسين الفضل: "بحوث العمليات المحاسبية"، إثراءللنشروالتوزيع،الأردن، 2008. ص 51

2- البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي الحالة الخاصة للنموذج الرياضي, و الذي يهدف إلى إيجاد الحلول (البدائل) الممكنة للمشكلة وهذا في ظل قيود معينة تأخذ شكل المعادلات أو المتباينات[13]، و هي أحد الأركان الرئيسية لبحوث العمليات و من أهم أدواتها في حل المشاكل المتعلقة بالبدائل، فهي تساعد مؤسسات الأعمال على حل مشاكل لم يكن لها أي حلول في الماضي القريب.

وتعتبر البرمجة الخطية أداة بيانية و رياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية : طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين و التخصيص، وهو ما سنتطرق إليه من خلال هذا الالفصل بحول الله.

2-1- تعريف نموذج البرمجة الخطية:

ترجع أهمية إستخدام نموذج البرمجة الخطية إلى جورج دانتزنج (George Dantzing) عندما إستخدم أسلوب السمبلكس لحل مشاكل البرمجة الخطية سنة 1947[14]و تعرف البرمجة الخطية بأنها :طريقة رياضية فعالة[15]لإختيار الخطة المثلى، فهي إجراء للبحث عن الحل الأفضل لمشاكل الأعمال التي تتضمن تفاعل متغيرات متعددة, و التي تشمل إختيار أفضل مزيج للموارد التي تؤدي إلى أقصى الأرباح أو أقل التكاليف.

وتعرف أيضا على أنها، أسلوب من أساليب الكمية التي تصمم و تستخدم بغرض مساعدة المنظمة في تخصيص مواردها المحدودة.

وهي أسلوب رياضي لتعظيم أو تخفيض أحد المتغيرات التابعة التي تعتبر دالة لعدد من المتغيرات المستقلة، عندما تكون هذه الأخيرة خاضعة لعدة قيود.

و يمكن تعريفها أيضا :

- أسلوب رياضي لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة لتحقيق هدف محدد، حيث يمكن التعبير عن كل من الهدف و القيود التي تحيط بتحقيقه في صورة متباينات و معادلات خطية[16].
- نموذج تخصيص الموارد يسعى إلى تحقيق أفضل تخصيص للموارد المحدودة على عدد من الأنشطة المتنافسة، وقد أستخدم لفظ (الأنشطة المتنافسة) هنا للدلالة على أن الموارد التي تخصص لها محدودة.
- هي عبارة عن طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط و إتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، و ذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف[17].

---

[13] Hiller.f and Liberman. G, “Introduction to operation research”, 3eme edition Holden Day INC,1980.P17.

[14] مير بباوي فهمي،"بحوث العمليات في الإدارة و المحاسبة"، المركز الدولي للعلوم الإدارية، القاهرة،1977.ص142.

[15] Gerald Bailageon, « programmation linéaire appliquée, outil d’aide à la décision », Edition SMG, Canada,1996. P05.

[16] علي السلمي،" الأساليب الكمية في الإدارة"،دار المغارف، القاهرة،1975. ص45.

و تجدر الإشارة هنا إلى أن كلمة برمجة (Programming) ليست لها علاقة ببرمجة الحاسوب, و لكنها كلمة مرادفة للتخطيط ,وتعني وضع المشكلة بصيغة رياضية أو نموذج رياضي وحلها .وبناء على ذلك فإن البرمجة الخطية تتضمن تخطيط الأنشطة للحصول على نتائج مثلى , و بمعنى أوسع فإن هذا المصطلح يعني أيضا التنفيذ المنظم و الأفضل للأعمال.

من التعريفات السابقة نستخلص أن النماذج الخطية هي:

- تقنية وطريقة رياضية.
- مشكلات البرمجة الخطية تهدف إما إلى تدنئة أو تعظيم بعض الكميات، و التي عادة ما تكون في صورة تكاليف أو أرباح.
- تستخدم في حل مشاكل الإدارة التي تتمثل في توزيع الموارد المحدودة على عدد من الإستخدامات المتباينة .
- تحقق أحسن توزيع للموارد، و يكون بإعطاء الإدارة بالمعلومات التي تمكنها من إتخاذ قرارات أكثر فعالية فيما يتعلق بالموارد تحت تصرفها .

وتعتبر النماذج الخطية لحل مشكل الأمثلية من أكثر تطبيقات نماذج بحوث العمليات و التي لاقت نجاحا في مجال التطبيق العملي،و هذا ما يدعم أهميتها في المجال الإقتصادي.

2-2- فرضيات إستخدام البرمجة الخطية .

ذكرنا فيما سبق أنه عند إستخدام البرمجة الخطية في مجال الأعمال فإننا ننظر إليها بإعتبارها أسلوبا رياضيا لتوزيع أو إستخدام موارد محدودة على عدد من الإستخدامات البديلة، بالطريقة التي تحقق أفضل إستخدام ممكن لها، ممثلة في شكل هدف محدود، هذا ما يبين لنا أن البرمجة الخطية تستند إلى مجموعة من الأفكار الرئيسية و التي تعتبر أساسا لتفهم التقنية، نلخصها في فكرتين[18] هما، فكرة النشاط (Activity)، و فكرة البدائل (Alternatives)، و يقصد بفكرة النشاط في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها، بينما يقصد بفكرة البدائل في هذا الصدد تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد، و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على خمسة إفتراضات رئيسية علمية[19]، الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها فيما يلي:

[17] محمد الطراونة، سليمان عبيدات،"مقدمة في بحوث العمليات أساليب و تطبيقات"، دار المكتبات و الوثائق الوطنية، ط1،1989. ص82.

[18] قارون عمران،"تخفيض تكاليف النقل البحري باستخدام البرمجة الخطية، حالة الشركة الوطنية للنقل البحري SNTM، رسالة ماجستير علوم اقتصادية، جامعة الجزائر، 1997. ص136.

[19] إسماعيل السيد،"بعض الطرق الكمية في مجال الأعمال"، الدار الجامعية للطبع و التوزيع، الإسكندرية،1999. ص 10.

2-2-1- فرضية التأكد التام (Certainty):

تعبر هذه الفرضية عن توفر عنصر التأكد، أي إن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة، إذا أن تقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن إتخاذ القرار في ظل التأكد التام، فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل، هذا ما يتنافى مع حالة عدم التأكد الذي يميز الحياة العملية، و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) و المحددات أو القيود (إحتياجات العوامل و المصادر المتوفرة) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث.

2-2-2- التناسبية (Proportionatity):

و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر، ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة، كذلك فإن الكميات التي يتم إستخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع إحتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج و هذا الإفتراض هو أساس إفتراض الإضافية .

2-2-3- الإضافية (Additivity):

ويعني هذا الإفتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة، وبناء على ذلك فإن هذا الإفتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط ($X_1,X_2,........X_n$)،فإن الإستعمال الكلي و لكل مصدر و كذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة، يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل النشاطات الفردية و بشكل مستقل، فإذا كنا ننتج أربعة منتجات و كان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل من هذه المنتجات هو : 6,12,10,8 وحدات نقدي على التوالي، فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج و بيع ثلاث وحدات من كل منتج هو $3\times(8+10+12+6)=108$ وحدات نقدية.

2-2-4- قابلية القسمة أو الكسرية (Divisibility or Fractionality)

و المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى إستخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية (Integer Programming) التي سنتطرق لها في الفصل القادم.

2-2-5- اللاسلبية (Non-negativity) :

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة،(غير سالبة) فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة، فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان.

2-3- شروط إستخدام البرمجة الخطية.

لكي يمكن إستخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها وهي[20]:

- ينبغي إستخدامها في حالة ندرة الموارد، فلو كانت الموارد متوفرة تماما لما كانت هناك مشكلة، فهذه الندرة تمثل أحد أهم القيود التي تخضع لها الإدارة في سعيها لتحقيق الهدف[21]، و هي تشكل قيود تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف ببعضها البعض، و تكون على شكل متباينات و معادلات و تسمى هذه القيود بالقيود الهيكلية (Structural Constraints) .
- يجب أن يكون هناك هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية، كما يجب أن يكون الهدف واضحا و دقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية، وعادة ما يكون الهدف تحقيق أقصى أرباح ممكنة أو تخفيض التكاليف لأقل حد ممكن.
- يفترض أن تكون هناك بدائل مختلفة لتحقيق الهدف، فيجب أن تكون هناك أساليب علمية لمزج الموارد للوصول إلى الهدف حيث يكون لكل بديل عائد متوقع، فتصبح المهمة إختيار البديل الذي يعطي أعلى عائد في حدود القيود المفروضة.
- يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات التي تتركب منها المشكلة خطية، ويقصد بذلك أن أي تغير ما في أحد المتغيرات يحدث تغيرا مناسبا تماما مع المتغير الآخر.
- أن توجد قيود على المتغيرات الداخلة في دالة الهدف و القيود الهيكلية تستبعد منها القيم السالبة.

2-4- مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

و من المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية و المالية و التجارية و علوم التسيير عامة كما يلي[22]:

---

[20] علي السلمي، مرجع سبق ذكره، ص60.

[21] محمد توفيق ماضي،"سلسلة الأساليب الكمية للجميع: البرمجة الخطية و التوزيع الأمثل للموارد المحدودة"، المكتب العربي الحديث، الإسكندرية،1992. ص09.

[22] راتول محمد، مرجع سبق ذكره. ص 16

في حالة التعظيم:

- تعظيم الأرباح؛
- تعظيم الإنتاج؛
- تعظيم طاقات التخزين؛
- تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
- تعظيم إستخدام اليد العاملة .

و غير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

في حالة التدنئة:

- تدنئة التكاليف؛
- تدنئة الخسائر ؛
- تدنئة عدد الموظفين؛
- تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة و غير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

و للبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت و ما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها[23]:

- **التطبيقات التسويقية** : مثل اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- **التطبيقات المالية** : مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق و الأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- **تطبيقات إدارة الإنتاج** : مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل و التخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- **مشاكل المزج؛**
- **مشاكل تخطيط المشروعات.**

و غيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دورا بارزا في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

[23]جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي،فالح عبد القادر الحوري، "بحوث العمليات و الأساليب الكمية و النظرية و تطبيق"، دار جليس الزمان، عمان، 2008.،ص2.

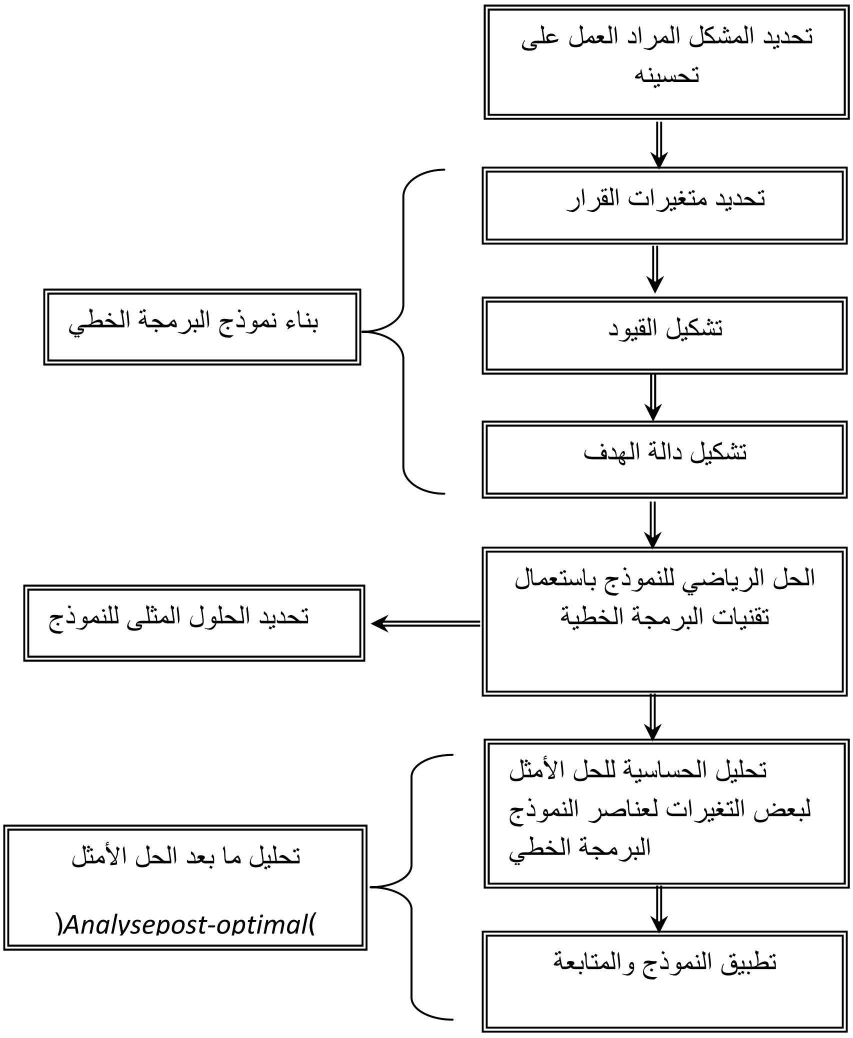
2-5- صياغة الشكل العام للبرنامج الخطي، وطرق حله:

2-5-1- صياغة الشكل العام:

تستخدم البرمجة الخطية لإيجاد أفضل توزيع للموارد والإمكانات المحدودة على الإستخدامات المختلفة لتحقيق هدف معين كتعظيم الربح أو الإنتاج أو تخفيض التكاليف في ظل قيود وعوامل ثابتة، حيث تصاغ المشكلة الإقتصادية وتكتب على شكل علاقات رياضية خطية، أي معادلات من الدرجة الأولى، والشكل رقم (1) يوضح بإختصار خطوات النمذجة و الحل لنموذج البرمجة الخطية.

2-5-1-1- طريقة النمذجة و التحليل في البرمجة الخطية.

شكل (1-1)[24]



[24] Gerald Bailageon, Op. cit. P06.

الشكل رقم (1-1) يمثل تلخيص خطوات إتخاذ القرار بإستخدام البرمجة الخطية كالتالي:

أ- وتكون البداية ببناء النموذج الرياضي للمسالة من البيانات المجمعة من الواقع الفعلي، وهذا يستدعي تحديد الهدف المطلوب تحقيقه وتعريف جميع المتغيرات التي تأثر فيه وذلك من خلال النظام ككل

ب- ثم فحص ودراسة الحلول البديلة المتاحة و تطوير عمليات نظامية لعلاجها والوصول إلى الهدف المطلوب تحقيقه.

ت- و أخيرا تطوير الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

2-5-2- عناصر نموذج البرمجة الخطية:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية[25]:

2-5-2-1- المتغيرات:

وتسمى متغيرات القرار، بتحديد قيمها نصل إلى الهدف المنشود أكبر ربح أو أقل تكلفة للمسألة المدروسة، و يشترط أن تكون غير سالبة، تخضع هذه المتغيرات لنوع معين من القياس، أي يعبر عنها بصورة كمية ونرمز لهذه المتغيرات بـ:

$$X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots\dots, X_n$$

حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية:

- كميات إنتاج لمنتجات معينة.
- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة.
- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة.
- مقدار من القطع الأجنبي المخصص لإستراد أصناف من السلع.
- كميات من المواد منقولة على طريق معينة، أو بوسائل نقل معينة.
- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين.

2-5-2-2- **دالة الهدف:**

هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، كتحقيق أكبر ربح أو أدنى تكلفة ممكنة ويكون الشكل العام لهذه الدالة[26]:

$$\boldsymbol{Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots + C_nX_n}$$

أي بالشكل المختصر:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j}$$

[25] رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان،"مقدمة في بحوث العمليات"،عمان الأردن،ط1996،1.ص22.

[26] Gerald Bailageon, Op. cit. P08.

حيث C_j أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف، أو ببساطة معاملات دالة الهدف، و تصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين :

أ-**المجموعة الأولى:** تحتوي على حالة التعظيم لدالة الهدف كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت و الجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن، وسنرمز لدالة الهدف بحرف Z كبير و هدفها يكون Max[27] أي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots. + C_nX_n \rightarrow Max$$

أي بالشكل المختصر. $Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \rightarrow Max$

حيث X_J : متغيرات القرار.

و C_J الربح الوحدوي لـ X_J.

ب- المجموعة الثانية : تدنئة دالة الهدف كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن , أو تقليل الخسائر قدر الإمكان , و تكتب دالة الهدف كالتالي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots. + C_nX_n \rightarrow Min$$

أي بالشكل المختصر. $Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \rightarrow Min$

حيث X_J : متغيرات القرار.

و C_J التكلفة الوحدوية لـ X_J .

وبذلك تتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير مثلا إلى المنتجات المختلفة التي يمكن إنتاجها، على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو ربح الوحدة الواحدة من المنتجات في دالة تعظيم الربح، أو يكون عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة التكلفة.

2-5-2-3-القيود:

القيود[28] عبارة عن وجود علاقة تأثير بين المتغيرات، ويعبر عنها رياضيا بمتباينات تدعى الشروط الخطية، وتأخذ الأشكال التالية[29]:

أ- الشكل الأول : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1,2,\dots\dots\dots,m.$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم Max.

[27] Max اختصار لكلمة Maximisation، Min اختصار لكلمة Minimisation

[28] Amor Farouk Benghezal, « programmation linéaire »,OPU, Alger,2000. P14.

[29] Michel Simonnard,« Programmation linéaire technique de calcule économique », Dunod, Paris,1972. P09.

ب- الشكل الثاني : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,2,.........,m.$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة *Min*.

ملاحظة: الشكل الأول و الثاني يطلق عليه الشكل القانوني(Forme Canonique) لنموذج البرمجة الخطية.

ج- الشكل الثالث : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,.........,m.$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم*Max* أو تدنئة *Min*.

ملاحظة:الشكل الثالث يطلق عليه الشكل المعياري (Forme Standard) لنموذج البرمجة الخطية.

د- الشكل الرابع : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \quad i = 1,2,.........,m.$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم*Max* أو تدنية *Min*.

ملاحظة:الشكل الرابع يطلق عليه الشكل المختلط (Forme Mixte) لنموذج البرمجة الخطية.

حيث أنه في كل الأشكال:

n : عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m : عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

a_{ij} : أعداد حقيقية (معاملات) .

b_i :أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة و يجب أن تكون موجبة.

2-5-2-4- شرط عدم السلبية :

يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أي $x_j \geq 0$ وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج لأنها جميعها تعبر عن كميات إنتاج، و الكميات لا يمكن أن تكون سالبة.

2-6- خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:

إن عملية صياغة النموذج، أمر في غاية الأهمية والدقة، حيث أن الصياغة الصحيحة تؤدي إلى نتائج صحيحة والعكس صحيح[30]، ولهذا فإنه يجب فهم المشكلة فهما دقيقا وهي الخطوة الأولى لحلها، وفيما يلي ذكر لأهم الخطوات اللازمة لصياغة النموذج[31]:

ا- الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير.

ب- تحديد متغيرات القرار بشكل دقيق وصحيح فهي مفتاح الحل، ويجب أن تتميز متغيرات القرار بخاصيتين أساسيتين وهما:

-متغيرات القرار تكون مجهولة القيمة ولا تتحدد قيمتها إلا بعد إيجاد حل للنموذج.

- متغيرات القرار هي متغيرات مستقلة (غير تابعة) أي لا تحدد قيمتها داخل النموذج من خلال متغيرات أخرى مجهولة القيمة.

ج- تحديد دالة الهدف والتي تأخذ شكلين كما أشرنا سابقا تعظيم (Max) أو تدنئة (Min)، ويمكن معرفة ذلك من خلال هدف المدير (تعظيم الأرباح، الإيرادات، تدنئة التكاليف...)، ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كميا[32].

د- تحديد قيود البرنامج وهنا نشير إلى أمر مهم في تحديد القيود وهو التركيز على وحدة القياس في طرفي القيود بحيث يجب أن تكون هي نفسها في الطرفين وهذا الأمر يساعد جدا في صياغة القيود.

ه- تحديد قيود عدم السلبية وهو أمر بسيط فجميع متغيرات القرار تكون قيمتها أكبر أو يساوي الصفر.

ونشير إلى أن هذه الخطوات قد تظهر بسيطة للقارئ، إلا أنه في الواقع قد نجد صعوبات كبيرة في تحديد النموذج الصحيح، فالنجاح في صياغة النموذج الصحيح يتوقف بدرجة كبيرة على مدى تجربة وخبرة وحنكة الشخص مصمم النموذج، كما نشير إلى أن التطور التكنولوجي في ميدان البرمجيات لم يتوصل – إلى حد الآن- إلى اكتشاف يسمح لنا بترجمة المشاكل الإدارية إلى نماذج رياضية مباشرة، فتبقى عملية صياغة النموذج من خصوصيات البشر.

[30] محمد سالم الصفدي، "البرمجة الخطية و بحوث العمليات"، شركة المطبوعات للتوزيع والنشر,لبنان، 1980، ص19.

[31] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، "تطبيقات بحوث العمليات في الادارة، اثراء للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، الأردن،2009 ، ص102، بتصرف.

[32] محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني،" مقدمة في بحوث العمليات " دار وائل للطباعة والنشر و التوزيع، الأردن، 1999 ص21.

وفيما يلي مثال حول صياغة المشاكل "الإدارية" إلى برامج رياضية.

2-6-1- مثال تطبيقي (دراسة حالة) :

تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A و نوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كانت صنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول و ساعة عمل في القسم الثاني و أربع ساعات عمل في القسم الثالث، و يحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم، كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا و في القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا و في القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا، و إذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2دينار وB هو 3دينار.

المطلوب: تحديد نموذج برمجة خطية لحجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل:

لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول، هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة.

الجدول (1-2)

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة بالدينار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	2	1	4	2
B	2	2	2	3
ساعات العمل المتاحة	160	120	280	

تكوين النموذج:

- تحديد المتغيرات المجهولة و التعبير عنها برموز جبرية، و لذلك:

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو $\mathbf{X_1}$

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو $\mathbf{X_2}$

- تحديد القيود و التعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

و القيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود و يجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A، و السلعة B.

بالنسبة للقسم الأول:

الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)×(الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من A)+(عدد الوحدات المنتجة من السلعة B)×(الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة منB). ويجب أن لا تتجاوز عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول، ونعبر عن هذا القيد بالمتراجحة التالية:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

و بنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني و الثالث أيضا تكتب على شكل متراجحات كالتالي:

بالنسبة للقسم الثاني: $X_1 + 2X_2 \leq 120$

بالنسبة للقسم الثالث: $4X_1 + 2X_2 \leq 280$

بالنسبة لقيد عدم السالبية المعبر عن أن الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، يكتب على النحو الآتي:

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

تحديد دالة الهدف: $Z = 2X_1 + 3X_2$

وتهدف إلى إنتاج الكميات المثلى من $\mathbf{X_1}$ و $\mathbf{X_2}$ التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximisation، و منه يمكن كتابة البرنامج الخطي كالتالي:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \leq 160 \\ X_1 + 2X_2 \leq 120 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 280 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2-7- طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

يمكن تصنيف أساليب الحل في البرمجة الخطية إلى ثلاثة مجموعات رئيسية[33] هي:

1- الأساليب العامة.

2- الأساليب الخاصة.

3- الأساليب التقريبية.

[33] احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف محمد،" الأساليب الكمية في الإدارة"، دار المجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان،1999. ص33.

تمكن الأساليب العامة من حل جميع مشاكل البرمجة الخطية، وتعد الطريقة المبسطة (السمبلكس) من أكثر الطرق إستخداما، في حين تستعمل الأساليب الخاصة لحل أنواع معينة من وسائل البرمجة الخطية، و يعتبر أسلوب النقل من أفضل هذه الأساليب و تمثل الطرق التقريبية مجموعة من الطرق و الأساليب التي توصف بأنها لا تمكن من الوصول إلى الحل الأمثل بدقة، بل بصورة تقريبية، و فيما يلي أهم الأساليب التي يمكن إستخدامها لحل مشكلة البرمجة الخطية و هي :

أ- أسلوب الحل البياني.

ب- الطريقة المبسطة أو السمبلكس.

ج- أسلوب النقل.

د- أسلوب التخصيص (التعيين).

2-7-1- الأسلوب البياني لحل البرامج الخطية ذات متغيرين:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، و لكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصورا عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، و كما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة X_1 و X_2.[34]

و تعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة و التي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفؤة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

ولحل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية نتبع الخطوات التالية[35]:

أ-نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2؛

ب- نرسم المستقيمات الممثلة للقيود، وذلك بعد تحويل المتراجحات (المتباينات) إلى معادلات (هذا التحويل شكلي وليس رياضي، وهو يساعدنا على تمثيل القيود في شكل مستقيمات فقط)، يعني (≤) أو (≥) تصبح (=)، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم، ولرسم المستقيم الممثل للقيد يجب الحصول على نقطتين على الأقل، ويتم ذلك من خلال تحديد نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_2، أي نفترض $X_1=0$ فنحصل من المعادلة على X_2، ثم نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1، أي نفترض $X_2=0$ فنحصل من المعادلة على قيمة X_1، ومنه نتحصل على نقطتين واحدة على المحور الأفقي والأخرى على المحور العمودي وبالوصل بينهما نحصل على المستقيم الممثل للقيد؛

---

[34] سهيلة عبد الله سعيد، "الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات"،دار الحامد،ط1 ،الأردن، 2007. ص38.

[35] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، " بحوث العمليات "،دار اليازوري للطباعة و لنشر، الأردن،2010.، ص31، بتصرف.

ج-بعد تمثيل جميع القيود في شكل مستقيمات، يتم تحديد المنطقة المقبولة وفق كل قيد، وفي النهاية نحصل على منطقة القبول المشتركة، والتي تسمى منطقة الحلول الممكنة والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد، مع الإشارة إلى أن قيود عدم السلبية تحدد لنا منطقة الحل في الربع الأول من البيان، ويمكن التمييز في منطقة القبول المشتركة بين ثلاثة أنواع من الحلول وهي[36]:

الحلول الممكنة: وهي جميع النقاط التي تقع ضمن حدود منطقة القبول أو على محيطها والتي تحقق جميع القيود إضافة إلى قيود عدم السلبية، وتتصف هذه الحلول بعددها الكبير والذي يصل إلى ما لانهاية.

الحلول الأساسية: وهي جميع النقاط القصوى التي تحدد منطقة القبول وتنتج عن تقاطع المستقيمات الممثلة للقيود فيما بينها أو مع المحور الأفقي أو العمودي وتمتاز بعددها القليل، كما يمكن أن تكون إحداها هي نقطة الحل الأمثل.

الحل الأمثل: هي النقطة التي يتم اختيارها من بين الحلول الأساسية والتي تحقق القيمة المثلى لدالة الهدف (العظمى أو الدنيا).

د- تحديد الحل الأمثل من منطقة الحل الممكن، ويكون الحل هو أكبر قيمة لـ (Z) إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تدنية (Min)، ويتم تحديد نقطة الحل الأمثل بطريقتين هما:

الطريقة الأولى: رسم المستقيم الممثل لدالة الهدف بإعطاء قيمة فرضية لدالة الهدف (Z) وتحديد نقطتين في البيان (بنفس طريقة رسم القيود)، ومن خلال إزاحة مستقيم دالة الهدف نصل إلى نقطة الحل الأمثل (سنشرح ذلك بالتفصيل في المثال التطبيقي)

الطريقة الثانية: تحديد إحداثيات جميع النقاط القصوى (الحلول الأساسية) وتعويضها في دالة الهدف، واختيار القيمة التي تحقق الأمثلية.

2-7-1-1- **مثال تطبيقي (دراسة حالة):**

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\boldsymbol{Min}\; Z = 0{,}75X_1 + 0{,}85X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 8X_1 + 4X_2 \geq 100 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 70 \\ 2X_1 + 8X_2 \geq 90 \\ X_1 \geq 0;\; X_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

نستخرج المستقيمات و ذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات،

[36] محمد سالم الصفدي، مرجع سبق ذكره، ص96، بتصرف.

و يكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينهما كما يلي:

معادلة القيد الثالث	
$2X_1 + 8X_2 = 90$	
X_1	X_2
0	11,25
45	0

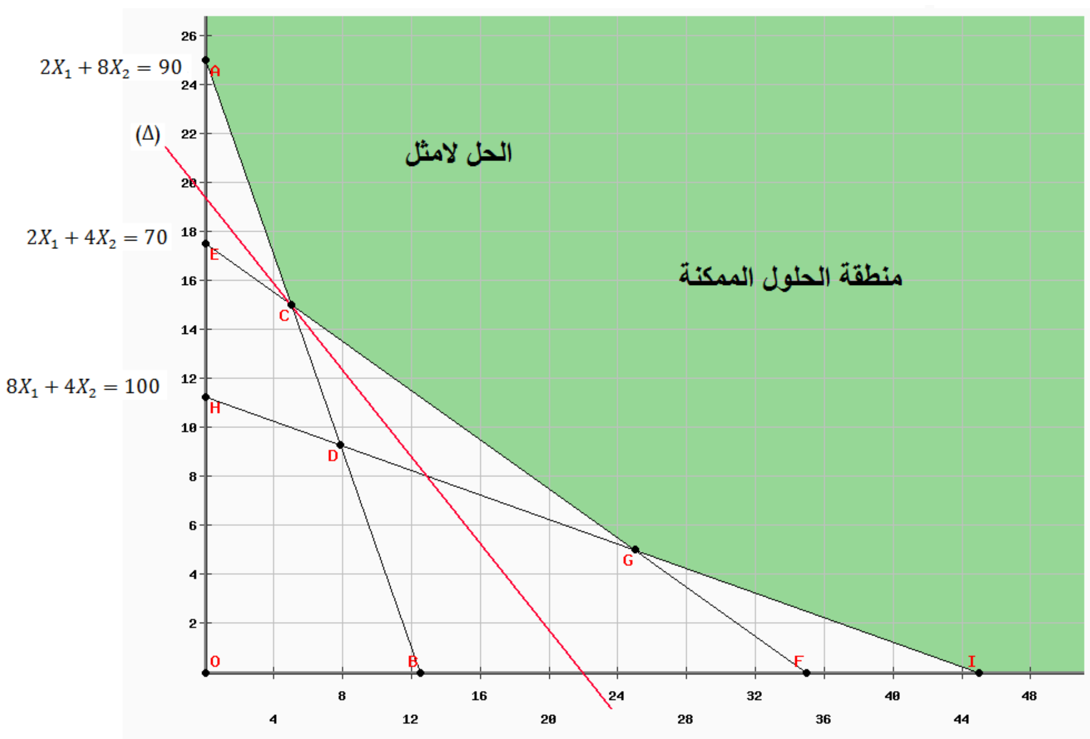
معادلة القيد الثاني	
$2X_1 + 4X_2 = 70$	
X_1	X_2
0	17,5
35	0

معادلة القيد الأول	
$8X_1 + 4X_2 = 100$	
X_1	X_2
0	25
12,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) و هو المستقيم المحصل عليه عند و ضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها و هي$Z=0$ أي المستقيم (Δ) يمر من نقطتين كما يلي:

معادلة دالة الهدف	
$0{,}75X_1 + 0{,}85X_2 = 0$	
X_1	X_2
3	−2,64
−3,4	3

شكل (1−2)



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل و ذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي و بالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة و التي يمكن تحديدها بالنقاط (ACGI).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (0,25) و النقطة I هي: (45,0) أما النقطتين C و G فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الثاني و الثالث:

$$2X_1 + 4X_2 = 70$$
$$2X_1 + 8X_2 = 90$$

و بعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن إحداثيات النقطة C هي: (25,5)

النقطة G متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول و الثاني:

$$8X_1 + 4X_2 = 100$$
$$2X_1 + 4X_2 = 70$$

و بعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن إحداثيات النقطة G هي: (5,15)

ومن خلال الجدول الموالي الذي يعطينا جميع قيم دالة الهدف عند نقاط التقاطع، نستنتج أن النقطة C هي نقطة الحل الأمثل لأنها توافق أقل قيمة لدالة الهدف في منطقة الحلول الممكنة أي أنها تعطي اقل التكاليف الممكنة، كما يظهر في الجدول التالي:

الجدول (1-3)

Point	Coordonnée X (X1)	Coordonnée Y (X2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	25	21.25
B	12.5	0	9.37
C	5	15	16.5
D	7.85	9.28	13.78
E	0	17.5	14.87
F	35	0	26.25
G	25	5	23
H	0	11.25	9.56
I	45	0	33.75

و لتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط C و بالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة و تكون قيمة دالة الهدف عندها هي 16,5.

و بالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان اقل قيمة للدالة الإقتصادية هما:

$X_1=5$ و $X_2=15$

كما يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود بالتعويض في قيود المسالة بإحداثيات النقطة C نقطة الحل الأمثل.

2-7-1-2-حل المثال السابق باستعمال برنامج WinQSB:

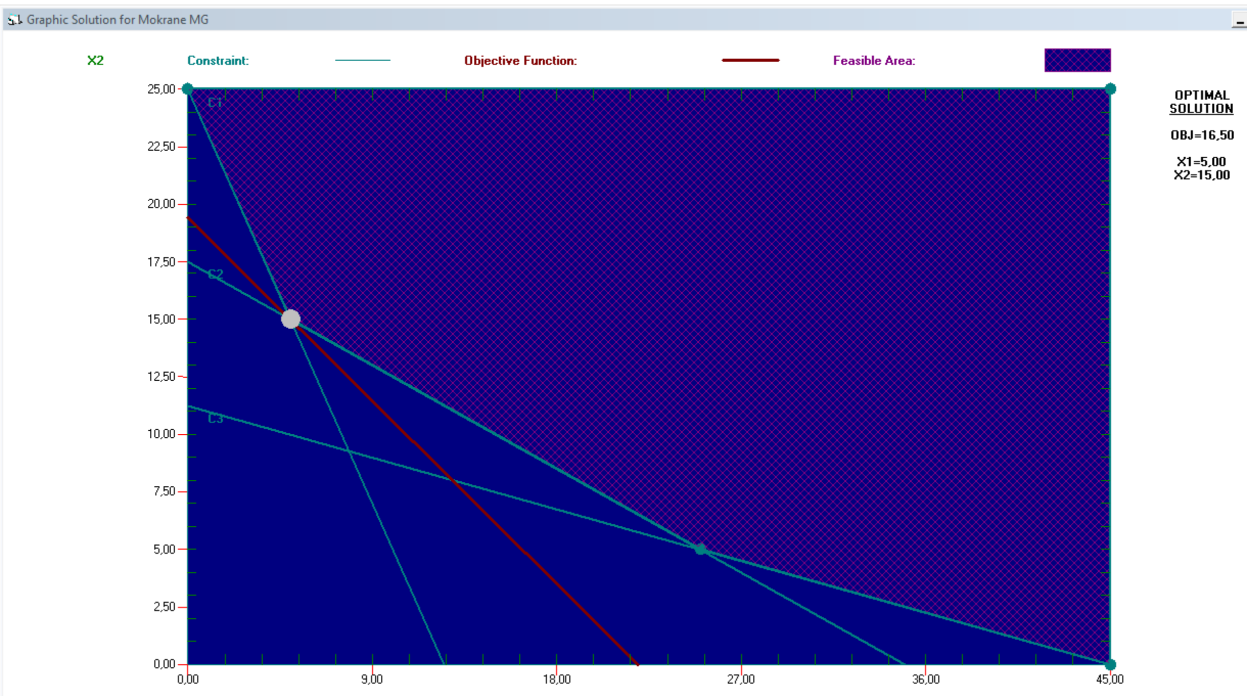
أول خطوة هي إدخال بيانات البرنامج كما هو موضح في الشكل الموالي:

شكل (1-3)

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Minimize	0.75	0.85		
C1	8	4	>=	100
C2	2	4	>=	70
C3	2	8	>=	90
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

بعدها نختار من القائمة Solve and Analyze الأمر Graphic Method فنحصل على مخرجات البرنامج كما يلي:

شكل (1-4)



نلاحظ أن البرنامج يعطينا نقطة الحل الأمثل الممثلة في الشكل أعلاه بنقطة بيضاء كبيرة و هي أول نقاط التماس لمستقيم دالة الهدف (Objective Fonction) بمنطقة الحلول الممكنة (Feasible Area)، كما يعطينا إحداثيات النقطة المثلى و قيمة دالة الهدف المثلى يمين الشكل أعلاه.

2-7-2- طريقة السمبلكس (Simplex) لحل النماذج الخطية:

جاءت هذه الطريقة لمعالجة النقص الموجود في الطريقة البيانية كون الطريقة البيانية لا تستخدم إلا في حالة و جود متغيرين فقط و طالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عدد كبير من المتغيرات و القيود, فإننا نحتاج إلى أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس (Simplex Method).

يقوم أسلوب السمبلكس الذي قدمه (Geroge Dantzig) الأمريكي في عام 1947، على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل، في حالة وجود حل، وذلك في عدة مراحل متتابعة و محددة، و يتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلى الوصول إلى حل أفضل في كل مرحلة, وذلك إلى الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل، عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

2-7-2-1- استخدام طريقة السمبلكس في حالة التعظيم (Maximisation):

في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي (≤) عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[37]:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i & i = 1 \dots\dots\dots m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots\dots\dots n \end{cases}$$

و لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم هناك طريقتين

2-7-2-1-1-الطريقة الأولى: نتبع الخطوات التالية:

أ – تحويل النموذج الخطي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i)،(متغيرات الفرق) الى كل من دالة الهدف وقيود النموذج مع مراعات جعل دالة الهدف مساوية للصفر كما يلي:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = 0$$
$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i & i = 1 \dots\dots\dots m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots\dots\dots n \end{cases}$$

[37]J.M.Boussard, J. J.Daudin ,"La programmation linéaire dans les modèles de production", Masson , Paris,1998.P 27

ب- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (X_j و S_i) في قيود النموذج و دالة الهدف.

ج- تحديد المتغير الداخل على أساس اصغر قيمة سالبة في صف دالة الهدف Z.

د- تحديد المتغير الخارج عن طريق قسمة قيم الثوابت (b_i) على ما يقابلها من معاملات التقنية (a_{ij}) في عمود العنصر الداخل (العمود المحوري)، و المتغير الذي يقابل اقل قيمة موجبة لحواصل القسمة في عمود النسب يعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.

ملاحظة:

- نسمي العمود الذي يوجد به المتغير الداخل بالعمود المحوري (Pivot column).
- نسمي السطر الذي يوجد به المتغير الخارج بالسطر المحوري (Pivot row).
- نسمي العنصر الذي يقع في تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري بالعنصر المحوري (Pivot)

د- لتحسين الحل بطريقة السمبلكس (أي إيجاد جدول السمبلكس المحسن) نتبع الخطوات التالية:

i- لإيجاد المعادلة المحورية نقوم بقسمة السطر المحوري على العنصر المحوري فنحصل على المعادلة المحورية الجديدة .

ii- معادلة الهدف الجديدة (new Z) تحسب كالتالي:

معاملات (Z) الجديدة= معاملات (Z) القديمة- معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف×المعادلة المحورية الجديدة.

iii- معاملات القيود الجديدة تحسب كالتالي:

معاملات القيود الجديدة = معاملات القيود القديمة- معامل المتغير الداخل في صف القيد×المعادلة المحورية الجديدة

هـ- يمكن الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة التعظيم وذلك عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اكبر آو تساوي الصفر أي أن ($C_j \geq 0$)، اما اذا كان هناك على الاقل معامل (C_j) في سطر دالة الهدف سالب اي ($C_j \leq 0$)، فهذا يعني عدم التوصل للحل الامثل.

و- في هذه الحالة تعاد إجراء الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى حالة جميع معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اكبر آو تساوي الصفر أي أن ($C_j \geq 0$)، مما يعني الوصول للحل الامثل.

2-7-2-1-1-1-مثال تطبيقي (دراسة حالة):

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\boldsymbol{Max}\, Z = 20X_1 + 30X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \geq 200 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 80 \\ 1X_1 + 1X_2 \geq 25 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

أولا كتابة البرنامج على شكل القياسي:

$$Z - 20X_1 - 30X_2 = 0$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 + S_1 = 200 \\ 4X_1 + 2X_2 + S_2 = 80 \\ 1X_1 + 1X_2 + S_3 = 25 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ثانيا كتابة جدول الحل الأولي وتحديد المتغيرة الداخل و المتغير الخارج من القاعدة:

الجدول (1-4)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	النسبة *Ratio*
S_1	5	10	1	0	0	200	20
S_2	4	2	0	1	0	80	40
S_3	1	1	0	0	1	25	25
Z	−20	−30	0	0	0	0	

تحديد المتغيرة الداخل: أن المتغير الداخل هو X_2 كونه يقابل اقل قيمة سالبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: أن المتغير الخارج هو S_1 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

ملاحظة: تهمل القيم لسالبة و القيم الغير معرفة (∞) في عمود النسبة (*Ratio*).

إن العنصر المحوري هو القيمة 10 و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 10 أي:

$$Pivot\ Equation = \left(\frac{5}{10}, \frac{10}{10}, \frac{1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{0}{10}, \frac{200}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{10}, 0,0,20\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات S_2،S_3 و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ S_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$New\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{10} \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-30) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{pmatrix}$$

كتابة جدول حل السمبلكس الثاني من النتائج السابقة:

الجدول (1-5)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	النسبة *Ratio*
X_2	1/2	1	1/10	0	0	20	40
S_2	3	0	−1/5	1	0	40	40/3
S_3	1/2	0	−1/10	0	1	5	10
Z	−5	0	3	0	0	600	

ملاحظة: بما أن معاملات الجدول الثاني للسمبلكس ليست كلها موجبة هذا يعني إمكانية تحسين الحل ولأجل ذلك نتبع نفس المراحل المنتهجة في إيجاد الجدول الثاني للسمبلكس

تحديد المتغيرة الداخل: أن المتغير الداخل هو X_1 كونه يقابل اقل قيمة سالبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

وتحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو S_3 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

إن العنصر المحوري هو القيمة$1/2$و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 10 أي:

$$Pivot\ Equation = \left(\frac{1/2}{1/2}, \frac{0}{1/2}, \frac{-1/10}{1/2}, \frac{0}{1/2}, \frac{1}{1/2}, \frac{5}{1/2}\right)$$

$$= \left(1,0,\frac{-1}{5},0,2,10\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات X_2،S_2 و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - 1/2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$New\ S_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{pmatrix} - (-5) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 10 \\ 650 \end{pmatrix}$$

كتابة جدول حل السمبلكس الثالث من النتائج السابقة:

الجدول (1-6)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	النسبة *Ratio*
X_2	0	1	1/5	0	−1	15	
S_2	0	0	2/5	1	−6	10	
X_1	1	0	−1/5	0	2	10	
Z	0	0	2	0	10	650	

ملاحظة: بما أن كل معاملات دالة الهدف موجبة ($C_j \geq 0$) في الجدول الثالث للسمبلكس هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: ($X_1=10$)، ($X_2=15$)، ($Z=650$)

2-7-2-1-2- الطريقة الثانية:

و هي التي يعتمد عليها برنامج WinQSB في الحل،[38] هذه الطريقة تختلف عن الطريقة الأولى في أنها تعتمد في حساب معاملات دالة الهدف على معاملات المتغيرات الأساسية في جدول الحل، وسنقوم بتفصيلها فيما يلي:

أولا سنقوم بعرض شكل ومحتوى جدول السمبلكس الأولي حسب هذه الطريقة ثم نقوم بذكر الخطوات الأزمة لتحسين الحل و الوصول إلى الحل الأمثل.

جدول السمبلكس الأولي

الجدول (1-7)

C_j		C_1	C_2	……	C_n	0	0	0	0	$\bar{B}_i$
CVB	VB	X_1	X_2	……	X_n	S_1	S_2	……	S_m	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
0	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	0	0	0	1	b_m
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	**$Z_0=0$**
$C_j - Z_j$		C_1	C_1	……	C_1	0	0	0	0	

38 استنتاج شخصي.

السطر الأول (C_j): وتمثل معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف لجميع المتغيرات الموجودة في الشكل القياسي؛ وهي تمثل ربح (إيراد) الوحدة؛

السطر الثاني X_j و S_i: جميع المتغيرات الداخلة في تكوين الشكل القياسي؛

العمود الأول(CVB): معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف، وهنا جميعها يساوي الصفر لأن متغيرات الانحراف هي متغيرات الأساس؛

العمود الثاني(VB): المتغيرات الموجودة داخل الأساس،وهي **متغيرات الانحراف S_i** في القيود أقل أو يساوي؛

الأعمدة الخاصة بجميع المتغيرات: ويمثل كل عمود منها معاملات تلك المتغيرات في قيود البرنامج (a_{ij})

العمود الأخير(B_i): ويمثل في الجدول الأول قيم الطرف الثاني للقيود، كما أنها تمثل قيم المتغيرات الموجودة داخل الأساس أي: ($S_1=b_1,\ S_2=b_2\ \ldots\ldots,S_m=b_m$)

السطر (Z_j)[39]: ويمثل الربح المحصل عليه من مجموع المتغيرات في عمود أساس الحل (VB)، حيث يتضمن هذا السطر (Z_j) قيمة واحدة مقابلة لكل متغير من المتغيرات الموجودة في الأعمدة (كل متغيرات البرنامج)، وتمثل قيمة العمود الأخير(B_i) في السطر(Z_j) قيمة دالة الهدف Z_0 ، وهي تساوي الصفر في هذه الحالة، وهذا ما يجعلنا نبحث عن تحسين الحل لأن الهدف هنا هو تعظيم قيمة Z

ويتم حساب كل قيمة من (Z_j) عن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس (CVB) في القيم المقابلة لها في نفس السطر مع العمود المخصص، ويٌسجل مجموع حواصل الضرب في سطر(Z_j) للعمود المخصص.

السطر ($C_j - Z_j$)[40]: ويمثل حاصل طرح (Z_j) من معامل المتغيرات في دالة الهدف (C_j) في نفس العمود، ويعبر عن التغير الحاصل في قيمة دالة الهدف نتيجة لإدخال المتغير X_j.

ملاحظة: يمكن الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة التعظيم وفق هذه الطريقة وذلك عندما تكون جميع معاملات (**$C_j - Z_j$**) في جدول الحل اصغر أو تساوي الصفر أي أن ($0 \leq \mathbf{Zj} - \mathbf{Cj}$)، اما اذا كان هناك على الاقل معامل في سطر (**$C_j - Z_j$**) موجب فهذا يعني عدم التوصل للحل الأمثل.

[39] محمود الفياض، عيسى قدادة، "بحوث العمليات" ، دار اليازوري، الأردن 2007، ص117
[40] محمود الفياض، عيسى قدادة، مرجع سبق ذكره، ص 117

و في هذه الحالة تعاد إجراء الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلي حالة جميع معاملات **(C_j−Z)** في جدول الحل اصغر أو تساوي الصفر، مما يعني الوصول للحل الأمثل.

قاعدة: في كل الحالات تكون قيم (C_j− Z_j) للمتغيرات داخل الأساس مساوية الصفر.

2-7-2-1-2-2-مثال تطبيقي (دراسة حالة):

نقوم بحل نفس المثال السابق بهذه الطريقة ولكن نعتمد في الحل هذه المرة على برنامج *WinQSB*

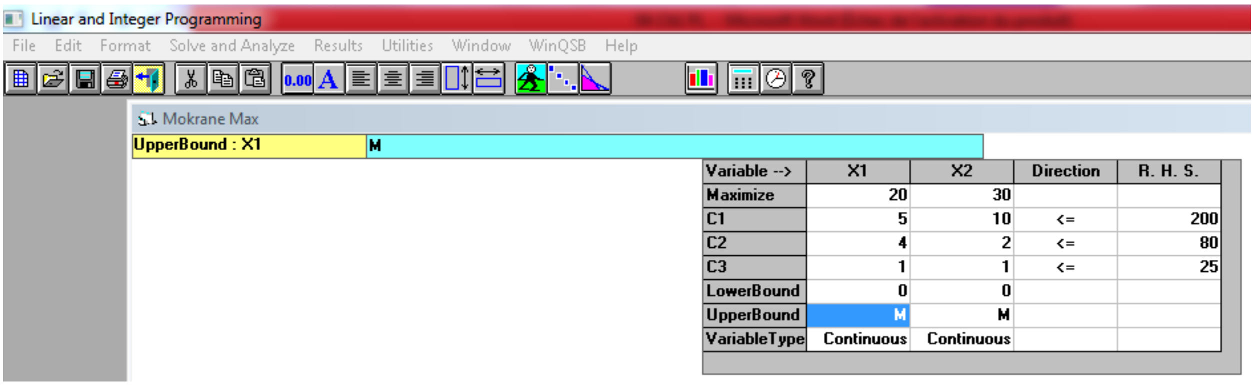
أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 20X_1 + 30X_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \geq 200 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 80 \\ 1X_1 + 1X_2 \geq 25 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

أول خطوة هي إدخال بيانات البرنامج كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (1−5)



Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	20	30		
C1	5	10	<=	200
C2	4	2	<=	80
C3	1	1	<=	25
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

بعدها نختار من القائمة Solve and Analyze الأمر Solve and DislaySteps فنحصل على الجدول الأول للسمبلكس كالتالي:

الشكل (1−6)

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	20,0000	30,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	5,0000	10,0000	1,0000	0	0	200,0000	20,0000
Slack_C2	0	4,0000	2,0000	0	1,0000	0	80,0000	40,0000
Slack_C3	0	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	25,0000	25,0000
	C(j)-Z(j)	20,0000	30,0000	0	0	0	0	

نلاحظ أن جميع العناصر التي رأيناها في جدول السمبلكس الأولي أعلاه مطابقة، ما يؤكد عمل البرنامج بهذه الطريقة.

بما أن معاملات $(C_j - Z_j)$ في جدول الأولي اكبر من الصفر هذا يعني امكانة تحسين الحل، لذلك ننتقل إلى الجدول الثاني من خلال الأمر *Simplex Iteration* ثم *NextIteration* فنحصل على جدول الحل الثاني

الشكل (1-7)

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	20,0000	30,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	30,0000	0,5000	1,0000	0,1000	0	0	20,0000	40,0000
Slack_C2	0	3,0000	0	-0,2000	1,0000	0	40,0000	13,3333
Slack_C3	0	0,5000	0	-0,1000	0	1,0000	5,0000	10,0000
	C(j)-Z(j)	5,0000	0	-3,0000	0	0	600,0000	

نلاحظ أن بغض معاملات $(C_j - Z_j)$ في جدول الثاني لا تزال موجبة هذا يعني امكانة تحسين الحل، لذلك ننتقل إلى الجدول الثالث من خلال الأمر *Simplex Iteration* ثم *NextIteration* فنحصل على جدول الحل الثالث

الشكل (1-8)

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	20,0000	30,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	30,0000	0	1,0000	0,2000	0	-1,0000	15,0000	
Slack_C2	0	0	0	0,4000	1,0000	-6,0000	10,0000	
X1	20,0000	1,0000	0	-0,2000	0	2,0000	10,0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-2,0000	0	-10,0000	650,0000	

ملاحظة: بما أن كل معاملات $(C_j - Z_j)$ **سالبة** في جدول الثالث للسمبلكس هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: $(X_1=10)$، $(X_2=15)$، $(Z=650)$

2-7-2-2- استخدام طريقة السمبلكس في حالة التدنية (Minimisation):

في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي $(\geq)$ عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[41]:

$$\text{Min}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i & i = 1 \ldots\ldots\ldots m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \ldots\ldots\ldots n \end{cases}$$

[41] J.M.Boussard, J. J.Daudin ,Op cit. P 28

بالنسبة لهذه الحالة يتعذر تطبيق برنامج السمبلكس مباشرة لان الصيغة القياسية للبرنامج في هذه الحالة لا تحتوي على حل أساسي وحدوي لان معاملات متغيرات الفرق (الراكدة) تكون مسبوقة بإشارة سالبة كما هو موضح أسفله:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = 0$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{\boldsymbol{ij}} X_j - S_i = b_i & i = 1 \dots \dots \dots . . m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots \dots \dots n \end{cases}$$

لذلك ننتهج احد الطرق التي تعتمد في الحل على إدخال متغيرات اصطناعية على القيود لتحقيق الشرط المفقود وهو تكوين حل أساسي وحدوي لجدل الحل الأولي.

وهذه الطرق هي: طريقة Big M و طريقة المرحلتين Tow phase Method.

2-7-2-2-1-طريقةM الكبيرة Big M:

تنطوي هذه الفكرة على إضافة متغيرات اصطناعية(R_i) إلى جانب المتغيرات الراكدة(S_i) إلى نموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل، عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة [المساواة (=)، أو الأكبر من أو يساوي(≥)، والى دالة الهدف على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية (R_i) في دالة الهدف بمعاملات كبيرة جدا تدعى(M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل، وإشارة سالبة في حالة التعظيم.[42]

و لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

أ – تحويل النموذج الخطي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i)،(متغيرات الفرق) والمتغيرات الاصطناعية(R_i)إلى كل من دالة الهدف وقيود النموذج كما يلي:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + \sum_{i=1}^{m} MR_i$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{\boldsymbol{ij}} X_j - S_i + R_i = b_i & i = 1 \dots \dots \dots . . m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots \dots \dots n \end{cases}$$

ب- صياغة دالة هدف جديدة (Z) بدلالة المتغيرات (X_j) و (S_i) بعد التعويض عن قيم (R_i) بما يساويها من المتغيرات (X_j) و (S_i) مع مراعاة جعل الدالة مساوية لعدد ثابت مضروب في M.

ج–تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (X_j،S_i و R_i) الموجودة في قيود النموذج و دالة الهدف.

د- تحديد المتغير الداخل على أساس اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف Z.

اعتماد بقية الخطوات الواردة في الطريقة الأولى لحالة التعظيم، باستثناء بعض الاختلافات الطفيفة يمكن توضيحها في الخطوة الموالية.

[42] حسن ياسين طعمة، "بحوث العمليات-نماذج وتطبيقات"، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والطباعة، عمان، 2009. ص114

هـ- يمكن الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة التدنئة وذلك عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اصغر أو تساوي الصفر أي أن $(C_j \le 0)$، اما اذا كان هناك على الاقل معامل (C_j) في سطر دالة الهدف موجب أي $(C_j \ge 0)$، فهذا يعني عدم التوصل للحل الأمثل.

و- في هذه الحالة تعاد إجراء الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى حالة جميع معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اقل أو تساوي الصفر أي أن $(C_j \le 0)$، مما يعني الوصول للحل الامثل.

2-7-2-2-2- مثال تطبيقي (دراسة حالة):

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة Big M:

$$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases}3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \ge 60\\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \ge 40\\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0\end{cases}$$

الحل:

أولا نقوم بكتابة البرنامج على الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الراكدة (S_i)،(متغيرات الفرق) والمتغيرات الاصطناعية(R_i)، وذلك لان القيود تحتوي على متراجحات من الشكل (≥ اكبر من) وعليه يكون البرنامج كالتالي:

$$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3 - 0\mathrm{S}_1 - 0\mathrm{S}_2 + \mathrm{MR}_1 + \mathrm{MR}_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases}3X_1 + 4X_2 + 5X_3 - \mathrm{S}_1 + \mathrm{R}_1 = 60\\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 - \mathrm{S}_2 + \mathrm{R}_2 = 40\\ X_\mathrm{j} \ge 0;\ \mathrm{S}_i \ge 0;\ \mathrm{R}_i \ge 0\end{cases}$$

من معادلة القيد الأول نجد:

$$\mathrm{R}_1 = 60 - 3X_1 - 4X_2 - 5X_3 + \mathrm{S}_1$$

من معادلة القيد الثاني نجد:

$$\mathrm{R}_2 = 40 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3 + \mathrm{S}_2$$

نعوض R_1 و R_2 في دالة الهدف نجد:

$$Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3 + \mathrm{M}(60 - 3X_1 - 4X_2 - 5X_3 + \mathrm{S}_1) + \mathrm{M}(40 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3 + \mathrm{S}_2)$$

ومنه:

$$Z - (600 - 8\mathrm{M})X_1 - (400 - 6\mathrm{M})X_2 - (400 - 6\mathrm{M})X_3 - \mathrm{MS}_1 - \mathrm{MS}_2 = 100M$$

وعليه يمكن كتابة جدول الحل الأساسي الأولي كالتالي:

الجدول (1−8)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i	النسبة *Ratio*
R_1	3	4	5	−1	0	1	0	60	60/3=20
R_2	5	2	1	0	−1	0	1	40	40/5=8
Z	8M−600	6M−400	6M−400	0	0	−M	−M	100M	

تحديد المتغيرة الداخل: أن المتغير الداخل هو X_1 كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو R_2 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

ملاحظة: تهمل القيم لسالبة و القيم الغير معرفة (∞) في عمود النسبة (*Ratio*).

إن العنصر المحوري هو القيمة 5 و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 5 أي:

$$Pivot\ Equation = \left(\frac{5}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{0}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{40}{5}\right)$$

$$= \left(1, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 8\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات R_1 و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ R_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{40}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -1 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 8M-600 \\ 6M-400 \\ 6M-400 \\ -M \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 100M \end{pmatrix} - (8M-600) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{40}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5}M-160 \\ \frac{22}{5}M-280 \\ -M \\ \frac{3}{5}M-120 \\ 0 \\ -\frac{8}{5}M+120 \\ 36M+4800 \end{pmatrix}$$

كتابة جدول الحل الثاني من النتائج السابقة:

الجدول (1-9)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i	النسبة *Ratio*
R_1	0	14/5	22/5	−1	3/5	1	−3/5	36	36/(22/5) =8,18
X_1	1	2/5	1/5	0	−1/5	0	1/5	8	8/(1/5) =40
Z	0	(14/5)M−160	(22/5)M−280	−M	(3/5)M−120	0	−(8/5)M +120	36M +4800	

ملاحظة: بما أن معاملات الجدول الثاني ليست جميعها سالبة هذا يعني إمكانية تحسين الحل، و لأجل ذلك نتبع نفس المراحل المنتهجة في إيجاد الجدول الثاني أعلاه.

تحديد المتغيرة الداخل: إن المتغير الداخل هو X_3 كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو R_1 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

إن العنصر المحوري هو القيمة 22/5 و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 22/5 أي:

$$Pivot\ Equation = \left(0, \frac{7}{11}, 1, -\frac{5}{22}, \frac{3}{22}, \frac{5}{22}, -\frac{3}{22}, \frac{90}{11}\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات X_1 و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{11} \\ 1 \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{3}{22} \\ \frac{5}{22} \\ -\frac{3}{22} \\ \frac{90}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{22} \\ -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{22} \\ \frac{5}{22} \\ \frac{70}{11} \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5}M - 160 \\ \frac{22}{5}M - 280 \\ -M \\ \frac{3}{5}M - 120 \\ 0 \\ -\frac{8}{5}M + 120 \\ 36M + 4800 \end{pmatrix} - (\frac{22}{5}M - 280) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{11} \\ 1 \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{3}{22} \\ \frac{5}{22} \\ -\frac{3}{22} \\ \frac{90}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{200}{11} \\ 0 \\ -\frac{700}{11} \\ -\frac{900}{11} \\ -M + \frac{700}{11} \\ -M - \frac{420}{11} \\ \frac{78000}{11} \end{pmatrix}$$

كتابة جدول الحل الثالث من النتائج السابقة:

الجدول (1−10)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i	النسبة *Ratio*
X_3	0	7/11	1	−5/22	3/22	5/22	−3/22	90/11	90/7 =12,8
X_1	1	3/11	0	1/22	−5/22	−1/22	5/22	70/11	70/3 =23,33
Z	0	200/11	0	−700/11	− 900/11	−M +(700/11)	−M −(420/11)	78000/11	

ملاحظة: بما أن معاملات الجدول الثالث ليست جميعها سالبة هذا يعني إمكانية تحسين الحل، و لأجل ذلك نتبع نفس المراحل المنتهجة في إيجاد الجدول الثالث أعلاه.

تحديد المتغيرة الداخل: إن المتغير الداخل هو X_2 كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو X_3 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

إن العنصر المحوري هو القيمة $7/11$ و الذي يمكن الحصول عليه من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري X_3على العنصر المحوري$7/11$ أي:

$$Pivot\ Equation = \left(0,1,\frac{11}{7},-\frac{5}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14},-\frac{3}{14},\frac{90}{7}\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات X_2و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{22} \\ -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{22} \\ \frac{5}{22} \\ \frac{70}{11} \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} \\ -\frac{3}{14} \\ \frac{90}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{200}{11} \\ 0 \\ -\frac{700}{11} \\ -\frac{900}{11} \\ -M + \frac{700}{11} \\ -M - \frac{420}{11} \\ \frac{78000}{11} \end{pmatrix} - \frac{200}{11} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} \\ -\frac{3}{14} \\ \frac{90}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{200}{7} \\ -\frac{400}{7} \\ -\frac{600}{7} \\ -M + \frac{400}{7} \\ -M + \frac{700}{7} \\ \frac{48000}{7} \end{pmatrix}$$

كتابة جدول الحل الرابع من النتائج السابقة:

الجدول (1-11)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i
X_2	0	1	11/7	−5/14	3/14	5/14	−3/14	90/7
X_1	1	0	−3/7	1/7	−2/7	−1/7	2/7	20/7
Z	0	0	−200/7	−400/7	−600/7	−M +(400/7)	−M +(700/7)	48000/7

ملاحظة: بما أن كل معاملات دالة الهدف سالبة $(C_j \leq 0)$في الجدول الأخير لطريقة Big M هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: $(X_1=20/7)$، $(X_2=90/7)$،$(X_3=0)$ و $(Z=48000/7)$

ملاحظة:$(X_3=0)$ كونها متغيرة غير أساسية في الحل الأمثل.

2-7-2-2-3- طريقة المرحلتين Tow phase Method:

يعتبر أسلوب المرحلتين أفضل من الأسلوب الأول والتي تعتمد على قيمة M الكبيرة والسبب في ذلك هو احتمال حدوث الخطأ أثناء تقدير قيمة M الكبيرة، أما أسلوب المرحلتين فهي طريقة نتمكن من خلالها التخلص من M ومشكلاتها عبر مرحلتين[43].

ويتم الحل وفق هذه الطريقة عبر مرحلتين أساسيتين، يمكن توضيحهما على النحو التالي:

المرحلة الأولى:

أ – تحويل النموذج الخطي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i)،(متغيرات الفرق) والمتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى قيود النموذج فقط.

ب– صياغة دالة هدف جديدة (r) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية(R_i) كما يلي:

$$Min\ r = \sum_{i=1}^{m} MR_i$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{\boldsymbol{ij}} X_j - S_i + R_i = b_i & i = 1 \dots \dots \dots .. m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots \dots \dots n \end{cases}$$

ج– تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات $(X_j$، S_i و $R_i)$ الموجودة في قيود النموذج و دالة الهدف الجديدة (r).

د– نتبع نفس خطوات تحسين الحل التي تطرقنا لها في الطريقة السابقة، حتى نحصل على قيمة (r=0) بما يعني وجود حل للنموذج، وتكون في هذه الحالة معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل للمرحلة الاولى اصغر او تساوي الصفر أي أن $(C_j \leq 0)$.

[43] حسين محمود الجنابي، "الأحداث في بحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2010. ص84

المرحلة الثانية:

هـ- اعتماد جدول الحل الأساسي النهائي في الخطوة (د)، وذلك بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_i) و دالة الهدف (r).

و- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z) في جدول الحل التوصل إليه ومحاولة تحسين قيمتها للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

ك- في حال وجود احد معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اكبر او تساوي الصفر اي ان ($C_j \geq 0$)، في هذه الحالة تعاد اجراء الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى حالة جميع معاملات دالة الهدف (C_j) في جدول الحل اقل او تساوي الصفر اي ان ($C_j \leq 0$)، مما يعني الوصول للحل الأمثل.

2-7-2-2-4- مثال تطبيقي (دراسة حالة):

سنأخذ نفس المثال السابق المعالج في طريقة Big M للمقارنة بين نتائج الطريقتين.

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة المرحلتين

$$\boldsymbol{Min}\, Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60 \\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 40 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

أولا نقوم بكتابة البرنامج على الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الراكدة (S_i)، (متغيرات الفرق) والمتغيرات الاصطناعية (R_i)، وذلك لان القيود تحتوي على متراجحات من الشكل (≥ اكبر من) وعليه تكتب قيود البرنامج كالتالي :

$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 - S_1 + R_1 = 60$$
$$5X_1 + 2X_2 + 1X_3 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_j \geq 0;\ S_i \geq 0;\ R_i \geq 0$$

بعدها نشرع في المرحلة الأولى وذلك بكتابة دالة الهدف الجديدة كالتالي:

$$r = \sum R_i = R_1 + R_2$$

لدينا:

من معادلة القيد الأول نجد:

$$R_1 = 60 - 3X_1 - 4X_2 - 5X_3 + S_1$$

من معادلة القيد الثاني نجد:

$$R_2 = 40 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3 + S_2$$

نعوض R_1 و R_2 في دالة الهدف الجديدة (r) نجد:

$$r = (60 - 3X_1 - 4X_2 - 5X_3 + S_1) + (40 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3 + S_2)$$

ومنه:

$$r + 8X_1 + 6X_2 + 6X_3 - S_1 - S_2 = 100$$

وعليه يمكن كتابة جدول الحل الأساسي الأولي للمرحلة الأولى كالتالي:

الجدول (1−12)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i	النسبة *Ratio*
R_1	3	4	5	−1	0	1	0	60	60/3=20
R_2	5	2	1	0	−1	0	1	40	40/5=8
r	8	6	6	−1	−1	0	0	100	

تحديد المتغيرة الداخل: إن المتغير الداخل هو X_1 كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو R_2 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

ملاحظة: تهمل القيم لسالبة و القيم الغير معرفة (∞) في عمود النسبة (*Ratio*).

إن العنصر المحوري هو القيمة 5 و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 5 أي:

$$Pivot\ Equation = \left(\frac{5}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{0}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{40}{5}\right)$$

$$= \left(1, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 8\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات R_1 و دالة الهدف *Z* على النحو التالي:

$$New\ R_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{40}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -1 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} - 8 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{40}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{8}{5} \\ 36 \end{pmatrix}$$

كتابة جدول الحل الثاني من النتائج السابقة:

الجدول (1−13)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i	النسبة *Ratio*
R_1	0	14/5	22/5	−1	3/5	1	−3/5	36	36/(22/5) =8,18
X_1	1	2/5	1/5	0	−1/5	0	1/5	8	8/(1/5) =40
r	0	14/5	22/5	−1	3/5	0	−8/5	36	

ملاحظة: بما إن معاملات الجدول الثاني ليست جميعها سالبة هذا يعني إمكانية تحسين الحل ولأجل ذلك نتبع نفس المراحل المنتهجة في إيجاد الجدول الثاني أعلاه.

تحديد المتغيرة الداخل: إن المتغير الداخل هو X_3كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو R_1كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

إن العنصر المحوري هو القيمة 22/5 و التي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري 22/5 اي:

$$Pivot\ Equation = \left(0, \frac{7}{11}, 1, -\frac{5}{22}, \frac{3}{22}, \frac{5}{22}, -\frac{3}{22}, \frac{90}{11}\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات X_1 و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{11} \\ 1 \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{3}{22} \\ \frac{5}{22} \\ -\frac{3}{22} \\ \frac{90}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{22} \\ -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{22} \\ \frac{5}{22} \\ \frac{70}{11} \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{8}{5} \\ 36 \end{pmatrix} - \frac{22}{5} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{11} \\ 1 \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{3}{22} \\ \frac{5}{22} \\ -\frac{3}{22} \\ \frac{90}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

كتابة جدول الحل الثالث من النتائج السابقة:

الجدول (1-14)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B_i
X_3	0	7/11	1	−5/22	3/22	5/22	−3/22	90/11
X_1	1	3/11	0	1/22	−5/22	−1/22	5/22	70/11
r	0	0	0	0	0	−1	−1	0

ملاحظة: بما أن معاملات دالة الهدف الجديدة (r) سالبة $(C_j \leq 0)$ في الجدول الثالث هذا يعني الوصول للجدول الأمثل للمرحلة الأولى، وبما أن قيمة دالة الهدف في الجدول تساوي الصفر، هذا يعني بان البرنامج الخطي قبل حل امثل.

وعليه نشرع في المرحلة الثانية وذلك بكتابة الجدول الأول للمرحلة الثانية بعد استبعاد المتغيرات لاصطناعية على النحو التالي:

الجدول (1-15)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	B_i
X_3	0	7/11	1	−5/22	3/22	90/11
X_1	1	3/11	0	1/22	−5/22	70/11
Z	600	400	400	0	0	0

بعد هذا نحسب معاملات الدالة (Z) من القيود الجديدة في الجدول أعلاه على النحو التالي:

من معادلة القيد الأول نجد:

$$\frac{7}{11}X_2 + X_3 - \frac{5}{22}S_1 + \frac{3}{22}S_2 = \frac{90}{11}$$

من معادلة القيد الثاني نجد:

$$X_1 + \frac{3}{11}X_2 + \frac{1}{22}S_1 - \frac{5}{22}S_2 = \frac{70}{11}$$

وعليه نجد:

$$X_3 = \frac{90}{11} + \frac{5}{22}S_1 - \frac{3}{22}S_2 - \frac{7}{11}X_2$$

و:

$$X_1 = \frac{70}{11} - \frac{1}{22}S_1 + \frac{5}{22}S_2 - \frac{3}{11}X_2$$

نعوض X_1 و X_3 في دالة الهدف نجد:

$$Z = 600(\frac{70}{11} - \frac{1}{22}S_1 + \frac{5}{22}S_2 - \frac{3}{11}X_2) + 400X_2 + 400(\frac{90}{11} + \frac{5}{22}S_1 - \frac{3}{22}S_2 - \frac{7}{11}X_2)$$

ومنه:

$$Z + \frac{200}{11}X_2 - \frac{700}{11}S_1 - \frac{900}{11}S_2 = \frac{78000}{11}$$

و عليه يمكن كتابة جدول الحل الأساسي الأول للمرحلة الثانية كالتالي:

الجدول (1−16)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	B_i	النسبة Ratio
X_3	0	7/11	1	−5/22	3/22	90/11	90/7=12,85
X_1	1	3/11	0	1/22	−5/22	70/11	70/3=23,33
Z	0	200/11	0	−700/11	−900/11	0	

ملاحظة: بما أن معاملات دالة الهدف (Z) سالبة ($C_j \leq 0$) في الجدول الأول للمرحلة الثانية، هذا يعني عدم الوصول للامثلية، وعليه نقوم بالتعديلات اللازمة عليه كما رأينا سابقا.

تحديد المتغيرة الداخل: إن المتغير الداخل هو X_2 كونه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف وهو يوافق العمود المظلل في الجدول أعلاه.

تحديد المتغيرة الخارج: إن المتغير الخارج هو X_3 كونه يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب وهو يوافق السطر المظلل في الجدول أعلاه.

إن العنصر المحوري هو القيمة 7/11 و الذي يمكن الحصول عليه من تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري.

حساب المعادلة المحورية الجديدة: وذلك بقسمة قيم الصف المحوري X_3على العنصر المحوري7/11 اي:

$$Pivot\ Equation = \left(0,1,\frac{11}{7},-\frac{5}{14},\frac{3}{14},\frac{90}{7}\right)$$

حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرات X_2و دالة الهدف Z على النحو التالي:

$$New\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{22} \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{70}{11} \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{90}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}$$

$$NewZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{200}{11} \\ 0 \\ -\frac{700}{11} \\ -\frac{900}{11} \\ \frac{78000}{11} \end{pmatrix} - \frac{200}{11} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{90}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{200}{7} \\ -\frac{400}{7} \\ -\frac{600}{7} \\ \frac{48000}{7} \end{pmatrix}$$

كتابة الجدول الثاني للمرحلة الثانية من النتائج السابقة:

الجدول (1-17)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	B_i
X_2	0	1	11/7	−5/14	3/14	90/7
X_1	1	0	−3/7	1/7	−2/7	20/7
Z	0	0	−200/7	−400/7	−600/7	48000/7

ملاحظة: بما أن كل معاملات دالة الهدف سالبة $(C_j \leq 0)$ في الجدول الثاني للمرحلة الثانية لطريقة المرحلتين هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: $(X_1=20/7)$، $(X_2=90/7)$،$(X_3=0)$ و $(Z=48000/7)$

ملاحظة:$(X_3=0)$ كونها متغيرة غير أساسية في الحل الأمثل.

نلاحظ أيضا أن كلتا الطريقتين Big M و Tow phase تعطي نتائج متطابقة.

2-7-2-2-5- مثال تطبيقي (التطبيق على برنامج ***WinQSB***):

سنقوم في هذه الفقرة بحل المثال السابق المعالج بطريقتيBig M و Tow phase.

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام **برنامج *WinQSB***

$$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60 \\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 40 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

أول خطوة هي إدخال بيانات البرنامج كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (1-9)

Mokrane MIN

C2 : R.H.S. 40

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	600	400	400		
C1	3	4	5	>=	60
C2	5	2	1	>=	40
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

بعدها نختار من القائمة Solve and Analyze الأمر Solve and DislaySteps فنحصل على الجدول الأول للحل الذي يوافق طريقة Big M كالتالي:

الشكل (1-10)

Iteration 1

		X1	X2	X3	Surplus_C1	Surplus_C2	Artificial_C1	Artificial_C2		
Basis	C(j)	600,0000	400,0000	400,0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Artificial_C1	M	3,0000	4,0000	5,0000	-1,0000	0	1,0000	0	60,0000	20,0000
Artificial_C2	M	5,0000	2,0000	1,0000	0	-1,0000	0	1,0000	40,0000	8,0000
	C(j)-Z(j)	600,0000	400,0000	400,0000	0	0	0	0	0	
	* Big M	-8,0000	-6,0000	-6,0000	1,0000	1,0000	0	0	0	

بما أن معاملات ***Big M**** في جدول الأولي اصغر من الصفر هذا يعني امكانة تحسين الحل، لذلك ننتقل إلى الجدول الثاني من خلال الأمر *Simplex Iteration* ثم *Next Iteration* فنحصل على جدول الحل الثاني

الشكل (1-11)

-- Iteration 2

		X1	X2	X3	Surplus_C1	Surplus_C2	Artificial_C1	Artificial_C2		
Basis	C(j)	600,0000	400,0000	400,0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Artificial_C1	M	0	2,8000	4,4000	-1,0000	0,6000	1,0000	-0,6000	36,0000	8,1818
X1	600,0000	1,0000	0,4000	0,2000	0	-0,2000	0	0,2000	8,0000	40,0000
	C(j)-Z(j)	0	160,0000	280,0000	0	120,0000	0	-120,0000	4 800,0000	
	* Big M	0	-2,8000	-4,4000	1,0000	-0,6000	0	1,6000	0	

نلاحظ أن بغض معاملات ***Big M**** في جدول الثاني لا تزال سالبة هذا يعني امكانة تحسين الحل، لذلك ننتقل إلى الجدول الثالث من خلال الأمر *Simplex Iteration* ثم *Next Iteration* فنحصل على جدول الحل الثالث

الشكل (1-12)

-- Iteration 3

		X1	X2	X3	Surplus_C1	Surplus_C2	Artificial_C1	Artificial_C2		
Basis	C(j)	600,0000	400,0000	400,0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X3	400,0000	0,0000	0,6364	1,0000	-0,2273	0,1364	0,2273	-0,1364	8,1818	12,8571
X1	600,0000	1,0000	0,2727	0,0000	0,0455	-0,2273	-0,0455	0,2273	6,3636	23,3333
	C(j)-Z(j)	0	-18,1818	0	63,6364	81,8182	-63,6364	-81,8182	7 090,9090	
	* Big M	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	0	

نلاحظ أن كل معاملات ***Big M**** في جدول الثالث موجبة، هذا يعني وجود حل امثل و هو ما يقابل نهاية المرحلة الأولى لطريقة المرحلتين، وعليه نعاين معاملات ($C_j - Z_j$) في جدول المقابلة للأصفار في سطر معاملات ***Big M**** أي جميع المتغيرات ما عدا المتغيرات الاصطناعية.

معاملات $(C_j - Z_j)$ في الجدول الخاصة بمتغيرات القرار و المغيرات الراكدة ليست جميعها موجبة وهذا يعني امكانة تحسين الحل، لذلك ننتقل إلى الجدول الرابع من خلال الأمر *Simplex Iteration* ثم *Next Iteration*

فنحصل على جدول الحل الرابع.

الشكل (1-13)

-- Iteration 4

Basis	C(j)	X1	X2	X3	Surplus_C1	Surplus_C2	Artificial_C1	Artificial_C2	R. H. S.	Ratio
		600,0000	400,0000	400,0000	0	0	0	0		
X2	400,0000	0,0000	1,0000	1,5714	-0,3571	0,2143	0,3571	-0,2143	12,8571	
X1	600,0000	1,0000	0,0000	-0,4286	0,1429	-0,2857	-0,1429	0,2857	2,8571	
	C(j)-Z(j)	0	0	28,5714	57,1429	85,7143	-57,1429	-85,7143	6 857,1430	
	* Big M	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	0	

ملاحظة: بما أن كل معاملات $(C_j - Z_j)$ في جدول الخاصة بمتغيرات القرار و المغيرات الراكدة جميعها **موجبة** في جدول الرابع للحل هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: $(X_1=20/7=2,85)$، $(X_2=90/7=12,85)$، $(X_3=0)$ و $(Z=48000/7=6857,14)$

يمكننا برنامج WinQSB كذلك من الحصول مباشرة على الأمثل وكذالك قيم متغيرات الفرق في الحل الأمثل إضافة إلى مجالات تحليل الحساسية التي سنتطرق لها لاحقا، وهذا من خلال الأمر Solve the problem في القائمة Solve and Analyze

فنحصل على الجدول المفصل للحل الأمثل كالتالي:

الشكل (1-14)

Report for Mokrane MIN

	08:48:07		Tuesday	June	12	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,8571	600,0000	1 714,2860	0	basic	533,3333	1 000,0000
2	X2	12,8571	400,0000	5 142,8570	0	basic	240,0000	418,1818
3	X3	0	400,0000	0	28,5714	at bound	371,4286	M
	Objective	Function	(Min.) =	6 857,1430				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	60,0000	>=	60,0000	0	57,1429	24,0000	80,0000
2	C2	40,0000	>=	40,0000	0	85,7143	30,0000	100,0000

وهو ما يلخص الحل المتوصل إليه سابقا أي: $(X_1=20/7=2,85)$، $(X_2=90/7=12,85)$، $(X_3=0)$ و $(Z=48000/7=6857,14)$

2-7-3-البرنامج الخطي الثنائي (النظير، المقابل):

عند مناقشة مشاكل البرمجة الخطية ,لابد من مناقشة مشكلة أخرى من مشاكلها وهي الثنائية (Duality) حيث يقترن دائما بكل مشكلة أولية (Primal Problem) نموذج آخر يطلق عليه المشكلة المقابلة أو الثنائية (Dual Problem)[44] , و يعني هذا أنه بالإمكان تحويل أية مشكلة في البرمجة الخطية إلى ما يقابلها من نموذج ,ويتضمن إستخدام النموذج المقابل على فوائد عديدة منها :

- سهولة وسرعة التوصل إلى الحل الأمثل, حيث قد يتطلب إحدى المشاكل إجراءات حل مطولة وفق الطريقة المبسطة (Simplexe) للنموذج المقابل, وعلى العكس من ذلك , فقد تتصف حل المشكلة بالنموذج المقابل بالصعوبة , عليه يكون حلها أسهل عند تحويلها إلى النموذج الأصلي
- تساعد الإدارة على معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.
- الحصول على نموذج يحتوي على عدد اقل من القيود وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس و الوصول إلى الحل الأمثل والحصول على نفس الحل المثالي سواء كان الحل للنموذج الأولي أو الحل للنموذج الثنائي.
- للتخلص من الإشارة السالبة من الجانب الأيمن (إن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.
- لغرض التعرف على إبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية ,البديلة) فإذا كان النموذج الأولي وبصيغة ال Max أي المشكلة بالصيغة الربحية فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة ال Min وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة), ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية

2-7-3-1- أهمية النموذج المقابل :

- حل مشكلة البرمجة الخطية ومن خلال المشكلة الثنائية (النموذج المقابل) قد يكون أسهل من حلها من خلال المشكلة الأولية (عندما يكون من الممكن اختصار عدد القيود في المشكلة الثنائية)
- يعيد النموذج الثنائي(المقابل) اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل
- يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم ابعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل.

[44]Dominique de wera ,"Eléments de programmation linéaire avec application aux graphes", presses polytechniques romandes Lausanne, 1991, p 33.

2-7-3-2- خطوات تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي في حالة الصيغ القانونية:

تتلخص عملية تحويل البرنامج الأولي إلى برنامج الثنائي والعكس، بعدد من الخطوات التي يمكن إدراجها فيما يلي[45]:

أ. إذا كانت دالة الهدف للبرنامج الأصلي تعظيم (MAX)، فإنها تكون تدنئة (MIN) في البرنامج الثنائي والعكس صحيح، فإذا كان الهدف في البرنامج الأصلي تعظيم الإنتاج أو الأرباح، فإن هدف البرنامج الثنائي هو تدنئة التكاليف، ونرمز لها ب (W)؛

ب. عدد متغيرات البرنامج الثنائي يساوي عدد قيود البرنامج الأصلي، ويرمز لمتغيرات البرنامج الثنائي بالرمز (y_i) حيث: ($i=1,2\ldots\ldots m$)؛

ج. قيم الطرف الأيمن للقيود في البرنامج الأصلي (b_i) تصبح معاملات للمتغيرات (y_i) في دالة الهدف للبرنامج الثنائي؛

د. عدد قيود البرنامج الثنائي يساوي عدد متغيرات البرنامج الأصلي؛

هـ. معاملات متغيرات البرنامج الأصلي في دالة الهدف (C_j) تصبح الطرف الأيمن (الثاني) لقيود البرنامج الثنائي؛

و. معاملات متغيرات القرار في قيود البرنامج الأصلي (a_{ij}) تصبح معاملات المتغيرات (y_i) في البرنامج الثنائي بعد جعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطر، بمعنى آخر منقول مصفوفة(a_{ij})؛

ز. شرط عدم السلبية للمتغيرات(y_i) يتحقق إذا كانت القيود المقابلة لها في البرنامج الأصلي في الشكل النموذجي(القانوني)؛

ح. قيود البرنامج الثنائي تكون في الشكل النموذجي(القانوني)، (يعني أقل أو يساوي في حالة التعظيم، وأكبر أو يساوي في حالة التدنئة) إذا كانت المتغيرات في المقابلة لها في البرنامج الأصلي محققة لقيود عدم السلبية.

ومن خلال هذه الخطوات السابقة يمكن تحويل البرنامج الأصلي إلى الثنائي كما يلي[46]:

إذا كان بصفة عامة البرنامج الأصلي من الشكل:

$$\begin{cases} Max\ \{Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j\} \\ \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}}\, \boldsymbol{x_j} \ \le b_i \\ \boldsymbol{x_j} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{i}=\{\mathbf{1};\mathbf{2};\ldots\mathbf{m}\} \\ \mathbf{j}=\{\mathbf{1};\mathbf{2};\ldots\mathbf{n}\} \end{cases}$$

[45] حسن ياسين طعمة،مروان محمد النسور،إيمان حسين حنوش،مرجع سبق ذكره، ص136-137

[46] محمد عبد العال، مرجع سبق ذكره، ص ص75-76

فإن البرنامج الثنائي يكون من الشكل:

$$\begin{cases} Min\ \{W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\} \\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_{ij}}\, \boldsymbol{y_i} \geq C_j \\ \boldsymbol{y_i} \geq \boldsymbol{0} \\ \mathbf{i} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \ldots \mathbf{m}\} \\ \mathbf{j} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \ldots \mathbf{n}\} \end{cases}$$

2-7-3-2-1- مثال تطبيقي (دراسة حالة):

ليكن لدينا البرنامجين الخطيين الأصليان، والمطلوب إيجاد البرنامج الثنائي لكل منهما:

برنامج حالة التعظيم (Max) في صيغته القانونية	برنامج حالة التدنئة (Min) في صيغته القانونية
$\boldsymbol{Max}\ Z = 20X_1 + 30X_2$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \geq 200 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 80 \\ 1X_1 + 1X_2 \geq 25 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$	$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60 \\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 40 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

الحل:

أ- البرنامج الثنائي للبرنامج حالة التعظيم (Max) في صيغته القانونية

- نلاحظ أن دالة الهدف في البرنامج الأصلي هي(Max)؛ وبالتالي في الثنائي تكون (Min)؛
- عدد قيود البرنامج الأصلي هو ثلاث، ومنه عدد متغيرات البرنامج الثنائي هو ثلاث متغيرات (y_1,y_2,y_3)، ومعاملها في دالة الهدف هي (b_1)، (b_2) و (b_3) على التوالي وقيمتهما (200)، (80) و (25) على الترتيب؛
- عدد متغيرات البرنامج الأصلي هما اثنان، ومنه عدد قيود البرنامج الثنائي هو اثنين؛
- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي هما (20) و(30) يصبحان الطرف الثاني لقيود البرنامج الثنائي على التوالي؛
- معاملات متغيرات القرار في قيود البرنامج الأصلي (a_{ij}) تصبح معاملات للمتغيرات (y_i) في قيود البرنامج الثنائي بعد تحويل الأسطر إلى أعمدة والأعمدة إلى أسطر؛

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- قيود البرنامج الأصلي في الشكل النموذجي (أي أقل أو يساوي في حالة التعظيم)، إذن متغيرات القرار في البرنامج الثنائي تحقق قيود عدم السلبية ($y_i\geq0$)؛
- متغيرات القرار في البرنامج الأصلي تحقق قيود عدم السلبية ($X_j\geq0$)، إذن قيود البرنامج الثنائي تكون من الشكل أكبر أو يساوي (الشكل النموذجي).

ومنه يكون البرنامج الثنائي من الشكل:

برنامج الأصلي حالة التعظيم (Max) في صيغته القانونية	برنامج الثنائي حالة التدنئة (Min)
$\boldsymbol{Max}\, Z = 20X_1 + 30X_2$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}5X_1 + 10X_2 \geq 200\\ 4X_1 + 2X_2 \geq 80\\ 1X_1 + 1X_2 \geq 25\\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0\end{cases}$	$\boldsymbol{Min}\, W = 200Y_1 + 80Y_2 + 25Y_3$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}5Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 \leq 20\\ 10Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \leq 30\\ Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0\end{cases}$

ب- البرنامج الثنائي لبرنامج التدنئة (Min) في صيغته القانونية:

- نلاحظ أن دالة الهدف في البرنامج الأصلي هي(Min)؛ وبالتالي في الثنائي تكون(Max)؛
- عدد قيود البرنامج الأصلي هو اثنان، ومنه عدد متغيرات البرنامج الثنائي هو متغيرين (y_1,y_2)، ومعاملها في دالة الهدف هما (b_1) و(b_2) على التوالي وقيمتهما (60) و(40) على الترتيب؛
- عدد متغيرات البرنامج الأصلي هي ثلاثة، ومنه عدد قيود البرنامج الثنائي هو ثلاثة؛
- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي هي (600)، (400) و (400) يصبحان الطرف الثاني لقيود البرنامج الثنائي على التوالي؛
- معاملات متغيرات القرار في قيود البرنامج الأصلي (a_{ij}) تصبح معاملات للمتغيرات (y_i) في قيود البرنامج الثنائي بعد تحويل الأسطر إلى أعمدة والأعمدة إلى أسطر؛

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
$\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$	$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

- قيود البرنامج الأصلي في الشكل النموذجي (أي أكبر أو يساوي في حالة التدنئة)، إذن متغيرات القرار في البرنامج الثنائي تحقق قيود عدم السلبية ($y_i\geq0$)؛
- متغيرات القرار في البرنامج الأصلي تحقق قيود عدم السلبية ($X_j\geq0$)، إذن قيود البرنامج الثنائي تكون من الشكل أقل أو يساوي (الشكل النموذجي).

ومنه يكون البرنامج الثنائي من الشكل:

برنامج حالة التدنئة (Min) في صيغته القانونية	برنامج الثنائي حالة التعظيم (Max)
$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60 \\ 5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 40 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$	$\boldsymbol{Max}\ W = 60Y_1 + 40Y_2$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 3Y_1 + 5Y_2 \leq 600 \\ 4Y_1 + 2Y_2 \leq 400 \\ 5Y_1 + 1Y_2 \leq 400 \\ Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$

2-7-3-3- خطوات تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي في حالة الصيغ المختلطة:

في بعض الحالات نجد البرنامج الخطي الأصلي لا يحقق الشكل النموذجي (القانوني)، مثلا نجد القيود أكبر أو يساوي أو مساواة في حالة التعظيم، كما قد نجد القيود أقل أو يساوي أو مساواة في حالة التدنئة، وقد نجد أيضا متغيرات القرار لا تحقق قيود عدم السلبية، وفي هذه الحالات نتعامل مع البرنامج بمعالجة كل قيد وكل متغير على حدة،ويمكن إجراء التحويل من البرنامج الأولي الأصلي إلى الثنائي في هذه الحالة، وذلك عن طريق جدول الانتقال أولي–ثانوي وهو جدول يعمل في الاتجاهين كما هو موضح في الجدول الموالي:

2-7-3-3-1- جدول الانتقال أولي–ثانوي

الجدول (1-18)[47]

MIN	MAX
Contraintes	**variables**
$\geq$ $\leq$ $=$	$\geq$ $\leq$ Quelconque (Qq)
variables	**Contraintes**
$\leq$ $\geq$ Quelconque (Qq)	$\geq$ $\leq$ $=$

[47] بالتصرف بالاعتماد على عدة مراجع

2-7-3-3-2- مثال تطبيقي (دراسة حالة):

اكتب البرنامج الثنائي للبرنامج التالي:

$$\boldsymbol{Min}\; Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} 1X_1 + 1X_2 \leq 3 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 5X_1 + 1X_2 = 8 \\ X_1 \geq 0;\; X_2 \leq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن البرنامج الأصلي لا يحقق الشكل النموذجي، لأن دالة الهدف تدنئة، ونلاحظ أن القيد الأول من الشكل أصغر أو يساوي وهو يقابل المتغير (y_1) في البرنامج الثنائي؛ وبالتالي فإن(y_1) لا يحقق شرط عدم السلبية أي ($y_1 \leq 0$).

بالنسبة للقيد الثاني في الأصلي هو يحقق الشكل النموذجي (أكبر أو يساوي) وهو يقابل المتغير(y_2) في البرنامج الثنائي؛ وبالتالي فإن(y_2) يحقق شرط عدم السلبية أي ($y_2 \geq 0$).

القيد الثالث في الأصلي لا يحقق الشكل النموذجي (مساواة) وهو يقابل المتغير(y_3) في البرنامج الثنائي؛ وبالتالي فإن(y_3) لا يحقق شرط عدم السلبية أي (y_3 غير محدد الإشارة *Quelconque*).

بالنسبة للمتغيرات، المتغيرة (X_2) في البرنامج الأصلي لا تحقق قيد عدم السلبية، حيث(X_2) أقل أو يساوي الصفر وهو يقابل القيد الثاني في البرنامج الثنائي، إذن القيد الثاني يكون من الشكل أكبر أو يساوي، وعليه يكون البرنامج الثنائي كما يلي:

$$\boldsymbol{Max}\; W = 3Y_1 + 6Y_2 + 8Y_3$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} Y_1 + 3 + 5Y_3 \leq 20 \\ Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 30 \\ Y_1 \leq 0;\; Y_2 \geq 0;\; Y_3 \mathrm{Qq} \end{cases}$$

2-7-3-4- دواعي استعمال البرنامج الثنائي:

تعود أسباب اللجوء للبرنامج الثنائي للأهمية التي يكتسيها، ونذكر من بينها:

أ. تقليل الجداول والعمليات الحسابية في الحل بالطريقة المبسطة (*simplex*)، خاصة في الحالات التالية[48]:

- عدد قيود البرنامج الأصلي أكثر من عدد المتغيرات الموجودة فيه؛
- وجود القيود من الشكل أكبر أو يساوي، والتي تتطلب إضافة متغيرات اصطناعية، وبالتالي تُعقد من العمليات الحسابية.

ب. إمكانية الحصول على الحل الأمثل للبرنامج الأصلي مباشرة من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، والعكس صحيح[49].

2-7-3-5- استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من حل البرنامج الأصلي :

ليكن البرنامج الموالي المطروح في المثال التطبيقي لحل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس حالة التعظيم و الذي توصلنا لاستنتاج البرنامج الثنائي له من خلال دراسة **البرنامج الثنائي للبرنامج حالة التعظيم (Max) في صيغته القانونية** أعلاه:

برنامج الأصلي حالة التعظيم (Max) في صيغته القانونية	برنامج الثنائي حالة التدنئة (Min)
$\boldsymbol{Max}\, Z = 20X_1 + 30X_2$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}5X_1 + 10X_2 \geq 200\\ 4X_1 + 2X_2 \geq 80\\ 1X_1 + 1X_2 \geq 25\\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0\end{cases}$	$\boldsymbol{Min}\, W = 200Y_1 + 80Y_2 + 25Y_3$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}5Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 \leq 20\\ 10Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \leq 30\\ Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0\end{cases}$

لقد قمنا بإيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج بالطريقة المبسطة (simplex) سابقا، وتحصلنا على الجدول النهائي التالي وكنا قد توقفنا عند الملاحظة أسفل الجدول:

[48] أكرم محمد عرفان المهتدي،" الأساليب الكمية في اتخاذ القرار : بحوث العمليات "، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2004. ، ص105
[49] حسن ياسين طعمة وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص136

جدول الحل الأمثل لطريقة السمبلكس:

الجدول (1-19)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
X_2	0	1	1/5	0	−1	15
S_2	0	0	2/5	1	−6	10
X_1	1	0	−1/5	0	2	10
Z	0	0	2	0	10	650

ملاحظة: بما أن كل معاملات دالة الهدف موجبة ($C_j \geq 0$) في الجدول الثالث للسمبلكس هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: ($X_1=10$)، ($X_2=15$)، ($Z=650$)

كما سبق وذكرنا بالنسبة لقيمة الحل الأمثل فلا يطرأ عليها أي تغيير أي ($W^*=Z^*=650$)

إما بالنسبة لقيمة متغيرات القرار للبرنامج الثنائي فنحصل عليها مباشرة من جدول الحل الأمثل حيث تمثل معاملات دالة الهدف التي تقع أسفل المتغيرات الراكدة بالقيمة المطلقةS_1،S_2 و S_3 أي:

($Y_1=2$)، ($Y_2=0$) و ($Y_3=10$)

و يمكن التأكد من صحة النتائج بتعويض في دالة الهدف (W) حيث نجد:

$$\text{Min } W=200\times(2)+80\times(0))+25\times(10)=400+0+250=650$$

ملاحظة: المشكلة الآن انه لا يمكن معرفة قيم متغيرات الفرق في البرنامج الثنائي و لأجل ذلك يجب التطرق للنظرية الأساسية للبرامج الثنائية.

2-7-3-6-النظرية الأساسية للبرامج الثنائية[50]:

عند الأمثلية، إذا كان قيد غير مشبع أي ($S_i\neq0$) فان المتغيرة المقابلة لها في البرنامج الثنائي تكون معدومة أي ($Y_i=0$)، ونعبر عن ذلك بالعلاقة التالية $S*Y=0$.

عند الأمثلية، إذا كانت قيمة متغيرة قرار غير معدومة أي ($Xj\neq0$)، فان القيد المقابل للمتغيرة في البرنامج الثنائي يكون مشبع أي ($\dot{S}_i=0$)، ونعبر عن ذلك بالعلاقة التالية $X*\dot{S}=0$.

[50]J.-F. Scheid, Programmation linéaire. Méthodes et applications. Editions T.I., Mathématiques pour l'ingénieur - Méthodesnumériques, 2015, P 64.

2-7-3-6-1- مثال تطبيقي (دراسة حالة):

نريد معرفة الحل الأمثل للبرنامج الثنائي المدروس في **البرنامج الثنائي للبرنامج حالة التدنئة (Min) في صيغته القانونية** أعلاه:

برنامج حالة التدنئة (Min) في صيغته القانونية	برنامج الثنائي حالة التعظيم (Max)
$\boldsymbol{Min}\ Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60\\5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 40\\X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0\end{cases}$	$\boldsymbol{Max}\ W = 60Y_1 + 40Y_2$ $\boldsymbol{S/C}\begin{cases}3Y_1 + 5Y_2 \leq 600\\4Y_1 + 2Y_2 \leq 400\\5Y_1 + 1Y_2 \leq 400\\Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0\end{cases}$

لقد قمنا بإيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج بالطريقة M الكبيرة وطريقة المرحلتين سابقا، وتحصلنا على الجدول النهائي التالي وكنا قد توقفنا عند الملاحظة أسفل الجدول:

الجدول الحل الأمثل لطريقة المرحلتين:

الجدول (1-20)

المتغيرات القاعدية *VB*	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	B_i
X_2	0	1	11/7	−5/14	3/14	90/7
X_1	1	0	−3/7	1/7	−2/7	20/7
Z	0	0	−200/7	−400/7	−600/7	48000/7

ملاحظة: بما أن كل معاملات دالة الهدف سالبة $(0 \leq C_j)$ في الجدول الثاني للمرحلة الثانية لطريقة المرحلتين هذا يعني الوصول للحل الأمثل الذي يكون فيه: $(X_1=20/7)$، $(X_2=90/7)$،$(X_3=0)$ و $(Z=48000/7)$

ملاحظة:$(X_3=0)$ كونها متغيرة غير أساسية في الحل الأمثل.

الحل:

كما رأينا من خلال الطريقة السابقة يمكن استنتاج أن الحل الأمثل هو $(W^*=Z^*=650)$

أما بالنسبة لقيمة متغيرات القرار للبرنامج الثنائي فنحصل عليها مباشرة من جدول الحل الأمثل حيث تمثل معاملات دالة الهدف التي تقع أسفل المتغيرات الراكدة بالقيم المطلقةS_1 وS_2 أي:

$(Y_1=400/7)$ و $(Y_2=600/7)$

لمعرفة قيمة متغيرات الفرق في الحل الأمثل للبرنامج الثنائي نستخدم **النظرية الأساسية للبرامج الثنائية.**

بالنسبة لمتغيرات الفرق للبرنامج الثنائي:

بما أن: $(X_1=20/7\neq 0)$ هذا يعني أن القيد الأول للبرنامج الثنائي مشبع أي $\grave{S}_1=0$.

بما أن: $(X_2=90/7\neq 0)$ هذا يعني أن القيد الثاني للبرنامج الثنائي مشبع أي $\grave{S}_2=0$.

بما أن القيد الأول و الثاني مشبعة يمكن حل جملة المعادلتين للقيدين الأولين في البرنامج الثنائي بطريقة Cramer

$$3Y_1 + 5Y_2 = 600$$
$$4Y_1 + 2Y_2 = 400$$

فنجد: $(Y_1=400/7)$ و $(Y_2=600/7)$

الآن بالنسبة للقيد الثالث في البرنامج الثنائي لدينا:

بما أن: $(X_3=0)$ هذا يعني أن القيد الثالث للبرنامج الثنائي غير مشبع أي $\grave{S}_3\neq 0$.

وعليه نكتب القيد كالتالي:

$$5Y_1 + 1Y_2 + \grave{S}_3 = 400$$
$$\grave{S}_3 = 400 - 5Y_1 - Y_2$$
$$\grave{S}_3 = 400 - 5\left(\frac{400}{7}\right) - \left(\frac{600}{7}\right) = \frac{200}{7}$$

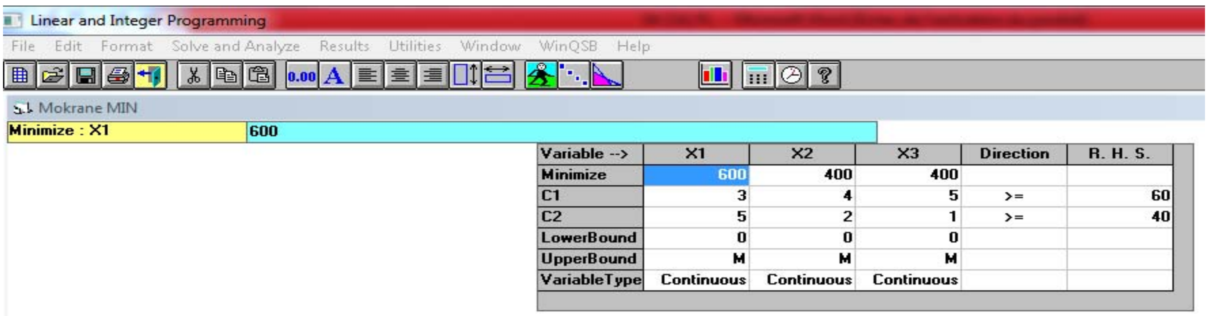
ومنه نستنتج قيمة $\grave{S}_3 = \frac{200}{7} = 28{,}57$.

وهو ما يمكن التأكد منه باستخدام برنامج WinQSB.

الحل باستخدام برنامج WinQSB:

لدينا البرنامج الخطي المدخل سابقا في برنامج WinQSB على الشكل التالي:

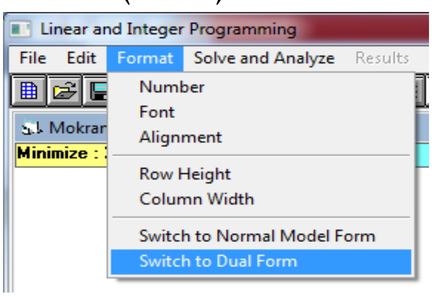
الشكل (1-15)



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	600	400	400		
C1	3	4	5	>=	60
C2	5	2	1	>=	40
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

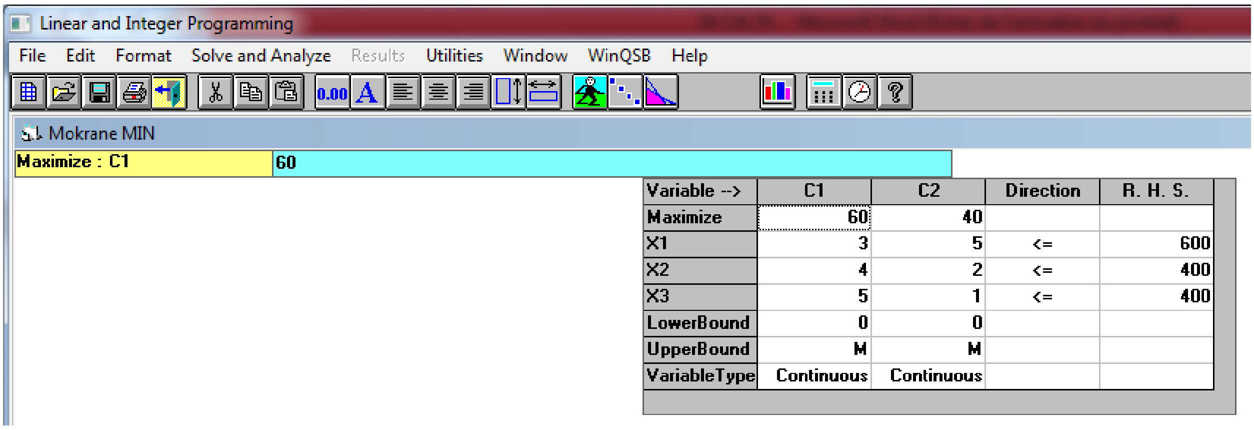
لتحويل البرنامج إلى البرنامج المقابل له نستخدم الأمر Switch to Dual Form من القائمة Format كما هو موضح أسفله.

الشكل (1-16)



فنحصل على البرنامج الموالي:

الشكل (1-17)



Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Maximize	60	40		
X1	3	5	<=	600
X2	4	2	<=	400
X3	5	1	<=	400
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

ملاحظة: لاحظ أن تسمية القيود أصبحت محل تسمية المتغيرات في الأعمدة، و تسمية المتغيرات أصبحت محل تسمية القيود في الأسطر في الجدول أعلاه.

الآن باستعمال الأمر Solve the problem من القائمة Solve and Analyze نجد النتائج الموالية :

الشكل (1-18)

	14:57:09		Monday	June	18	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	C1	57,1429	60,0000	3 428,5710	0	basic	24,0000	80,0000
2	C2	85,7143	40,0000	3 428,5720	0	basic	30,0000	100,0000
	Objective	Function	(Max.) =	6 857,1430				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	X1	600,0000	<=	600,0000	0	2,8571	533,3333	1 000,0000
2	X2	400,0000	<=	400,0000	0	12,8571	240,0000	418,1818
3	X3	371,4286	<=	400,0000	28,5714	0	371,4286	M

وهو ما يوافق ما تحصلنا عليه باستخدام **النظرية الأساسية للبرامج الثنائية**.

2-7-4- مسائل النقل:

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثير ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب(مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبليكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات(متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل.

لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك (Hitchcok) سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز (Koopmans) حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزيج سنة 1953.[51]

2-7-4-1- خصائص مشاكل النقل:

إن النموذج الرياضي لمشكل النقل يكون قابلا للتطبيق على المشكلات التي تتوفر فيها الخصائص التالية[52]:

المصادر(Sources): ونرمز لها بالرمز(S_i)، وتعني وجود عدد محدود من المصادر التي تقوم بالإنتاج أو البيع (العرض) بكميات محدودة للمنتَج، والمصادر يمكن أن تكون مصانع، مستودعات، مراكز توزيع...

المقاصد(Destination): ونرمز لها بالرمز(D_j)، وتعني وجود عدد محدود من الأماكن التي تخصص لها الوحدات المتاحة من المنتَج في المصادر، وهذه المقاصد يمكن أن تكون: مستودعات، مراكز توزيع، أسواق، زبائن...

الوحدات المتجانسة: وتعني أن المنتجات أو المواد التي تخصص من جميع المصادر إلى جميع المقاصد متماثلة من الناحية النوعية.

التكلفة(الربح): وتعني أن تكلفة (ربح) نقل وحدة واحدة من المنتجات من كل مصدر إلى كل مقصد معلومة ومحددة.

وعند توفر هذه الخصائص في مشكل النقل يكون من الممكن استخدام نموذج النقل لتحقيق التوزيعات المطلوبة من جميع المصادر إلى جميع المقاصد بأدنى تكلفة كلية (أو أعظم ربح كلي).

[51] محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، "الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"، دار اليازوري العلمية، الأردن 2013، ص121

[52]. نجم عبود نجم، "مدخل إلى الأساليب الكمية"، الأردن، مؤسسة الوراق، 2004، ص282

2-7-4-2- تشكيل جدول مسالة النقل وصياغة النموذج الرياضي له:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، و الصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها هو m وتمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها n وتمثل مراكز الاستلام و هو ما يمكن توضيحه عبر الجدول الموالي:

الجدول (1-21)

مراكز الطلب / مراكز العرض	مركز الطلب D_1	مركز الطلب D_2	.... مركز الطلب D_j	مركز الطلب D_n	العرض a_j
مركز العرض S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{1j} X_{1j}	C_{1n} X_{1n}	a_1
مركز العرض S_2	C_{21} X_{21}	C_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
.... مركز العرض S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_i
مركز العرض S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{mj} X_{mj}	C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب b_i	b_1	b_2	b_j	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

حيث أن:

S_i : يمثل مركز توزيع السلع و البضائع رقم i

D_{ji} : يمثل مركز استلام السلع و البضائع رقم j

C_{ij} : يمثل تكاليف النقل من مركز التوزيع i إلى مركز الاستلام j

X_{ij} : يمثل كمية السلع المنقولة من مركز التوزيع i إلى مركز الاستلام j

a_i : يمثل كمية السلع المعروضة من مركز التوزيع i

b_j : يمثل كمية السلع المطلوبة من مركز الاستلام j

ومن خلال ما سبق يكون النموذج الرياضي لمشكل النقل وفق الصيغة التالية[53]:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$
$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

X_{ij}: عدد الوحدات (الكمية) المنقولة من المصدر (i) إلى المقصد(j)؛

C_{ij}: تكلفة (ربح) نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المقصد(j)؛

a_i: عدد الوحدات(الكمية) المعروضة في المصدر (i)؛

b_j: عدد الوحدات(الكمية) المطلوبة إلى المقصد(j)؛

ملاحظة هامة: الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هو أن ما معروض في مصادر العرض أي مجموع المعروض يساوي مجموع الطلب في مواقع أي $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل بنموذج النقل المتوازن.

2-7-4-2- خطوات البحث عن الحل الأمثل لمشكل النقل:

يتطلب إيجاد الحل الأمثل لمشكل النقل ثلاث خطوات أساسية وهي:

2-7-4-2-1- شرط التوازن (تساوي مجموع العرض مع مجموع الطلب)[54]:

وهذه الخطوة تتطلب أن يكون مجموع الوحدات (الكميات) المتاحة من كل المصادر مساويا لمجموع الاحتياجات في كل المقاصد $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ،فإذا تحقق هذا الشرط يكون مشكل النقل متوازن ويمكننا الانتقال للخطوة التالية، أما إذا كان الشرط غير محقق فإن مشكل النقل يصبح غير متوازن ولا يمكننا الانتقال إلى الخطوة التالية إلاّ بعد تحويله إلى مشكل متوازن، وهنا نميّز بين حالتين هما:

---

[53] محمد عبد العال النعيمي ، مرجع سبق ذكره، ص 125.

[54] نجم عبود نجم، مرجع سبق ذكره، ص284، بتصرف.

أ. **حالة مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب** ($\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$): في هذه الحالة نقوم بتغطية النقص (العجز) الموجود في الطلب من خلال إضافة مركز طلب وهمي D_0، وتكون الكمية المطلوبة فيه مساوية للفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب

اي $D_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$، أما عن تكاليف(أرباح) النقل لهذا المقصد فتكون مساوية للصفر لأنه وهمي.

ب. **حالة مجموع العرض أقل من مجموع الطلب** ($\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$): في هذه الحالة نقوم بتغطية النقص(العجز) الموجود في العرض من خلال إضافة مصدر وهمي S_0، وتكون الكمية المعروضة فيه مساوية للفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض

أي $S_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$، أما عن تكاليف(أرباح) النقل من هذا المصدر فتكون مساوية للصفر لأنه وهمي.

وبتحقيق شرط التوازن ننتقل للخطوة الثانية.

2-7-4-2-2- إيجاد الحل الأساسي الأولي:

بعد التحقق من شرط التوازن يتم البحث عن الحل الأولي، والذي يمثل خطة نقل الوحدات من المصادر إلى المقاصد حسب احتياجاتها، وعادة ما تكون هناك بدائل متعددة من الحلول الأولية الممكنة[55]، ومن أجل التوصل للحل الأولي هناك عدة طرق سنتطرق لأكثرها استخداما وتتلخص في ثلاث طرق هي:

- طريقة الركن أو الزاوية الشمالية الغربية
- طريقة أقل التكاليف
- طريقة فوجل.

أ- طريقة الركن الشمالي الغربي[56]:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي[57]:

[55] نجم عبود نجم، مرجع سبق ذكره، ص285

[56] محمد عبد العال، مرجع سبق ذكره، ص ص127-129

[57] عبد القادر مطاليس،"بحوث العمليات عمليات ومسائل"، النشر الجامعي الجديد، تلمسان الجزائر، 2017. ص213،212.

الجدول (1−22)

مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_j
تيارت S_1	76	55	82	19	7000
الجلفة S_2	42	25	53	29	6000
سعيدة S_3	31	19	20	53	2500
الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500

من خلال الجدول نلاحظ أن (S_3,S_2,S_1) تمثل المصادر، وأن (D_1، D_2، D_3، D_4) تمثل المقاصد.

أسطر الجدول تمثل قيود العرض، وأعمدة الجدول تمثل قيود الطلب.

تكلفة نقل الوحدة من كل مصدر إلى كل مقصد تكتب في أعلى كل خانة جهة اليمين.

وبعد أن تحصلنا على الجدول الأول لمشكل النقل نبدأ في البحث عن الحل الأولي وفق طريقة الركن الشمالي الغربي كما يلي:

جدول النقل الممثل للحل الأساسي الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي

الجدول (1−23)

مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_j
تيارت S_1	76 1000	55 5500	82 500	19	7000
الجلفة S_2	42	25	53 3500	29 2500	6000
سعيدة S_3	31	19	20	53 2500	2500
الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500

ملاحظة: نلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية في البرنامج يساوي n+m−1 أي 4+3−1=6 وعليه يمكن أن نقول بان الحل غير متفكك وهو شرط للانتقال لمرحلة اختبار أمثلية الحل.

وتعني هذه النتائج أن المؤسسة ستقوم بنقل:

(1000) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **الجزائر** ؛

(5500) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **وهران** ؛

(500) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **عنابة** ؛

(3500) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **عنابة** ؛

(2500) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **غرداية** ؛

(2500) وحدة من وحدة إنتاج **سعيدة** إلى سوق **غرداية**.

وتكون التكلفة الإجمالية الناتجة عن هذا التوزيع هي:

$$(76)\times1000+(55)\times5500+(80)\times500+(53)\times3500+(29)\times2500+(53)\times2500=$$

(809000) دج

ملاحظة: نلاحظ أن طريقة الركن الشمالي الغربي رغم بساطتها لا تأخذ بعين الاعتبار التكاليف أثناء عملية التوزيع.

ب- طريقة التكاليف الدنيا(أقل تكلفة)[58]:

يتم توزيع الكميات المعروضة على المطلوبة حسب أقل كلفة نقل ممكنة يتطلب هذا استعراض جدول التكاليف وتحديد أصغر كلفة نقل ممكنة عندئذ نخصص قيمة لهذا المتغير على ضوء الكمية المعروضة في الصف والكمية المطلوبة في العمود (أي الصف والعمود اللذان يحددان موقع هذا المتغير).[59]

ويجب أن نلاحظ انه عندما تتساوى أصغر كلفتين في الجدول فان الاختيار بينهما يكون للمربع الذي يحمل أكبر كمية لأنه يعمل على تخفيض الكلفة الكلية أكثر.[60]

وللتوضيح أكثر سنقوم بتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق فنجد:

جدول النقل الممثل للحل الأساسي الأولي بطريقة التكاليف الدنيا(أقل تكلفة)

الجدول (1-24)

مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_j
تيارت S_1	76	55	82 2000	19 5000	7000
الجلفة S_2	42 1000	25 3000	53 2000	29	6000
سعيدة S_3	31	19 2500	20	53	2500
الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500

ملاحظة: نلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية في البرنامج يساوي $n+m-1$ أي $4+3-1=6$ وعليه يمكن أن نقول بان الحل غير متفكك وهو كما اشرنا أنفا، شرط ضروري للانتقال لمرحلة اختبار أمثلية الحل.

58 محمد سالم الصفدي، مرجع سبق ذكره، ص248
59 عبد الجبار خضر بخيت، سعد احمد عبد الرحمن،"نماذج البرمجة الخطية بين النظرية و التطبيق"، مطبعة اساور، بغداد،2013. ص127.
60 حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي" مدخل إلى بحوث العمليات "، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان،2007 ، ص289

وتعني هذه النتائج أن المؤسسة ستقوم بنقل:

(2000) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **عنابة** ؛

(5000) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **غرداية** ؛

(1000) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **الجزائر** ؛

(3000) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **وهران** ؛

(2000) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **عنابة** ؛

(2500) وحدة من وحدة إنتاج **سعيدة** إلى سوق **وهران**.

وتكون التكلفة الإجمالية الناتجة عن هذا التوزيع هي:

$$=(19)\times2500+(53)\times2000+(25)\times3000+(42)\times1000+(19)\times5000+(82)\times2000$$

(529500) دج

ملاحظة: من خلال مقارنة الحل الأولي في الطريقتين السابقتي الذكر، نلاحظ أن هناك اختلاف كبير في قيم متغيرات القرار وفي قيمة دالة الهدف، حيث أنها في الطريقة الثانية أفضل لأن قيمة دالة الهدف كانت 529500 وهي اقل بكثير من قيمتها بطريقة الركن الشمالي الغربي، أين كانت 809000 (لأن الهدف تدنئة التكاليف) وذلك راجع لمبدأ الطريقة الثانية الأخذ بعين الاعتبار أقل التكاليف أثناء التوزيع.

ج- طريقة (مقاربة) فوجل (VOGEL):

تعد هذه الطريقة من أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطى حلاً أمثلا ويمكن أن نلخص خطوات حل مسألة النقل وفقها كالآتي[61] :

- إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف ΔPVR ؛
- إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل عمود ΔPVC ؛
- تحديد أكبر فرق سواء كان في الصفوف أو الأعمدة $Max(\Delta PVR, \Delta PVC)$ (وضع في إطار مظلل في الجدول أسفله)؛
- البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق؛
- إعادة الخطوات السابقة لحين الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية و إشباع تام لاحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل.

للتوضيح أكثر سنقوم بتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق فنجد:

[61] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، مرجع سابق، ص219

جدول النقل الممثل للحل الأساسي الأولي بطريقة(مقاربة) فوجل

الجدول (1-25)

مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_j	ارقام الجزاء P.V. ΔPVR			
تيارت S_1	76	55 500	82 1500	19 5000	7000	36	21	21	27
الجلفة S_2	42 1000	25 5000	53	29	6000	4	17	17	
سعيدة S_3	31	19	20 2500	53	2500	1	1		
الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500				
ارقام الجزاء P.V. ΔPVC	11	6	33	10					
	11	6	33	–					
	34	30	29	–					
	–	30	29	–					

ملاحظة: نلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية في البرنامج يساوي n+m−1 أي 4+3−1=6 وعليه يمكن أن نقول بان الحل غير متفكك وهو كما اشرنا أنفا، شرط ضروري للانتقال لمرحلة اختبار أمثلية الحل.

وتعني هذه النتائج أن المؤسسة ستقوم بنقل:

(500) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **وهران** ؛

(1500) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **عنابة** ؛

(5000) وحدة من وحدة إنتاج **تيارت** إلى سوق **غرداية** ؛

(1000) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **الجزائر** ؛

(5000) وحدة من وحدة إنتاج **الجلفة** إلى سوق **وهران** ؛

(2500) وحدة من وحدة إنتاج **سعيدة** إلى سوق **عنابة**.

وتكون التكلفة الإجمالية الناتجة عن هذا التوزيع هي:

$500\times(55)+1500\times(82)+5000\times(19)+1000\times(42)+5000\times(25)+2500\times(20)=465200$ دج

ملاحظة: من خلال مقارنة الحل الأولي في الطرق الثلاث المتطرق إليها، نلاحظ أن طريقة فوجل هي أحسن طريقة إذ أن الحل الأولي على أساسها أعطانا القيمة 465200 وهي اقل من القيمة المتحصل عليها بطريقة أقل التكاليف 529500، و اقل بكثير من القيمة المتحصل عليها بطريقة الركن الشمالي الغربي أين كانت 809000.

2-7-4-2-3- إيجاد الحل الأمثل (اختبار الحل الأساسي الأولي):

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة السابقة الذكر إلا على الحل الأساسي الأولي، وإن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية حل المشكلة (الحل الأمثل)، و إنما يجب أن نستخدم أساليب آخري لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق أحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل أم هناك حلولاً أخرى أحسن منه، وللوصول إلى هكذا حلول هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل وهي:

- طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method
- طريقة عوامل الضرب Multipliers Method

ملاحظة: لاختبار الأمثلية يجب اختيار الحل الأساسي الذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة الكلية أقل ما يمكن. في مثالنا السابق سنطبق الطريقتين على الحل الأساسي الناتج من تطبيق طريقة فوجل.

أ- طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method :[62]

يتم من خلال هذه الطريقة اختيار جميع الخانات الفارغة الموجودة في مصفوفة(جدول) الحل الأولي، والمقصود بالخانات الفارغة تلك الخانات الموجودة في جدول النقل، والتي لم يتم النقل(التوزيع) فيها، أي أن قيم متغيرات القرار فيها تساوي الصفر($X_{ij}=0$)، بحيث نبحث عن تأثير هذه المتغيرات على قيمة دالة الهدف لما تتغير قيمها عن الصفر، أي إذا أصبحت الخانات مملوءة، فإذا كان نقل وحدة واحدة عبر الخانة الفارغة التي هي تحت الاختبار يؤدي إلى تدنئة التكاليف الكلية فإنه يجب تحسين الحل الأولي بنقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى هذه الخانة، أما إذا كان نقل وحدة واحدة عبر الخانة الفارغة التي هي تحت الاختبار يؤدي إلى ارتفاع التكاليف الكلية، فإن الحل لن يتغير لأن التغير سيؤدي إلى رفع التكاليف أكثر وهذا يخالف الهدف الذي هو تدنئة التكاليف.

تحسين الحل وفق هذه الطريقة، يجب أولاً التأكد أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $n+m-1$ ،[63] ثم نقوم بإتباع الخطوات التالية[64]:

[62] محمد عبد العال، مرجع سبق ذكره، ص143-144.
[63] يزن إبراهيم مقبل، "مقدمة في بحوث العمليات"، الأردن، مكتبة المجتمع العربي للنشر، 2005، ص88-91.
[64] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي،" المدخل لبحوث العمليات "، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،2006.، ص101،102.

- نبدأ من الخانة الفارغة التي سنختبرها (نقيّمها) وننتقل عبر خانات مملوءة فقط إما أفقيا أو عموديا ونعود إلى الخانة الفارغة من خلال أقصر مسار(طريق)؛
- نضع إشارة (+) في الخانة الفارغة التي سنقيِّمها، ثم إشارة (−) في الخانة التي تليها(تقابلها)، ثم إشارة (+) ثم إشارة (−)، وهكذا بحيث يجب أن يكون عدد الإشارات (+) مساويا لعدد الإشارات (−) وتكون متعاقبة نبدأ بـ (+) وننهي بـ (−)؛
- بعد ذلك نقوم بحساب التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة عبر الخانة المقيّمة ونرمز لها بالرمز ($\widehat{C_{IJ}}$)، وذلك بأخذ تكلفة كل خانة من خانات المسار، فإذا كانت في الخانة إشارة (+) نضيف التكلفة وإذا كانت في الخانة إشارة (−) نطرح التكلفة، ونحصل في النهاية على مقدار التغير في التكلفة الكلية الناتجة عن نقل وحدة واحدة عبر الخانة المقيّمة، فإذا كانت القيمة موجبة فإن التكلفة الكلية سترتفع بمقدار تلك القيمة، أما إذا كانت سالبة فإن التكلفة الكلية ستنخفض بمقدار تلك القيمة، وهكذا نقوم بتقييم جميع الخانات الفارغة؛
- بعد ذلك نقوم باختيار الخانة الفارغة التي تعطي أقل قيمة سالبة (في حالة التدنئة)؛
- ثم نحدد في مسار تقييم هذه الخانة الخانات الموجودة فيها الإشارة (−)، ونحدد أقل كمية موجودة في هذه الخانات، والتي تمثل أكبر كمية ممكن وضعها في الخانة الفارغة المقيّمة؛
- نضع الكمية المحددة في الخانة المقيّمة، وينتج عن ذلك فراغ الخانة التي كانت فيها تلك الكمية، كما تتغير الكميات الموجودة في خانات المسار وتنخفض قيمة دالة الهدف؛
- وهكذا نكرر الخطوات السابقة حتى تصبح جميع تكاليف الخانات المقيّمة موجبة أو معدومة، عند ذلك نكون قد وصلنا للحل الأمثل.

ولتوضيح وتبسيط هذا، نأخذ المثال السابق، وليكن لدينا جدول الحل الأساسي الأولي المتحصل عليه بطريقة فوجل:

الجدول (1-26)

مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_j	ارقام الجزاء P.V. ΔPVR			
تيارت S_1	76	55 500	82 1500	19 5000	7000	36	21	21	27
الجلفة S_2	42 1000	25 5000	53	29	6000	4	17	17	
سعيدة S_3	31	19	20 2500	53	2500	1	1		
الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500				
ارقام الجزاء P.V. ΔPVC	11	6	33	10					
	11	6	33	–					
	34	30	29	–					
	–	30	29	–					

نتأكد أولا من تحقق شرط: **عدد الخانات المملوءة=(n+m−1)**

عدد الخانات المملوءة=6 =(n+m−1=3+4−1=6) ومنه الشرط محقق أي أن الحل غير متفكك.

بعدها ننتقل إلى تقييم الخانات الفارغة ولنبدأ بالخانة (X_{11}) والمسار هو:

$$\boldsymbol{X_{11}} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$$

(+) (−) (+) (−)

ونلاحظ أن المسار يبدأ بإشارة(+) وينتهي بإشارة (−).

من خلال المسار نلاحظ أننا انطلقنا من الخانة الفارغة التي سنقيّمها، وهي (X_{11}) وانتقلنا عبر خانات مملوءة لنعود إلى الخانة الفارغة التي انطلقنا منها، مشكلين ما يسمى **بحلقة مغلقة.**

- ولحساب $(\hat{C}_{11})$ (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الأولى إلى السوق الأول) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{11} = C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{12} = 76 - 55 + 25 - 42 = 4 > 0$$

وتعني القيمة (4+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الأولى إلى السوق الأول فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (4 دج).

- ولحساب $(\hat{C}_{23})$ (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الثانية إلى السوق الثالث) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{23} = C_{23} - C_{13} + C_{12} - C_{22} = 53 - 82 + 55 - 25 = 1 > 0$$

وتعني القيمة (1+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الثانية إلى السوق الثالث فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (1 دج).

- ولحساب $(\hat{C}_{24})$ (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الثانية إلى السوق الرابع) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{24} = C_{24} - C_{14} + C_{12} - C_{22} = 29 - 19 + 55 - 25 = 40 > 0$$

وتعني القيمة (40+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الثانية إلى السوق الرابع فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (40 دج).

- ولحساب $(\hat{C}_{31})$ (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة إلى السوق الأول) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{31} = C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{12} + C_{22} - C_{21} = 31 - 20 + 82 - 55 + 25 - 42 = 21 > 0$$

وتعني القيمة (21+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الثالثة إلى السوق الأول فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (21 دج).

- ولحساب $(\hat{C}_{32})$ (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة إلى السوق الثاني) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - C_{33} + C_{13} - C_{12} = 19 - 20 + 82 - 55 = 26 > 0$$

وتعني القيمة (26+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الثالثة إلى السوق الثاني فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (26 دج).

- ولحساب ($\hat{C}_{34}$) (التغيّر في التكلفة الكلية الناتج عن نقل وحدة واحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة إلى السوق الرابع) نجمع التكاليف المقابلة لكل خانة من خانات المسار بعد ضربها في الإشارة المقابلة لها فنجد:

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - C_{14} + C_{13} - C_{33} = 53 - 19 + 82 - 20 = 96 > 0$$

وتعني القيمة (96+) أنه إذا تم نقل وحدة واحدة في هذه الخانة أي من وحدة الإنتاج الثالثة إلى السوق الرابع فإن التكلفة الإجمالية سترتفع بمقدار (96 دج).

نتيجة:

نلاحظ أن جميع قيم($\hat{C}_{\text{ij}} \geq 0$)(موجبة)، وهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل، أي الحل الحالي هو الحل الأمثل ولا يمكن تحسينه أكثر، ومنه الحل الأمثل هو:

$$X^*_{12} = 500;\ X^*_{13} = 1500;\ X^*_{14} = 500;\ X^*_{21} = 1000;\ X^*_{22} = 5000;\ X^*_{33} = 2500$$

$$Z^* = 465200\ DA$$

ب- طريقة التوزيع المعدل أو عوامل الضرب Multipliers Method :

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة الحجر المتنقل، إذا لا تطلب رسم جميع المسارات المتعرجة مما يقلل من الجهد والوقت،[65] و تعتمد هذه الطريقة بشكل أساسي على البرنامج الثنائي لمشكل النقل، حيث تستخدم متغيرات البرنامج الثنائي لتقييم الخانات الفارغة، وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي[66]:

- تأكد من أن الحل الأولي ليس متحللاً وذلك يجب أن تكون عدد الخلايا المشغولة تساوي n+m−1 ، ما يعني عدم تفكك الحل.
- **استخراج تكاليف المربعات المملوءة :** ويتم تكوين عدة معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي وتعد كل معادلة على أساس العلاقة التالية:

$$C_{\text{ij}} = U_i + V_j$$

حيث:

C_{ij} : تكلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمود j

U_i : عوامل ضرب الصفوف

V_j :عوامل ضرب الأعمدة

[65] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي،" مقدمة في بحوث العمليات " ، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،1996.، ص148.
[66] محمد عبد العال، مرجع سبق ذكره، ص ص147-148، بتصرف

إيجاد حل المعادلات الخاصة بمعاملات الخلايا المشغولة وذلك بافتراض قيمة: $U_1 = 0$، لكي يمكن إيجاد القيم الأخرى.

استخراج تكاليف المربعات الفارغة :يتم تقييم كل خلية غير مشغولة(حساب كلفة المربعات الفارغة)، مؤشر التحسين وفق العلاقة التالية: $\hat{C}_{\mathrm{ij}} = C_{\mathrm{ij}} - (U_i + V_j)$

ونبدأ بتحسين الحل من الخلية ذات القيمة السالبة الأكبر و إذا كانت جميع القيم موجبة فإن الحل الأمثل ولا يحتاج إلى تحسين، ويستكمل الحل كما هو متبع في طريقة الحجر المتنقل.

ولتوضيح وتبسيط هذا، نأخذ المثال السابق، وليكن لدينا جدول الحل الأساسي الأولي المتحصل عليه بطريقة فوجل:

من الجدول نتأكد أولا من تحقق شرط: **عدد الخانات المملوءة=(n+m−1)**

عدد الخانات المملوءة=6 =(n+m−1=3+4−1=6) ومنه الشرط محقق.

نقوم بتقييم الخانات الفارغة وفق العلاقة التالية: $\hat{C}_{\mathrm{ij}} = C_{\mathrm{ij}} - (U_i + V_j)$

من خلال العلاقة نلاحظ أنه يجب توفر قيم (C_{ij}) وهي متوفرة، وكذلك يجب توفر قيم(U_i) و(V_j) وهي غير متوفرة؛ وبالتالي يجب إيجادها وذلك من خلال تطبيق العلاقة الخاصة بالخانات المملوءة والمتمثلة في:

$$C_{\mathrm{ij}} = U_i + V_j$$

الجدول (1−27)

		V_1=72	V_2=55	V_3=82	V_4=19	
	مراكز الطلب / مراكز العرض	الجزائر D_1	وهران D_2	عنابة D_3	غرداية D_4	العرض a_i
U_1=0	تيارت S_1	76	55 500	82 1500	19 5000	7000
U_2=−30	الجلفة S_2	42 1000	25 5000	53	29	6000
U_3=−62	سعيدة S_3	31	19	20 2500	53	2500
	الطلب b_i	1000	5500	4000	5000	15500

من الجدول نستخرج العلاقات الرياضية للعوامل U_i و V_j **<u>الموافقة للخلايا المملوءة</u>** كالتالي:

$$U_1 + V_2 = 55 \Rightarrow \boldsymbol{V_2 = 55}$$
$$U_1 + V_3 = 82 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 82}$$
$$U_1 + V_4 = 19 \Rightarrow \boldsymbol{V_4 = 19}$$
$$U_2 + V_2 = 25 \Rightarrow \boldsymbol{U_2} = 25 - V_2 = 25 - 55 = \boldsymbol{-30}$$
$$U_3 + V_3 = 20 \Rightarrow \boldsymbol{U_3} = 20 - V_3 = 20 - 82 = \boldsymbol{-62}$$
$$U_2 + V_1 = 42 \Rightarrow \boldsymbol{V_1} = 42 - U_2 = 42 - (-30) = \boldsymbol{72}$$

بعد إيجادنا لقيم (U_i) و(V_j) نرجع لتقييم الخانات الفارغة:

$$\hat{C}_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 76 - 0 - 72 = 4$$

$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 53 - (-30) - 82 = 1$$

$$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 29 - (-30) - 19 = 40$$

$$\hat{C}_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 31 - (-62) - 72 = 21$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 19 - (-62) - 55 = 26$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4 = 53 - (-62) - 19 = 96$$

نتيجة:

نلاحظ أن جميع قيم$(\hat{C}_{ij} \geq 0)$(موجبة)، (وهي مطابقة لما تحصلنا عليه من خلال تطبيق طريقة المسار المتعرج)، وهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل، أي الحل الحالي هو الحل الأمثل ولا يمكن تحسينه أكثر، ومنه الحل الأمثل هو:

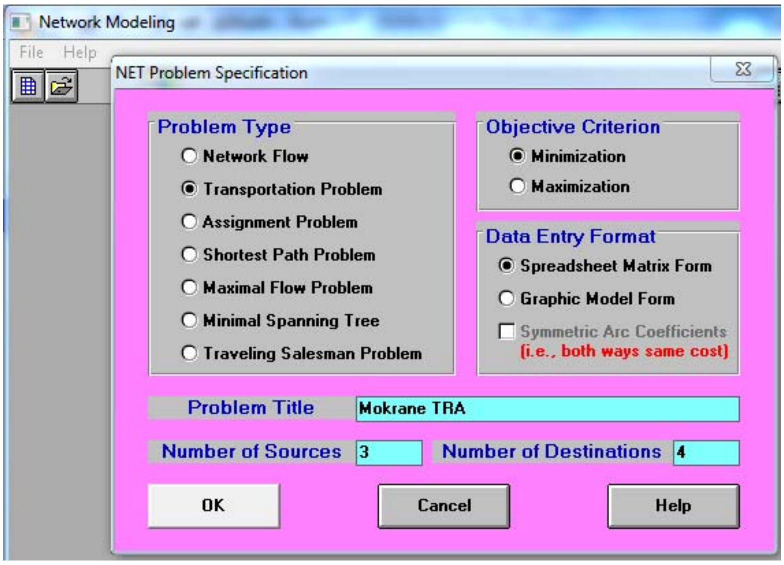
$$X^*_{12} = 500;\ X^*_{13} = 1500;\ X^*_{14} = 500;\ X^*_{21} = 1000;\ X^*_{22} = 5000;\ X^*_{33} = 2500$$

$$Z^* = 465200\ DA$$

2-7-4-3- استخدام برنامج WinQSB في حل مسائل النقل:

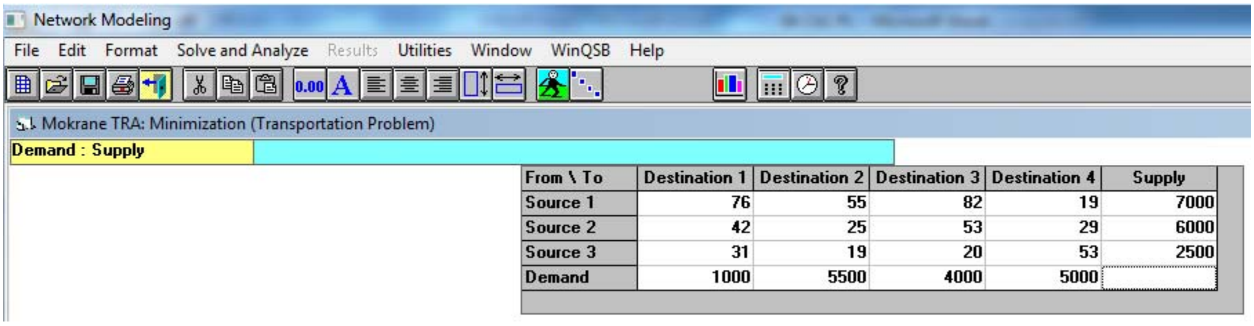
أول خطوة بعد فتح التطبيق هي إدخال خصائص مشكلة النقل كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (1-19)



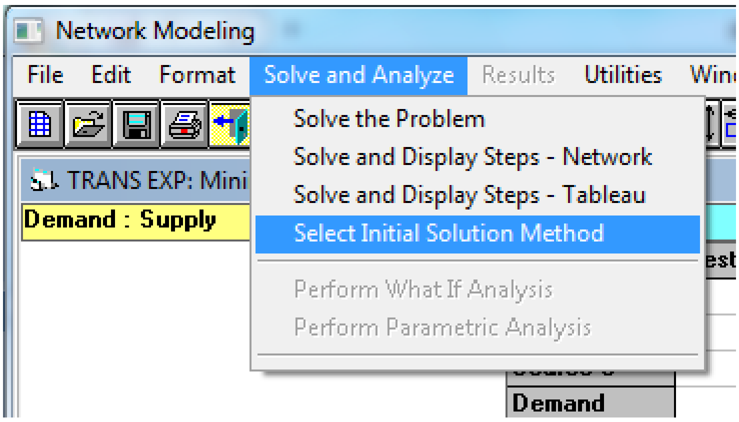
بعد إدخال البيانات نحصل على الشكل الموالي.

الشكل (1-20)



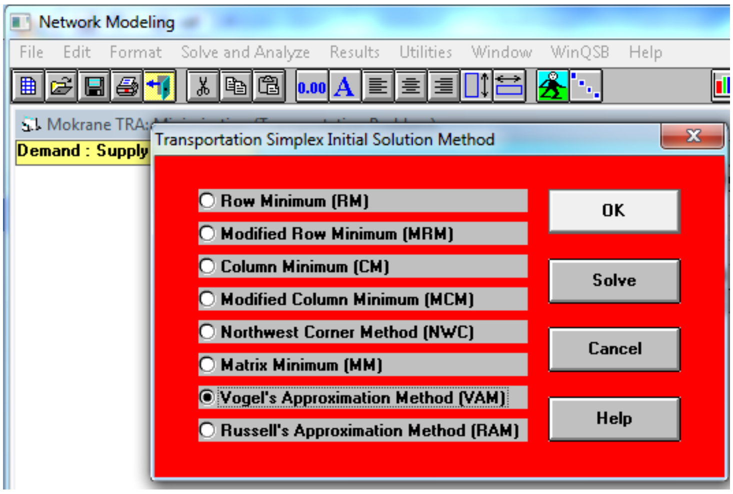
بعدها نقوم باختيار طريقة الحل الأولي أو الأساسي عن طريق القائمة Solve and analyze

الشكل (1-21)



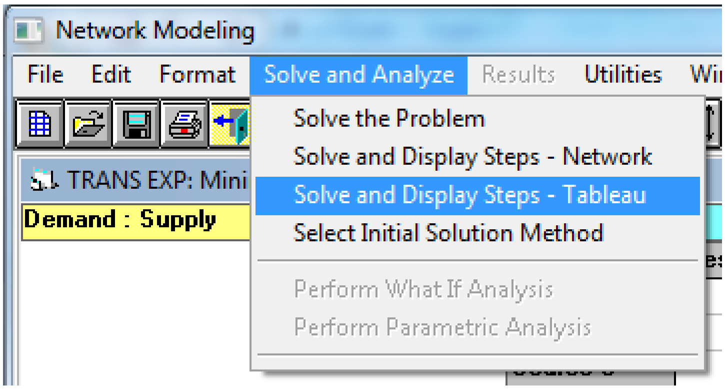
تظهر النافذة الموالية التي يتم من خلالها اختيار طريقة الحل الأولي

الشكل (1-22)



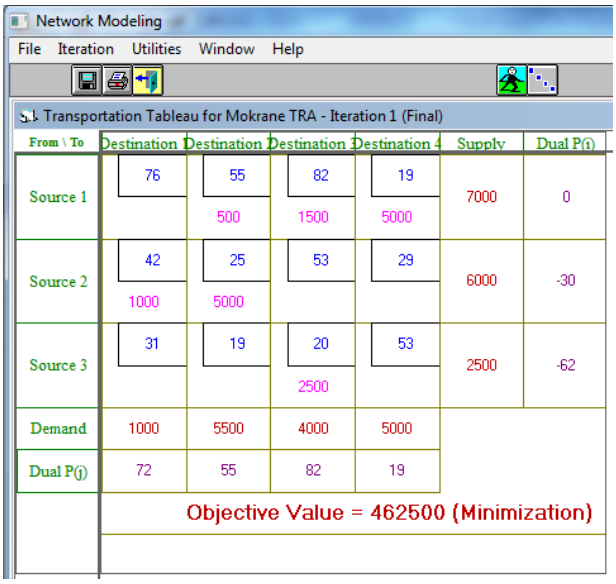
نختار طريقة فوجل Vogel التقريبية التي تعطينا غالبا أفضل الحلول الأساسية ثم نضغط على OK ثم نعود للقائمة Solve and analyze

الشكل (1-23)



نحصل على الجدول الموالي الذي يعطينا توزيع الكميات حسب طريقة فوجل Vogel التقريبية وكذلك تكلفة النقل الإجمالية

الشكل (1-24)



From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Supply	Dual P(i)
Source 1	76	55 / 500	82 / 1500	19 / 5000	7000	0
Source 2	42 / 1000	25 / 5000	53	29	6000	-30
Source 3	31	19	20 / 2500	53	2500	-62
Demand	1000	5500	4000	5000		
Dual P(j)	72	55	82	19		

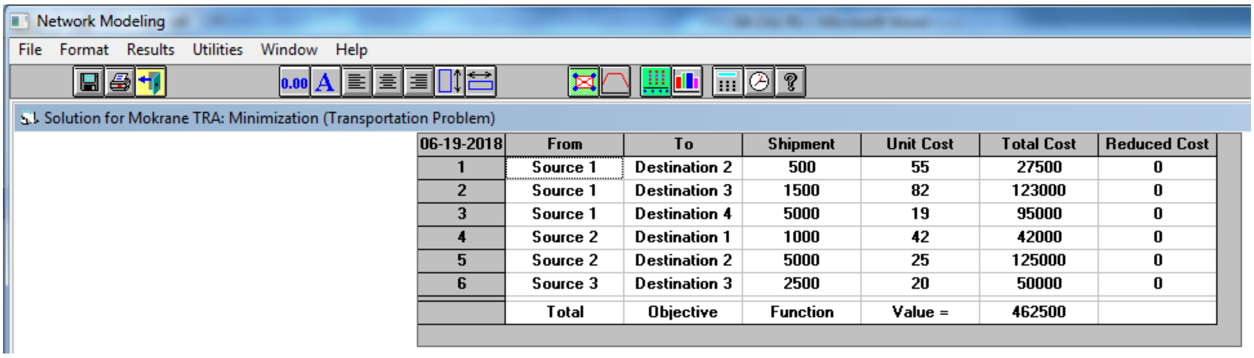
Objective Value = 462500 (Minimization)

وهو ما توصلنا له سابقا

لاحظ في شريط العناوين كلمة (Final) Iteration 1 وتعني أن الحل المتوصل إليه بهذه الطريقة هو الحل الأمثل.

وللحصول على الحل الأمثل مباشرة نختار الأمر Solve the problem في القائمة Solve and Analyze فنحصل على الجدول للحل الأمثل كالتالي:

الشكل (1-25)



06-19-2018	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Source 1	Destination 2	500	55	27500	0
2	Source 1	Destination 3	1500	82	123000	0
3	Source 1	Destination 4	5000	19	95000	0
4	Source 2	Destination 1	1000	42	42000	0
5	Source 2	Destination 2	5000	25	125000	0
6	Source 3	Destination 3	2500	20	50000	0
	Total	Objective	Function	Value =	462500	

2-7-4-4- حالات خاصة عند حل مشاكل النقل:

قد تحصل بعض الحالات، عند حل مشكلة النقل، التي تحتاج إلى اتخاذ إجراء معين لمواصلة الحل وهي حالات ترتبط بالواقع الفعلي لمؤسسة الأعمال وطبيعة الأسواق ولعل أهم هذه الحالات نجد:

أ- عدم تساوي العرض والطلب :

في الحياة العملية كثيرا ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة لدى المصانع واحتياجات الأسواق لذا لا بد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، هنا نلجأ إلى إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب أي إيجاد سوق وهمية، وتكون كلفة النقل من المصانع إلى السوق الوهمي (0) وبالعكس يضاف مصنع وهمي(صف وهمي)، والكمية التي تقابل العمود أو الصف الوهمي تساوي الفرق بين مجموع كمية العرض وكمية الطلب.

ب- حالة تعظيم الأرباح:

في بعض الأحيان تكون الشركة متخصصة بالنقل لصالح الغير ولديها وسطاء نقل تستخدمها في نقل منتجات من أماكن مختلفة بهدف تحقيق أكبر ربح ممكن لذا فهي تركز على الخطوط أو المسارات ذات الربح الأكبر، وهنا فإن حل المسألة يكون بالبحث عن أكبر ربح في الجدول ويتم إرسال الكميات إلى تلك الخلية وتكرر العملية إلى أن يتم نقل جميع الكميات المتاحة إلى الأسواق أو المخازن[67].

[67] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، مرجع سبق ذكره، ص224،223.

ففي طريقة فوجل بدلا من البحث عن اقل كلفة والتي تليها لاستخراج الفرق، هنا نتجه إلى أعلى سعر والذي يليه و استخراج الفرق بينهما وتعطى الأولوية عادة للصف أو العمود ذو قيمة الأعلى (أما توزيع الكميات يعطى للكلفة الأعلى في السطر أو العمود المختار).

وفي حالة التحقق من الحل الأولي للوصول إلى الحل الأمثل في طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل تعطى الأولوية للمربع أو الخلية الحاصلة على أعلى رقم موجب وليس سالب، وتتوقف عن البحث عن الحل الأمثل عندما تكون جميع القيم المتحصل عليها من المسارات سالبة أو تساوي الصفر.

ج- وجود أكثر من حل أمثل :

قد توجد في بعض مشاكل النقل عند حلها إمكانية لعدة حلول مثلى وليس حلاً واحداً، وهذا الأمر يمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير المشغولة (مؤشرات التحسين) فيها واحد أو أكثر ذات قيمة صفري، هذا يعني أنه يمكن أن تغير اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى بنفس الكلفة الكلية، إن وجود حلول مثلى متعددة يعطي الإدارة مرونة أكبر في اختيار وتوزيع المواد.

د- حالة الانحلال :

تحصل هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المشغولة أقل من مجموع عدد الصفوف والأعمدة ناقص واحد أو كما أشرنا سابقا $n+m-1$ ، وقد تحصل هذه الحالة أثناء الحل الأولي (قبل الاختبار) ولمعالجة هذه الحالة فإنه يتم إشغال إحدى الخلايا(يجب أن يتم اختيارها بدقة والتي تحتوي على أقل كلفة) بقيمة صفرية ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة و الاستمرار بالحل.

2-7-5- مسائل التخصيص:

تواجه الإدارة مشكلة التخلي عن منتج معين و إحلال منتج آخر محله. و أن هذا القرار يتطلب أن يؤخذ في الاعتبار تكاليف الفرص. إن اتخاذ إجراء يعني عدم اتخاذ الإجراءات الأخرى لذا فان الهدف هو تخصيص الأعمال على الآلات أو تخصيص الموظفين على الأعمال المختلفة أو تخصيص البائعين على مناطق البيع لتخصيص إجمالي التكاليف وهذا يخفض من جدول إجمالي تكاليف الفرص (Opportunity costs)

لنفرض إن لدينا حالة تخصيص m من الأعمال على n من الآلات، مع تكاليف الفرص حيث

العمل: (A job) $i= 1,2,\ldots,m$

الماكنة: (a machine) $j= 1,2,\ldots,n$

والهدف هو تخصيص العمل على الآلة (j) (عمل واحد لكل ماكنة) تخصيص معقول، بحيث إجمالي التكاليف تصبح أقل ما يمكن (الربح الكلي يصبح أكبر ما يمكن).

إن مشكلة التخصيص هي حالة خاصة من مشكلة النقل حيث الأعمال هنا تمثل المناشيء في مشكلة النقل والآلات هنا تمثل المخازن أو الاتجاهات في مشكلة النقل.

كما إن المتاح عند المنشأ i في مشكلة التخصيص يساوي واحد أي إن $a_i=1$ لجميع قيم i، والمطلوب عند الاتجاه أو المخزن j في مشكلة التخصيص أيضا يساوي واحد أي إن $b_j=1$ لجميع قيم j.

2-7-5-1- أهداف و مازيا نماذج التخصيص:

إن اعتماد نماذج التخصيص من قبل العاملين في الإدارت و في مختلف المنظمات يحقق لها فوائد جمة أهمها:

- نماذج التخصيص وسيلة اقتصادية تساعد في توفير الكثير من التكاليف عند تحليل و دارسة النظم الكبيرة المعقدة وفهمها و متابعة عملها، فان تمثيل ورسم مكونات مصنع على الورق و فهم أسلوب عمله و إجراء تعديلات في أليات تشغيله، و تنظيم أقسامه و تبديل مواقع بعضها يكون ذو كلفة اقل مما لو تم إجراء ذلك على الارض مباشرة في المصنع بطريقة التجربة و الخطأ.[68]
- سهولة تدريب المدراء و العاملين في مختلف الأقسام على عملية اتخاذ القرارات و ممارسة العمل الاداري و التنظيمي و كذلك الامر في عمليات التدريس في الكليات العلمية، الطبية و الهندسية عن طريق استعمال النماذج المجسمة لجسم الانسان أو المكائن في المصانع و المباني و الجسور و غيرها.
- من خلال نماذج التخصيص يمكن النظر إلى المشكلة بأكملها أو النظام بكافة أجزائه و بالتالي يكون هناك فهم أفضل للمواقف المارد اتخاذ قرار بشأنها.
- أنها وسيلة لنقل الأفكار إلى الأفراد العاملين في منظمات الأعمال، فاعتماد خرائط سير العمليات في منظمة، يمكن في توصيل أفكار حول تحسين العمليات و تدريب العاملين عليها.
- تسمح نماذج التخصيص بتحليل و إجراء التجارب للنظم المعقدة جدا في مواقف يكون من المستحيل إجراءها عمليا على النظم الفعلية لأنها مكلفة جدا أو أنها تحتاج إلى وقت طويل جدا.
- ساعد نماذج التخصيص في تبسيط البحث في الحقول المعرفية المختلفة، و توفر وسيلة فعالة للتنبؤ بالمستقبل و استشرافه لأداء النظم و الكيانات المختلفة و إجراء تحليل الحساسية لاختبار مختلف الحالات التي قد تحصل مثل تغير الظروف الطبيعية ظروف السوق أو غيرها.

[68] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابارهيم الحداد، مرجع سبق ذكره، ص245

2-7-5-2- شروط مشكلة التخصيص ومجالات تطبيقها:

تعد مشكلة التخصيص من مشاكل التوزيع السهلة المعالجة والمقيدة في الوقت إذا تعود بساطة استخدامها إلى شروطها التي تقتضي وجود عدد من العمليات (أعمال، أفراد،...)، بهدف توزيعها على التسهيلات المتاحة بحيث تخصص عملية واحدة لكل نوع من الإمكانات المتاحة كالمكائن مثلا.

إن بساطة استخدامها تعود بالدرجة الرئيسة إلى شروط تطبيقها وهي:[69]

- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها؛
- الوسيلة المتوفرة(عامل، الآلة) تؤدي عمل واحد، وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك؛
- كلفة انجاز كل مهمة من قبل كل وسيلة من الوسائل معروفة ومحددة مسبقا؛
- تحقق شرط عم السلبية، حيث يفترض عدم وجود قيم سالبة

إن مجالات تطبيق نموذج التخصيص في الحياة العملية كثيرة ومن أهمها:[70]

- تخصيص المد راء للمشاريع؛
- تخصيص مندوبي البيع إلى المناطق البيعية المختلفة؛
- تخصيص الأعمال للمكائن أو الخطوط الإنتاجية؛
- تخصيص المحاسبين للشركات في مكاتب التدقيق والمحاسبة؛
- توزيع العقود على المتعهدين أو المقاولين؛
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

وهناك تطبيقات أخرى كثيرة لهذا الأسلوب منشورة في المجلات المتخصصة في بحوث العمليات تم تقديم حلول لبعض المشاكل المستعصية من خلالها.

2-7-5-2- صياغة مشكلة التخصيص:

تتكون مشكلة الصياغة من أربع عناصر أساسية وهي:[71]

- يجب أن يكون عدد الوظائف أو الأعمال مساوي لعدد العمال فإذا كان لدينا m من الوظائف أو الأعمال يجب أن يكون لدينا n من العمال الذين يمكن أن تسند إليهم هذه الوظائف.
- باستطاعة كل عامل من العمال القيام بأي عمل من الأعمال أو الوظائف بتكلفة معينة أو ربح معين وأن هذا الاختلاف في التكلفة أو العمل ناتج عن الاختلاف في كفاءة العاملين. فلو كانت كفاءة العاملين متساوية فلن تكون هناك أية مشكلة في التخصيص .

---

[69] منعم زمزير الموسوي،" بحوث العمليات : مدخل علمي لاتخاذ القرارات " ، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،2009.ص269

[70] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 281

[71] حسين محمود الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، مرجع سابق، ص 209.

- عدم إمكانية العامل الواحد من القيام بأكثر من عمل واحد أو وظيفة واحدة أي لا يمكن إعطاء العامل أكثر من عمل واحد وهذا هو جوهر الاختلاف بين مشكلة التخصيص (Assignment) ومشكلة النقل (Transportation).
- مع الاحتفاظ بشرط عدم السلبية Non Négative بالنسبة للمتغيرات الموجودة في المشكلة فإن الهدف هو الوصول إلى أدنى التكاليف أو الوقت أو أقصى الإيرادات، ولا يمكن أن يكون لدينا عدد من الوظائف أو الأعمال أو العمال بالسالب وهذا ما يستلزم شرط عدم السلبية.

ولتوضيح مشكلة التخصيص نعطي الجدول الآتي:

الجدول (1-28)

الآلة / العامل	1	2	.... الآلة j	n	a_i
1	C_{11}	C_{12}	C_{1j}	C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}	C_{2j}	C_{2n}	1
.... العامل i	C_{m1}	C_{i2}	C_{ij}	C_{in}	1
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{mj}	C_{mn}	1
b_j	1	1	1	1	

حيث أن:

C_{ij} : يمثل تكاليف تخصيص العمل i للآلة j

a_i : يمثل مجموع تخصيص العمل i

b_j : يمثل مجموع تخصيص للآلة j

ومن خلال ما سبق يكون النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص وفق الصيغة التالية[72]:

[72] عبد الجبار خضر بخيت، سعد احمد عبد الرحمن،" استخدام بحوث العمليات في أ تخاذ القرارات الإدارية "، مجلة الإدارة والاقتصاد،عدد 93 ، الجامعة المستنصرية،بغداد،2012 ، ص146.

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$s/c\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1\\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1\\ X_{ij} = \begin{cases}1\\0\end{cases}\\ X_{ij} \geq 0\end{cases}$$

حيث:

X_{ij}: يمثل تخصيص العمل i للآلة j أو عدمه، $X_{ij} = \begin{cases}1\\0\end{cases}$

C_{ij}: تكلفة تخصيص العمل i للآلة j

ملاحظة هامة: من الضروري قبل حل مشكلة التخصيص لابد أن يكون عدد الأعمال= عدد الآلات أي n=m ومن ذلك فان هناك !n من التراتيب الممكنة لعمل مصفوفة التخصيص.

2-7-5-3- طرق حل مشاكل التخصيص (التعيين):

هناك طريقتان رئيسيتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل)؛

طريقة الحل المباشر(المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

ملاحظة: تستخدم هذه الطرق سواء في تخفيض تكاليف التخصيص أو في تعظيم الأرباح أو العوائد إنما بمنطقين متعاكسين.

2-7-5-3-1- طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل):

أ- حالة التدنئة:

في هذه الطريقة نحدد كل احتمالات التخصيص الممكنة بحيث يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد فقط أو آلة واحدة، و يكون عددها هو N (التخصيصات الممكنة مساو لعدد الوظائف)، فإذا فرضنا إن عدد الوظائف هو n بنفس حجم عدد الآلات، فان عدد احتمالات التخصيصات الممكنة هو:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

ثم نحدد هذه التخصيصات و نحسب تكاليف كل توزيع ثم نأخذ التخصيص الذي يكلف أقل ما يمكن.

مثال تطبيقي (دراسة حالة):

مؤسسة لحفر الآبار لديها ثلاث آلات للحفر هي: A،B،C كلفت بحفر أبار في ثلاث مناطق مختلفة و هيF ،E ،D. إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة و حسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، و قد بينتها الدارسة الأولية التي قامت بها مصلحة المحاسبة التحليلية بالمؤسسة كما هي موضحة في الجدول التالي: (التكلفة بآلاف الدينارات)

الجدول (1−28)

مناطق الحفر / الآلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

المطلوب:

- ايجاد أفضل تخصيص للالات بحيث تتحمل المؤسسة اقل تكلفة ممكنة لحفر الآبار الثلاثة، بمعنى ينبغي الاجابة عن:
  - ما هي الآلة التي تخصص لحفر البئرD ؟
  - ما هي الالة التي تخصص لحفر البئر E ؟
  - ما هي الالة التي تخصص لحفر البئرF ؟

بحيث تتحمل المؤسسة في النهاية أقل تكلفة ممكنة.

الحل: (طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل))

من المسألة نجد أن عدد الوظائف يتساوى مع عدد الآلات و يساوي 3. لذلك فان الاحتمالات الممكنة هي:!3 أي $3\times2\times1=6$ وهذه الاحتمالات هي:

احتمالات التخصيص
(A,D), (B,E), (C,F)
(A,D), (B,F), (C,E)
(B,D), (A,E), (C,F)
(B,D), (A,F), (C,E)
(C,D), (A,E), (B,F)
(C,D), (A,F), (B,E)

أي أن الاحتمال الأول مثلا هو: أن نخصص الآلة A للوظيفة D، وتخصص الآلة B، للوظيفة E والآلة C للوظيفة F. و على نفس المنوال تفسر بقية الاحتمالات.

لاحظ أننا قمنا بإعطاء ظيفة لكل آلة.

بعد تحديد الاحتمالات الممكنة نقوم بحساب تكلفة كل احتمال يمكن اختياره و ذلك كما يلي:

الجدول (1−30)

رقم الاحتمال	الاختيارات	تكاليف كل اختيار
1	(A,D), (B,E), (C,F)	42=10+14+18
2	(A,D), (B,F), (C,E)	36=8+10+18
3	(B,D), (A,E), (C,F)	28=10+6+12
4	(B,D), (A,F), (C,E)	32=8+14+12
5	(C,D), (A,E), (B,F)	32=10+6+16
6	(C,D), (A,F), (B,E)	44=14+14+16

من تكاليف الاختيارات نأخذ أقل تكلفة و يكون الاختيار الأمثل هو الاختيار المقابل لتلك التكلفة و في مثالنا أقل تكلفة هي 28 ألف دينار و بالتالي فان الاختيار الثالث هو الأحسن بذلك يكون التخصيص على النحو التالي:

- الآلة B تخصص لانجاز البئر D بتكلفة تقدر ب12000 دج
- الآلة A تخصص لانجاز البئر E بتكلفة تقدر ب: 6000 دج
- الآلة C تخصص لانجاز البئر F بتكلفة تقدر ب10000 دج

و كما هو واضح في العمود الثالث من جدول الاختيارات السابق فان التكلفة الإجمالية الدنيا التي تتحملها المؤسسة عبارة عن مجموع تكاليف كل تخصيص، أي:

$$Z=12000+6000+10000=28000$$

و يكون هذا هو أحسن تخصيص ممكن بتكلفة دنيا تقدر ب 28000 دج

ب- حالة التعظيم:

بالنسبة لحالة التعظيم فإننا نطبق نفس المراحل لغاية الوصول لجدول الذي يعطينا ربح كل توفيقة ممكنة وفي هذه الحالة يكون أفضل تخصيص هي التوفيقة التي توافق اكبر ربح ممكن.

وللتوضيح، إذا تم اعتبار التكاليف أرباح في المثال السابق فان:

اكبر ربح يكون 44 ألف دينار و بالتالي فان الاختيار السادس و الأخير هو الأحسن بذلك يكون التخصيص على النحو التالي:

- الآلة C تخصص لانجاز البئر D بتكلفة تقدر ب 16000 دج
- الآلة A تخصص لانجاز البئر F بتكلفة تقدر ب: 14000 دج
- الآلة B تخصص لانجاز البئر E بتكلفة تقدر ب: 14000 دج

و كما هو واضح في العمود الأخير من جدول الاختيارات السابق فان الربح الإجمالي للمؤسسة عبارة عن مجموع أرباح كل تخصيص، أي:

$$Z=16000+14000+14000=44000$$

و يكون هذا هو أحسن تخصيص ممكن بتكلفة دنيا تقدر ب 28000 دج

2-7-5-3-2- طريقة الحل المباشر(المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

أ- حالة التدنئة:

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (المصفوفة المتناقصة)، والتي تستلزم طرح و إضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة الوصول إلى أدنى كلفة عما هي عليه في حالة الوصول إلى أقصى الإيرادات.هناك شرطين ينبغي تحقيقهما وهما:

الشرط الأول :تحقيق صفر واحد في كل صف وصفر وحدا على الأقل في كل عمود؛

الشرط الثاني :سحب المستقيمات على الأصفار بمعنى تغطية الأصفار بمستقيمات (تشطيب الأصفار)، ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى أقل عدد من الأصفار ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوياً لعدد الصفوف والأعمدة.

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي:[73]

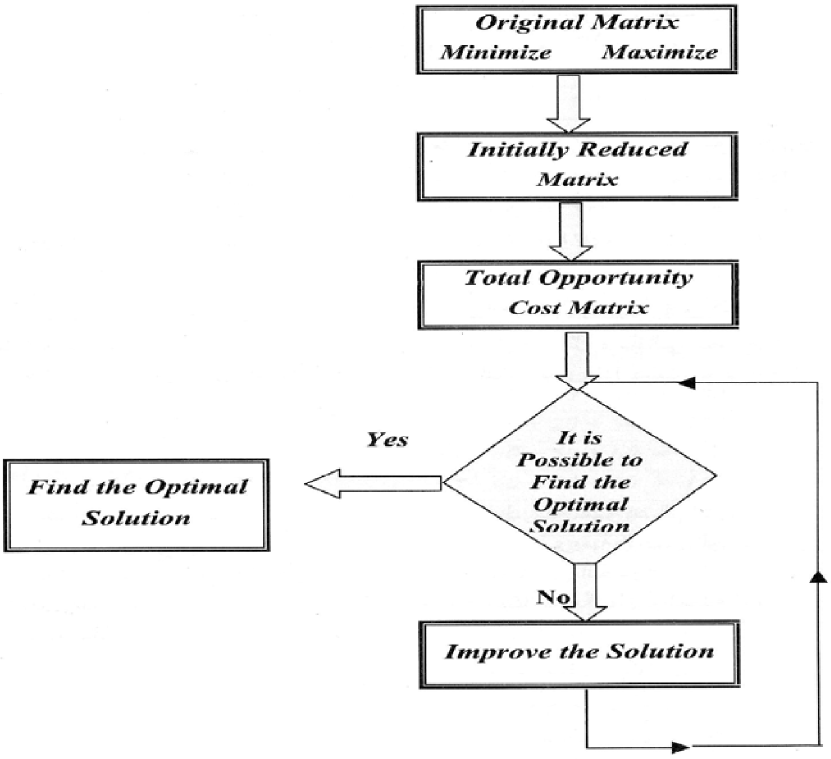
- ترتيب المعلومات في مصفوفة.
- التأكد من موازنة المصفوفة (عدد الصفوف يساوي عدد الأسطر)؛
- نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في المصفوفة فنحصل على **مصفوفة المراجعة الأولية**.
- .نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في المصفوفة، فنحصل على **مصفوفة الفرصة الكلية**، ولابد من تحقيق صفر واحد على الأقل في كل عمود وفي كل صف وهو الشرط الأول؛
- تغطية الأصفار بمستقيمات ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى الأقل، ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة وهذا يمثل الشرط الثاني؛ ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل؛ ونقوم بعملية التعيين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً اقل التكاليف.
- إذا كان عدد المستقيمات المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات، ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نقوم بتطوير الحل أي طرح أصغر قيمة(باستثناء الصفر) من كل القيم غير المغطاة بمستقيمات من بقية القيم غير المغطاة وفي نفس الوقت إضافة هذه القيمة التي طرحتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، أما القيم المغطاة فتدرج كما هي في الجدول الجديد وتتم العملية باستمرار إلى أن تحقق الحل الأمثل،
- وضع سياسة التخصيص ثم حساب مجموع التكاليف.

و الشكل الموالي يلخص مراحل الحل وفق هذه الطريقة:

[73] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 222،223.

مراحل حل مسائل التخصيص وفق الطريقة الهنكارية

الشكل (1-26)[74]



Mechanical Approach to solve the Assignment By using Hungarian Method

مثال تطبيقي (دراسة حالة):

ما هو أفضل تخصيص لمجموعة من العمال على مجموعة من الآلات إذا كان الوقت الذي يحتاجه كل عامل على كل آلة بالساعات محدد في الجدول التالي:

الجدول (1-31)

الآلة / العامل	1	2	3	4
1	5	7	4	2
2	4	3	6	8
3	6	5	1	2
4	1	3	3	4

[74] حسين محمود الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، مرجع سابق، ص 212

المطلوب:

استعمل الطريقة الهنغارية في إيجاد أفضل تخصيص، وحدد الوقت الأدنى لهذا التخصيص.

الحل:

الخطوة الأولى: إيجاد مصفوفة المراجعة الأولية و هي :

اقل عدد في السطر الأول هو: 2 نطرحه من جميع قيم السطر الأول

اقل عدد في السطر الثاني هو: 4 نطرحه من جميع قيم السطر الثاني

اقل عدد في السطر الثالث هو: 1 نطرحه من جميع قيم السطر الثالث

اقل عدد في السطر الرابع هو: 1 نطرحه من جميع قيم السطر الرابع

فنحصل على **مصفوفة المراجعة الأولية** في الجدول أسفله:

الجدول (1-32)

الآلة / العامل	1	2	3	4
1	3	5	2	0
2	0	1	2	4
3	5	2	0	1
4	0	4	2	3

الخطوة الثانية: هي طرح اقل عدد في كل عمود للحصول على مصفوفة الفرصة الكلية كما يلي:

اقل عدد في العمود الأول و الثاني و الثالث و الرابع هو: 0

وبالتالي لن يطرأ أي تغيير على مصفوفة المراجعة الأولية السابقة وعليه فان **مصفوفة الفرصة الكلية** تكون كما يلي:

الجدول (1-33)

العامل \ الالة	1	2	3	4
1	3	5	2	0
2	0	1	2	4
3	5	2	0	1
4	0	4	2	3

نقوم بتاطير أو شطب السطر الثاني و العمود الأول و الثالث و الرابع.

عدد الأطر= عدد الأعمدة = 4 منه نستنتج الوصول إلى التخصيص الأمثل و يكون كالتالي:

- العامل 1 يخصص للآلة 4 بوقت يقدر ب 2 ساعة
- العامل الثاني يخصص للآلة 2 بوقت يقدر ب 3 ساعة
- العامل الثالث يخصص للآلة 3 بوقت يقدر ب 1 ساعة
- العامل الرابع يخصص للآلة 1 بوقت يقدر ب 1 ساعة

الوقت الإجمالي هو: 2+5+1+1=9 ساعات

وعليه فان الوقت الأدنى لهذا التخصيص هو : 9 ساعات.

ب- حالة التعظيم:

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد (إيراد) عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تقليل التكاليف، إلا عند البدء بالحل، حيث يتم بموجب هذه الهدف طرح كل القيم (العوائد) في مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في المصفوفة كلها فنحصل على مصفوفة تكاليف ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.[75]

مثال تطبيقي (دراسة حالة):

شركة طيران تمتلك 5 طائرات متفاوتة الحمولة و الخصائص، منحت لها مديرية النقل الجوي رخصة لاستغلال 5 خطوط من و إلى العاصمة، الدراسة التحليلية التي قامت بها أضفت إلى تحديد الأرباح الشهرية الممكن جنيها عند كل تخصيص وهي موضحة في الجدول التالي:[76]

[75] فتحي خليل حمدان ، رشيق رفيق مرعي ، مرجع سابق، ص 168.
[76] مقران يزيد، التمرين الرابع من سلاسل تمارين مشاكل التخصيص لطلبة السنة الثالثة اقتصاد كمي.

الجدول (1-34)

الخط / الطائرة	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
الطائرة1	100	120	80	130	130
الطائرة 2	80	70	70	60	50
الطائرة 3	70	60	50	30	30
الطائرة 4	20	30	25	10	10
الطائرة 5	120	110	90	150	150

المطلوب: اوجد أفضل تخصيص تقترحه على الشركة باستعمال الطريقة الهنغارية و تحدد أعلى ربح تحققه الشركة من التخصيص المقترح.

الحل:

المرحلة الأولى: نقوم بطرح أعلى ربح و هو: 150 من كل أرباح أو عوائد الشركة في الجدول، فنحصل على المصفوفة التالية:

الجدول (1-35)

الخط / الطائرة	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
الطائرة1	50	30	70	20	20
الطائرة 2	70	80	80	90	100
الطائرة 3	80	90	100	120	120
الطائرة 4	130	120	125	140	140
الطائرة 5	30	40	60	0	0

المرحلة الثانية:

نقوم بحساب **مصفوفة المراجعة الأولية:**

بالنسبة للسطر الأول اقل قيمة هي:20

بالنسبة للسطر الثاني اقل قيمة هي:70

بالنسبة للسطر الثالث اقل قيمة هي:80

بالنسبة للسطر الرابع اقل قيمة هي:120

بالنسبة للسطر الخامس اقل قيمة هي : 0

نقوم بطرح قيم كل سطر من اقل قيمة في نفس السطر فنحصل على المصفوفة التالية:

الجدول (1-36)

الخط / الطائرة	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
الطائرة 1	30	10	50	0	0
الطائرة 2	0	10	10	20	30
الطائرة 3	0	10	20	40	40
الطائرة 4	10	0	5	20	20
الطائرة 5	30	40	60	0	0

للمرحلة الثالثة:

نقوم بحساب **مصفوفة الفرصة الكلية:**

بالنسبة للعمود الأول اقل عدد هو: 0

بالنسبة للعمود الثاني اقل عدد هو: 0

بالنسبة للعمود الثالث اقل عدد هو: 5

بالنسبة للعمود الرابع اقل عدد هو: 0

بالنسبة للعمود الخامس اقل عدد هو: 0

نقوم بطرح قيم كل عمود من اقل قيمة في نفس العمود فنحصل على المصفوفة التالية:

الجدول (1−37)

الخط / الطائرة	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
1	30	10	45	0	0
2	0	10	5	20	30
3	0	10	15	40	40
4	10	0	0	20	20
5	30	40	55	0	0

نقوم بتاطير أو شطب السطر 1، 4 و5 والعمود 1 وذلك بأخذ اقل عدد من التشطيب الممكن.

نلاحظ أن اقل عدد من الأطر أو التشطيب يساوي 4 و هو لا يساوي عدد الأسطر و عدد الأعمدة منه نتطرق للمرحلة الرابعة.

للمرحلة الرابعة:

−اقل عدد غير مؤطر هو:5 ننقصه من كل عنصر غير مشطب و نضيفه لنقاط التقاطع فنحصل على الجدول التالي:

الجدول (1−38)

الخط / الطائرة	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
1	35	10	45	0	0
2	0	5	0	15	25
3	0	5	10	35	35
4	15	0	0	20	20
5	35	40	55	0	0

نقوم بتأطير أو شطب السطر 1، 4 و5 والعمود 1 و 3 وذلك بأخذ اقل عدد من التشطيب الممكن.

نلاحظ أن اقل عدد من الأطر أو التشطيب يساوي 5 وهو يوافق عدد الأسطر و الأعمدة، أي أننا قد توصلنا للتخصيص الأمثل و يكون كالتالي:

- الطائرة 1 تخصص لقسنطينة بربح: 130 دج
- الطائرة 1 تخصص لقسنطينة بربح: 70 دج
- الطائرة 1 تخصص لقسنطينة بربح: 70 دج
- الطائرة 1 تخصص لقسنطينة بربح: 40 دج
- الطائرة 1 تخصص لقسنطينة بربح: 150 دج

الربح الإجمالي=130+70+70+40+150=460 دج

منه أعلى ربح تحققه الشركة من التخصيص المقترح هو: 460 دج.

2-7-5-3-3- طريقة النقل:

يمكن استخدام طريقة مسائل النقل في ايجاد أحسن تخصيص، وذلك ببناء جدول للنقل يحتوي على التكاليف و التي هي تكاليف التخصيص، غير أن كميات العرض و كميا الطلب لكل سطر أو عمود يجب أن نضعها مساوية للواحد، و يكون بذلك مجموع العرض مساويا لمجموع الطلب و مساويا لعدد المهام، ثم نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا (مثلا)، أو أية طريقة أخرى تماما كما يتم العمل في مسائل النقل، غير انه ينبغي في هذه الحالة الحرص على عدم الوقوع في حالة التفكك لكون الكثير من الأسطر و الأعمدة تتشبع في نفس الوقت، و في هذه الحالة نحرص على تشبيع إما السطر أو العمود، و تبقى قيمة صغيرة ε لنتعامل معها و كأنها عدد و نهملها عند الوصول إلى الحل الأمثل.

مثال تطبيقي (دراسة حالة):

ما هو أفضل تخصيص لمجموعة من العمال على مجموعة من الآلات الموزعة كالتالي :

الجدول (1-39)

الالة / العامل	A	B	C
1	18	6	14
2	12	14	10
3	16	8	10

نشكل جدول النقل أولا حيث نجعل كميات العرض و الطلب على مستوى كل سطر و عمود تساوي الواحد (1) ونضع التكاليف في الزاوية العلوية اليمنى لكل خلية تماما في مسائل النقل.

الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا

يجب ان نملا 5 خانات لذا نضع قيمة صغيرة جدا ε ، عند إشباع كل سطر و عمود في نفس الوقت لعدم الوقوع في مشكلة التفكك.

الجدول (1−40)

الآلة / العامل	A	B	C	العرض a_j
1	**18** ε	**6** **1**	**14**	**1**
2	**12** ε_1	**14**	**10** **1**	**1**
3	**16** $1-\varepsilon$	**8**	**10**	**1**
الطلب b_i	**1**	**1**	**1**	

يتم اختبار الحل إذا كان امثلا أو لازال قابل للتحسين إما بأسلوب التخطي أو أسلوب التوزيع المعدل

يجب أن يتحقق الشرط: **عدد الأسطر+عدد الأعمدة−1** أي 3+3−1=5

نختار حالة التخطي (الحجر المتنقل).

2−=18−12+10−14= (1C)

14=6−18+12−14=(2B)

4=16−18+6−8=(3B)

4−=16−12+10−10=(3C)

بما أن التكاليف ليست كلها موجبة فان هذا الحل حل غير امثل و الخلية التي تدخل في الحل هي : (3C)

لان إدخالها في الحل يؤدي إلى تخفيض التكاليف بمقدار 4 وحدة نقدية لكل وحدة.

– نقوم بانجاز التحويلات على مسار هذه الخلية نحصل على جدول الحل التالي :

الجدول (1–41)

العامل \ الالة	A	B	C	العرض a_j
1	18 ε	6 1	14	1
2	12 1	14	10 ε_1	1
3	16	8	10 $1-\varepsilon$	1
الطلب b_i	1	1	1	

حيث نجد التكاليف الحدية للخلية غير الداخلة في الحل كالسابق بطريقة المسار المتعرج حتى نجد جميع التكاليف موجبة فنقول أن هذا الحل هو الحل الأمثل.

بحذف الأحرف المساعدة نحصل على جدول الحل الأمثل للتخصيص بطريقة مسائل النقل و هو :

الجدول (1–42)

العامل \ الالة	A	B	C	العرض a_j
1	18	6 1	14	1
2	12 1	14	10	1
3	16	8	10 1	1
الطلب b_i	1	1	1	

ويكون التخصيص كما يلي :

- الآلة (A) تخصص للعامل (2) بتكلفة :6000 دج
- الآلة (B) تخصص للعامل (1) بتكلفة 12000دج
- الآلة (C) تخسس للعامل (3) بتكلفة 10000 دج

و هذا بتكلفة تخصيص إجمالية دنيا تقدر ب : 28000 دج

وفي حالة التعظيم نقوم بنفس طريقة التقليل (في المسار المتعرج يكون الحل امثل عندما تكون جميع العوائد سالبة).[77]

2-7-5-4- استخدام برنامج WinQSB في حل مسائل التخصيص:

مثال تطبيقي (دراسة حالة):

المثال الوارد في الطريقة الهنكارية حالة التدنئة:

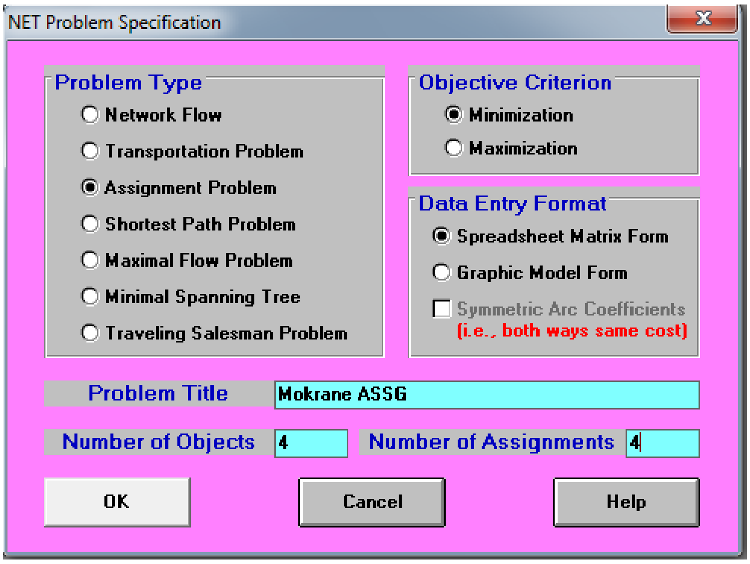
الجدول (1-43)

الالة / العامل	1	2	3	4
1	5	7	4	2
2	4	3	6	8
3	6	5	1	2
4	1	3	3	4

[77] ارجع للفقرة الخاصة بمسائل النقل.

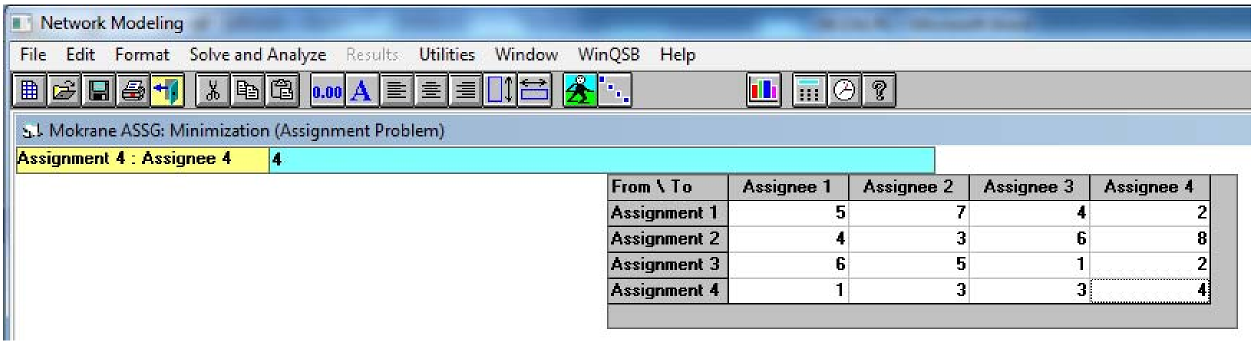
أول خطوة بعد فتح التطبيق هي إدخال خصائص مشكلة التخصيص كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (1-27)



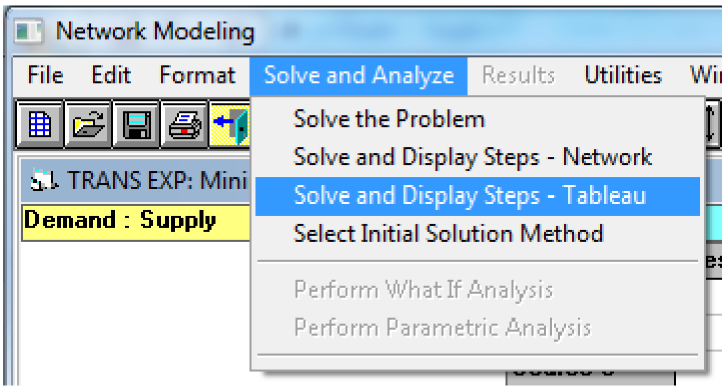
بعد إدخال البيانات نحصل على الشكل الموالي.

الشكل (1-28)



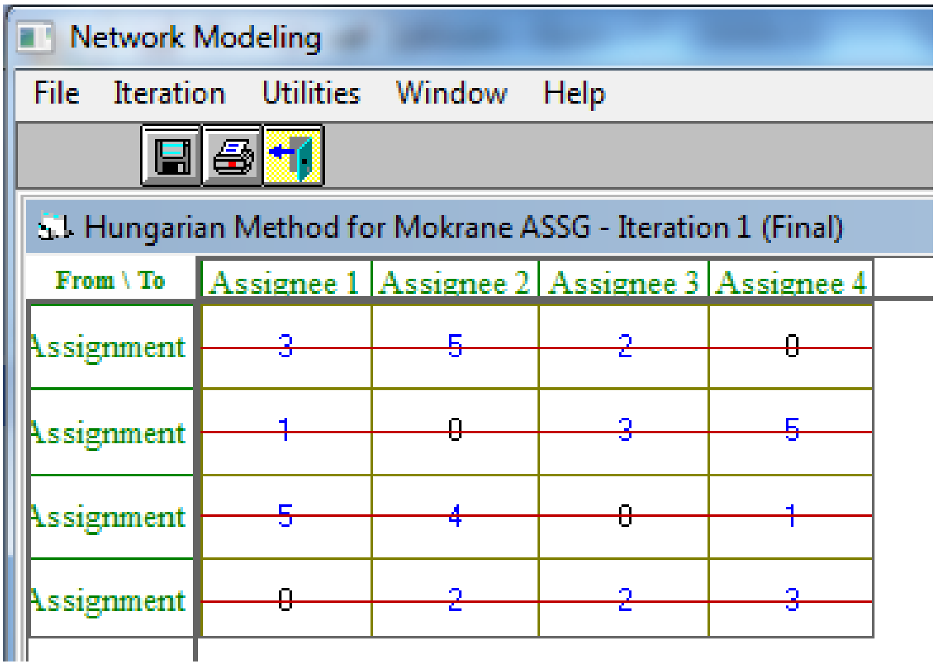
بعدها نقوم باختيار بإظهار المرحلة الأولى للطريقة الهنكارية باستخدام الأمر Solve and display steps– tableau من القائمة Solve and analyze

الشكل (1-29)



نحصل على الجدول الموالي الذي يعطينا توزيع التخصيص حسب الطريقة الهنكارية

الشكل (1-30)



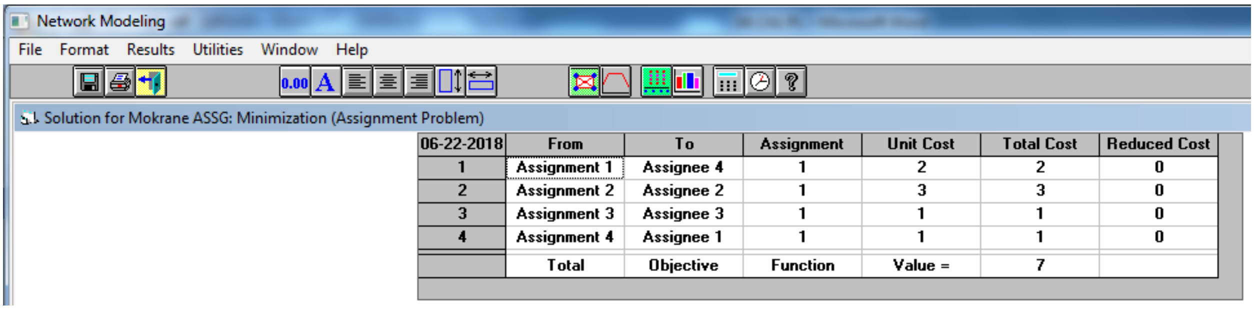
نلاحظ أن عدد الأسطر و الأعمدة المشطوبة هو 4 و هو يوافق عدد الأسطر و الأعمدة و عليه يمكن من الجدول استنتاج التخصيص الأمثل.

لاحظ أيضا في شريط العناوين كلمة Iteration 1 (Final) وتعني أنه يمكن من الجدول استنتاج التخصيص الأمثل.

وللحصول على التخصيص الأمثل مباشرة نختار الامر Solve the problem في القائمة Solve and Analyze

فنحصل على الجدول التخصيص الأمثل كالتالي:

الشكل (1-31)



06-22-2018	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Assignment 1	Assignee 4	1	2	2	0
2	Assignment 2	Assignee 2	1	3	3	0
3	Assignment 3	Assignee 3	1	1	1	0
4	Assignment 4	Assignee 1	1	1	1	0
	Total	Objective	Function	Value =	7	

التخصيص الأمثل و يكون كالتالي:

- العامل 1 يخصص للآلة 4 بوقت يقدر ب 2 ساعة
- العامل الثاني يخصص للآلة 2 بوقت يقدر ب 3 ساعة
- العامل الثالث يخصص للآلة 3 بوقت يقدر ب 1 ساعة
- العامل الرابع يخصص للآلة 1 بوقت يقدر ب 1 ساعة

الوقت الإجمالي هو: 2+5+1+1=9 ساعات

وعليه فان الوقت الأدنى لهذا التخصيص هو : 9 ساعات.

وهو ما تحصلنا عليه سابقا في المثال الوارد في الطريقة الهنكارية حالة التدنئة

2-7-5-5- حالات خاصة في مشاكل التخصيص:

هناك عدد من الحالات الخاصة في مشاكل التخصيص وهي:

2-7-5-5-1- عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

لا يتحققا أحيانا شرط أساسي من شروط التخصيص وهو ضروري تساوي الصفوف والأعمدة، لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى إضافة صف أو عمود وهمي إلى جهة النقص بتكاليف او عوائد صفرية سواء أكان الهدف تخفيض أدنى كلفة أو أقصى عائد.

2-7-5-5-2- تعدد الحلول المثلى:

قد تكون هناك بعض المشاكل التي ينجم عن حلها وجد أكثر من حل أمثل واحد أي أكثر من حل بديل له نفس الكلفة الكلية وهذا يعني مرونة عالية لدى متخذ القرار للاختيار والمناورة بالموارد المتاحة، وتحصل هذه الحالة عندما يكون بالإمكان تأشير أكثر من قيمة صفرية في نفس الوقت أو بعبارة أخرى تخصيص أكثر من وسيلة لمهمة واحدة. [78]

2-7-5-5-3- استحالة التخصيص:

لقد افترضنا في المسائل السابقة أن العامل يستطيع انجاز أي مهمة من المهام المتاحة ولكن بتكاليف مختلفة تبعا لكفاءة و مهارة كل عامل، ولكن في بعض الأحيان نجد أن بعض العاملين لا تتوفر لديهم الخبرة لانجاز أعمال معينة إما بسبب عدم التدريب أو النقص في المعرفة التقنية أو الفنية أو عدم القدرة البدنية أو الصحية مما يعني استحالة تعيين هؤلاء العاملين لانجاز تلك المهام، في هذه الحالة فان المهمة ذات التخصيص المستحيل تعطى لها تكلفة عالية جدا، ولتكن M وبعد ذلك يتم إتباع الخطوات السابقة في عملية التخصيص لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

[78] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 189

مثال : لتكن مصفوفة التكاليف التالية:

الجدول (1-44)

الوظيفة / عامل	A	B	C	D
1	20	14	M	25
2	8	12	27	M
3	20	M	10	7
4	10	13	11	14

في المصفوفة أعلاه يتبين *استحالة تخصيص العامل* (1) لانجاز الوظيفة C ،واستحالة تخصيص العامل (2) للوظيفة D و *استحالة تخصيص العامل* (3) للوظيفة B ، و تكون بقية الحل تماما كما سبق ذكره.

2-8- تمارين تطبيقية مقترحة حول الفصل الأول:

تمرين 1:

في دراسة لإحدى المؤسسات حول متطلبات إنتاج منتَج، وجد أن هذا المنتَج يتطلب توفر نوعين من المواد الأولية لإنتاجه، حيث تقدر تكلفة النوع الأول من المادة الأولية بـ(30 دج) للكيلوغرام(كلغ)، وتكلفة النوع الثاني تساوي (48 دج) للكيلوغرام، أن إنتاج المنتَج يتطلب على الأكثر (120) كلغ من المادة الأولى، وعلى الأقل (60) كلغ من المادة الثانية، كما أن مجموع المادتين يجب أن يساوي (150) كلغ.

المطلوب: كتابة النموذج (البرنامج) الخطي الذي يسمح بتدنئة تكاليف المنتَج مع احترام هذه الشروط.

تمرين 2:

باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية:

$1.Max(z)=15x_1+12x_2$ s/c $\begin{cases}3x_1+6x_2\le 54\\6x_1+3x_2\le 48\\9x_1+9x_2\le 90\end{cases}$ $x_1\ge 0;x_2\ge 0$	$2.Min(z)=80x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}18x_1+12x_2\ge 180\\6x_1+9x_2\le 162\\5x_1+10x_2\ge 110\end{cases}$ $x_1\ge 0;x_2\ge 0$
$3.Max(z)=2x_1+4x_2$ s/c $\begin{cases}x_1\ge 7\\x_2\le 11\end{cases}$ $x_1\ge 0;x_2\ge 0$	$4.Max(z)=3x_1+6x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+x_2\ge 12\\3x_1+4x_2\le 24\end{cases}$ $x_1\ge 0;x_2\ge 0$

تمرين 3:

أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرامج التالية

$1.Max(z)=20x_1+15x_2$ s/c $\begin{cases}7x_1+2x_2\geq 14\\8x_1+16x_2\leq 16\\2x_1+5x_2\geq 10\end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$2.Min(z)=x_1-x_2-3x_3$ s/c $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3\geq 1\\4x_1-2x_2+x_3\geq -2\\3x_1+x_3=2\end{cases}$ $x_1;x_2;x_3\geq 0$

تمرين 4:

أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة

$1.Max(z)=100x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}8x_1+2x_2\leq 40\\6x_1+9x_2\leq 108\\8x_1+6x_2\leq 96\end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$2.Max(z)=16x_1+15x_2$ s/c $\begin{cases}40x_1+31x_2\leq 124\\-x_1+x_2\leq 1\\x_1\leq 3\end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$

تمرين 5:

أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية:

بطريقة M الكبرى Big M:	بطريقة M الكبرى Big M و طريقة المرحلتين:
$Min(z)=10x_1+30x_2$ s/c $\begin{cases}3x_1+2x_2\leq 6\\6x_1+x_2\geq 6\\x_2\geq 2\end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$Min(z)=4x_1+x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+2x_2\leq 4\\3x_1+x_2=3\\4x_1+3x_2\geq 6\end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$

تمرين 6:

تقوم مؤسسة توزيع بنقل عدد من المنتجات من مخازنها إلى مراكز تجارية، والجدول التالي يبين لنا المتاحات من مختلف المنتجات في كل مخزن والكمية الواجب تلبيتها في كل مركز تجاري، كما يوضح لنا أيضا تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل مركز تجاري.

مراكز الطلب / مراكز العرض	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض a_j
S_1	1	3	7	2	1000
S_2	2	3	5	2	500
S_3	4	2	7	4	2000
الطلب b_i	500	1500	750	750	**3500**

المطلوب:

- كتابة البرنامج الخطي لهذا المشكل؛
- إيجاد الحل الأساسي الأولي بالطرق الثلاث
- إيجاد الحل الأمثل بطريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone) وطريقة عوامل الضرب.

تمرين 7:

لتكن مسألة النقل التالية

مراكز الطلب / مراكز العرض	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض a_j
S_1	**10**	**8**	**6**	**4**	2000
S_2	**14**	**17**	**5**	**2**	1300
S_3	**18**	**7**	**11**	**9**	1700
الطلب b_i	1000	2000	500	1500	**3500**

المطلوب :

أوجد أعلى إيراد من مبدأ تعظيم الأرباح:

- الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و بطريقة أقل التكاليف وبطريقة فوجل وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة.
- اختبر الحل الأساسي الأول بطريقة الحجر المتنقل وتوزيع المعدل من مصفوفة الحل الأساسي لطريقة اقل التكاليف وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة.

تمرين 8:

يرأس مدير أحد الأقسام، ثلاثة موظفين، ورغب المدير في إنجاز هؤلاء الموظفين الثلاثة ثلاث مهام مختلفة . ويختلف الموظفون في درجة مهارتهم وكفاءتهم وتختلف المهام من حيث درجة صعوبتها، ويوضح الجدول الأتي، تقديرات الوقت الذي حددها المدير والخاصة إنجاز كل موظف لمهمة معينة.

العامل \ الالة	A	B	C
1	8	26	17
2	13	28	4
3	38	19	18

المطلوب :تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

تمرين 9:

فكرت شركة المقاولات الحديثة بإنجاز عدد من المشاريع الإنشائية، فإذا كان عدد المشاريع أربعة وعدد المقاولين المس ولين عن إنجاز تلك المشاريع أربعة، وتمثل المصفوفة أدناه العوائد(بآلاف الدنانير) لكل مقاول:

المقاولون \ المشاريع	A	B	C	D
1	18	10	6	2
2	10	14	8	4
3	16	4	14	8
4	12	12	4	6

المطلوب :

إيجاد أفضل سياسة تخصيص، بحيث تحقق الشركة أقصى العوائد.

قائمة مراجع الفصل الأول: بحوث العمليات

المراجع بالعربية:

احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف محمد،" الأساليب الكمية في الإدارة"، دار المجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان،1999.

إسماعيل السيد،"بعض الطرق الكمية في مجال الأعمال"، الدار الجامعية للطبع و التوزيع، الإسكندرية،1999.

أكرم محمد عرفان المهتدي،" الأساليب الكمية في اتخاذ القرار : بحوث العمليات "، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2004.

بوقرة رابح:"بحوث العمليات"، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر، 2009.

جهاد صياح بني هاني،نازم محمود الملكاوي،فالح عبد القادر الحوري، "بحوث العمليات و الأساليب الكمية و النظرية و تطبيق"، دار جليس الزمان، عمان، 2008.

حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي،" مدخل إلى بحوث العمليات "، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان،2007 ، ص289

حسن ياسين طعمة، "بحوث العمليات–نماذج وتطبيقات"، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والطباعة، عمان، 2009.

حسين محمود الجنابي، "الأحداث في بحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2010.

دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، " بحوث العمليات "،دار اليازوري للطباعة و لنشر، الأردن،2010.

رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان،"مقدمة في بحوث العمليات"،عمان الأردن ،1996.

سهيلة عبد الله سعيد، "الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات"،دار الحامد،ط1 ،الأردن، 2007.

صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، "تطبيقات بحوث العمليات في الادارة، اثراء للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، لأردن،2009

صبحي المحمد، إبراهيم نائب:"بحوث العمليات"، مديرية الكتاب و المطبوعات الجامعية، حلب، سوريا، 2008.

علي السلمي،" الأساليب الكمية في الإدارة"،دار المغارف، القاهرة،1975.

عبد الجبار خضر بخيت، سعد احمد عبد الرحمن،" استخدام بحوث العمليات في أ تخاذ القرارات الإدارية "، مجلة الإدارة والاقتصاد،عدد 93 ، الجامعة المستنصرية،بغداد،2012 .

عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي،" المدخل لبحوث العمليات "، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،2006.

عبد القادر مطاليس،"بحوث العمليات عمليات ومسائل"، النشر الجامعي الجديد، تلمسان الجزائر، 2017. ص212،213.

عبد الجبار خضر بخيت، سعد احمد عبد الرحمن،"نماذج البرمجة الخطية بين النظرية و التطبيق"، مطبعة اساور، بغداد،2013. ص127.

فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي،" مقدمة في بحوث العمليات " ، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،1996.

قارون عمران،"تخفيض تكاليف النقل البحري باستخدام البرمجة الخطية، حالة الشركة الوطنية للنقل البحري SNTM، رسالة ماجستير علوم اقتصادية، جامعة الجزائر، 1997.

محمد راتول:" بحوث العمليات"، ديوان المطبوعات الجزائرية، بن عكنون، الجزائر، 2006.

مقران يزيد، سلاسل تمارين مشاكل التخصيص لطلبة السنة الثالثة اقتصاد كمي.

محمد الطراونة، سليمان عبيدات،"مقدمة في بحوث العمليات أساليب و تطبيقات"، دار المكتبات و الوثائق الوطنية، ط1،1989.

منار الفرا:"المادة النظرية في بحوث العمليات والبرمجة الخطية"، الجامعة الإسلامية، غزة، فلسطين، 2014.

محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني،" مقدمة في بحوث العمليات " دار وائل للطباعة والنشر و التوزيع، الأردن، 1999

محمد توفيق ماضي،"سلسلة الأساليب الكمية للجميع: البرمجة الخطية و التوزيع الأمثل للموارد المحدودة"، المكتب العربي الحديث، الإسكندرية،1992.

مير بباوي فهمي،"بحوث العمليات في الإدارة و المحاسبة"، المركز الدولي للعلوم الإدارية، القاهرة،1977.

مؤيد عبد الحسين الفضل: "بحوث العمليات المحاسبية"، إثراء للنشر و التوزيع،الأردن، 2008.

محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، "الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"، دار اليازوري العلمية، الأردن 2013

منعم زمزير الموسوي،" بحوث العمليات : مدخل علمي لاتخاذ القرارات " ، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان ،2009.

محمود الفياض، عيسى قدادة، "بحوث العمليات" ، دار اليازوري، الأردن 2007،

محمد سالم الصفدي، "البرمجة الخطية و بحوث العمليات"، شركة المطبوعات للتوزيع والنشر, لبنان، 1980.

نجم عبود نجم، مدخل إلى الأساليب الكمية، الأردن، مؤسسة الوراق، 2004،

يزن إبراهيم مقبل، "مقدمة في بحوث العمليات"، الأردن، مكتبة المجتمع العربي للنشر، 2005،

المراجع بالأجنبية:

Amor Farouk Benghezal, « programmation linéaire »,OPU, Alger,2000.

Boussard J.M., Daudin J. J. ,"La programmation linéaire dans les modèles de production", Masson , Paris, 1998.

Dominique de wera ,"Eléments de programmation linéaire avec application aux graphes", presses polytechniques romandes lausanne, 1991.

Dantzig : « Management Science in the world of to day and to morrow », G.B., 1967.

Hiller.f and Liberman. G, "Introduction to operation research", 3eme edition Holden Day INC,1980.

Herman c.c and Magee f. : « Operation Reaserch for Management », The new english library LTD, London

Morse P.M and Kimball G.E : « Methods of operations reasearch», New york, USA, 1955.

Michel Simonnard,« Programmation linéaire technique de calcule économique », Dunod, Paris,1972.

Gerald Bailageon, « programmation linéaire appliquée, outil d'aide à la décision », Edition SMG, Canada,1996.

Scheid J.-F., "Programmation linéaire. Méthodes et applications". Editions T.I., Mathématiques pour l'ingénieur - Méthodesnumériques, 2015.

Wanger : « principles of operations research », New york, USA, 1969.

الفصل الثاني:

برمجة الأعداد الصحيحة

الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

تطرقنا من خلال الفصل الأول إلى عرض مختصر لمبادئ البرمجة الخطية وطرق حل البرامج الخطية، تحت عدة فرضيات من بينها فرضية أو مبدأ التجزئة، والذي يعني أنه يمكن لقيم المتغيرات الأساسية أن تأخذ أي قيم حقيقية مستمرة موجبة، لكن في العديد من الحالات نجد أنه يجب أن تكون قيم هذه المتغيرات عند الحل الأمثل قيم عددية صحيحة، فمثلا في مسألة تتعلق بمخطط إنتاج أمثل لورشة لصناعة الأثاث المكتبي (الطاولات، الكراسي،...)، يقودنا إلى إنتاج 156,33 طاولة و 742,5 كرسي غير مقبول، كون أن العدد العشري في هذه الحالة ليس له معنى اقتصادي بحيث لا يمكن إنتاج 0,33 طاولة أو نصف كرسي.

ولتجاوز هذه المشكلة قد يقترح البعض تقريب هذه القيم إلى أقرب عدد صحيح (مثلا إنتاج 156 طاولة و 742 كرسي)، لكن هذه الطريقة لا تضمن لنا أن يكون هذا الحل حلا أمثل (لأنه قد لا يحترم أحد قيود البرنامج و خاصة إذا كان أحد القيود معادلة)، بالإضافة إلى ذلك قد يكون هناك حلا آخر ذو أعداد صحيحة و أفضل من هذا الحل المقرب، (فمثلا قد يكون الحل الأمثل هو إنتاج 152 طاولة و746 كرسي)، وحتى إذا تجاوزنا هذه المشاكل فهناك بعض الحالات أين يستحيل معها تقريب القيم إلى أعداد صحيحة و خاصة إذا كان أحد أو بعض المتغيرات الأساسية للنموذج متغيرات ثنائية من نوع (1،0).

وبما أن نماذج البرمجة الخطية تضمن فقط عدم سلبية المتغيرات في حين أننا نشترط في هذه النماذج أن تكون بالإضافة إلى عدم السلبية أعداد صحيحة، فإننا بحاجة إلى طرق و تقنيات جديدة تأخذ هذا الشرط الجديد بعين الاعتبار في عملية البحث عن الحل الأمثل، ويصبح عندئذ الهدف هو تحديد القيم المثلى للمتغيرات الأساسية في شكل عددي صحيح.

وبناءا على ذلك نقول أن برمجة الأعداد الصحيحة هي برمجة خطية مضاف إليها شرط العدد الصحيح لقيم المتغيرات عند الحل الأمثل بحيث يضاف إلى شرط عدم سالبية المتغيرات شرط العدد الصحيح.

و من خلال هذا الفصل سوف نستعرض في البداية عموميات حول البرمجة بالأعداد الصحيحة و مختلف تقنياتها، ثم نستعرض أهم الطرق المستعملة في حلها. بعد ذلك سنعرض بعض تطبيقات مسائل برمجة الأعداد الصحيحة الثنائية.

1- عموميات حول البرمجة بالأعداد الصحيحة:

1-1- ماهية البرمجة بالأعداد الصحيحة:

يعتبر نموذج البرمجة العددية من احد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية ويتكون من دالة هدف و من قيود و شروط عدم سالبية و يختلف عن البرمجة الخطية العادية بأنه يجب أن يكون واحد أو أكثر من قيم الحل في شكل أرقام صحيحة وعلى وجه التحديد في جدول الحل النهائي (الأمثل) أي يجب أن تكون قيم المتغيرات أرقام صحيحة خالية من الكسور ويمكن تعريف برمجة

الأعداد الصحيحة بأنها (أسلوب رياضي للبرمجة الخطية يقدم حلول لمشاكل البرمجة الخطية في شكل أعداد أو أرقام صحيحة). وتعتبر أخطاء التقريب في حل المشاكل العددية من أهم الصعوبات الحسابية في البرمجة العددية وقد أدت هذه الصعوبات الحسابية إلى التفكير في استخدام طرق بديلة لحل المشكلة وأحدى هذه الطرق البديلة هو حل المشكلة على أنها برمجة خطية عادية فإذا تضمن الحل الأمثل متغيرات بقيم كسرية يتم تقريب الكسور إلى اقرب رقم عددي صحيح. فمثال إذا ظهر الحل النهائي بأن عدد السيارات التي سيتم شرائها حسب الحل الأمثل بطريقة البرمجة الخطية هو (10,6) يتم تقريب هذا الرقم إلى (11) و تتمثل المشكلة لطريقة التقريب هذه في التوصل إلى حلول غير ممكنة تتجاوز القيود المفروضة, فعلى سبيل المثال قد لا يكون قيد الأموال المتاحة إلا لشراء (10,6) سيارة على الأكثر إذا أن عملية التقريب إلى شراء (11) سيارة سيجعل الحل غير ممكن, لأنه بعيد عن الأمثلية المطلوبة بالحل بالأعداد الصحيحة، بلغة دالة الهدف . ولذلك كان لابد من إيجاد أساليب جديدة تتعامل مع هذه الحالات التي تكون فيها متغيرات القرار أعداد صحيحة.[1]

1-2- الشكل العام لنماذج برمجة الأعداد الصحيحة:

هو عبارة عن نموذج برمجة خطية مضافا إليه شرط العدد الصحيح لأحد أو بعض أو كل المتغيرات الأساسية.

$$Max/Min\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{\boldsymbol{ij}}\, X_j (\leq, =, \geq)\, b_i & i = 1 \dots \dots \dots . . m \\ X_j \geq 0 & j = 1 \dots \dots \dots n \\ X_j Entier & j = 1 \dots p \quad (p \leq n) \end{cases}$$

يتضح من هذا الشكل للبرنامج الخطي أنه الفرق الوحيد بينه وبين شكل البرنامج المدروس في الفصل الأول هو الشرط الأخير المتمثل في شرط أن تكون متغيرات القرار أعداد صحيحة .ويمكن التمييز بين حالتين لهذا النوع من البرامج، حالة $(p = n)$ في الشرط الأخير ويسمى النموذج عندئذ نموذج برمجة الأعداد الصحيحة، وحالة ما إذا كان $(p < n)$ يسمى نموذج برمجة أعداد صحيحة جزئي بحيث يشترط فيه أن تكون بعض المتغيرات فقط أعداد صحيحة والبعض الآخر يمكن أن يكون غير صحيح.

1-3- طرق حل نماذج برمجة الأعداد الصحيحة:

1-3-1- الحل البياني لمسألة برمجة الأعداد الصحيحة :

من أجل توضيح طريقة الحل البيانية لهذا النوع من النماذج سوف نستعين بالمثال التالي و هو نموذج برمجة أعداد صحيحة:

[1] البنداني محمد اسعد عبد الوهاب، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة، عمان، االردن، 1998. ص 252

1-3-2-1-1- **مثال تطبيقي 1 (دراسة حالة):**[2]

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 3X_1 + 4X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$$

والمطلوب :أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني

تعتد الطريقة البيانية لحل هذا النوع من البرامج على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية (أي دون الأخذ بعين الاعتبار الشرط الأخير في البرنامج أعلاه)، فإذا كانت قيم المتغيرات الأساسية للنموذج في الحل الأمثل أعداد صحيحة فهو أيضا حل أمثل لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة .بينما في حالة ما كان الحل المتوصل إليه يحتوي على أعداد غير صحيحة، فإنه يجب إدخال تقنيات جديدة لتحسين الحل والبحث عن الحل العددي الصحيح للبرنامج.

أولا تحديد الحل الأمثل للبرنامج دون الأخذ بعين الاعتبار شرط الأعداد الصحيحة:

في هذه المرحلة يتم إعداد التمثيل البياني لحل البرنامج كما يلي:

نستخرج المستقيمات و ذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، و يكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينهما كما يلي:

معادلة القيد الثاني	
X_1	X_2
0	10
4	0

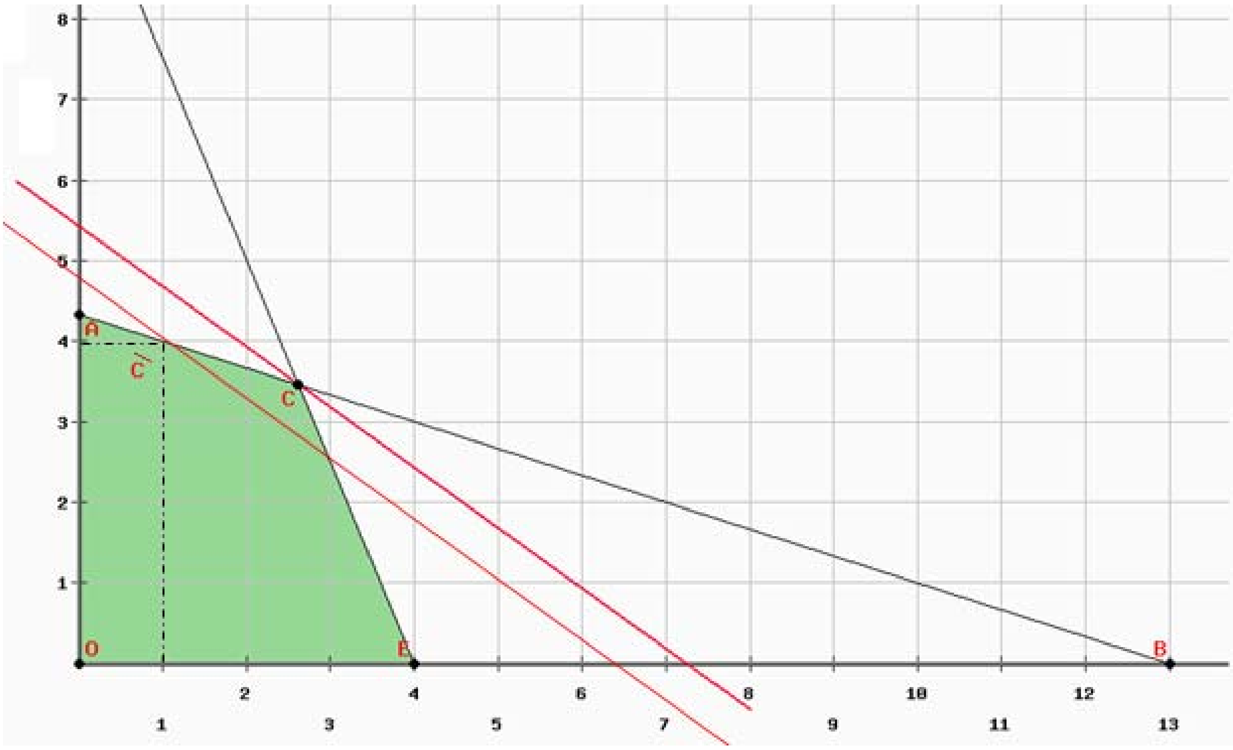
معادلة القيد الأول	
X_1	X_2
0	13/3
13	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) و هو المستقيم المحصل عليه عند و ضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها و هي$Z=0$ أي المستقيم (Δ) يمر من نقطتين كما يلي:

[2] بالتصرف

معادلة دالة الهدف	
X_1	X_2
1	$-3/4$
$-4/3$	1

الشكل (2-1)



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة (OACE) و هي مساحة الحلول الممكنة غير المشروطة بأن تكون أعداد صحيحة، ونقطة الحل الأمثل هي النقطة C وهي نقطة تقاطع مستقيمي قيود البرنامج الأول و الثاني والتي تقدر فيها القيم التالية :

الجدول (2-1)

Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	13 / 3	52 / 3
B	13	0	39
C	34 / 13	45 / 13	282 / 13
D	0	10	40
E	4	0	12

و قد يعتمد البعض إلى تقريب هذه القيم إلى عدد صحيح ليتحصل على حل أمثل ذو أعداد صحيحة مقبول و هو: $X_1=2$ و $X_2=3$ ولكن هذا ليس مجديا لأن هذا الحل ليس امثل و يوجد حل أحسن منه، ويتم تحديده من خلال عملية إزاحة مستقيم (خط) دالة الهدف (Δ) نحو الأسفل[3]، ويكون الحل الأمثل عند أول نقطة ذات إحداثيات صحيحة لـ X_1 و X_2، وفي هذه الحالة تكون عند النقطة $\hat{C}$ ذات الإحداثيات: $X_1=1$ و $X_2=4$ و يكون الحل الأمثل للبرنامج هو: $Z=19$ ، ونسمي عندئذ النقطة $\hat{C}$ بالحل الأمثل العددي الصحيح للبرنامج.

و باستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل الأمثل بعد ثلاث خطوات (إعداد ثلاث جداول)، والحل الأمثل للبرنامج يكون في الجدول الموالي:

كتابة جدول حل السمبلكس الثالث و الأخير:

الجدول (2-2)

المتغيرات القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i	النسبة *Ratio*
X_2	0	1	13/5	− 1/13	45/13	
X_1	1	0	−2/13	3/13	34/13	
Z	0	0	14/13	5/13	282/13	

في الحقيقة إن الحل بالطريقة البيانية لهذا النوع من النماذج يعتبر أفضل وأسهل الحلول، و لكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج متغيرين، تصبح غير قابلة للتطبيق و نضطر للجوء إلى طرق أخرى للحل وهي تتمثل في استعمال الطريقة الرياضية وفق قواعد السمبلكس بالاستعانة ببعض التقنيات والتي نتطرق إليها فيما يلي:

1-3-2- طريقة المستوى القاطع Cutting methods :

تعزى هذه الطرق إلى **غومري Gomery**، [4] تبدأ بحل امثل مستمر (يمكن أن تأخذ متغيراته أي قيمة عددية أو كسرية) ثم إضافة قيود ثانوية خاصة تمثل شروط ضرورية لتمامية المتغيرات (لإجبار الحل على إظهار قيم عددية صحيحة) فان فراغ الحل يعدل (بقطع أجزاء منه) وهذه الأجزاء المقتطعة نلاحظ أنها لا تتضمن نقاط أعداد صحيحة .

[3] إزاحة مستقيم دالة الهدف يكون هنا نحو الأسفل، للانتقال من الحل الأمثل المطلق إلى الحل الأمثل بالإعداد الصحيحة المحتوى في مجال الحلول الممكنة.

[4] J. Maublanc, A. Quilliot, « Recherche opérationnelle », RAIRO, Edition 4,1997. P 407.

1-3-2-1- الحل البياني بطريقة المستوى القاطع لمسألة برمجة أعداد صحيحة صرفة :

يقصد بالأعداد الصحيحة الصرفة (هو أن تكون مجموعة متغيرات الحل في الجدول النهائي جميعها عبارة عن أعداد صحيحة).

إن الفكرة الأساسية لخوارزمية قطع المستوى هي أن تعديل مضلع فراغ الحل "منطقة الحل الأمثل " بحيث تصبح إحداثيات النقطة المتطرفة المناسبة أعداد صحيحة دون أن نقطع أي شريحة من مضلع الحل المتضمن حلولا بأعداد صحيحة ممكنة.

عمليا ليس من السهل إنشاء المضلع الذي يحتوي على كل الحلول العددية الصحيحة في نماذج تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، فهذه الطريقة تعمل على إنشاء قيد جديد (أو مستوي قاطع) انطلاقا من الحل الأمثل الأساسي (الذي لا يحتوي على أعداد صحيحة)، وهكذا نكرر العملية إلى حين الحصول في الحل الأمثل على كل القيم العددية الصحيحة التي نحتاجها، وهذا يعني أننا بحاجة إلى عدة مستويات قاطعة تتمتع بالخصائص التالية[5]:

- تخفض عدد الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.
- مستقيمات القيود الإضافية تمر عبر حلول عددية صحيحة ممكنة.
- منطقة الحلول الممكنة تشمل جميع الحلول العددية الصحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.
- بعد عدة مراحل متدرجة من تطبيق المستويات القاطعة نحصل في الأخير على نموذج يحتوي على حل أمثل عددي صحيح.

إذن بقي لنا الآن معرفة كيفية التوصل إلى العبارة الرياضية للقيود الإضافية، و للقيام بذلك سوف نستعين بالمثال التطبيقي التالي:

1-3-2-1-1- **مثال تطبيقي 2 (دراسة حالة):[6]**

ليكن النموذج الرياضي التالي:

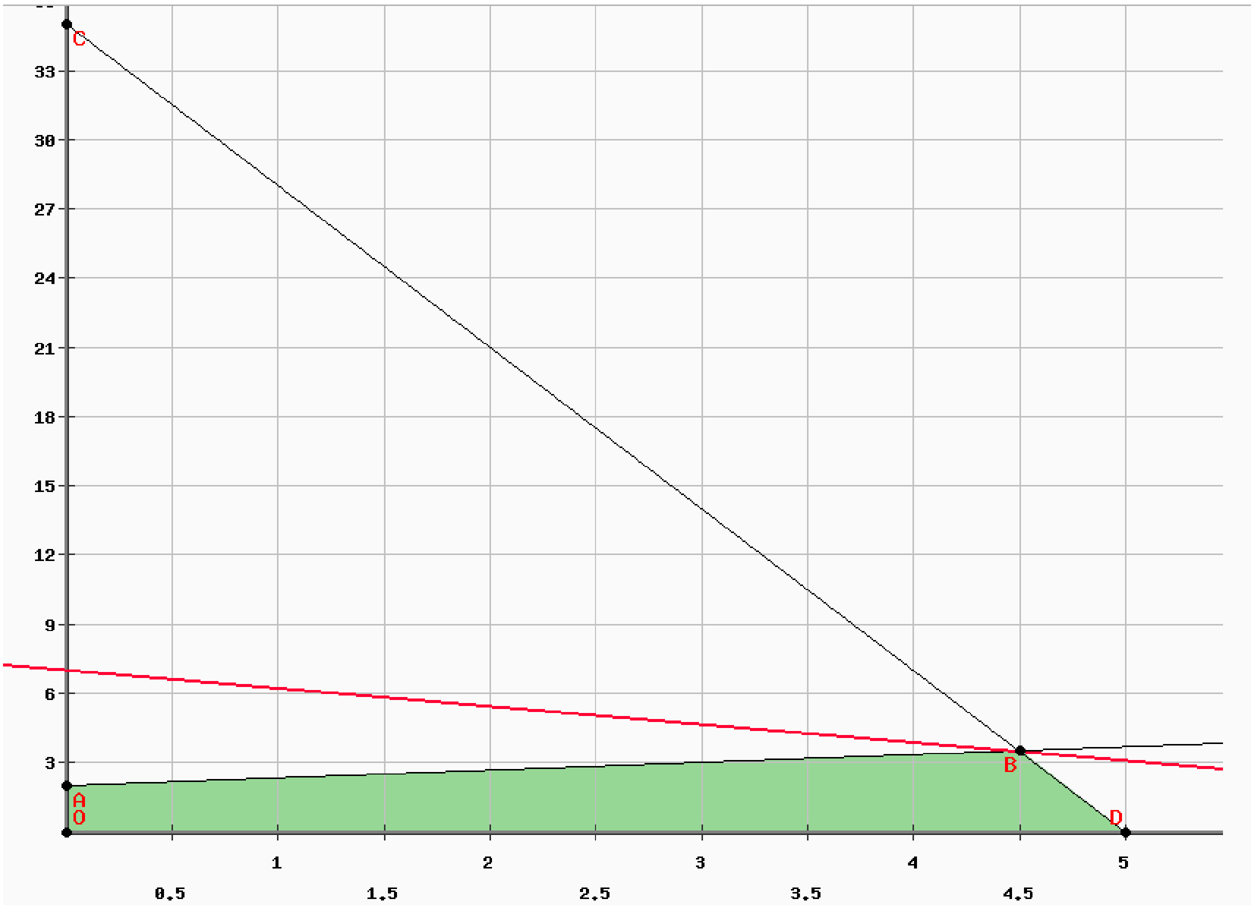
$$\boldsymbol{Max}\; Z = 7X_1 + 9X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} -1X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 7X_1 + 1X_2 \leq 35 \\ X_1 \geq 0;\; X_2 \geq 0 \\ X_1;\; X_2 \text{ Entier} \end{cases}$$

إن الحل المستمر الأمثل لهذا النموذج (مع إهمال شرط الأعداد الصحيحة) يمكن تحديده بيانياً بما يلي:

[5] Jean Pierre Védrine , Techniques Quantitatives De Gestion , Librairie Vuibert , 1985, p 123.

[6] بالتصرف

الشكل (2-2)



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة (OABD) و هي مساحة الحلول الممكنة غير المشروطة بأن تكون أعداد صحيحة، ونقطة الحل الأمثل هي النقطة B وهي نقطة تقاطع مستقيمي قيود البرنامج الأول و الثاني والتي تقدر فيها القيم التالية:

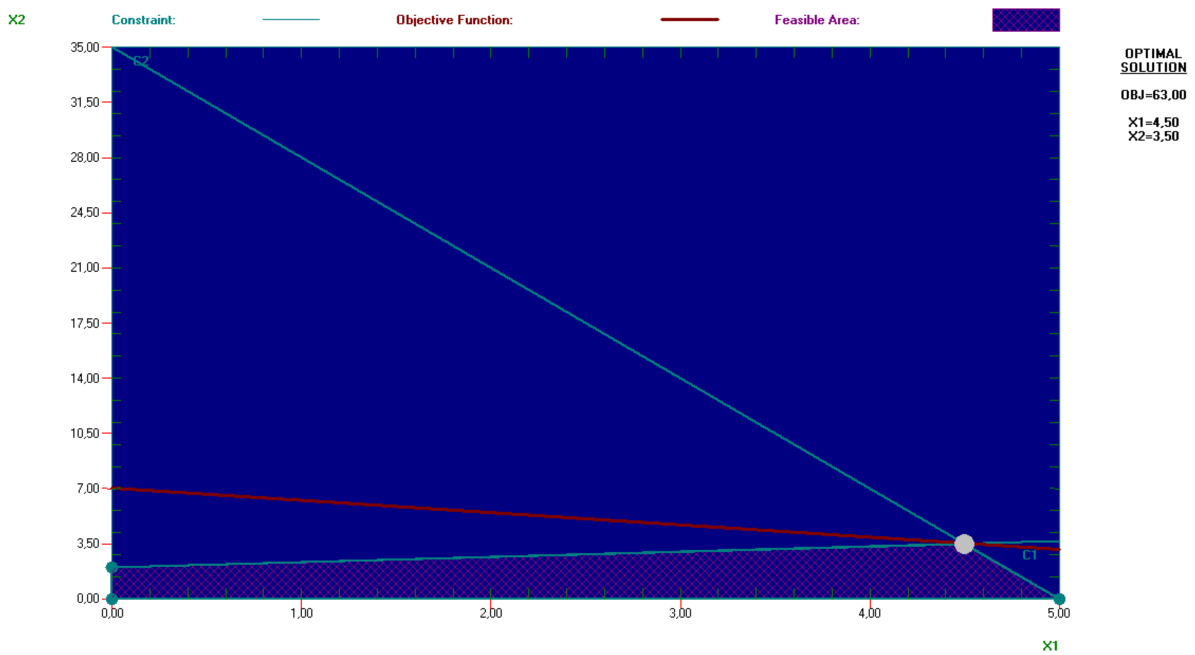
الجدول (2-3)

Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	2	18
B	4.5	3.5	63
C	0	35	315
D	5	0	35

أي أن: X_1=4,5 و X_2=3,5

وهو ما يمكن التحصل عليه من خلال برنامج WinQSB كالتالي:

الشكل (2−3)



ونلاحظ أن النقطة B تتضمن أرقام كسرية أو غير عددية ونلاحظ أن (أقرب) قيمة عددية صحيحة تقترب إلى نقطة الحل الأمثل وتقع ضمن منطقة الحل هي النقطة التي إحداثياتها (3،4).

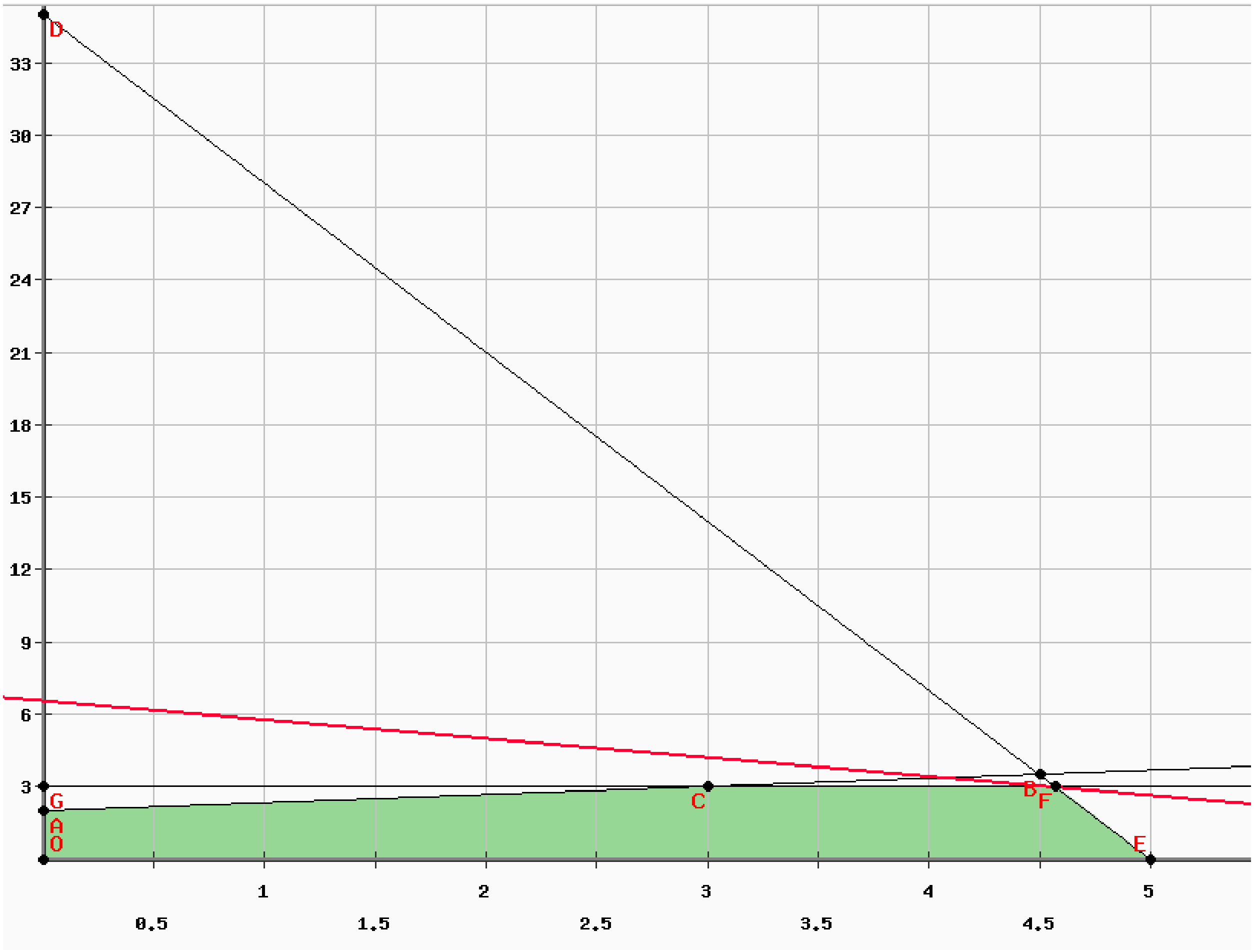
وحتى يمكن التخلص من الأعداد الكسرية والحصول على حل أمثل يتضمن أعداد صحيحة نقوم باقتطاع جزء من منطقة الحلول وهو الجزء الذي لا يحتوي على حلول أعداد صحيحة ممكنة.

نقوم بإضافة قيد اقتطاع بحيث يكون فيه $X_2 = 3$ وليكن:

$$3X_2 \leq 9$$

ونقوم بحل النموذج فيصبح الشكل:

الشكل (2-4)



نلاحظ من الشكل أن القيمة F هي نقطة الحل الأمثل (3 ،F(4,57 و هي لا تزال تحتوي على قيمة كسرية.

الجدول (2-4)

Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	2	18
B	9 / 2	7 / 2	63
C	3	3	48
D	0	35	315
E	5	0	35
F	32 / 7	3	59
G	0	3	27

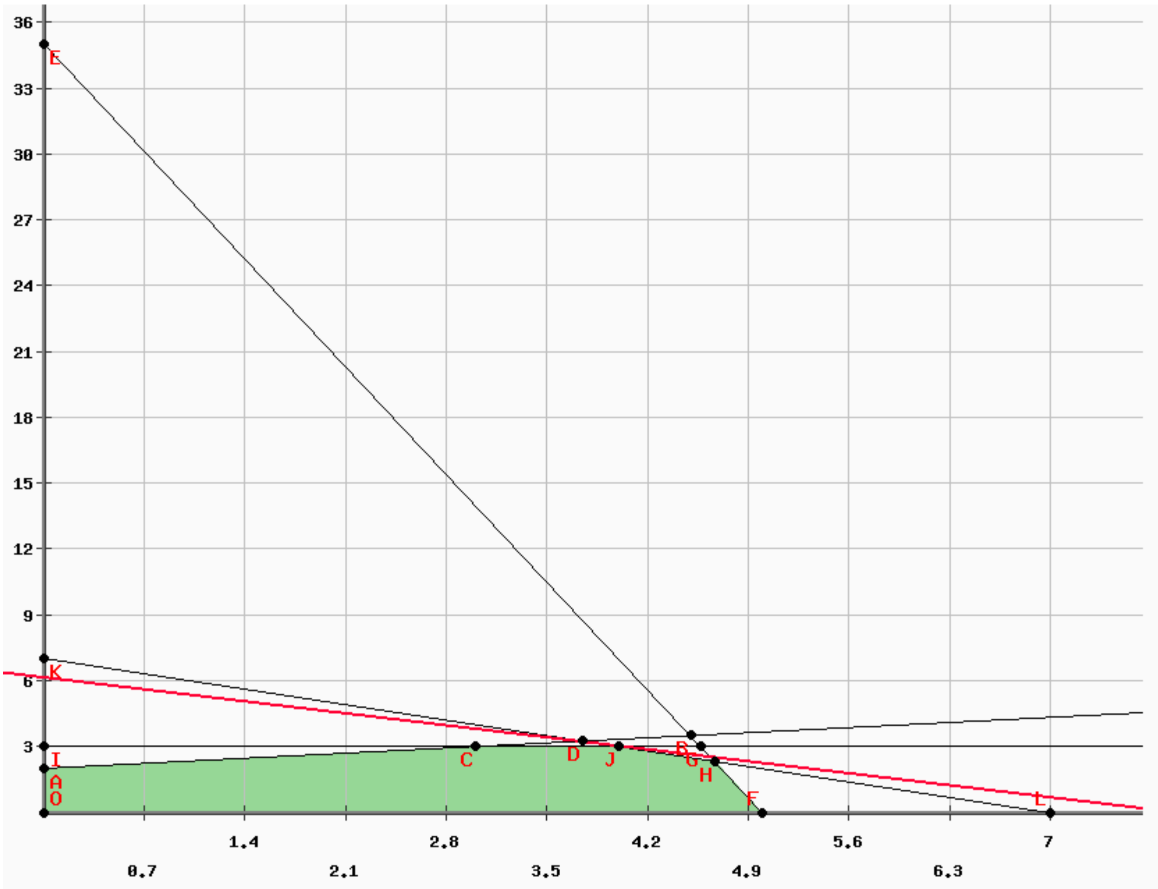
و للتخلص من هذه القيمة الكسرية نقوم بإدخال قيد اقتطاع ثاني وهو:

$$X_1 + X_2 \leq 7$$

ملاحظة: يوضع قيد الاقتطاع في هذه الحالة بحيث يتناسب من أقرب قيمة صحيحة أو اقرب نقطة حل ممكن إلى نقطة الحل الأمثل وهي في هذه الحالة (4،3).

بعد إضافة قيد الاقتطاع الثاني يصبح الشكل كما يلي:

الشكل (2−5)



نلاحظ من الشكل أن النقطة J تمثل نقطة الحل الأمثل والتي إحداثياتها J(4,3) وهي عبارة عن إحداثيات بأعداد صحيحة.

الجدول (2-5)

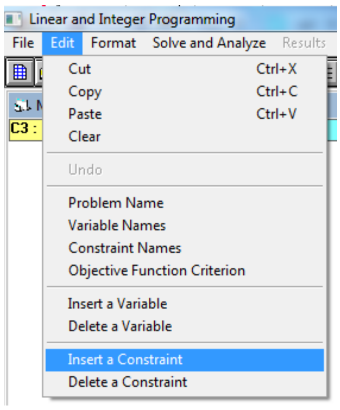
Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	2	18
B	9 / 2	7 / 2	63
C	3	3	48
D	15 / 4	13 / 4	111 / 2
E	0	35	315
F	5	0	35
G	32 / 7	3	59
H	14 / 3	7 / 3	161 / 3
I	0	3	27
J	4	3	55
K	0	7	63
L	7	0	49

و أخيراً فإن حل مسألة برمجة الأعداد الصحيحة الأمثل هو: $X_1=4$ و $X_2=3$

$$Z = 7\ (4) + 9\ (3) = 55$$

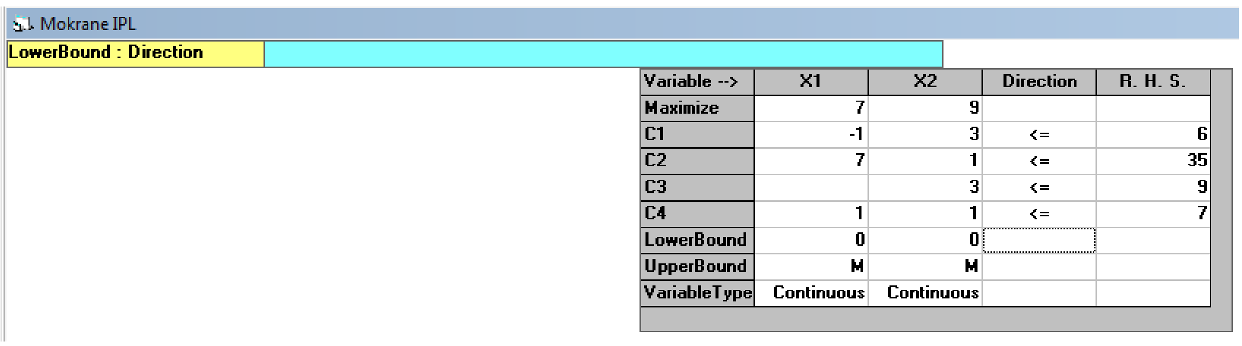
بالنسبة للحل على برنامج WinQSB فانه يمكن إضافة قيود الاقتطاع عن طرق الأمر Insert a constraint من القائمة Edit كما هو موضح في الشكل أسفله:

الشكل (2-6)



فيصبح البرنامج النهائي المتوصل له و الذي يعطينا حل امثل بأعداد صحيحة كالتالي:

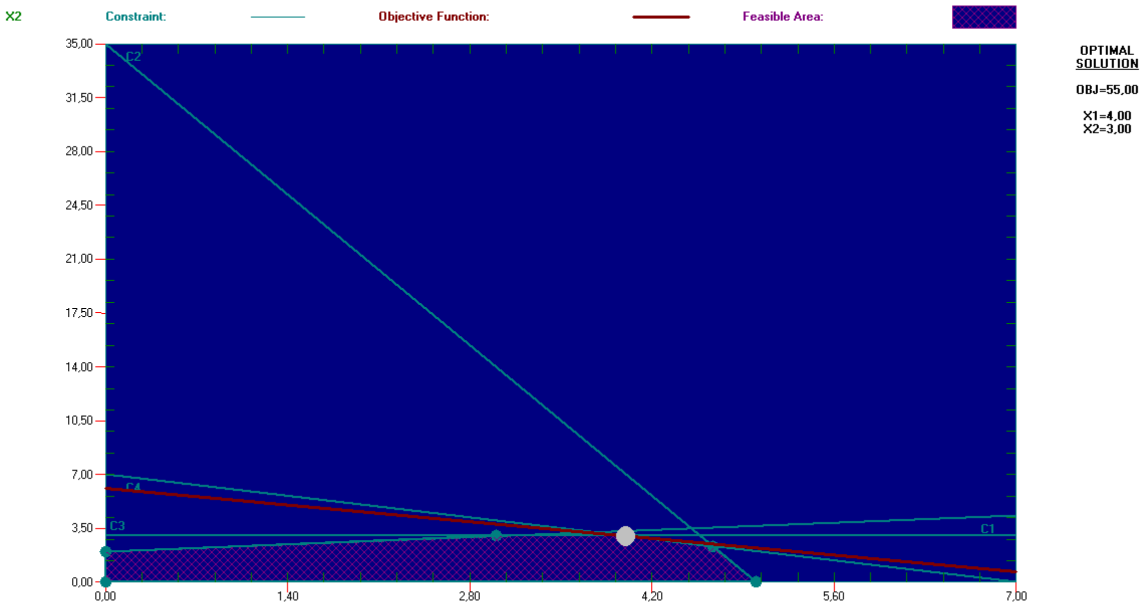
الشكل (2-7)



Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	7	9		
C1	-1	3	<=	6
C2	7	1	<=	35
C3		3	<=	9
C4	1	1	<=	7
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

و يمكن عرض الحل باستعمال برنامج WinQSB من خلال الشكل التالي:

الشكل (2−8)



وهو ما يتوافق مع الحل المتوصل إليه سابقا.

1−3−2−2− خوارزمية طريقة المستوى القاطع للأعداد الصحيحة الصرفة:

لتطبيق هذه الخوارزمية فإن جميع المعاملات لكل قيد في المسألة يجب أن تكون أعداد صحيحة فعلى سبيل المثال يجب تحويل القيد التالي:

$$X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq \frac{11}{3}$$

فيصبح:

$$6X_1 + 3X_2 \leq 22$$

حيث يجب أن تحتفي جميع الكسور من القيد وذلك بضرب طرفي القيد الأصلي (بالمضاعف المشترك الأصغر لجميع المقامات).

ويعتبر هذا الإجراء ضرورياً وأساسياً لأن خوارزمية الأعداد الصحيحة الصرفة. لا تفرق بين المتغيرات الأصلية والمساعدة للمسألة بحيث أن جميع المتغيرات يجب أن تكون أعداد صحيحة.

وهكذا فإن وجود المعاملات الكسرية في القيود ربما يؤدي إلى متغيرات فروق ذات قيم غير صحيحة وفي هذه الحالة فإن الخوارزمية الكسرية (التي تقبل بوجود الكسور) ربما تشير إلى عدم وجود حل ممكن، حتى وإن كان للمسألة حل بأعداد صحيحة ممكن بدلالة المتغيران.

1-3-2-2-1- خطوات خوارزمية طريقة المستوى القاطع للأعداد الصحيحة الصرفة:

- تحل المسألة أولاً كمسألة برمجة خطية دون الاهتمام بقيد الأعداد الصحيحة.

أ- إذا كان الحل الأمثل هو أعداد صحيحة يتحقق شرط الأعداد الصحيحة في هذه الحالة (لا داعي لاتخاذ أية خطوة أخرى).

ب- أما إذا ظهر حل أمثل يتضمن أعداد غير صحيحة يتم تكوين القيود الثانوية التي ستجبر للاتجاه نحو العددية.

نفترض أن الجدول الآتي يمثل الجدول الأمثل النهائي للبرمجة الخطية:

الجدول (2-6)

VB متغيرات الحل	X_1	X_2	……	X_m	W_1	W_2	……	W_n	**كميات الحل**
X_1	1	0	0	0	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	B_1
X_2	0	1	0	0	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	B_2
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
X_m	0	0	0	1	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	B_m
$\mathbf{Z_j}$	0	0	0	0	C_1^*	C_2^*	……	C_n^*	$\mathbf{Z^*}$

حيث:

X_i: تمثل المتغيرات الأساسية $(i = 1,2,\ldots,m)$

W_j: تمثل المتغيرات غير الأساسية $(j = 1,2,\ldots,n)$

نفترض المعادلة i حيث يظهر متغيرها الأساسي X_i بقيمة عددية غير صحيحة في جدول الحل النهائي فتكون:

$$X_i = B_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ w_j$$

حيث:

$\mathbf{B_i}$: قيمة عددية غير صحيحة وتمثل قيم X_i في عمود كميات الحل في الجدول النهائي، وتسمى هذه المعادلة باسم (سطر المنبع أو المصدر).

ليكن لدينا ما يلي:

$$B_i = [B_i] + f_i ……(1)$$

B_i: هو قيمة X_i في عمود الثوابت أو عمود كميات الحل في جدول الحل النهائي.

$[B_i]$: هو أكبر عدد صحيح قريب من القيمة العددية غير الصحيحة بحيث يكون $[B_i] < B_i$.

f_i : هي الفرق الموجب بين B_i و $[B_i]$ بحيث تكون قيمة f_i: $0 < f_i < 1$

و بالمثل:

$$a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij} …… (2)$$

حيث:

a_{ij}: قيمة المتغير X_i في عمود المتغيرات غير الأساسية W_J في الجدول النهائي.

$[a_{ij}]$:هي أكبر عدد صحيح قريب من القيمة العددية غير الصحيحة ويحقق العلاقة $[a_{ij}] < a_{ij}$.

f_{ij}: هو الفرق غير السالب بين a_{ij} و $[a_{ij}]$ بحيث تكون قيمة f_{ij} : $0 < f_{ij} < 1$

فعلى سبيل المثال:

a_{ij}	$[a_{ij}]$	$f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$
3/2=1,5	1	½=0,5
−5/2=−2,5	−3	−1/2
1/3=0,33	0	1/3
2	2	0

وبتعويض قيمة B_i من المعادلة رقم (1)

و تعويض قيمة a_{ij} من المعادلة رقم (2)

في سطر المنبع أو المصدر تصبح معادلة الصف أو سطر المنبع كالتالي:[7]

$$X_i = B_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, w_j$$

[7] Gomory (R.E.), « On the relation between Integer and non integer solution to linear programs », proceeding of the national academy of sciences, vol 53,1965. P260-265.

$$X_i = [B_i] + f_i - \left[\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}] + f_{ij}\right] w_j$$

$$X_i - [B_i] + \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}] = f_i - \left[\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\right] w_j$$

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j = X_i - [B_i] + \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}] W_J$$

ولكي تكون كل من المتغيرات X_i، W_J أعداد صحيحة يجب أن يكون الطرف الأيمن عددي صحيح مما يعني ضرورة أن يكون الجانب الأيسر عددي صحيح أيضاً.

وبافتراض $f_{ij} \geq 0$ و $w_j \geq 0$ لكل من i، j فإن:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_J \geq 0$$

يترتب على ذلك أنه:

بضرب المتراجحة بـ (-1) ثم إضافة f_i

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_J \leq f_i$$

مما يعني أن:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_J < 1$$

وحيث أنه يجب أن يكون الجانب الأيسر عددي صحيح لذلك يصبح الشرط الضروري اللازم لاستيفاء شرط العددية:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_J \leq 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالقطع الجزئي.

1-3-2-2-2- **مثال تطبيقي 3 (دراسة حالة):**[8]

نفترض أن المثال السابق الذي تم حله بيانياً ظهر حله الأمثل (جدول الحل النهائي) كالآتي:

الجدول (2-6)

المتغيرات الحل القاعدية VB	X_1	X_2	S_1 (W_1)	S_2 (W_2)	**كميات الحل** B_i	f_i
X_2	0	1	7/22	1/22	7/2=3,5	½=0,5
X_1	1	0	−1/22	3/22	9/2=4,5	½=0,5
Z	0	0	28/11	15/11	63	

حيث أن الحل يتضمن حلول غير عددية (X_1= 9/2 , X_2= 7/2)

إذاً يجب إضافة قيد اقتطاع كسري ويمكن اختيار أي معادلة قيد خاصة بالحل غير العددي وقد جرت العادة على اختيار المعادلة الخاصة بأكبر كسر f_i ،ولكن نلاحظ أن $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}$ ولذلك يمكن اختيار أي قيمة منهما ولتكن الخاصة بالمتغير X_2: سطر المنبع أو المصدر يكون على الشكل الآتي:

$$X_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ w_j = B_i$$

أي:

$$X_2 + \frac{7}{22} W_1 + \frac{1}{22} W_2 = 7/2$$

لدينا: بالنسبة لقيمة المتغير X_2 في عمود المتغيرات غير الأساسية W_J في الجدول النهائي

W_J	a_{ij}	$[a_{ij}]$	$f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$
S_1 (W_1)	7/22=0,318	0	7/22
S_2 (W_2)	1/22=0,45	0	1/22

وعليه تكون **معادلة القيد المضاف أو** قيد الاقتطاع الكسري الذي يخص X_2:

[8] بالتصرف

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \; W_J \le 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22} W_1 - \frac{1}{22} W_2 \le 0$$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع وقبل إدخالها كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج، لدينا من النموذج الأساسي:

$$-1X_1 + 3X_2 + S_1 = 6 \;\Rightarrow\; S_1 = 6+1X_1 - 3X_2 = W_1$$
$$7X_1 + 1X_2 + S_2 = 35 \;\Rightarrow\; S_2 = 35 - 7X_1 - 1X_2 = W_2$$

وبتعويض قيمة S_1 (W_1)، S_2 (W_2) من المتراجحات الأساسية بدلالة X_2 و X_1 يصبح القيد على الشكل:

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22} \left(6 + X_1 - 3X_2\right) - \frac{1}{22} \left(35 - 7X_1 - X_2\right) \le 0$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{42}{22} + \frac{7}{22} X_1 - \frac{21}{22} X_2\right) - \left(\frac{35}{22} - \frac{7}{22} X_1 - \frac{1}{22} X_2\right) \le 0$$

$$\frac{11}{22} - \left(\frac{77}{22} + 0X_1 - \frac{22}{22} X_2\right) \le 0$$

$$-\frac{66}{22} + X_2 \le 0$$

وبالاختصار يصبح :

$$X_2 \le 3$$

وهو قيد الاقتطاع الأول ويصبح بذلك البرنامج بعد إضافة هذا القيد كالتالي:

$$\boldsymbol{Max}\, Z = 7X_1 + 9X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} -1X_1 + 3X_2 \le 6 \\ 7X_1 + 1X_2 \le 35 \\ X_2 \le 3 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$$

نلاحظ في الشكل 2-2 كيف أن هذا القيد الجديد استطاع أن يخفض منطقة الحلول الممكنة و ذلك بحذف جزء معتبر من مجال الحلول ذات الأعداد الغير صحيحة.

الآن نقوم بحل النموذج الجديد المتحصل عليه (أعلاه) مع القيد الإضافي (بطريقة السمبلكس) فنحصل على الجدول الموالي:

الجدول (2−7)

المتغيرات الحل القاعدية VB	X_1	X_2	S_1 (W_1)	S_2 (W_2)	S_3 (W_3)	B_i **كميات الحل**	f_i
X_2	0	1	0	0	1	3	0
X_1	1	0	0	1/7	−1/7	32/7=4,571	4/7=0,571
S_3	0	0	1	1/7	−22/7	11/7=1,571	4/7=0,571
Z	0	0	0	1	8	59	

نلاحظ أن الحل لا يزال غير عددي حيث قيمة X_1 هي: 32/7=4,571 ،لذلك فيجب تكوين قيد اقتطاع جديد.

نختار المتغير X_1 الذي يمكن كتابة سطر المنبع له على الشكل التالي:

$$X_1 + 0\,W_1 + \frac{1}{7}W_2 - \frac{1}{7}W_3 = 7/2$$

أي:

$$X_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right)W_2 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right)$$

لدينا: بالنسبة لقيمة المتغير X_1 في عمود المتغيرات غير الأساسية W_J في الجدول الحل النهائي (الأمثل بعد إضافة القيد الثالث):

W_J	**a_{ij}**	**$[a_{ij}]$**	**$f_{ij}= a_{ij} - [a_{ij}]$**
$S_1(W_1)$	0	0	0
$S_2(W_2)$	1/7=0,142	0	1/7
W_3	−1/7=−0,142	−1	6/7

وعليه تكون **معادلة القيد المضاف أو** قيد الاقتطاع الكسري الذي يخص X_1:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \, W_J \leq 0$$

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7} W_2 - \frac{6}{7} W_3 \leq 0$$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا ثاني مستوي قاطع وقبل إدخاله كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج، لدينا من النموذج الأساسي:

وبتعويض قيمة S_2 (W_2)، S_3 (W_3) من المتراجحات الأساسية بدلالة X_2 و X_1 نحصل على القيد الجديد التالي:

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7}(35 - 7X_1 - 1X_2) - \frac{6}{7}(3 - X_2) \leq 0$$

$$\frac{4}{7} - \left(\frac{35}{7} - X_1 - \frac{1}{7}X_2\right) - \left(\frac{18}{7} - \frac{6}{7}X_2\right) \leq 0$$

$$-\frac{49}{7} + (X_1 + X_2) \leq 0$$

وبالاختصار يصبح القيد المضاف الثاني كالتالي:

$$X_1 + X_2 \leq 7$$

وهو قيد الاقتطاع الثاني ويصبح بذلك البرنامج بعد إضافة هذا القيد كالتالي:

$$\boldsymbol{Max}\, Z = 7X_1 + 9X_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} -1X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 7X_1 + 1X_2 \leq 35 \\ X_2 \leq 3 \\ X_1 + X_2 \leq 7 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$$

وبحل البرنامج بطريقة السمبلكس، نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

الجدول (2−8)

المتغيرات الحل القاعدية VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	B_i **كميات الحل**	f_i
X_2	0	1	0	0	1	0	3	0
X_1	1	0	0	0	1 −	1	4	0
S_1	0	0	1	0	−4	1	1	0
S_2	0	0	0	1	6	−7	4	0
Z	0	0	0	0	2	7	55	

والذي يعطي الحل النهائي العددي الأمثل وهو:

$Z = 55$ ،$X_2 = 3$ ، $X_1 = 4$

ويمكن التأكد بيانياً من أن إضافة قيود الاقتطاع (القيدين الثانويين) قد استقطعت من حيز الحل بحيث يتحقق الهدف المرغوب كما رأينا سابقا.

1−3−2−2−3− **قوة قيد الاقتطاع الكسري:**

نقول أن القيد (a) هو أقوى من القيد (b) إذا تحقق الشرطان التاليان:

الشرط الأول: $f_i \geq f_k$

الشرط الثاني: $f_{ij} \leq f_{kj}$ لجميع قيم j.

ونحدد قوة القطع عند اختيار سطر المصدر في جدول السمبلكس ولذلك ينصح بتطبيق إحدى القاعدتين التاليتين:

قاعدة (1): اختيار سطر المصدر الذي يحقق $Max_i \{f_i\}$

قاعدة (2): اختيار سطر المصدر الذي يحقق $Max_i \{f_i / \sum_{j=i}^{n} f_{ij}\}$

1-3-2-2-4- **مثال تطبيقي 4 (دراسة حالة):**[9]

بالرجوع إلى الحل المستمر الأمثل للمثال السابق $Z = 63$، $X_1 = 9/2$، $X_2 = 7/2$

الجدول (2−9)

المتغيرات الحل *القاعدية* VB	X_1	X_2	S_1 (W_1)	S_2 (W_2)	**كميات الحل** B_i	f_i
X_2	0	1	7/22	1/22	7/2=3,5	½=0,5
X_1	1	0	−1/22	3/22	9/2=4,5	½=0,5
Z	0	0	28/11	15/11	63	

نجد أن $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}$ فلن نستطيع تحديد أيهما الأفضل (الأقوى) ولذلك نطبق القاعدة الثانية:

بالنسبة لسطر المصدر لـ X_1 لدينا:

W_J	a_{ij}	$[a_{ij}]$	$f_{ij}= a_{ij} - [a_{ij}]$
S_1 (W_1)	−1/22=−0,045	−1	21/22
S_2 (W_2)	3/22=0,136	0	3/22
Σ			24/22

أي أن: $\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}} = \frac{1/2}{24/22} = \frac{11}{24} = 0,45$

بالنسبة لسطر المصدر لـ X_2 لدينا:

W_J	a_{ij}	$[a_{ij}]$	$f_{ij}= a_{ij} - [a_{ij}]$
S_1 (W_1)	7/22=0,318	0	7/22
S_2 (W_2)	1/22=0,45	0	1/22
Σ	−	−	8/22

[9] بالتصرف

أي أن: $\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}} = \frac{1/2}{8/22} = \frac{11}{8} = 1,37$

وحيث أن: $1,37 > 0,45$

فإننا نختار المعادلة X_2 لتكون هي الصف الأصلي (سطر المصدر أو المنبع).

1-3-2-3- **خوارزمية طريقة المستوى القاطع للأعداد الصحيحة المختلطة:**

في هذه المسائل يشترط على بعض المتغيرات الأصلية (وليست جميعها) أن تكون أعداداً صحيحة والبعض الآخر لا يتطلب تحقيق هذا الشرط كما في مسائل برمجة الأعداد الصحيحة الصرفة التي يجب أن تكون جميع المتغيرات الأصلية أعداد صحيحة.

ليكن السطر الذي يمكن اعتباره كسطر مصدر هو المعادلة X_K التي تأخذ الصيغة التالية:

$$X_K = B_K - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} W_J = [B_K] + f_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} W_J$$

أو:

$$X_K - [B_K] = f_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} W_J$$

ويلاحظ أن القطع الجزئي السابق لا يمكن تطبيقه في هذه الحالة لأن بعض قيم X_i و X_K يمكن أن تكون أعداد كسرية.

ولكي تكون X_k عدداً صحيحاً فإن الطرف الأيسر من المعادلة يجب أن يكون صحيحاً (موجب أو سالب أو صفر).

1- الطرف الأيسر يكون صفراً أو سالباً إذا تحقق الشرط $X_k \leq [B_k]$

2- الطرف الأيسر يكون صفراً او موجباً إذا تحقق الشرط $X_k \geq [B_k]+1$

ويلاحظ أن تحقق الشرط الأول $X_k \leq [B_k]$ يتطلب أن يحقق الطرف الأيمن من المعادلة الشرط التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} W_J \geq f_k$$

كما ويتحقق الشرط الثاني $X_k \geq [\,B_k\,]+1$ إذا حقق الطرف الأيمن الشرط التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ W_J \ \geq 1 - \ f_k$$

أي أن الشرطان لا يمكن أن يتحققان معاً في آن واحد.

من جهة أخرى إذا رمزنا لـ:

J^+: مجموعة الأدلة **j** التي من أجلها تكون $a_{kj} \ \geq \ 0$

J^-: مجموعة الأدلة **j** التي من أجلها تكون $a_{kj} \ < \ 0$

فإننا نلاحظ أن المجموعة:

1− J^+ تحقق الشرط: $\sum_{j^+} a_{kj}\ W_J \ \geq \ f_k$

2− J^- تحقق الشرط: $\sum_{j_-} a_{kj}\ W_J \ \geq 1 - \ f_k$

والتي يمكن تعديلها بقسمة الطرفين على $(1-f_k)$ فتصبح:[10]

$$\frac{1}{1 - \ f_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ W_J \ \geq 1$$

ثم نضرب الطرفين بـ f_k فتصبح:

$$\frac{f_k}{1 - \ f_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ W_J \ \geq \ f_k$$

وبما أن هذين الشرطين لا يمكن أن يتحققا في آن واحد فيمكن أن نجمعهما:

لدينا:

[10] المقدار $(1-f_k)$ هو قيمة موجبة

$$f_k - \sum_{j^+} a_{kj} \; W_J \; \leq 0$$

و:

$$f_k - \frac{f_k}{1 - f_k} \sum_{j_-} a_{kj} \; W_J \; \leq 0$$

ومنه:

$$f_k - \left[\sum_{j+} a_{kj} \; W_J + \frac{f_k}{1 - f_k} \sum_{j-} a_{kj} \; W_J \right] \leq 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالاقتطاع المختلط.

1-3-2-3-1- **مثال تطبيقي 5 (دراسة حالة):**[11]

بالرجوع إلى المثال السابق نفترض بأن X_1 هو المتغير الوحيد الذي يجب أن يأخذ قيمة عددية صحيحة.

الجدول (2-10)

المتغيرات الحل القاعدية VB	X_1	X_2	S_1 (W_1)	S_2 (W_2)	**كميات الحل** B_i	f_i
X_2	0	1	7/22	1/22	7/2=3,5	½=0,5
X_1	1	0	−1/22	3/22	9/2=4,5	½=0,5
Z	0	0	28/11	15/11	63	

نأخذ في هذه الحالة المتغير X_1 الذي يمكن كتابة سطر المنبع له على الشكل التالي:

$$X_1 - \frac{1}{22} W_1 + \frac{3}{22} W_2 = \left(4 + \frac{1}{2} \right)$$

[11] بالتصرف

وبالتالي سيكون قيد الاقتطاع المختلط:

$$f_1 - \left[\frac{3}{22} W_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(- \frac{1}{22} \right) W_1 \right] \leq 0$$

وتصبح:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{22} W_1 - \frac{3}{22} W_2 \leq 0$$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع لقيد الاقتطاع المختلط وقبل إدخالها كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج، لدينا من النموذج الأساسي:

وبتعويض قيمة S_1 (W_1)، S_2 (W_2) من المتراجحات الأساسية بدلالة X_2 و X_1 يصبح القيد على الشكل:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{22} (6 + X_1 - 3X_2) - \frac{3}{22} (35 - 7X_1 - X_2) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{6}{22} + \frac{1}{22} X_1 - \frac{3}{22} X_2 - \frac{105}{22} + \frac{21}{22} X_1 + \frac{3}{22} X_2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{99}{22} + 1X_1 - 0X_2 \leq 0$$

$$-\frac{88}{22} + 1X_1 \leq 0$$

وبالاختصار يصبح : $X_1 \leq 4$

وهو قيد الاقتطاع المختلط ويصبح بذلك البرنامج بعد إضافة هذا القيد كالتالي:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 7X_1 + 9X_2$$

$$\boldsymbol{S/C} \begin{cases} -1X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 7X_1 + 1X_2 \leq 35 \\ X_1 \leq 4 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$$

الآن نقوم بحل النموذج الجديد المتحصل عليه (أعلاه) مع القيد الإضافي (بطريقة السمبلكس) فنحصل على الجدول الموالي:

الجدول (2−11)

المتغيرات الحل القاعدية VB	X_1	X_2	S_1 (W_1)	S_2 (W_2)	S_3 (W_3)	B_i **كميات الحل**	f_i
X_2	0	1	10/33	0	−1/3	10/3	4/7=0,571
X_1	1	0	−1/11	0	1	4	0
S_3	0	0	1/3	1	−22/3	11/3	4/7=0,571
Z	0	0	23/11	0	10	59	

إذا فالحل النهائي الأمثل لخوارزمية الأعداد الصحيحة المختلطة هو: $X_1 = 4$ ، $X_2 = 10/3$، $Z = 58$

1−3−3− طرق البحث والاستقصاء:[12]

1−3−3−1− طريقة التفريع والتحديد:

استعملت هذه الطريقة لأول مرة في سنة 1960 من طرف الباحثين (A. Land و G. Doing) لحل البرامج الخطية بشرط الأعداد الصحيحة، وبعدها استعملت من طرف (E. Balas) في سنة 1965 بتطويره للخوارزمية التجميعية لحل البرامج الخطية بالمتغيرات الثنائية (Binaire)،[13] وتعتمد هذه الطريقة مثل الطريقة السابقة في البحث عن حل أمثل عددي صحيح انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الموافق (أي دون شرط العدد الصحيح)، فإذا كانت قيم المتغيرات عند هذا الحل أعداد صحيحة فهو نفسه الحل الأمثل الذي نبحث عنه، و في حالة العكس نقوم بالخطوات التالية:[14]

أ− التفريع:

في هذه المرحلة نحل المسألة على أنها مشكلة مستمرة (أي مع تجاهل قيود العددية) ونوجد الحل الأمثل لهذه المسألة.

وفي حال كانت جميع المتغيرات في جدول الحل النهائي عددية نعتبر هذا الحل هو الحل الأمثل (كما ذكرنا سابقا)، أما في حال ظهور متغيرات عددية نقوم بتجزئة أو تقسيم المشكلة الأصلية إلى مشكلتين فرعيتين مع إضافة قيود جديدة مشتقة من أصل النموذج الرياضي وذلك بفرض أن هذا المتغير يقع ضمن حدين أدنى وأعلى هما:

[12] وتسمى كذلك طريقة الفصل و إعادة التقييم

[13] Hamdy A. Taha, « Operation Research An Introduction », Pearson Education, Inc, 8th edition 2007. p 370.

[14] Hamdy A. Taha, op cit. p 376.

$U_j \leq X_j^* \leq L_J$ حيث n ...... $j = 1,$

حيث أن:

X_j^* : هو المتغير غير العددي الأمثل.

U_j : هو العدد الصحيح الذي يكون أكبر مباشرة من X_j^*

L_J : هو العدد الصحيح الأصغر مباشرة من X_j^*

مثلاً نقول أن: [15]

$$3 < X_1=3,4 < 4$$

وبناءً على هذا فإن أي حل عددي ممكن، يجب أن تستوفي القيمة العددية الممكنة للمتغير X_j ، أحد الشرطين التاليين:

$$X_j^* \geq U_j \text{ ....(1)} \quad \text{حيث } j = 1,2 \text{ .... },n$$

$$X_j^* \leq L_j \text{ ....(2)} \quad \text{حيث } j = 1,2 \text{ .... },n$$

ثم يتم حل كل مشكلة فرعية على أنها برمجة خطية عادية وذلك بتجزئة المشكلة الأصلية إلى مشكلتين في كل مشكلة يتم إضافة أحد القيدين (1)، (2) ويتم حل كلتا المشكلتين كل على حدا.

فإذا كان الحل الأمثل لإحدى المشكلتين ممكناً عددياً يتم الاحتفاظ به على أنه أفضل حل ممكن وينتهي تفريغ هذه المشكلة عند هذا الحد.

أما إذا كان الحل الأمثل للمشكلة الفرعية غير عددي، فيتم تفريغ هذه المشكلة الفرعية إلى مشكلتين فرعيتين وتستمر عمليات التفريغ كلما كان ذلك ممكناً إلى أن تنتهي كل مشكلة فرعية إما بحل عددي أو تصبح غير ممكنة.

ب- التحديد:

يشير هذا المفهوم إلى أنه إذا أعطى الحل الأمثل لمشكلة فرعية قيمة هدف أسوأ من أفضل حل عددي ممكن وصلنا إليه فلا داعي للاستمرار في هذه المشكلة ومن ثم يمكن حذف هذه المشكلة الفرعية.

[15] بيانيا نقوم بتمثل مستقيمين موازيين لمحور التراتيب (X_2) عند النقاط $X_1=3$ و $X_1=4$ ونبحث عن الحل وفق هذين القيدين الجديدين.

وبمعنى آخر بمجرد التوصل إلى حل عددي ممكن يتم استخدام قيمة هدف هذا الحل ليصبح حد، (حد أعلى في حالة Min وحد أدنى في حالة Max)، يستبعد عنده أي مشكلة فرعية تعطي نتيجة أسوأ من هذا الحد.

1-3-3-1-1- مثال تطبيقي 6 (دراسة حالة):[16]

و لتوضيح طريقة تطبيق طريقة التفريع و التحديد نأخذ البرنامج (P3) الموالي:

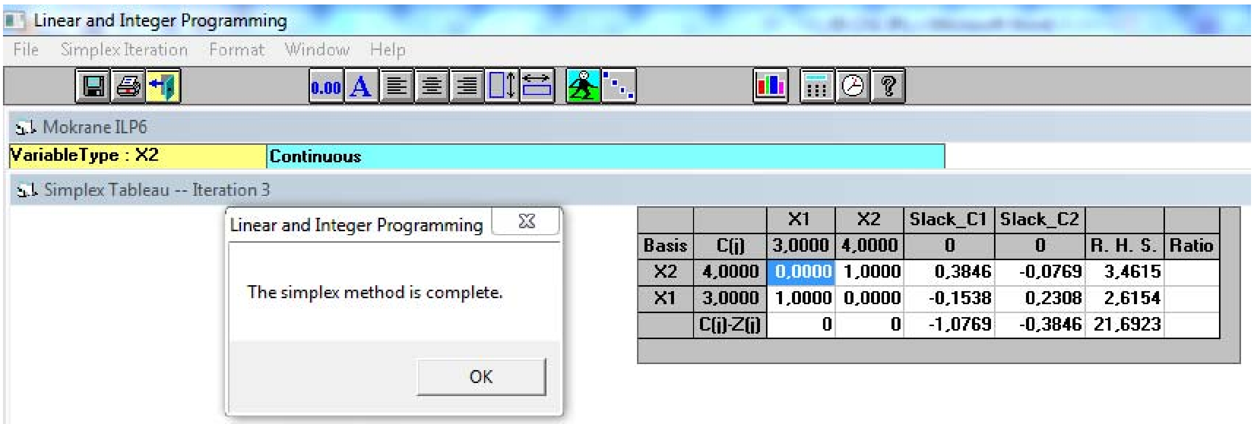
$$\boldsymbol{Max}\ Z = 3X_1 + 4X_2$$
$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2\ \text{Entier} \end{cases} \quad \text{.........}\quad \textbf{(P)}$$

الحل:

الخطوة الأولى (التفريع):

باستخدام طريقة السمبلكس (عن طريق البرنامج WinQSB)، نحصل على الحل الأمثل بعد ثلاث خطوات (إعداد ثلاث جداول)، والحل الأمثل للبرنامج يكون في الجدول الموالي:

الشكل (2-9)



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	3,0000	4,0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	4,0000	0,0000	1,0000	0,3846	-0,0769	3,4615	
X1	3,0000	1,0000	0,0000	-0,1538	0,2308	2,6154	
	C(j)-Z(j)	0	0	-1,0769	-0,3846	21,6923	

وعليه فان الحل الأمثل (دون شرط العدد الصحيح) للنموذج هو: $X_1 = 2{,}61$، $X_2 = 3{,}46$، $Z = 21{,}69$

وبما أن هذا الحل المتوصل إليه لا يحترم شرط الأعداد الصحيحة للمتغيرات، نبحث في تحسينه من خلال اختيار المتغير الذي تكون قيمته عند الحل الأمثل تحمل أكبر عدد بعد الفاصلة أي أكبر كسر، من أجل القيام بتفريع البرنامج إلى برنامجين فرعيين، وفي هذه الحالة لدينا قيمة $X_1 = 2{,}61$ و $X_2 = 3{,}46$ وبالتالي نختار المتغير X_1 كونه يحمل أكبر عدد بعد الفاصلة. ويكون عندئذ التعبير عن شرط الأعداد الصحيحة للمتغير X_1 بقيدين هما:

$$X_1 \geq 3\text{............}(1)$$
$$X_1 \leq 2\text{............}(2)$$

[16] بالتصرف

وبالاستعانة بهذين القيدين نقوم بتشكيل النموذجين الجزئيين كما يلي:

النموذج الجزئي الأول (P-1)	النموذج الجزئي الثاني(P-2)
$\boldsymbol{Max}\ Z = 3X_1 + 4X_2$	$\boldsymbol{Max}\ Z = 3X_1 + 4X_2$
$\boldsymbol{S/C} \begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ X_1 \geq 3 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$	$\boldsymbol{S/C} \begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ X_1 \leq 2 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2 \text{ Entier} \end{cases}$

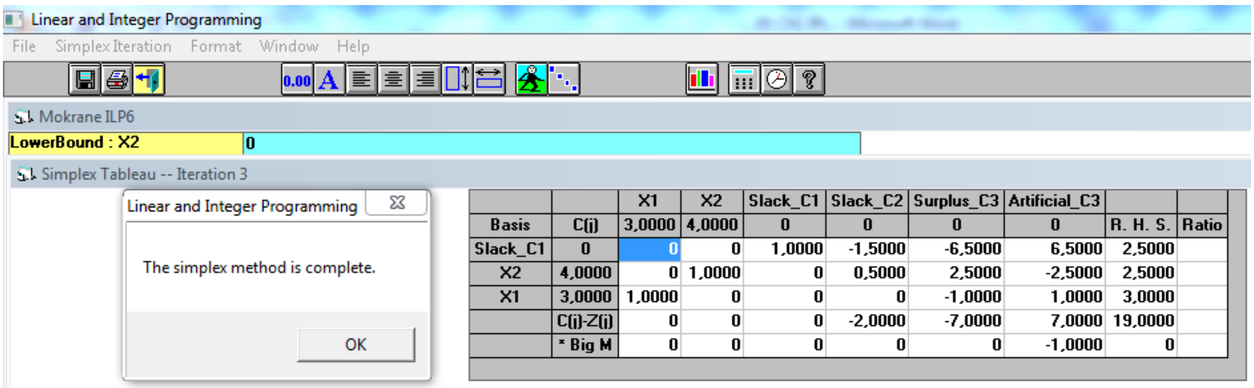
وتقوم هذه الطريقة على حل البرنامجين كل على حدى بطريقة السمبلكس وتحديد الحل الأمثل لكل منهما،

الخطوة الثانية التحديد أو التقييم:

في هذه المرحلة نقوم بتقييم الحل المتوصل إليه، فإن كان حل عددي صحيح نرشحه ليكون حل أمثل للبرنامج الأصلي، وفي حالة العكس نقوم بتفريع البرنامج الجزئي بنفس الطريقة السابقة.

وبحل البرنامج الجزئي الأول، (عن طريق البرنامج WinQSB)، تحصلنا على الحل التالي:

الشكل (2−10)

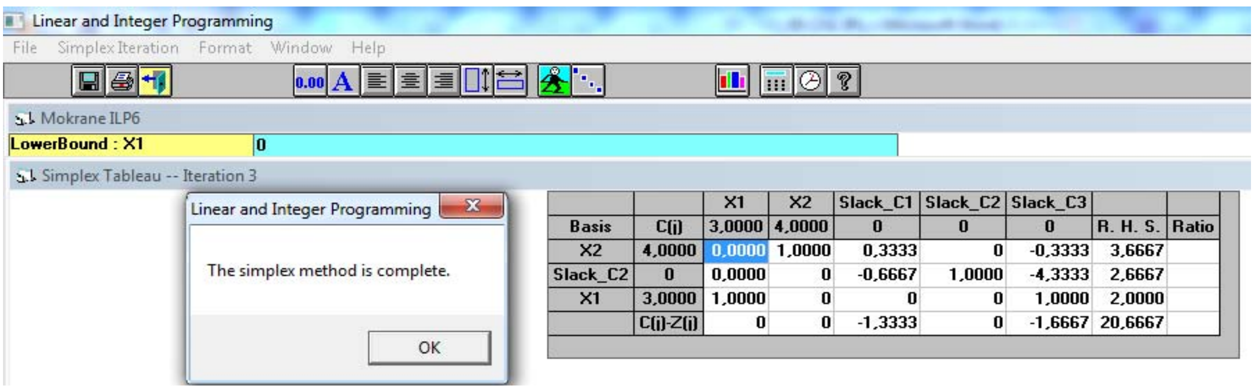


		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Surplus_C3	Artificial_C3		
Basis	C(j)	3,0000	4,0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	0	1,0000	-1,5000	-6,5000	6,5000	2,5000	
X2	4,0000	0	1,0000	0	0,5000	2,5000	-2,5000	2,5000	
X1	3,0000	1,0000	0	0	0	-1,0000	1,0000	3,0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	0	-2,0000	-7,0000	7,0000	19,0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	-1,0000	0	

أي: $X_1 = 3$ ،$X_2 = 2{,}5$ ،$Z = 19$

وبحل البرنامج الجزئي الثاني، (عن طريق البرنامج WinQSB)، تحصلنا على الحل التالي:

الشكل (2−11)

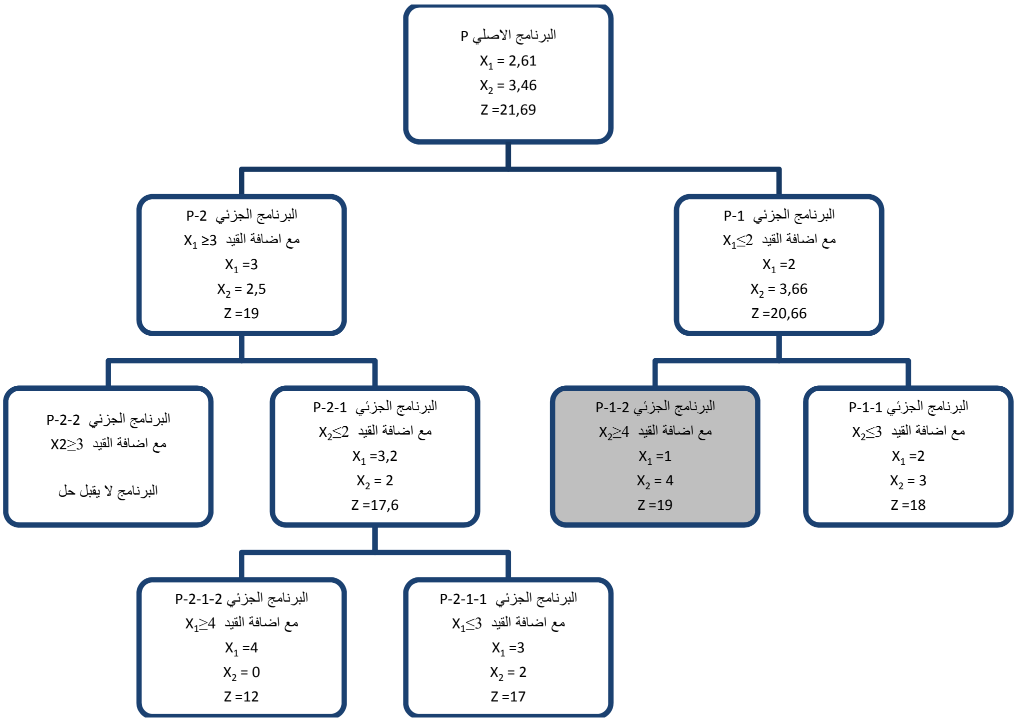


		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3,0000	4,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	4,0000	0,0000	1,0000	0,3333	0	-0,3333	3,6667	
Slack_C2	0	0,0000	0	-0,6667	1,0000	-4,3333	2,6667	
X1	3,0000	1,0000	0	0	0	1,0000	2,0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-1,3333	0	-1,6667	20,6667	

أي: $X_1 = 2$ ،$X_2 = 3{,}66$ ،$Z = 20{,}66$

نلاحظ انه في كلتا الحالتين لم يتم بعد الوصول إلى الحل الأمثل العددي الصحيح بالرغم من أن قيمة X_1 في كلا النموذجية عبارة عن عدد صحيح، إلا أنه تبقى قيمة المتغير X_2 عبارة عن كسر، مما يستدعي تفريع النموذجين الجزئيين من جديد .ومن أجل توضيح عملية البحث بطريقة سهلة نقوم بتمثيل عملية البحث عن الحل الأمثل العددي الصحيح على شكل شجرة قرار على الشكل التالي:

الشكل رقم 2-4: التمثيل البياني لخطوات الحل بطريقة التفريع والتحديد للبرنامج[17]



إن البحث عن الحل الأمثل عبر فروع هذه الشجرة يتوقف عند توفر أحد الشروط التالية:

- النموذج الجزئي لهذا الفرع ليس له حل كما هو الحال في النموذج الجزئي (P-2-2)
- النموذج الجزئي لهذا الفرع يقبل حل عددي صحيح كما هو الحال في النماذج : (P-1-1)، (P-1-2)، (P-2-1-1)، (P-2-1-2).

في حالة نموذج تعظيم قيمة دالة الهدف للنموذج الجزئي لهذا الفرع أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لأي فرع آخر يحتوي على حل أمثل عددي صحيح) كما هو الحل للنموذج الجزئي (P-2-1) أقل من النموذج الجزئي(P-1-2) ، لذلك يجب أن نتوقف عند هذا الفرع (ونحن قد واصلنا الحل فقط للتوضيح أكثر لطريقة التفريع، أما في حالة التدنئة فالعكس أي أننا نتوقف لما تكون قيمة دالة الهدف لهذا الفرع أكبر أو يساوي قيمتها في فرع آخر.

[17] بالتصرف، باستعمال SmartArt

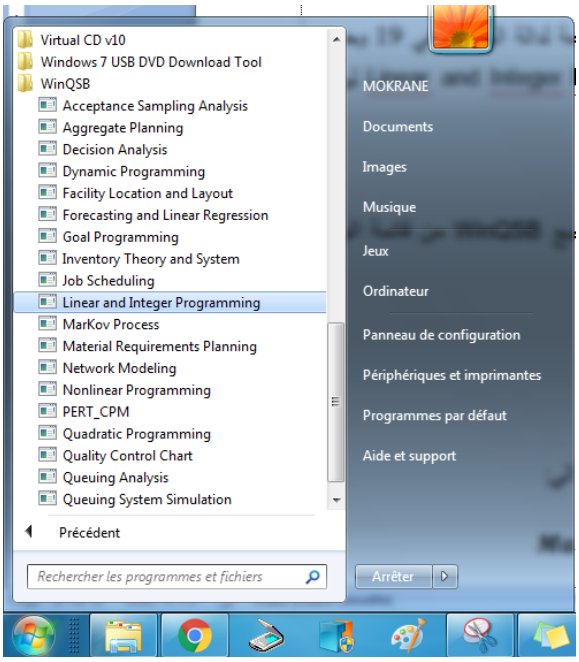
أما عملية تحديد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة فتكون باختيار أحسن حل عددي صحيح من الحلول المرشحة في النماذج: (P-1-1)، (P-1-2)، (P-2-1-1)، (P-2-1-2).

وينصب الاختيار هنا على حل النموذج (P-1-2) الذي يحقق أكبر قيمة لدالة الهدف وهي Z=19، و يمكن التأكد من هذه النتيجة عن طريق الحل بتطبيق Linear and Integer Programming لبرنامج WinQSB كالتالي:

1-3-3-1-2- مثال تطبيق 7 (دراسة حالة):[18]

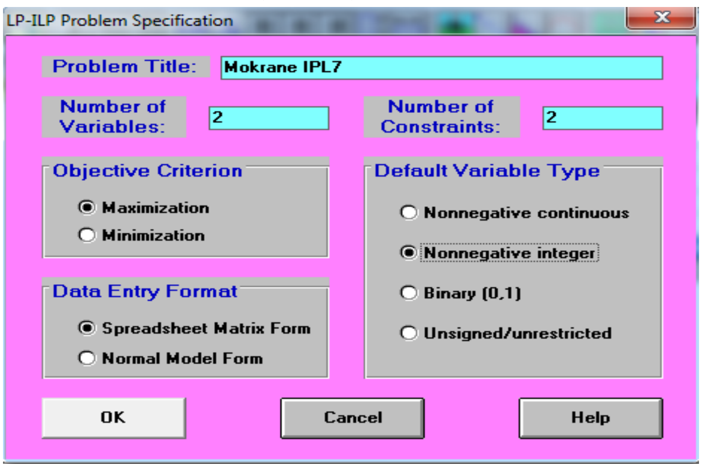
أولا نقوم بفتح تطبيق Linear and Integer Programming لبرنامج WinQSB من قائمة البرامج كالتالي:

الشكل (2-12)



بعدها نقوم بإدخال خصائص البرنامج (P) كالتالي:

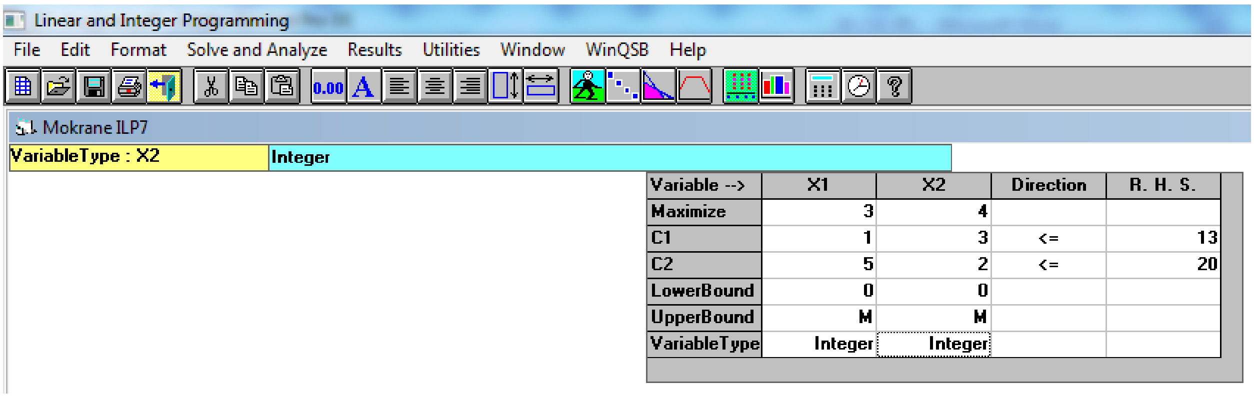
الشكل (2-12)



[18] بالتصرف

بعدها نقوم بإدخال معطيات البرنامج كما هو موضح في الشكل أدناه:

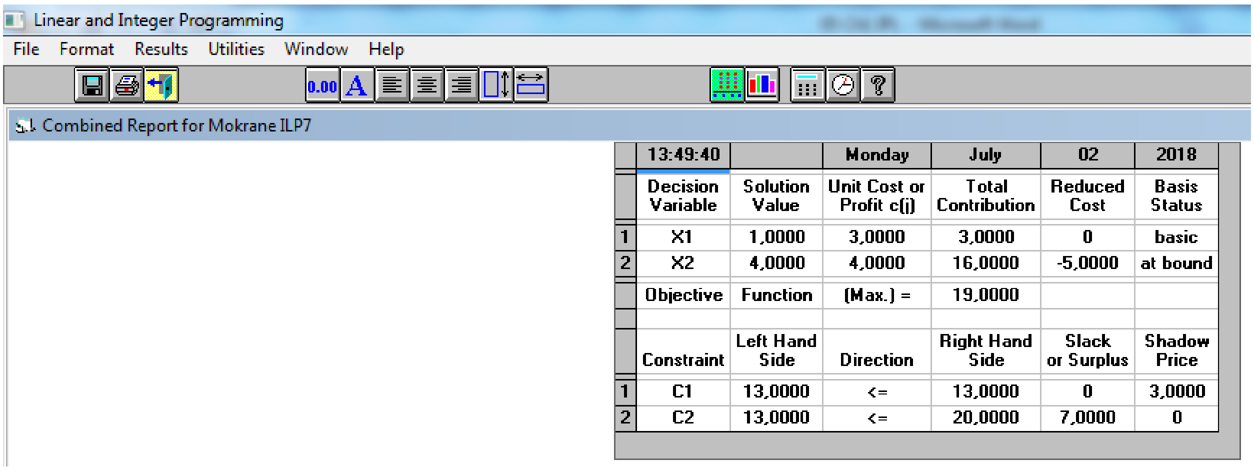
الشكل (2-13)



Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	3	4		
C1	1	3	<=	13
C2	5	2	<=	20
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Integer	Integer		

بعدها نختار من القائمة Solve and Analyze الأمر Solve the Problem فنحصل على حل البرنامج بالاعداد الصحيحة كما يلي:

الشكل (2-14)



	13:49:40		Monday	July	02	2018
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	1,0000	3,0000	3,0000	0	basic
2	X2	4,0000	4,0000	16,0000	-5,0000	at bound
	Objective	Function	(Max.) =	19,0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	13,0000	<=	13,0000	0	3,0000
2	C2	13,0000	<=	20,0000	7,0000	0

و هذا الحل هو نفسه الحل المتوصل إليه بالطريقة السابقة.

2- برمجة الأعداد الصحيحة الثنائية:

في كثير من الحالات تستدعي صياغة البرامج الخطية استعمال نوع خاص من المتغيرات يختلف عن المتغيرات المستعملة سابقا في شكل متغيرات كمية، (تعبر عن كميات بوحدات قياس معينة)، ويتعلق الأمر بمتغيرات ثنائية تأخذ قيمتين 0 و 1 ، ومن بين أهم المجالات التي تستعمل فيها هذه المتغيرات نجد مشاكل اختيار المشاريع، بحيث يأخذ المتغير القيمة 1 في حالة اختيار المشروع والقيمة 0 في حالة عدم اختيار المشروع.

كما يمكن استعمال هذه المتغيرات لصياغة العديد من المسائل نذكر بعض الحالات فيما يلي:

2-1- حالة اختيار k قيد من بين m قيد:

يمكن ترجمتها رياضيا بسهولة وذلك بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i كما يلي:

$Y_i=0$: إذا تم اختيار القيد i

$Y_i=1$: إذالم يتم اختيار القيد i

ولتفادي ظهور المتغيرات الثنائية في الحل النهائي للبرنامج نقوم بصياغة القيود المعدلة باستعمال المعامل M الذي يأخذ أكبر قيمة عددية كما يلي:

$$f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq b_i + \mathbf{M}Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots i = 1, \ldots, m$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots \ldots . Y_m = m - k$$

2-2- اختيار قيمة معينة للطرف الأيمن:

في قيد معين لو كنا بصدد اختيار قيمة معينة للطرف الأيمن لهذا القيد b_i من بين عدة قيم و لتكن p قيمة مختلفة:

و دائما بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i عددها p ‏(i=1,...,p) كما يلي:

$Y_i=1$: الطرف الأيمن للقيد i هو b_i

$Y_i=0$: الطرف الأيمن للقيد i هو قيمة أخرى.

يمكن الآن ترجمة الاختيار رياضيا كما يلي:

$$f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{p} b_i Y_i$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p = 1$$

2-3- عملية اتخاذ قرارات إنجاز استثمارات معينة من عدمها:

إن عملية اتخاذ قرارات إنجاز استثمارات معينة من عدمها تعتبر أفضل الحالات التي يتم فيها الاستعانة بنماذج برمجة الأعداد الصحيحة و مثلما فعلنا سابقا سوف نحتاج إلى المتغيرات الثنائية عددها بعدد الاستثمارات المراد إنجازها كما يلي:

$Y_i=1$: انجاز الاستثمار رقم i

$Y_i=0$: عدم انجاز الاستثمار رقم i

ويمكن إيجاد الحالات التالية:

- لا نستطيع إنجاز أكثر من k من بين m استثمار مقترح، و نترجم هذا رياضيا كما يلي:

- لا يتم إنجاز الاستثمار 4 مثلا إذا لم يتم إنجاز الاستثمار 3 ، رياضيا نكتب:

- الاستثمار 3 و الاستثمار 4 متنافيين، أي أنه إذا تم إنجاز الاستثمار 3 فلن ينجز الاستثمار 4 والعكس، تكتب:

- الاستثمار 5 لا ينجز إلا إذا أنجز أحد الاستثمارين 3 أو 4 ، نكتب رياضيا:

3- تمارين تطبيقية مقترحة حول الفصل الثاني:

3-1- تمارين متعلقة ببرمجة الأعداد الصحيحة:

3-1-1- التمرين الأول:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 5 \\ 10X_1 + 6X_2 \leq 45 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2\ \text{Entier} \end{cases}$$

المطلوب:

1- حل البرنامج بيانيا.

2- حل البرنامج بطريقة التفريع والتحديد مع التوضيح من خلال التمثيل البياني.

3-1-2- التمرين الثاني:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 4X_1 + 6X_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ 7X_1 + X_2 \leq 21 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2\ \text{Entier} \end{cases}$$

المطلوب:

حل هذا البرنامج بطريقة المستوى القاطع ثم بطريقة التفريع والتحديد.

3-1-3- التمرين الثالث:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{Max}\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} \frac{1}{2}X_1 + X_2 \leq \frac{5}{4} \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \\ X_1;\ X_2\ \text{Entier} \end{cases}$$

المطلوب:

1- حل هذا النموذج باستخدام طريقة المستوي القاطع .ماذا تلاحظ ؟

2- ماذا نفعل لتجاوز هذه المشكلة؟

3-2- تمارين متعلقة ببرمجة الأعداد الصحيحة الثنائية:

3-2-1- التمرين الرابع[19]:

تعمل إحدى الورشات الصناعية على 3 آلات مختلفة A،B و C استقبلت هذه الورشة طلبيتين P1 و P2 كل طلبيه يجب أن تمر عبر الآلات الثلاث وفق ترتيب معين و في وقت معلوم كما هو مبين في الجدول التالي:

الطلبيات \ الآلات	1	2	3
P1	B(6)	A(4)	C(9)
P2	A(9)	C(6)	B(5)

فمثلا الطلبية P1 تمر أولا عبر الآلة B لمدة 6 ساعات، ثم عبر الآلة A لمدة 4 ساعات، و في الأخير عبر الآلة C لمدة 9 ساعات.

المطلوب:

شكل البرنامج الخطي الذي يسمح باختيار الترتيب الملائم للطلبيات على مختلف الآلات من أجل إنهاء العمل في أقل وقت ممكن.

3-2-2- التمرين الخامس[20]:

قررت مؤسسة لإنتاج المشروبات الغازية إطلاق مشروع استثمار ضخم من أجل بناء 10 وحدات إنتاج عبر مناطق الوطن (الشمال ، الجنوب ، الغرب ، الشرق)، و بعد دراسة السوق تبين أن المدن الموضحة في الجدول الموالي هي أفضل المدن المرشحة لبناء هذه الوحدات، كما يوجد أيضا في الجدول تكاليف البناء و الأرباح المتوقعة خلال السنة القادمة (الوحدة : مليون دج)

المناطق	الشمال		الغرب			الشرق			الجنوب	
المدن	الجزائر	البليدة	وهران	مستغانم	س.بلعباس	قسنطينة	سطيف	باتنة	ورقلة	غرداية
التكاليف المتوقعة	28	25.5	30	28	25.5	33	35.5	23	18.5	16
الأرباح المتوقعة	9	7	8.5	8.6	7	8	9.5	6	6	5

وتقدر حجم المبالغ التي رصدها مالك هذه المؤسسة لهذا الاستثمار 200 مليون دج، و لكنه اشترط على المدراء التنفيذيين لمؤسسته ما يلي:

1- بناء على الأقل وحدة إنتاج واحدة في كل من منطقة الشمال و منطقة الجنوب.

2- بناء على الأقل وحدتين في منطقة الشرق.

3- إما بناء الوحدات الثلاثة في منطقة الغرب، أو لا نبني أي وحدة.

[19] عبد القادر مطاليس، ياسين العايب، "بحوث العمليات: عمليات و مسائل محلولة"، النشر الجامعي الجديد، الجزائر، 2017. ص271، 272

[20] عبد القادر مطاليس، ياسين العايب، مرجع سبق ذكره. ص269،270

المطلوب:

شكل النموذج الذي يساعد المؤسسة في تحديد المخطط الأمثل في البناء من اجل تعظيم أرباحها المتوقعة.

3-3-3- التمرين السادس:

قامت أحد مؤسسات البناء بدراسة حول جدوى الاستثمار في 6 مشاريع سكنية معينة خلال الثلاث سنوات القادمة، الجدول الموالي يوضح تكاليف إنجازها المتوقعة و كذا المداخيل المتوقعة من بيعها (الوحدة: مليون دج)

المشاريع	التكاليف المتوقعة			الأرباح المتوقعة
	السنة 1	السنة 2	السنة 3	
1	8	14	11	39
2	5	7	12	36
3	17	4	3	31
4	10	15	5	38
5	12	10	12	46
6	9	6	13	34

و في الأخير المبلغ السنوي المخصص للاستثمار في هذه المشاريع هو 42 مليون دج.

المطلوب:

أ- شكل البرنامج الخطي الذي يسمح باختيار أفضل المشاريع من أجل تحقيق أقصى الأرباح.

ب- شكل النموذج مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط التالية:

ب-1- يجب اختيار على الأقل 4 مشاريع إجباريا من بين هذه المشاريع.

ب-2- المشاريع 4،5 و 6 مشاريع متنافية (أي إذا تم اختيار أحدهما فيمنع اختيار الآخرين).

ب-3- لا يمكن اختيار المشروع 3 إلا إذا تم اختيار المشروع 2.

ب-4- يجب اختيار إما المشاريع الثلاثة 1،5 و 6 معا أو لا يتم اختيار أي منهم.

ب-5- لا يمكن اختيار المشروع 1 إلا إذا تم اختيار المشروعين 3 و 4 معا.

ملاحظة:

الأسئلة من (ب-1) إلى (ب-5) مستقلة عن بعضها البعض.

قائمة مراجع الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

المراجع بالعربية:

البنداني محمد اسعد عبد الوهاب، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة، عمان، االردن، 1998.

عبد القادر مطاليس، ياسين العايب، "بحوث العمليات: عمليات و مسائل محلولة"، النشر الجامعي الجديد، الجزائر، 2017.

المراجع بالأجنبية:

Gomory (R.E.), « On the relation between Integer and non integer solution to linear programs », proceeding of the National academy of sciences, vol 53,1965.

Hamdy A. Taha, « Operation Research An Introduction », Pearson Education, Inc, 8th edition 2007.

J. Maublanc, A. Quilliot, « Recherche operationnelle », RAIRO, Edition 4,1997.

Jean Pierre Védrine *, Techniques Quantitatives De Gestion , Librairie Vuibert , 1985.*

الفصل الثالث:

التحليل الشبكي

الفصل الثالث: التحليل الشبكي

يعتبر تحليل شبكات الأعمال أحد أساليب المنهج الكمي في إدارة الأعمال التي تستخدم في مجال التخطيط و الرقابة لتنفيذ المشاريع الإنتاجية، والخدمة، سواء كانت المتوسطة و الكبيرة الحجم منها وهو أحد الأساليب الكمية لبحوث العمليات.[1]

إن الشبكات هي تلك الأشكال البيانية والهندسية التي تعبر عن مشكلة معينة في واقع الحال،ويتم تصميم الشبكات على الأغلب من خلال الأسهم وتعرف بالنشاط، ونقاط التعارف أو ما يعرف بالأحداث، وتستخدم هذه الشبكات في مختلف المجالات في الواقع العملي، سواء كانت الإنشائية منها أو الإنتاجية أو العلمية أو الخدمية وغير ذلك ،إذ أن تصميم ودراسة المشاريع الكبيرة والمعقدة التي تتصف بمرحلية التنفيذ تتطلب وضع خرائط ودراسات تمهيدية تشرح تطور المشروع من ناحية تسلسل العمل الإنشائي أو الإنتاجي، بما يتناسب مع المراحل الزمنية المقترحة والملائمة للعمل، إذ تنصب فكرة المفهوم الاقتصادي لشبكات العمل حول كيفية استخدام الموارد النادرة أو المحددة لتحقيق أهداف المنظمات المختلفة[2].

يمكن التعبير عن شبكات الأعمال من خلال صيغ وأساليب ونماذج مختلفة يمكن توضيح أهمها فيما يلي:

-الجريان (التدفق) الأعظمي

- طريقة المسار الحرج (Critical Path Method) CPM/GANT

- طريقة تقييم البرامج و مراجعة التقنيات (Program Evaluation and Review Technique) PERT/MPM

و لأجل دراسة هذه الأساليب، لا بد من عرض موجز لنظرية البيانات حتى نلم بجميع المفاهيم المتعلقة بالشبكات و مكوناتها وكيفية تمثيلها. وهو ما سنعرضه خلال هذا الفصل بتوفيق الله تعالى.

1- عموميات حول شبكات الأعمال:

1-1- لمحة تاريخية

تعتبر نظرية الشبكات إحدى الفروع الرياضيات والتي عرفت تطورا ملحوظا في السنوات الأخيرة حيث في البداية كانت امتدادا لنظرية المجموعات ولكن مع مرور الزمن تمكنت من اكتساب مصطلحات غنية خاصة بها نظرا لأهميتها واتساع مجالات تطبيقها و منها:[3]

- مسائل المرور و النقل،
- الحواسب(الإعلام الآلي)،
- الكيمياء العضوية ،
- العلوم الاجتماعية (نمدجة العلاقات)،
- جدولة المشاريع،...الخ.

[1] مؤيد الفضل،" تقييم وإدارة المشروعات المتوسطة والكبيرة"، الطبعة ألأولى ، دار الوراق للنشر والتوزيع ، عمان – ألأردن،2009. ص 317
[2] مؤيد عبد الحسين الفضل ،"المنهج الكمي في إدارة الوقت" ،دار المريخ للنشر والتوزيع ،الرياض-السعودية ، 2008 ، ص193-194.
[3] السعدي رجال ، "بحوث العمليات في الإدارة، المالية، التجارة" منشورات جامعة المنتوري، قسنطينة الجزائر 2004-2005 .ص67

في سنة 1822 تم إدخال مصطلح" الشبكة"من طرف الانجليزي ***J.J.Sylvester*** غير أن المراجع لم تظهر إلا بعد الحرب العالمية الأولى حيث اصدر في سنة 1936 أول كتاب حول نظرية الشبكات من طرف الرياضي المجري **د.كوينيج** (***Denis Konig***)[4]، و لقد كان أول ما ظهرت عليه مسائل نظرية الشبكات،هو لعبة ***puzzeles***، غير أن أول دراسة ظهرت بلا شك هي مسالة جسور مدينة (***Koenigsborg***)، (**لقد** تمت إعادة تسمية هذه المدينة وأصبحت تسمى كالينجراد (***Kalingrad***))، حيث أن نهر بريجل (***Pergel***) يشق هذه المدينة إلى أربعة أجزاء و هناك سبعة جسور تربط بين هذه الأجزاء من المدينة فالإشكال الذي كان مطروح يتمثل في إيجاد مسار تجوال في المدينة بحيث لا يتم عبور الجسر الواحد إلا مرة واحدة وقام بدراسة هذا المشكل الرياضي الألماني (***L.Euler***) و ذلك في سنة 1736 غير انه اثبت أن هذا مستحيل (أي لا يوجد حل للإشكال المطروح).

و خلال الحرب العالمية الثانية (1939–1945) بدأت دراسات و بحوث في الميدان العسكري أدت إلى نشأت علم بحوث العمليات مما أدى إلى تطور نظرية الشبكات كنموذج لحل بعض المشاكل الملموسة [5]في تلك الفترة و في السنوات الموالية للحرب ازدادت أهمية هذا الأسلوب من بحوث العمليات وهذا بعد التطورات التي حدثت في إدارة الأعمال و من ابرز المختصين في هذه الفترة نذكر :[6]

Houry – harary – Fulkerson(1956)– Ghouila – & Kohn(1955) – Dantzig – Ford Bellman –Berge (théorie des graphs et des applications– 1958) – Roy –Faure – Kanfmann…….ect

ومع تطور الحاسبات الآلية و زيادة الاهتمام بمجال الإعلام الآلي و الاتصالات في سنوات 1960 قام مجموعة من الخبراء في الإعلام الآلي مثل: – *Djikastra – Knuth– Wirth – Sarharovitch Goudran* و آخرون بالمساهمة في تطوير خوارزميات الشبكات حيث ساعدت على نمذجة وحل المشاكل عن طريق الحاسبات الآلية مما أدى إلى الاختصار في الوقت و سهولة الوصول إلى نتائج الحل الخاصة بالمشاكل المعقدة.

1-2- مزايا شبكات الأعمال:[7]

- توفير إمكانيات إعداد المشروع.
- يوفر إمكانية تحديد الأزمنة المختلفة لتنفيذ مختلف فعاليات المشروع.
- خطط دقيقة تستطيع استيعاب مختلف المراحل التي يمر بها التنفيذ.
- توجيه المسؤولين لتنفيذ الفعاليات الرئيسية و الحرجة و إعطائها الأهمية المناسبة من حيث الوقت و التكاليف.

[4] Nadia Belharrat, « Théorie des graphes – Recherche opérationnelle »", Edition les pages blues internationales, juillet 2005 Algérie. Page09

[5] Didier Maquin, « Élément de théorie des graphes », Institut national de polytechnique de Loraine.2003.p5

[6] Jean Hélary, « Algorithmique des graphes », INFIC .juin.2004.page 09.

[7] سونيا محمد البكري،" استخدام الأساليب الكمية في الإدارة"، مكتبة ومطبعة الإشعاع، الإسكندرية، مصر ،سنة 1997 ، ص67

- متابعة مستوى التنفيذ و تحديد الانحرافات القائمة عن الخطة الموضوعة و اتخاذ الإجراءات الكفيلة لمعالجة الخلل.

1-3- مجالات استخدام أساليب شبكات الأعمال:

- عمليات إنشاء المباني سواء كان ذلك للإسكان أو إنشاء الطرق و المصانع و المدارس و الأنفاق و الفنادق.
- عملية إدخال منتج جديد للسوق، و الذي عادة ما يمر بمراحل مختلفة تبدأ بظهور الفكرة و تنتهي بالتصميم النهائي للمنتج و وضع سياساته التسويقية.
- عملية إدخال نظم المعلومات في الشركات و نظم الكمبيوتر بالمنشاة.
- مشروعات الأبحاث و التطوير التي تقوم بها الشركات سواء في مجال التكنولوجيا أو التغيير الإداري و التنظيمي.
- تخطيط عمليات بناء السفن و الطائرات و ناقلات البترول و سفن الفضاء.
- عمليات تصنيع و تجميع و إنشاء محطات الكهرباء الكبيرة و عمليات مد خطوط أنابيب الغاز و البترول.
- برامج إدخال نظم للدفاع عن الجيش و برامج إنتاج الأسلحة و الصواريخ.
- عملية تخطيط إنشاء المدن الجديدة و استصلاح الأراضي.
- تخطيط برامج الصيانة و جدولتها.

1-4- الهدف من استخدام أساليب شبكات الأعمال:

يهدف مديرو المشاريع من استخدام هذه الأساليب إلى معرفة:

- ما هو الوقت اللازم لإنجاز المشروع بأكمله؟
- ما هي مواعيد بداية ونهاية كل نشاط حسب الجدول؟
- أي الأنشطة" حرجة "ويجب إتمامها في الوقت المحدد" بالضبط "كما هو مجدول لها إذا أردنا إنجاز المشروع في الوقت المخطط له؟
- ما هو الحد الأقصى الذي يمكننا تأخير بعض الأنشطة غير الحرجة بدون أن ينتج عن هذا التأخير تعطلا للمشروع كله؟
- أي الأنشطة الحرجة يمكن ضغطها بأقل تكلفة ممكنة في حالة الرغبة في الإسراع أو حدوث تأخر غير متوقع في الإنجاز؟

كما سبق وذكرنا في مقدمة الفصل سنقوم بعرض الأساليب والنماذج المختلفة لتحليل شبكات الأعمال ولكن قبل هذا سنتطرق أولا لنظرية البيانات.

2- نظرية البيانات:

في **الرياضيات** ، البيان هو بنية بسيطة تتكون من عقد و وصلات ... عادة ما تمثل العقد عناصر المسألة وتكون الوصلات هي العلاقة بين هذه العناصر.

في **العالم الحقيقي**، قد تكون هذه العقد مدناً، و الوصلات هي الطريق بينها، أو قد تكون العقد جزيئات كيميائية والوصلات هي الروابط بينها.

إن الإمكانيات الهائلة التي يستطيع البيان تمثيلها جعلت منه موضوعاً واسعاً جديراً بالدراسة ، و يعود أول استخدام لمصطلح البيان بمدلوله الحالي لعام 1878 حيث وصف العالم (Sylvester) العلاقات بين الثوابت المتجانسة والطردية في الجبر والمخططات الجزيئية بواسطة البيان(الغراف)، إلا أن أقدم وثيقة في نظرية البيان هي للعالم (Euler) تعود لعام 1736 وتعرف الوثيقة بمسألة سور مدينة كونيغسبرغ السبعة (كما اشرنا لذالك سابقا).

على مدى عقدين .. استخدم البيان لحل كثير من المسائل كمسألة فارس رقعة الشطرنج، (إذا وضع فارس على إحدى مربعات رقعة الشطرنج، هل بإمكانه أن يزور كلاً من المربعات الأخرى مرة واحدة فقط ويعود إلى مكان انطلاقه)، وهذا السؤال يعود للقرن التاسع الميلادي، إلا أن العالم أولر (Euler) كان أول من حاول التفكير بها بنحو رياضي لتحل لاحقاً عام 1823 بخوارزمية (Warnsdroff) وعن طريق دراسة بسيطة لدرجات عقد البيان.

من مسائل البيان القديمة الأخرى مسألة الألوان الأربع التي طرحها (Guthrie) عام 1852 و تنص على أن (هل صحيح أن أي خريطة مبسطة يمكن تلوينها فقط بأربع ألوان بحيث أن أي منطقتين متجاورتين سيكون لهما لونان مختلفان؟)، بقيت هذه المسألة بدون برهان لأكثر من قرن حيث حاول عدد كبير من علماء الرياضيات حلها دون فائدة ولها العديد من البراهين الخاطئة المنشورة حتى استطاع العالم (Heesch) إيجاد حل بمساعدة الحاسوب عام 1969 إلا أن برهان هذه المسألة لم يأت حتى وقت لاحق. و تعد مسألة الألوان الأربع من أهم مسائل البيان لأنها كانت خطوة كبيرة قادت إلى دراسة في تلوين البيان و أنواع جديدة من الدراسات و التصنيفات.[8]

على الرغم من استخدام البيان في الكثير من مجالات الحياة إلا أنه لم يدرس بحد ذاته حتى العام 1936 حيث ألف العالم (Konig) كتاباً اسماه نظرية البيان، و أصبحت من بعده نظرية البيان فرعاً من فروع الرياضيات يبحث من خلاله عن حلول في مختلف المجالات.

وقد تم تطوير هذه النظرية خاصة بعد سنة 1971 في كل من فرنسا و المجر و الولايات المتحدة و الاتحاد السفياتي سابقا.[9]

[8] محمد الصبيح،" نظرية البيان"، مطبوعة جامعية، جامعة تشرين،كلية الهندسة المعلوماتية، سوريا. ص4 ،5.
[9] Robert Faure, « Recherche Operationelle », Presse de France, paris, 1961. P 53.

2-1- تعاريف و مفاهيم أساسية:

2-1-1- تعريف البيان:

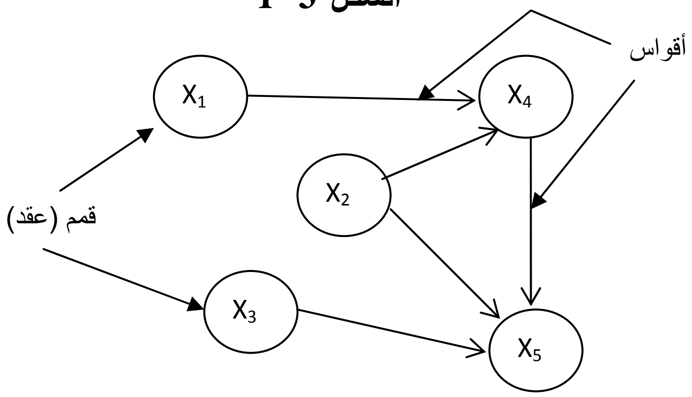
البيان أو (Graph) يتألف من مجموعة من العقد أو دوائر أو نقاط تسمى القمم (X)، ومجموعة من الوصلات (U)، كل وصلة هي ثنائية (x_i,x_j) حيث $x_i,x_j \in X$. ويعبر عن البيان بالصيغة: $G=(X,U)$.

- إذا كانت الثنائية (x_i,x_j) مرتبة هذا يعني أن البيان موجه. إذا كان هناك وصلة من x_i إلى x_j هذا يعني أن $(x_i,x_j) \in X$، بمعنى x_i عقدة بداية و x_j عقدة نهاية.

تسمى هذه الخطوط أو الوصلات في البيانات الموجهة بالأقواس (ARCS).[10]

و الشكل الموالي يوضح مثال عن بيان غير موجه من خمس عقد و خمس وصلات[11]

الشكل 3-1



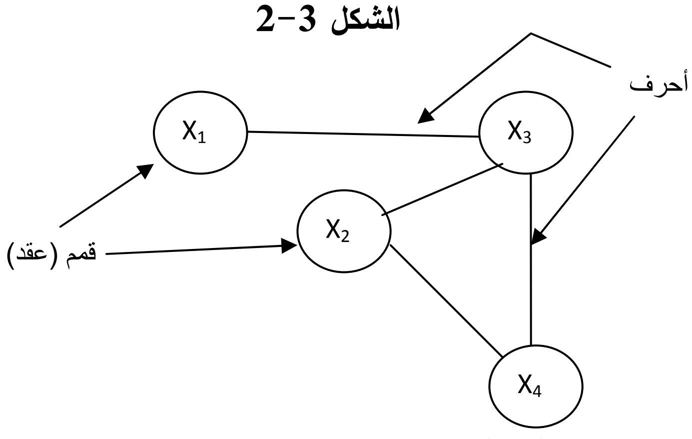
- ولذالك في البيان الغير موجه مع الوصلة (x_i,x_j) هناك وصلة من x_i إلى x_j و وصلة من x_j إلى x_i

تسمى هذه الخطوط آو الوصلات في البيانات الغير موجهة بالأحرف (ARETE).[12]

أحيانا يربط بالوصلة عنصر ثالث هو التكلفة أو الوزن.

و الشكل الموالي يوضح مثال عن بيان موجه من أربع عقد و أربع وصلات[13]

الشكل 3-2



من التعريف السابق يمكن تقديم تعريف لما يلي:

[10] محمد راتول،"بحوث العمليات"،ديوان المطبوعات الجامعية،2011. ص 210.
[11] بالتصرف
[12] محمد راتول،مرجع سبق ذكره. ص 210.
[13] بالتصرف

2-1-1-1- تعريف القمم: هي النقاط التي تنطلق منها او تصل اليها الخطوط او الوصلات فعلى سبيل المثال في الشكل 3-1 السابق تمثل النقاط (x_1، x_2، x_3، x_4، x_5) قمم البيان و تكتب مجموعة القمم X كما يلي:

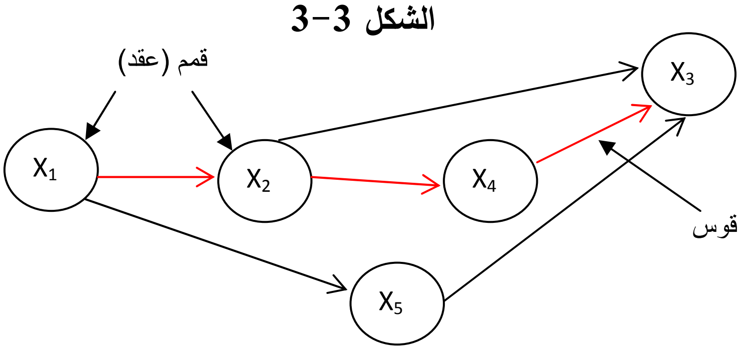
2-1-1-2- تعريف الحرف (ARETE): هو خط غير موجه بين قمتين، و هو يكافئ قوسين متعاكسين كما يظهر في الشكل 3-2.

2-1-1-2- تعريف القوس (ARCS): هو خط موجه بين قمتين أو سهم، يربط بين قمة الانطلاق و قمة الوصول، وقد يكون بين قمتين متتابعتين أو غير متتابعتين كما يظهر في الشكل 3-1.

2-1-2- تعريف المسار(Path): في بيان يمثل المسار سلسلة من العقد. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مترابطة بأقواس حيث $\{x_i, x_{i+1}\} \in X, i = \overline{1, N}$ كما يظهر من خلال الشكل 3-3، (ممثل باللون الأحمر).

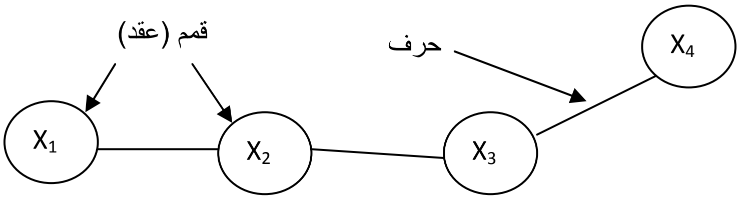
طول المسار هو عدد الوصلات على المسار والتي هي مساوية لـ N-1.

الشكل 3-3



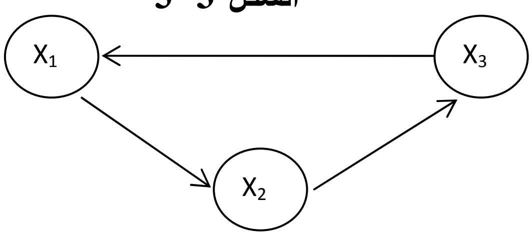
2-1-2- تعريف السلسلة: هي مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي، باستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير.

الشكل 3-4



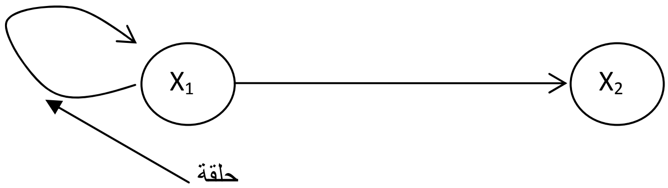
2-1-3- تعريف الدارة (Circuit): هي مسار مغلق على نفسه يكون فيه الطرف النهائي للقوس الاخير متصل بالطرف الابتدائي للقوس الأول كما في الشكل 3-5.

الشكل 3-5



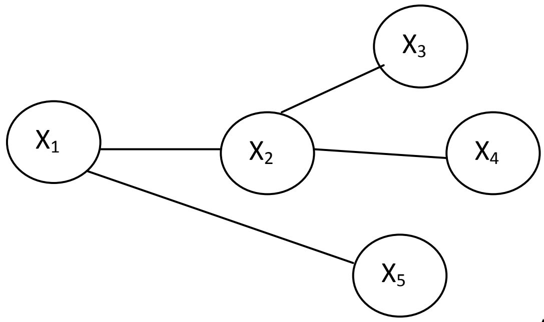
2-1-4- تعريف الحلقة : إذا كانت الوصمة من العقدة إلى نفسها، أي أن السهم ينطلق و يعود إلى نفس القمة كما هو موضح في لشكل 3-6.

الشكل 3-6



2-1-5- تعريف الشجرة (Tree): هي بيان مترابط بدون دارة، يحتوي على N قمة و N-1 حرف أو وصلة. كما في الشكل 3-7.

الشكل 3-7



2-2- التمثيل المصفوفي للبيان:

يمكن تمثيل البيان الموجه عن طريق مصفوفة مربعة من الرتبة N، ويمكن تمييز عدة انواع من المصفوفات نذكر منها:

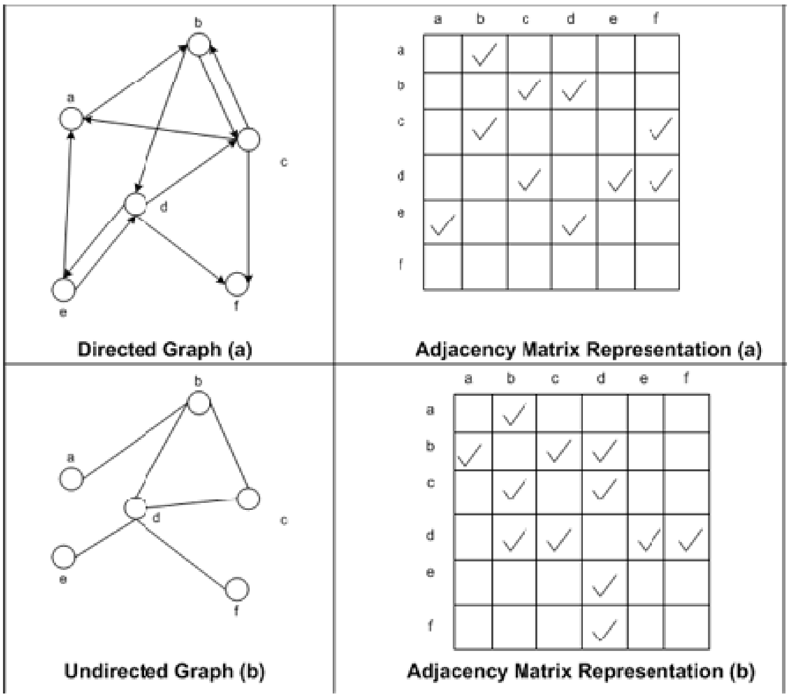
2-2-1- تمثيل البيان الموجه باستعمال مصفوفة تجاور بولينية (Boolean):

تكون مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix) التي نعطي لها الرمز (M)، تكون في هذه الحالة مربعة أي عدد الأسطر و الأعمدة هو عدد القمم، فنكتب ($M_{n,n}=[a_{ij}]$)، أما عناصر المصفوفة $[a_{ij}]$ فتأخذ:

- القيمة 1 أو القيمة true إذا كان يوجد وصلة موجهة من القمة x_i إلى القمة x_j
- القيمة 0 أو القيمة false إذا لم توجد علاقة بين القمة x_i و القمة x_j

نلاحظ بأن في حالة البيان غير الموجه ,تصبح هذه المصفوفة متناظرة بالنسبة إلى القطر الرئيسي،إذًا يصبح التمثيل على الشكل التالي:

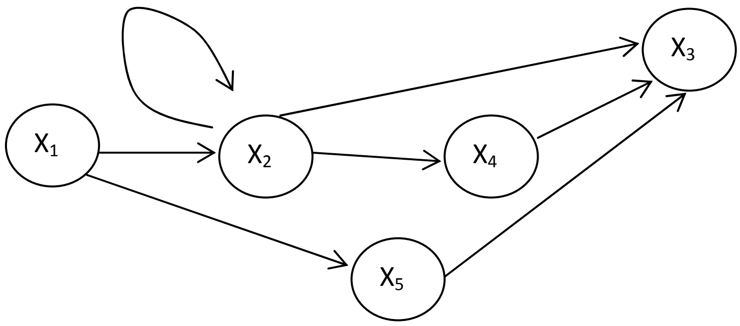
الشكل 3-8



2-2-1-1- مثال تطبيقي 1 (دراسة حالة):

اوجد المصفوفة البولينية للشكل الموالي:

الشكل 3-9



الحل:

أول شيء نقوم بكتابة المصفوفة 5×5 وهو عدد القمم في الشكل

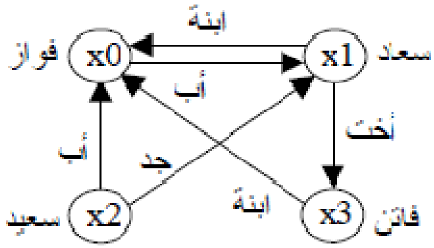
بعدها نقوم بوضع العدد 1 للتعبير عن العلاقة بين القمم و اتجاهها، ونضع 0 إن لم توجد علاقة فتكون المصفوفة كالتالي:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	0	1	1	1	0
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	0
X_5	0	0	1	0	0

2-2-2- تمثيل البيان الموجه باستعمال مصفوفة السعة أو الكلفة:

يمكن للبيان الموجه أن يبين كلفة الانتقال من عقدة إلى أخرى، مثال يمكن أن نبين نوع القرابة ما بين عدة أشخاص.

الشكل 3-10



تكون مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix) أيضا في هذه الحالة مربعة أي عدد الأسطر و الأعمدة هو عدد القمم، فنكتب ($M_{n,n}=[a_{ij}]$)، أما عناصر المصفوفة $[a_{ij}]$ فتأخذ:

- قيمة كلفة الانتقال، إذا كان يوجد وصلة موجهة من القمة x_i إلى القمة x_j
- القيمة (0) إذا لم توجد علاقة بين القمة x_i و القمة x_j

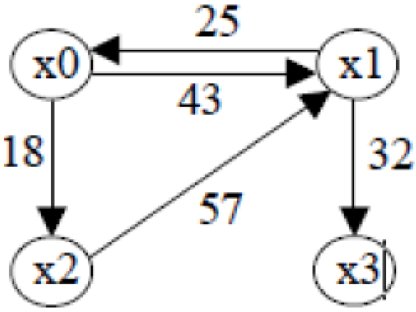
يتم التمثيل باستعمال مصفوفة السعة بالنسبة للشكل السابق 3-10 على الشكل التالي:

	X_0 (فواز)	X_1 (سعاد)	X_2 (سعيد)	X_3 (فاتن)
X_0 (فواز)	0	أب	0	0
X_1 (سعاد)	ابنة	0	0	0
X_2 (سعيد)	أب	جد	0	0
X_3 (فاتن)	ابنة	أخت	0	0

2-2-2-1- مثال تطبيقي 2 (دراسة حالة):

اوجد مصفوفة السعة بالنسبة للشكل الموالي:

الشكل 3-11



الحل:[14]

أول شيء نقوم بكتابة المصفوفة 5×5 وهو عدد القمم في الشكل

بعدها نقوم بوضع قيمة كلفة الانتقال للتعبير عن العلاقة بين القمم و اتجاهها، ونضع 0 إن لم توجد علاقة فتكون المصفوفة كالتالي:

	X_0	X_1	X_2	X_3
X_0	0	43	18	0
X_1	25	0	0	32
X_2	0	57	0	0
X_3	0	0	0	0

2-2-3- تمثيل البيان الموجه باستعمال مصفوفة المساقط بدون دارة:

تكون مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix) أيضا في هذه الحالة مربعة أي عدد الأسطر و الأعمدة هو عدد القمم، فنكتب ($M_{n,n}=[a_{ij}]$)، أما عناصر المصفوفة $[a_{ij}]$ فتأخذ:

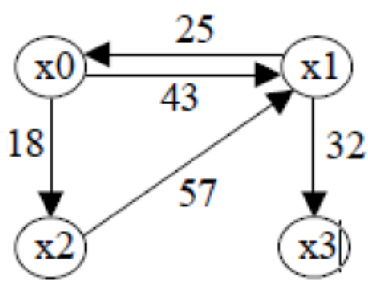
- القيمة 1، إذا كان يوجد وصلة تنطلق من القمة x_i
- القيمة (1-)، إذا كان يوجد وصلة تصل الى القمة x_i
- القيمة (0) إذا لم توجد علاقة بين القمة x_i و القمة x_j

فالقيمة 1 تمثل الطرف الابتدائي للقوس، و القيمة 1- تمثل الطرف النهائي للقوس، اما بقية قيم المصفوفة فتكون معدومة.

2-2-3-1- مثال تطبيقي 3 (دراسة حالة):

اوجد مصفوفة السعة بالنسبة للشكل السابق:

الشكل 3-11



[14] بالتصرف

الحل:[15]

نقوم بوضع القيمة1 لتمثيل الطرف الابتدائي للقوس، و القيمة 1− لتمثيل الطرف النهائي للقوس، و نضع 0 إن لم توجد علاقة فتكون المصفوفة كالتالي:

	X_0	X_1	X_2	X_3
X_0, X_1	1	−1	0	0
X_0, X_2	1	0	−1	0
X_1, X_0	−1	1	0	0
X_1, X_3	0	1	0	−1
X_2, X_1	0	−1	1	0

2-2-4- تمثيل البيان الموجه باستعمال مصفوفة الأقواس:

تكون مصفوفة التجاور في هذه الحالة مربعة أي عدد الأسطر و الأعمدة هو عدد القمم، فنكتب ($M_{n,n}=[a_{ij}]$)، أما عناصر المصفوفة $[a_{ij}]$ فتأخذ:

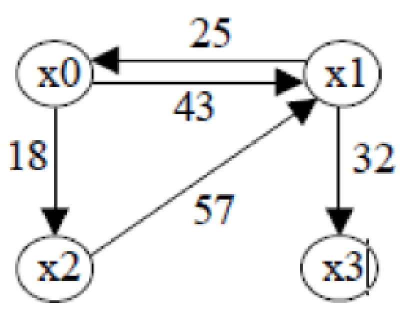
- القيمة x_i,x_j إذا كان يوجد وصلة موجهة من القمة x_i إلى القمة x_j
- القيمة (لا شيء) إذا لم توجد علاقة بين القمة x_i و القمة x_j

نلاحظ بان هناك تشابه بين مصفوفة الأقواس و المصفوفة البولينية والفرق هو في القيمة التي تأخذها المصفوفة في حال وجود وصلة موجهة من القمة x_i إلى القمة x_j ، حيث انها في هذه الحالة بدلا من ان تأخذ القيمة 1 للتعبير عن هذه العلاقة نضع رموز القمم.

2-2-4-1- مثال تطبيقي 4 (دراسة حالة):

اوجد مصفوفة الأقواس بالنسبة للشكل الموالي:

الشكل 3-11



الحل:[16]

أول شيء نقوم بكتابة المصفوفة 5×5 وهو عدد القمم في الشكل

بعدها نقوم بوضع رموز القمم للتعبير عن العلاقة بين القمم و اتجاهها، فتكون المصفوفة كالتالي:

[15] بالتصرف
[16] بالتصرف

	X_0	X_1	X_2	X_3
X_0		X_0, X_1	X_0, X_2	
X_1	X_1, X_0			X_1, X_3
X_2		X_2, X_1		
X_3				

2-3- تقديم البيان عن طريق الجداول:

يمكن تقديم أو تمثيل البيان عن طريق نوعين من الجداول:

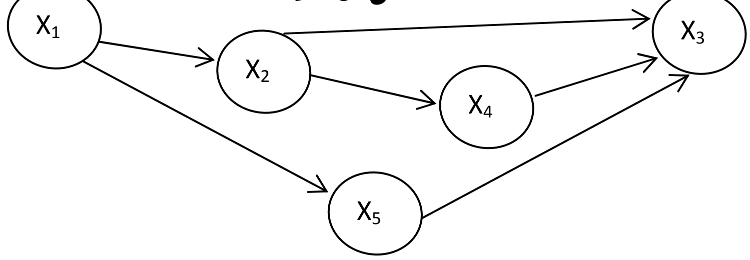
2-3-1- جداول اللواحق:

يقدم هذا الجدول في عمودين حيث يحتوي العمود الأول على القمم، بينما يحتوي العمود الثاني على اللواحق أي الأطراف النهائية.

2-3-1-1- مثال تطبيقي 5 (دراسة حالة):

قم بكتابة جدول اللواحق للشكل الموالي:

الشكل 3-9



الحل:

جدول اللواحق للشكل 3-9 يكتب كالتالي:

الجدول 3-1

القمم X	اللواحق S(x)
X_1	X_2, X_5
X_2	X_3, X_4
X_3	–
X_4	X_3
X_5	X_3

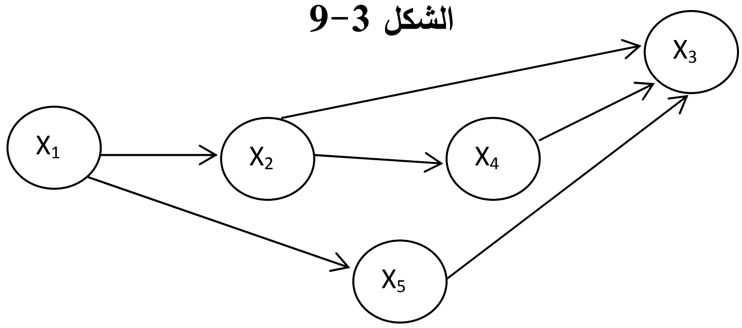
2-3-2- جداول السوابق:

يقدم هذا الجدول في عمودين حيث يحتوي العمود الأول على القمم، بينما يحتوي العمود الثاني على السوابق أي القمم التي تصل منها الأقواس.

2-3-2-1- مثال تطبيقي 6 (دراسة حالة):

قم بكتابة جدول السوابق للشكل الموالي:

الشكل 3-9



الحل:[17]

جدول السوابق للشكل 3-9 يكتب كالتالي:

الجدول 3-2

القمم X	السوابق P(x)
X_1	−
X_2	X_1
X_3	X_2, X_4, X_5
X_4	X_2
X_5	X_1

3- نظرية التدفق الأعظمي:

يستخدم نموذج أقصي تدفق في حل المشاكل المتعلقة بتحديد أقصي كمية من المواد (مثل أقصي عدد من السيارات في حالة تنظيم حركة المرور) يمكن تدفقها بين نقطتين عبر مسارات متعددة تتفاوت من حيث طاقتها، ولما كان كل مسار يتكون من فرع أو أكثر من الأفرع المتتابعة التي تصل بين نقطة المصدر ونقطة الوصول فإن طاقة أي مسار يحكمها أدنى طاقة يمثلها فرع معين من الفروع المكونة لهذا المسار.

هذا وتجدر الإشارة إلي أن التدفق عبر أي مسار يجب أن يحقق التوازن بمعني أن التدفق الداخل إلي نقطة معينة علي المسار يجب أن يساوي التدفق الخارج من هذه النقطة. فعلي سبيل المثال يفترض في حالة نقل المواد أن لا تخزن أي كمية من المواد في النقط الوسيط التي تقع بين نقطة المصدر ونقطة الوصول، وهو ما يعني أن أي مواد تصل إلي موقع معين تشحن بالكامل إلي الموقع الذي يليه حتى تصل إلي نقطة الوصول.

وعليه يمكن تعريف التدفق الأعظمي على انه اكبر إرسال ممكن بين مجموعة من المنابع و مجموعة من المصبات، تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في الشبكة.

ولإيجاد التدفق الأعظمي بين هذه المنابع و هذه المصبات يتم إستخدام خوارزمية تسمى خوارزمية فورد- فلكرسون.

[17] بالتصرف

فالمشكلة التي تعالجها خوارزمية فورد–فلكرسون هي البحث عن إمرار اكبر كمية ممكنة من المادة المراد نقلها عبر الأقواس المحدودة الطاقة إلى نقطة الخروج (s) دون اعتبار للتكاليف و التي لا تظهر أصلا في الشبكة. إن نمدجة مشكلة التدفق الأعظمي تتطلب قبل كل شيء توضيح مفهومين[18]

التدفق في البيان (أو الشبكة): هو التدفق الممكن في البيان من مجموعة المنابع (وحدات إنتاجية مثلا) إلى مجموعة من المصبات (مخازن مثلا) و الذي يهدف إلى إيجاد أعظم قيمة له في البيان تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في البيان.

شبكة النقل : نقصد بشبكة النقل كل بيان بدون دارة يحتوي على مدخل (قمة ابتدائية) نسميه مثلا (o) و مخرج (القمة النهائية) نسميها (s)، وتكون الأقواس فيه مقيمة بأرقام تدل على طاقة كل منها بحيث ان القمة(o) تنطلق منها جميع الأقواس ولا يصل إليها أي قوس، بينما القمة (s) تصل إليها الأقواس و لا ينطلق منها أي قوس. الأقواس يمكن أن تكون أنابيب لنقل المواد السائلة آو الغازية (ماء، بترول، غاز طبيعي،...)، كما يمكن أن تكون أسلاك ربط كهربائي أو هاتفي كما يمكن أن تعبر عن حمولة و سائل النقل المستخدمة (بواخر، طائرات،شاحنات) أو غير ذلك[19].

ومن التطبيقات العملية لاستخدام نموذج أقصى تدفق نجد: تخطيط شبكات مياه الشرب والصرف الصحي، وتخطيط شبكات مياه الري والصرف الزراعي، تخطيط شبكات نقل الكهرباء وتخطيط شبكات الغاز الطبيعي، تخطيط تدفق السيارات عبر الشوارع المختلفة (حركة المرور)، وتخطيط نقل المنتجات عبر وسائل النقل المختلفة (بحرية – برية – جوية).[20]

3-1- صياغة مشكلة التدفق الأعظمي:

ليكن لدينا البيان الموجه و الغير متماثل $G(X,U)$ يحتوي على n قمة، x_1 تمثل مدخل البيان و القمة x_n مخرج البيان ، نرفق كل قوس $(x_i,x_j) \in U$ بالكمية الصحيحة و الغير سالبة C_{ij} والتي تمثل قدرات هذا القوس، يشكل لنا هذا البيان شبكة نقل مقيمة بقدرات مختلفة ونرمز لها ب $T(X,U,C)$ حيث:

$$C = \{c_{ij}, (\mathrm{x_i}, \mathrm{x_j}) \in \mathrm{U}\}$$

نسمي تدفق في الشبكة $T(X,U,C)$ مجموع التدفقات غير سالبة (φ) حيث:

$$\varphi = \{\varphi_{ij}, (\mathrm{x_i}, \mathrm{x_j}) \in \mathrm{U}\}$$

هذا التدفق ممكن ، يحقق الشروط التالية:

$$\varphi_{ij} \le c_{ij}\ , (\mathrm{x_i}, \mathrm{x_j}) \in \mathrm{U} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\mathrm{x_{j\in U^+_{x_i}}}} \varphi_{ij} &= \textstyle\sum_{\mathrm{x_{j\in U^-_{x_i}}}} \varphi_{ji} \\ \textstyle\sum_{\mathrm{x_{j\in U^+_{x_1}}}} \varphi_{1j} &= \textstyle\sum_{\mathrm{x_{j\in U^-_{x_n}}}} \varphi_{jn} = \varphi(\varphi) \end{aligned} \ldots\ldots\ldots (2)$$

[18] Jean pierre Védrine, Elisabeth Bringuier & Alain Brisard. « Techniques quantitatives de gestion », Vuibert gestion, Paris, 1985 . p 177.

[19] محمد راتول،مرجع سبق ذكره. ص 272.

[20] جمال عبد العزيز صابر، "بحوث العمليات في المحاسبة"،جامعة القاهرة، مصر،2009. ص 105.

القيد (1) متعلق بتحقيق شروط عدم تجاوز قدرات الأقواس (x_i,x_j)

القيد (2) متعلق بتحقيق **قاعدة كيرشوف (Loi Kirchhoff)** و المتمثلة في تساوي كمية التدفقات الداخلة إلى كل قمة مع كمية التدفقات التي تخرج منها.

إضافة إلى شرط أن كمية تدفقات التي تخرج من القمة x_1 مساوية لكمية التدفقات التي تدخل القمة x_n .

تتمثل المشكلة في إيجاد أعظم تدفق في الشبكة $\boldsymbol{\varphi}(\varphi)$ ، و يمكن صياغة هذه المشكلة في نموذج برمجة خطية وحلها بطريقة السمبلكس، غير أن هناك طرق أكثر كفاءة و سهلة التطبيق وأكثرها استخداما هي خوارزمية فورد فلكرسون.

3-2- خوارزمية فورد فلكرسون:

تتكون خوارزمية فورد فلكرسون من أربعة مراحل:

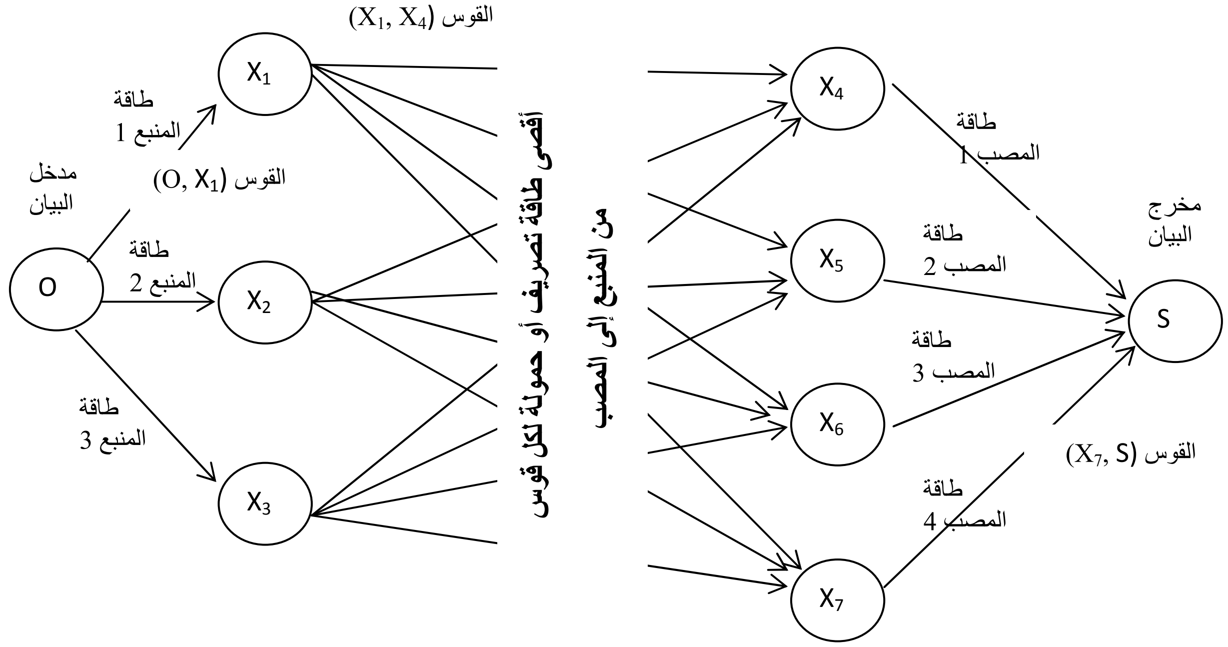
المرحلة الأولى : رسم البيان

يتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

- نحدد نقطة ما نسميها مدخل البيان و نرمز لها ب (o)
- نحدد قمم المنابع i ثم نصل بين قمة المدخل و قمة المنابع بأقواس طاقة كل منها (أي حمولتها) تساوى طاقة تصريف كل منبع.
- نحدد قمم المصبات (إلى اليمين من المنابع)، ونصلها بالمنابع عن طريق أقواس و نحدد طاقة تصريف كل قوس.
- نحدد نقطة أخرى خارج البيان إلى اليمين من المصبات و نسميها مخرج البيان و نرمز لها ب (s).
- نصل النقطة (s) بمختلف المصبات بأقواس طاقة تصريفها تساوي طاقة استقبال كل مصب.

و يصبح البيان كما يلي:

الشكل 3-10



المرحلة الثانية : تمرير الجريان أو التدفق حسب المعقول

نمرر في الشبكة G(X,U) أعلاه، جريان (عدد المارين، التعبئة ،تدفق سلعي...)، بصورة معقولة متطابقا مع الخصائص التالية:

الخاصية 1: أن التدفق عبر الأقواس لا يجب أن يكون عدد سالب

$$\boldsymbol{\varphi}(u) \geq 0, u \in \mathrm{U}$$

الخاصية 2: كمية التدفقات الداخلة مساوية لكمية التدفقات الخارجة عند كل قمة (قاعدة كرشوف) أي:[21]

$$\sum_{u \in \mathrm{U}_{\mathrm{x}}^{+}} \varphi(u) - \sum_{u \in \mathrm{U}_{\mathrm{x}}^{-}} \varphi(u) = 0$$

$\mathrm{U}_{\mathrm{x}}^{-}$: تمثل الأقواس الساقطة نحو داخل القمة x

$\mathrm{U}_{\mathrm{x}}^{+}$: تمثل الأقواس الساقطة نحو خارج القمة x

الخاصية 3: كمية التدفق $\boldsymbol{\varphi}(u)$ في كل قوس (u) لا يجب أن تتجاوز قدرته (طاقته) $C(u)$

يمثل هذا التدفق حلا أساسيا أوليا و الذي سوف نقوم بتحسينه وتكون قيمته φ :

$$\varphi = \sum_{u \in \mathrm{U}_{o}^{+}} \varphi(u) = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\mathrm{s}}^{-}} \varphi(u)$$

$\mathrm{U}_{\mathrm{s}}^{-}$: تمثل الأقواس الساقطة نحو داخل القمة (s) والتي تمثل قمة الوصول.

U_{o}^{+} : تمثل الأقواس الساقطة نحو خارج القمة (o) والتي تمثل قمة الانطلاق في البيان.

نقول عن جريان انه تام، [22]إذا كان كل مسار ينطلق من المدخل البيان(o) و يصل إلى المخرج (s) يحتوي على الأقل على قوس (u) مشبع (يمثل بخط مزدوج في الشبكة)، ونقصد بقوس مشبع كل قوس (u) يحقق ما يلي:[23]

$$\boldsymbol{\varphi}(u) = C(u)$$

نقوم بتحسين التدفق (الجريان) حتى يكون كل مسار من مدخل البيان إلى المخرج يحتوي على الأقل قوس مشبع وذلك بإتباع منهجية المرحلة الثالثة أدناه.

المرحلة الثالثة : البحث عن أمثل تدفق (التأشير)

ننطلق في هذه المرحلة من القمة (o) مدخل البيان ونقوم بما يلي:[24]

- نؤشر القمة (o) بالإشارة (+)
- تحديد قوس غير مشبع الذي ينطلق من القمة (o) إلى القمة i ونقوم بتأشير القمة i ب (o^+) ونطرح

[21] F.Droesbeke , M.hallin, CL.Lefevre, « les graphes par l’exemple », Edition ellipes,Aubin imprimeur, paris, 2001.P179

[22] **ملاحظة** : الجريان التام لا يعني الجريان الأعظمي

[23] Boualem Benmazouz, « recherche opérationnelle de gestion », Edition Atlas, Algérie, 1995.P187

[24] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص 274.

السؤال التالي:

هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة j؟

- إذا كان الجواب "**نعم**" نضع بجوار القمة j العلامة (i^+) إذا كان الجواب "**لا**" فإننا نقوم بطرح السؤال الموالي:

هل يوجد قوس غير معدوم) قوس به حمولة (ينطلق من قمة ما k ويصل إلى القمة i ؟ إذا كان الجواب "نعم" نضع بجوار القمة k العلامة (i^-)

ثم نعاود طرح السؤال الأول من جديد و في كل مرة نؤشر القمة التي نصل إليها ب (+) أو (−) القوس السابق أو اللاحق حسب الحالة دون إعادة تأشير القيم التي تم تأشيرها من قبل.

- إذا استحالت الإجابة و كنا لم نصل إلى تأشير القمة (s) مخرج البيان **فان التدفق يكون أعظمي و الحل هو الحل الأمثل** ، أما إذا تم تأشير قمة (s) نقوم بتحديد السلسلة المؤشرة و نبدأ بتحسين الحل بإضافة أو إنقاص انسب كمية من الأقواس المكونة للسلسلة بحيث يجب مراعاة عدم تجاوز القيود الطاقة القصوى للأقواس و عدم إحداث أقواس بقيمة سالبة.
- نعاود من جديد الخطوات السابقة ويتم الوصول إلى الحل الأمثل (التدفق الأعظمي) لما يستحيل تأشير القمة (s) مخرج البيان و فق الخوارزمية المذكورة أعلاه.

3-2-1- مثال تطبيقي 7 (دراسة حالة):

نفرض أن الجزائرية للمياه لديها ثلاث خزانات رئيسية للمياه بولاية بومرداس وهي X_1، X_2 و X_3 تقوم بتموين أربع بلديات بالولاية و لتكن Y_1، Y_2 ، Y_3 و Y_4 بحيث أن الخزان X_1 يستطيع تصريف 45 لتر/ثا ، و الخزان X_2 يستطيع تصريف 25 لتر/ثا، و الخزان X_3 يستطيع تصريف 20 لتر/ثا.

بينما تقدر احتياجات البلدية Y_1 ب 30 لتر/ثا، و البلدية Y_2 ب 10 لتر/ثا و البلدية Y_3 ب 20 لتر/ثا و البلدية Y_4 ب 30 لتر/ثا.

توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالمناطق السكنية بالبلديات طاقة تصريف كل منها محدودة وهي موضحة في الجدول التالي:

الجدول 3-3

المصب (البلديات) / المنبع (الخزانات)	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	10	15	−	20
X_2	20	5	15	−
X_3	−	−	10	10

المطلوب:

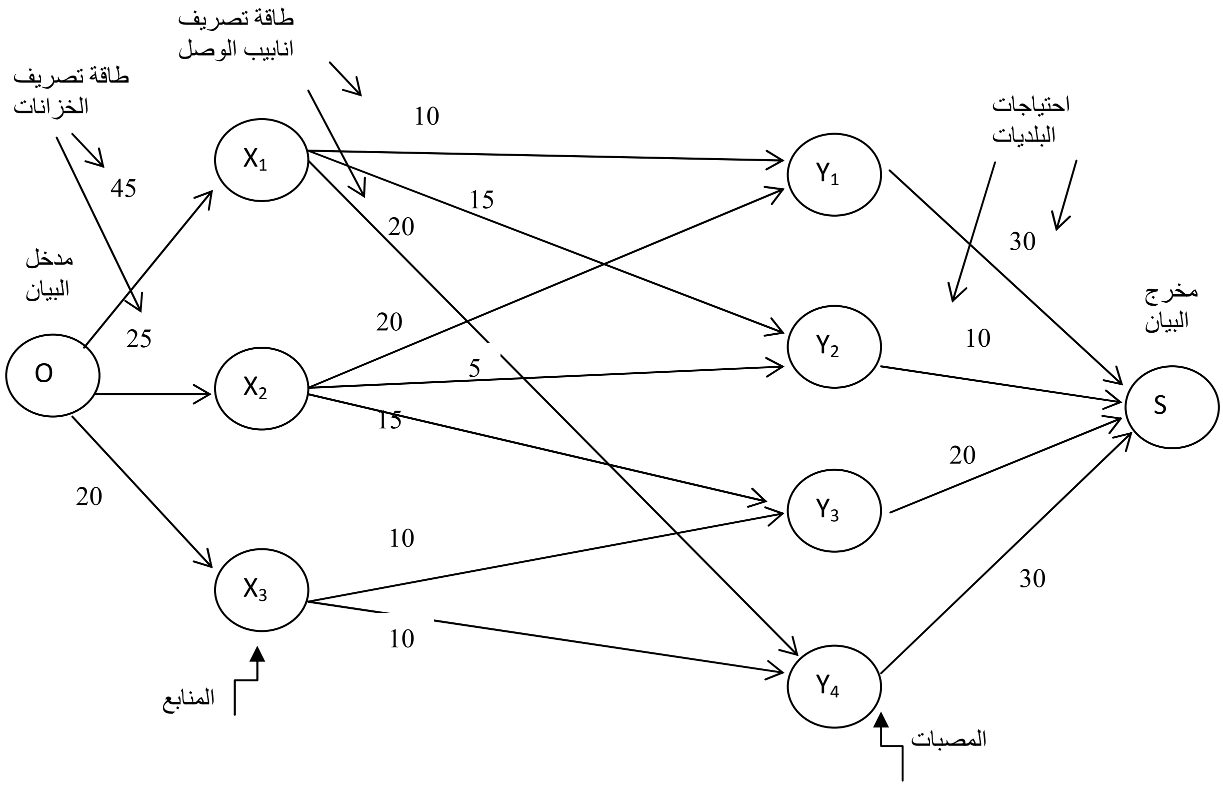
ما هو أفضل تموين ممكن (أعظم تدفق ممكن من مختلف الخزانات الثلاث)، لمختلف البلديات الأربع عبر الشبكة النقل المتاحة، في ظل قيود طاقة تصريف الأنابيب.

الحل:[25]

المرحلة الأولى : رسم البيان

نقوم برسم البيان للمسالة استنادا للشكل 3−10 أعلاه فنحصل على الشكل 3−11.

الشكل 3−11



المرحلة الثانية : تمرير الجريان أو التدفق حسب المعقول مع التأكد من احترام الخصائص الثلاث الأساسية وهي:

<u>الخاصية 1:</u> أن التدفق عبر الأقواس لا يجب أن يكون عدد سالب

<u>الخاصية 2:</u> كمية التدفقات الداخلة مساوية لكمية التدفقات الخارجة عند كل قمة (قاعدة كرشوف)

<u>الخاصية 3:</u> كمية التدفق في كل قوس لا يجب أن تتجاوز قدرته (طاقته)

وعليه نبدأ من القمة o و نرسل أي كمية نشاء، مع مراعاة قدرة تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية، فلو أرسلنا عبر القوس (o,x_3) الكمية 20 لتر/ثا، في هذه الحالة نرى أن قدرة تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية x_3. هي:

---

[25] بالتصرف

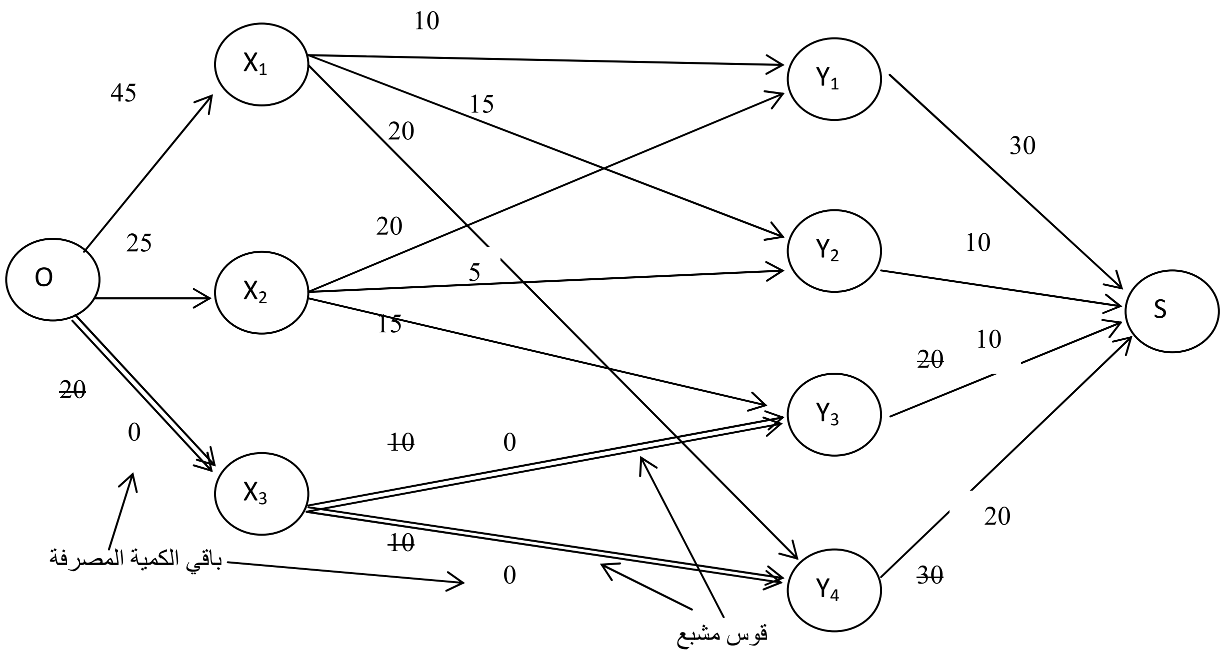
$(x_3,y_3)+(x_3,y_4)$ =10+10=20 لتر/ثا وهو يساوي طاقة التصريف عبر القوس (o,x_3) وعليه يمكن تصريف كل الكمية عبر الأقواس (x_3,y_3) و(x_3,y_4) وتشبع هذه الأقواس كليتا ونعبر عنها في هذه الحالة بخط مضاعف.

- الكمية 20 لتر/ثا التي مررناها عبر القوس (o,x_3) و التي وصلت الى القمة x_3 يمكن تمريرها كالتالي:

- نمرر 10ل/ثا عبر القوس (x_3,y_3) وبذالك يشبع هذا القوس، بعدها نمرر الكمية التي وصلت الى y_3 عبر القوس (y_3,s)، وبما ان الطاقة القصوى لهذا القوس هي 20ل/ثا، هذا يعني ان القوس (y_3,s) لم يشبع ويبقى قادرا على تصريف 20−10=10ل/ثا، لذالك نشطب القيمة 20 و نضع القيمة 10 وهي طاقة التصريف المتبقية للقوس(y_3,s) .
- نعود إلى القمة x_3 و نمرر الكمية المتبقية وهي 10ل/ثا عبر القوس (x_3,y_4) وبذالك يشبع هذا القوس، (نميز القوس المشبع بخط مزدوج)، بعدها نمرر الكمية التي وصلت إلى y_4 عبر القوس (y_4,s)، وبما أن الطاقة القصوى لهذا القوس هي 30ل/ثا ، هذا يعني أن القوس (y_4,s) لم يشبع ويبقى قادرا على تصريف 30−10=20ل/ثا، لذالك نشطب القيمة 30 و نضع القيمة 20 وهي طاقة التصريف المتبقية للقوس(y_4,s) .

ونلخص هذه العمليات في الشكل 3−12 أدناه

الشكل 3−12



لحد الآن تم تصريف كل الكمية التي عبرت من خلال القوس (o,x_3) ووصلت إلى القمة s.

الآن نحاول تصريف اكبر كمية عبر القوس (o,x_2)، و بما أن قدرة تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية x_2 للقوس(o,x_2) هي:

$(x_2,y_1)+(x_2,y_2)+(x_2,y_3)=20+5+15=40$ لتر/ثا وهو اكبر من طاقة التصريف عبر القوس (o,x_2) وعليه يمكن تصريف الكمية القصوى عبر الأقواس (o,x_2) وهي 25ل/ثا، وتشبع هذا الأقواس ونعبر عنه في هذه الحالة بخط مضاعف.

- الكمية 25 ل/ثا التي تصل إلى القمة x_2 عبر القوس (o,x_2)، يتم تصريفها كالتالي:

- نمرر 5 ل/ثا عبر القوس (x_2,y_2) وبذالك يشبع هذا القوس،(دائما يجب البدء في التصريف بأقل قيمة مراعاتا للخاصية الثالثة للمرحلة الثانية[26])، بعدها نمرر الكمية التي وصلت إلى y_2 عبر القوس (y_2,s)، وبما أن الطاقة القصوى لهذا القوس هي 10 ل/ثا، هذا يعني أن القوس (y_2,s) لم يشبع ويبقى قادرا على تصريف 10−5=5 ل/ثا، لذالك نشطب القيمة 10 و نضع القيمة 5 وهي طاقة التصريف المتبقية للقوس(y_2,s) . وعليه الكمية المتبقية في القمة x_2 هي 20 ل/ثا.
- نعود إلى القمة x_2 ، ونلاحظ انه رغم إمكانية تمرير الكمية 15 ل/ثا عبر القوس (x_2,y_3)، فانه وبحكم أن طاقة القصوى المتبقية للقوس الذي يليه (y_3,s) هي 10ل/ثا[27] ، لذلك فان أقصى ما يمكن تمريره عبر القوس (x_2,y_3) هي الكمية 10 ل/ثا وتبقى طاقة تصريف فائضة تساوي 5 ل/ثا.

  بعدها نمرر الكمية التي وصلت إلى y_3 عبر القوس (y_3,s)، وبما أن الطاقة القصوى المتبقية لهذا القوس هي 10 ل/ثا، هذا يعني أن القوس (y_3,s) يشبع ويمثل بخط مضاعف.
- إن الكمية المتبقية عند القمة x_2 هي 25−5−10=10 ل/ثا، وعليه سنحاول تمرير هذه الكمية عبر القوس (x_2,y_1)، وبحكم أن طاقة القصوى للقوس الذي يليه (y_1,s) هي30 ل/ثا ، لذلك فان أقصى ما يمكن تمريره عبر القوس (x_2,y_1) هو كل الكمية المتبقية أي 10 ل/ثا . هذا يعني أن القوس (x_2,y_1) يشبع ويمثل بخط مضاعف.

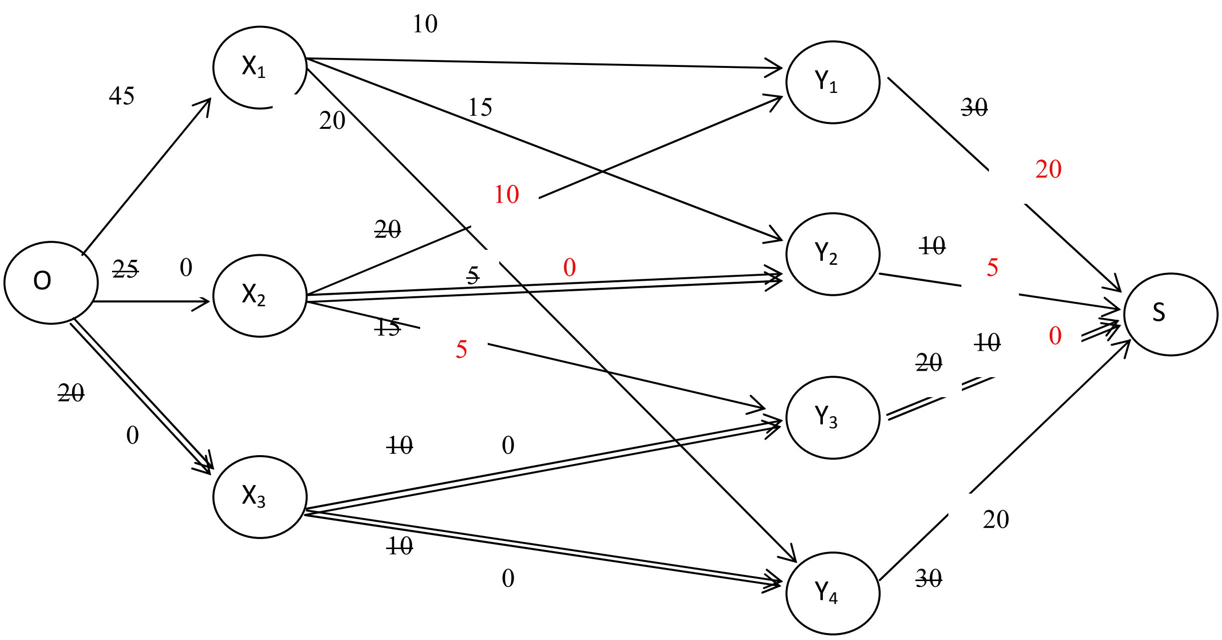
  بعدها نمرر الكمية التي وصلت إلى y_1 عبر القوس (y_1,s)، وبما أن الطاقة القصوى لهذا القوس هي 30 ل/ثا، هذا يعني أن القوس (y_1,s) لم يشبع ويبقى قادرا على تصريف 30−10=20ل/ثا، لذالك نشطب القيمة 30 و نضع القيمة 20 وهي طاقة التصريف المتبقية للقوس(y_1,s) .

  ونلخص هذه العمليات في الشكل 3−13 أدناه

[26] **تذكير:** الخاصية 3: كمية التدفق في كل قوس لا يجب أن تتجاوز قدرته (طاقته)، بالتصرف

[27] انظر الشكل 3-12.

الشكل 3-13



لحد الآن تم تصريف كل الكمية التي عبرت من خلال القوس (o,x_2) ووصلت إلى القمة s.

الآن نحاول تصريف اكبر كمية عبر القوس (o,x_1)، و بما أن قدرة التصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية x_1 للقوس (o,x_1) هي:

$(x_1,y_1)+(x_1,y_2)+(x_1,y_4)=20+15+20=55$ لتر/ثا وهو اكبر من طاقة التصريف عبر القوس (o,x_1) وعليه يمكن تصريف الكمية القصوى عبر الأقواس (o,x_1) وهي 45 ل/ثا، غير انه يلاحظ انه لو تم تمرير كل هذه الكمية فانه لا بد من الإشباع الكلي للأقواس (x_1,y_1)،(x_1,y_2)،(x_1,y_4) ولو تم ذلك فان القوس (y_2,s) لا يتحمل لان الطاقة المتبقية له هي 5 ل/ثا، لذالك لا يمكن تمرير سوى 5 ل/ثا عبر القوس (x_1,y_2) الذي يسبقه، وتبقى طاقة غير مستغلة عبره تقدر ب $15-5=10$ ل/ثا ويشبع بذالك القوس(y_2,s).

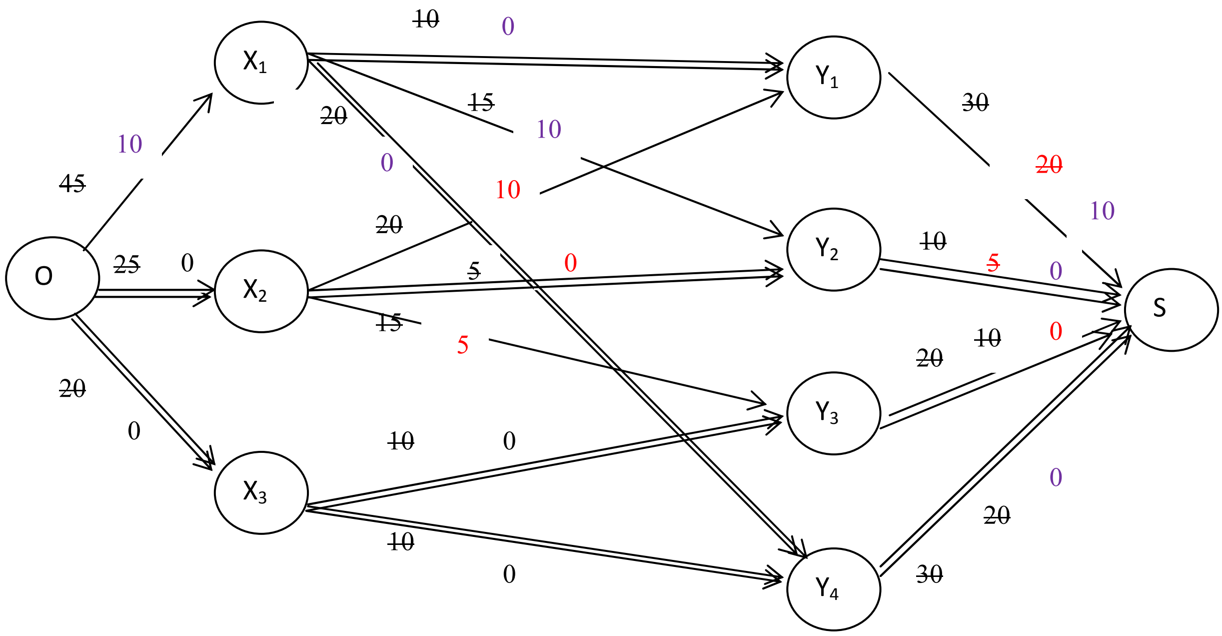
إذن لا يمكن تمرير عبر القوس (o,x_1) سوى 35 ل/ثا ولا يشبع هذا القوس اذ تبقى طاقة زائدة تقدر ب 10 ل/ثا.

- فالكمية التي تصل الى القمة x_1 هي اذن 35 ل/ثا وتصرف كالتالي:
  - عبر القوس (x_1,y_2) تصرف الكمية 5 ل/ثا كما اشرنا لذلك اعلاه
  - نمرر 20 ل/ثا عبر القوس (x_1,y_4) وبذالك يشبع هذا القوس تماما، بعدها نمرر الكمية التي وصلت إلى y_4 عبر القوس (y_4,s)، وبما أن الطاقة القصوى المتبقية لهذا القوس هي 20 ل/ثا، هذا يعني أن القوس (y_4,s) يشبع بدوره.

و تكون بذالك كل الكميات التي خرجت من المنبع o و المقدرة ب 80 ل/ثا قد وصلت إلى المصب s.

ونلخص العمليات السابقة في الشكل 3-14 أدناه

الشكل 3-14



ملاحظة: في نهاية المرحلة الثانية أي بعد تمرير الجريان أو التدفق حسب المعقول، نلاحظ أن الشكل 3-14 يحقق الخصائص الثلاث الأساسية التي رأيناها سابقا و بالأخص (قاعدة كرشوف).

إن التدفق الذي حصلنا عليه لحد الآن (لشكل 3-14) هو تدفق يظهر حلا أساسيا أوليا يمكن التعبير عنه من خلال الجدول التالي:

الجدول 3-4

المصب (البلديات) / المنبع (الخزانات)	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	الكميات المصرفة
X_1	10	15	-	20	**35**
X_2	20	5	15	-	**25**
X_3	-	-	10	10	**20**
الكميات المستقبلة	**20**	**10**	**20**	**30**	**80**

المرحلة الثالثة : البحث عن أمثل تدفق (التأشير)

بعد الحصول على الحل الأساسي الأول يتم اختبار هذا الحل إذا كان امثلا أم لا، و يتم ذالك بتطبيق المرحلة الثالثة من خوارزمية فورد–فلكرسون، كما يلي:

- نأشر القمة o بالإشارة +، ونطرح السؤال: هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة o؟
  الإجابة: نعم وهو القوس (o,x_1) ونضع بجوار القمة x_1 الرمز o^+ .
- **في القمة x_1 :** هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة x_1؟

الإجابة: نعم وهو القوس (x_1,y_2) ونضع بجوار القمة y_2 الرمز x_1^+ .

- **في القمة** y_2: هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة y_2؟

الإجابة: لا يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة y_2.

نطرح السؤال البديل وهو هل يوجد قوس غير معدوم يصل الى القمة y_2

الإجابة: نعم وهو القوس (x_2,y_2) ونضع بجوار القمة x_2 الرمز y_2^- .

- **في القمة x_2** : هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة x_2؟

الإجابة: نعم وهو القوس (x_2,y_1) ونضع بجوار القمة y_1 الرمز x_2^+ .

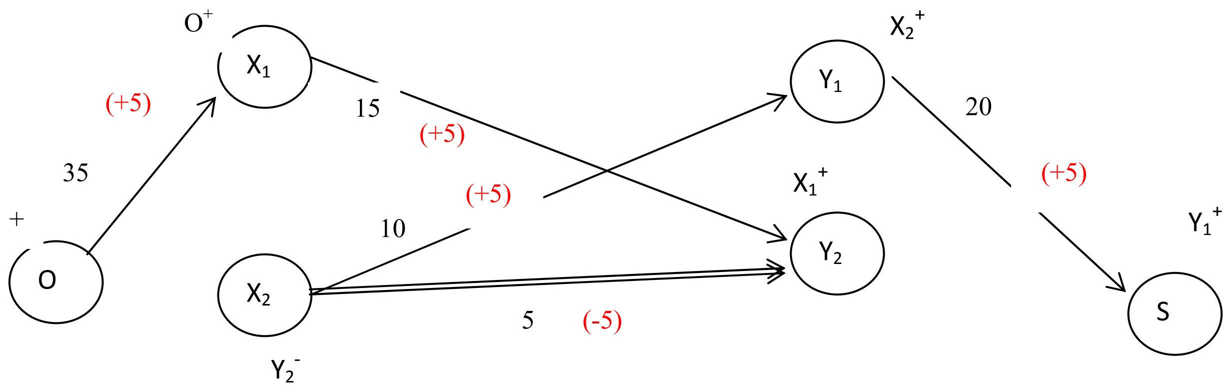
- **في القمة** y_1 : هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة y_1؟

الإجابة: نعم وهو القوس (y_1,s) ونضع بجوار القمة s الرمز y_1^+ .

استنتاج: بما أننا قد وصلنا لتأشير قمة الخروج أو المصب s فالتدفق غير امثلي و بالإمكان تحسينه.

حسب ما سبق فانه يمكننا رسم مسار أو سلسلة تحسين الحل كالتالي:

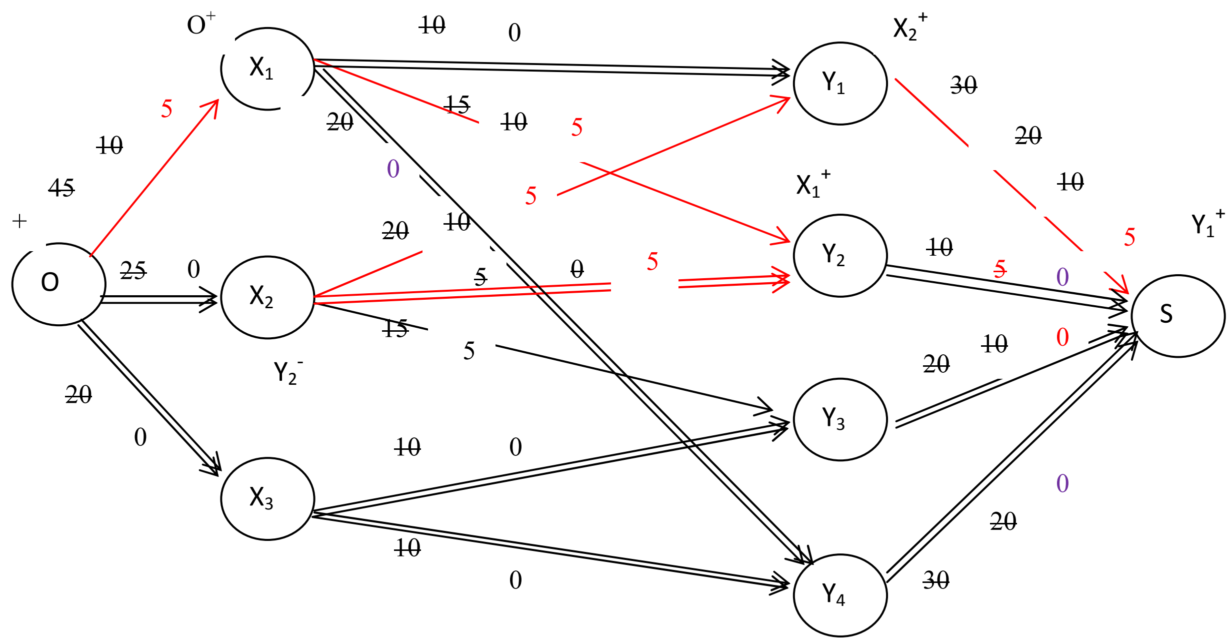
الشكل 3-15



ولتحسين الحل يجب الزيادة في الأقواس (o,x_2)، (x_1,y_2)، (x_2,y_1) و (y_1,s) و الإنقاص في الأقواس (y_2,x_2)، بحيث يسمح ذلك بتحقيق قاعدة كورشوف في كل قمة، ونلاحظ انه لا يمكن تخفيض قدرة تصريف القوس (x_2,y_2) بأكثر من 5 ل/ثا لان ذلك يؤدي إلى قيمة سالبة[28]، لذالك نضيف القيمة 5 إلى كل أقواس السلسلة أعلاه باستثناء القوس (x_2,y_2) فإننا نطرح منه القيمة 5 ويصبح القوس صفري أي لا ينقل عبره شيء، ويصبح البيان الجديد كالتالي:

[28] **تذكير**: **الخاصية 1:** أن التدفق عبر الأقواس لا يجب أن يكون عدد سالب

الشكل 3-16



نعيد التأشير من جديد تماما كما فعلنا في المرحلة السابقة.

- نأشر القمة o بالإشارة +، ونطرح السؤال: هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة o؟

  الإجابة: نعم وهو القوس (o,x_1) ونضع بجوار القمة x_1 الرمز o^+ .
- **في القمة x_1** : هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة x_1؟

  الإجابة: نعم وهو القوس (x_1,y_2) ونضع بجوار القمة y_2 الرمز x_1^+ .
- **في القمة y_2**: هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة y_2؟

  الإجابة: لا يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة y_2.

  نطرح السؤال البديل وهو هل يوجد قوس غير معدوم (أي به حمولة) يصل إلى القمة y_2

  الإجابة: لا يوجد، و بالتالي فانه يستحيل علينا الوصول إلى تأشير قمة الخروج s.

  وعليه فان الحل المتوصل إليه هو حل امثل، أي أننا وصلنا إلى أعظم تدفق كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول 3-5

المصب (البلديات) / المنبع (الخزانات)	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	الكميات المصرفة
X_1	10	15	–	20	**40**
X_2	20	5	15	–	**25**
X_3	–	–	10	10	**20**
الكميات المستقبلة	**25**	**10**	**20**	**30**	**85**

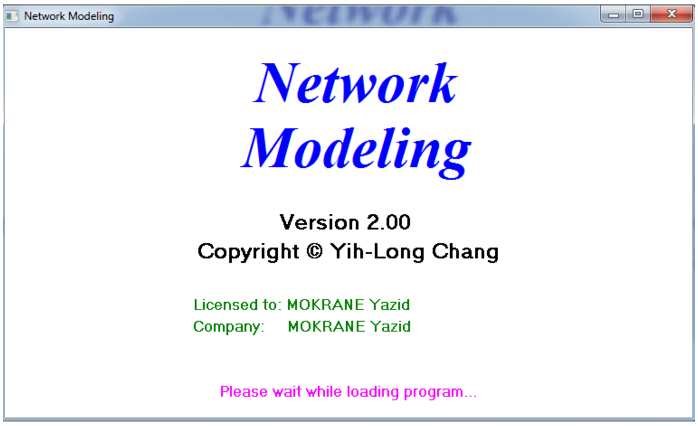
يمكننا أيضا حل المثال السابق عن طريق برنامج WinQSB كما يلي:

2-2-2- مثال تطبيقي 8 (دراسة حالة): عن طريق برنامج WinQSB

سنحاول فيما يلي حل المسالة الواردة في المثال التطبيقي 7 عن طريق برنامج WinQSB ونقارن بين النتائج[29]

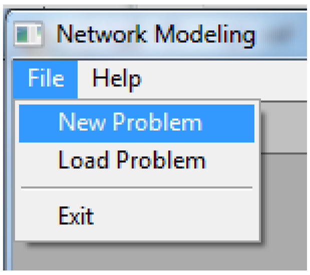
- أول خطوة يجب القيام بها وهي فتح تطبيق Network modeling لبرنامج WinQSB

الشكل 3-17



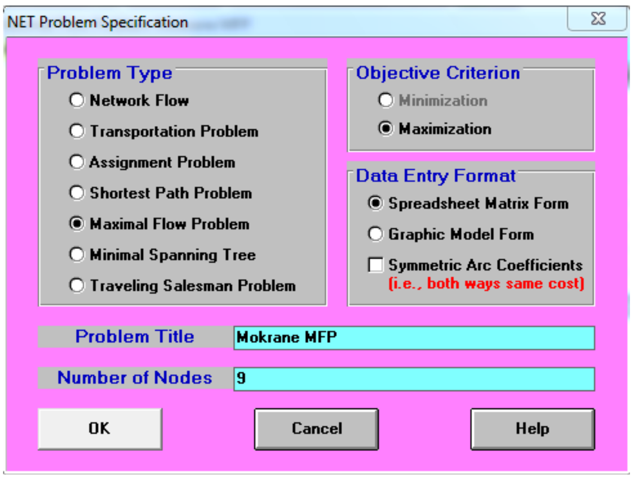
- بعدها نقوم بفتح مسالة جديدة عن طريق الامر New problem من القائمة File

الشكل 3-18



- بعدها نقوم بادخال خصائص المسالة كما يظهر في الشكل الموالي:

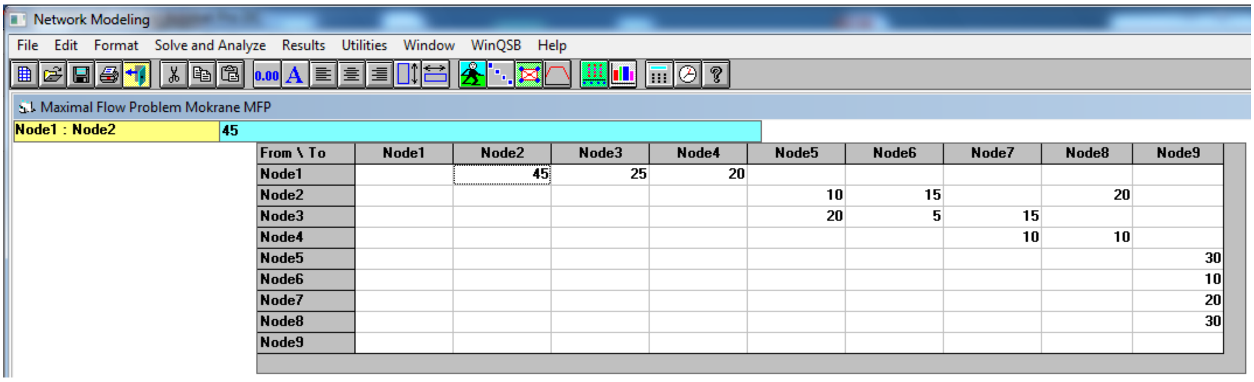
الشكل 3-19



[29] بالتصرف

- بعد اضغط على الزر ok تظهر لنا نافذة إدخال البيانات و نقوم بإدخال البيانات كالتالي:

الشكل 3-20



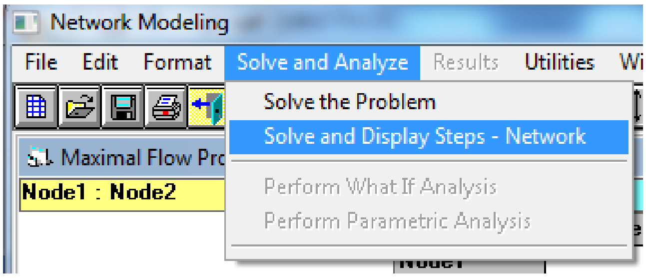
From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7	Node8	Node9
Node1		45	25	20					
Node2					10	15		20	
Node3					20	5	15		
Node4							10	10	
Node5									30
Node6									10
Node7									20
Node8									30
Node9									

في البرنامج أعلاه تمثل العقدة Node1 المنبع أو المدخل المشار له في المثال التطبيقي 7 بالقيمة o، و تمثل العقدة Node9 المصب أو المخرج المشار له في المثال التطبيقي 7 بالقيمة s.

بعد ملء الجدول نختار الحل التدريجي أو النهائي بصورة بيانية أو عددية

- لإظهار الحل التدريجي أو النهائي بصورة بيانية نقوم باختيار الأمر Solve and display steps من القائمة Solve and analyse كما يظهر في الشكل الموالي:

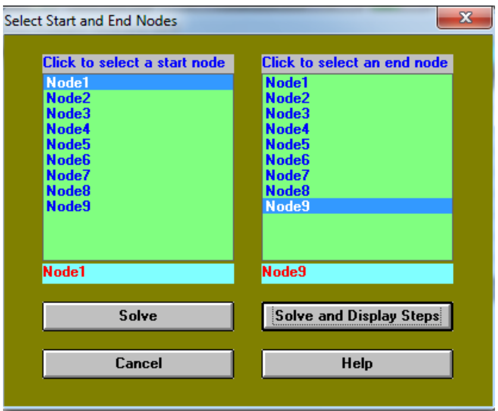
الشكل 3-21



- فتظهر النافذة التي من خلالها يتم تحديد مدخل و مخرج الشبكة كما يلي:

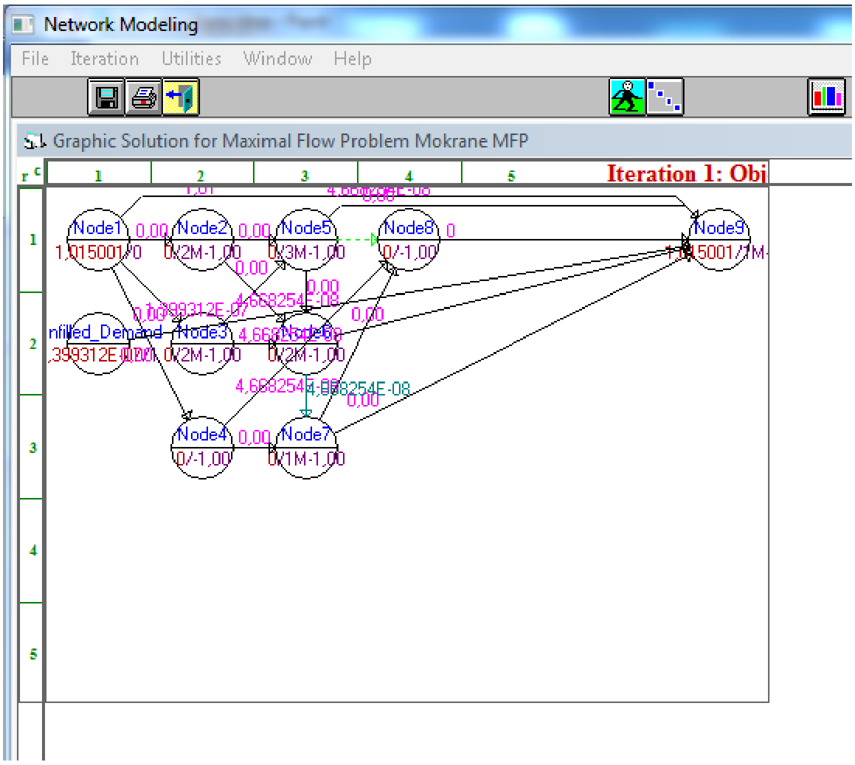
بالنسبة لهذه الحالة نختار العقدة Node1 كمنبع أو مدخل و العقدة Node9 كمصب أو مخرج

الشكل 3-22



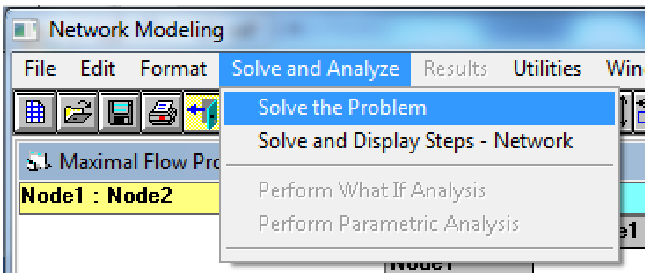
- بعد الضغط غلى الزر Solve and display steps نحصل على مخطط للشبكة الأولية كالتالي:

الشكل 3-23



- و لإظهار الحل النهائي بصورة عددية نقوم باختيار الأمر Solve the problem من القائمة Solve and analyse كما يظهر في الشكل الموالي:

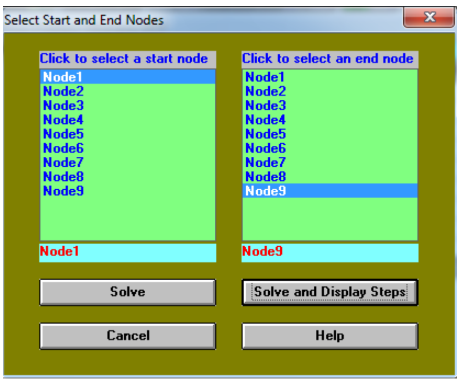
الشكل 3-24



- فتظهر النافذة التي من خلالها يتم تحديد مدخل و مخرج الشبكة كما يلي:

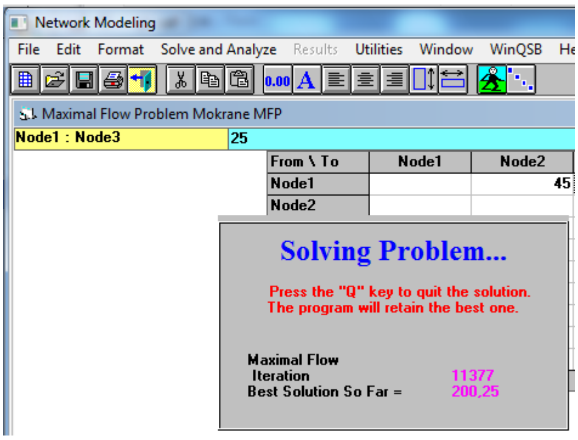
بالنسبة لهذه الحالة نختار العقدة Node1 كمنبع أو مدخل و العقدة Node9 كمصب أو مخرج

الشكل 3-25



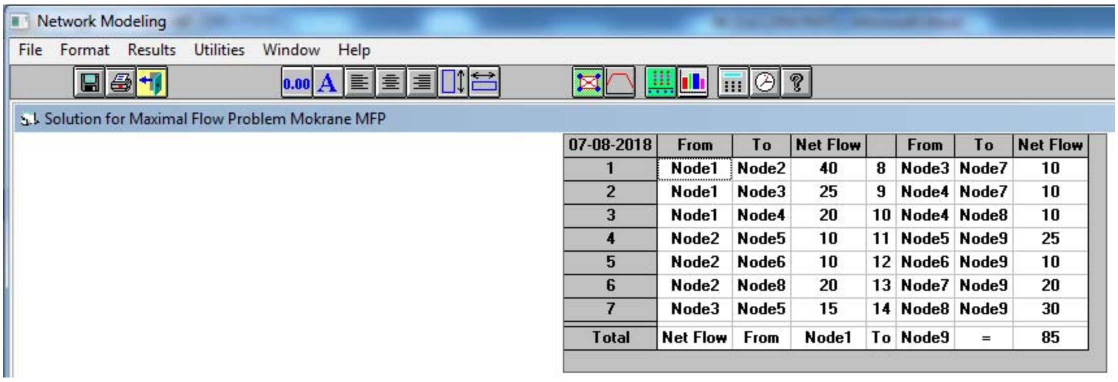
- بعد الضغط على الزر Solve the problem يقوم البرنامج بحساب عدة عمليات كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل 3−26



- ثم نحصل على جدول الحل النهائي كالتالي:

الشكل 3−26



07-08-2018	From	To	Net Flow		From	To	Net Flow
1	Node1	Node2	40	8	Node3	Node7	10
2	Node1	Node3	25	9	Node4	Node7	10
3	Node1	Node4	20	10	Node4	Node8	10
4	Node2	Node5	10	11	Node5	Node9	25
5	Node2	Node6	10	12	Node6	Node9	10
6	Node2	Node8	20	13	Node7	Node9	20
7	Node3	Node5	15	14	Node8	Node9	30
Total	Net Flow	From	Node1	To	Node9	=	85

ونقرأ أن الكمية المصرفة هي 85 ل/ثا تماما ما تحصلنا عليه من خلال تطبيق خوارزمية فورد−فلكرسون في المثال التطبيقي رقم 7.

3− تحليل شبكات الأعمال:

تتميز معظم المشاريع التي تقوم المنشاة بتنفيذها بكبر الحجم والتعقيد، لذلك فان التعقيد في المشاريع يضطرنا إلى استخدام أساليب تخطيطية أكثر كفاءة وفاعلية تهدف إلى تحقيق الكفاءة المثلى عند التنفيذ، ويعبر عن هذه الكفاءة من خلال إمكانية تقليص الوقت المطلوب لانجاز المشروع الكلي ضمن شروط مقبولة اقتصاديا، من خلال استخدام الموارد المتاحة.

لقد تطورت جدولة المشاريع كثيرا بفضل الأسلوبين التحليلين وهما:

- أسلوب المسار الحرج Critical Path Method (CPM)
- و أسلوب مراجعة وتقييم المشروع (PERT)، Program Evaluation and Review Technique

و التي تساعد المدراء في التخطيط و البرمجة و المتابعة و الرقابة على المشاريع الكبيرة الحجم والمعقدة وقد تم تطويرهما لاحقا، وذلك للحاجة الماسة لطريقة أفضل للإدارة.

في العام 1957 طورت طريقة المسار الحرج (CPM) من قبل كيلي (J.E.Kelly) من شركة ريمنجتون راند (Remington Rand) و العالم وولكر (M.R.Walker) من شركة ديو بونت (Du pont)، وقد استخدمت طريقة المسار الحرج في الأصل لمساعدة بناء وصيانة المصانع الكيمياوية لشركة ديو بونت وفي سنة 1958 قام سلاح البحرية الأمريكية بتطوير أسلوب المراجعة وتقييم المشروع(PERT) للتخطيط والرقابة على برنامج صواريخ بولاريس، وسوف نستعرض فيما يلي لكيفية بناء شبكات الأعمال وتحليل المخطط الشبكي لتقرير الوقت اللازم لإنهاء تنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع بعد التعرف على طرق تحليل المخططات الشبكية.

وفيما يلي جدول مقارن لكل من الأسلوبين التحليلين لشبكات الأعمال.[30]

الجدول 3-6

الأسلوب	**أسلوب المسار الحرج (CPM)**	**أسلوب مراجعة وتقييم المشروع (PERT)**
التعريف	هو أطول مسارات الشبكة زمناً و هو المسار الذي يحتاج أطول مدة زمنية لإنجازه.	تقييم و مراجعة المشروع أسلوب بارت التقني والحديث
دقة المعلومات	المعلومات تكون مؤكدة في شبكة الأعمال	المعلومات تكون غير مؤكدة احتمالية في شبكة الأعمال
الخبرة	يستخدم في المشاريع القديمة ذات خبرة عالية	يستخدم في المشاريع الحديثة فقط والتي تقل فيها الخبرة
استخداماته	إداريا يستخدم في الرقابة	إداريا يستخدم في التخطيط
طريقة حسابه	يتم حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة باستخدام القوانين الحسابية	يتم حساب الأزمنة المتوقعة(التفاؤلي، الأكثر احتمالا، التشاؤمي) باستخدام القانون
شيوعه	أكثر شيوعا	اقل شيوعا

[30] رند عمران مصطفى الاسطل، "بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية"،موسوعة الكتب الجامعة، جامعة فلسطين، 2016. ص 432.

3-1- طريقة المسار الحرج CPM (الطريقة الأمريكية):

جاءت طريقة المسار الحرج لتلبي حاجة المشاريع الإنشائية كبناء السكن، بناء المصانع و تجهيزها، بناء الطرقات و المطارات ... الخ، و مشاريع البحوث العلمية، الأعمال الإدارية ... الخ، و هذا لتكون وسيلة فعالة بيد الإدارة، إذ أنها تمكننا من أن نبين الصورة الكاملة للمشروع بكل ما يشتمل عليه من أعمال جزئية وتسلسلها و اعتماد بعضها على بعض، بحيث تسمح لنا باتخاذ القرارات على ضوء تفهم جيد لتأثيرها على كامل المشروع

و تتضمن طريقة المسار الحرج 3 مراحل رئيسية هي:[31]

- إعداد خطة إنجاز المشروع.
- إعداد البرنامج الزمني للمشروع من خلال البرنامج الزمني لكل نشاط فيه.
- مراقبة سير العمل و التحكم فيه.

3-1-1- أهمية و مزايا طريقة المسار الحرج:

يمكن إيجاز المزايا التي تتحقق نتيجة لتطبيق طريقة المسار الحرج على النحو التالي:[32]

- التعرف على الترتيب المنطقي الذي يتم من خلاله تنفيذ كافة النشاطات والعمليات، وبذلك فإن أسلوب الشبكة يوفر جدولا زمنيا مفصلا لأداء النشاطات التي يتكون منها المشروع.
- الحصول على أداة متابعة المشروع و مراقبة العمل وقياس الأداء في تنفيذ النشاطات المحددة بما يسهل مقارنة ما تم تنفيذه في الواقع بما تم اعتماده في الخطة.
- الحصول على مؤشرات آنية بالعقبات والصعوبات التي يمكن أن تعيق التنفيذ بما في ذلك عنصر الوقت اللازم لإتمام أي نشاط إذ أنه قد يتبين أن الوقت الفعلي الذي استغرقه تنفيذ نشاط سابق يؤثر على الوقت المطلوب لإتمام نشاطات لاحقة.
- توفير قاعدة اتصال يمكن من خلالها للأطراف المعنية النظر إلى المراحل المنجزة و المتبقية.
- التعرف على العلاقات المتبادلة بين الوظائف أو النشاطات بمعنى تحديد النشاطات التي يلزم الانتهاء منها كشرط لبدء نشاط جديد، وكذلك النشاطات التي يمكن أن يسير العمل فيها بالتزامن.
- الكشف عن تعارض الوقت في تنفيذ النشاطات أو عدم ملائمته.
- الخروج بخطط تفصيلية يمكن من خلالها للأطراف المعنية أن تحاط علما بالإنجازات والمعوقات أولا بأول.

وقبل التطرق إلى كيفية تطبيق طريقة المسار الحرج و تحديده، لا بد من التطرق لمجموعة من المصطلحات و المفاهيم الأساسية المتعلقة بشبكات الإعمال.

[31] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص 290.

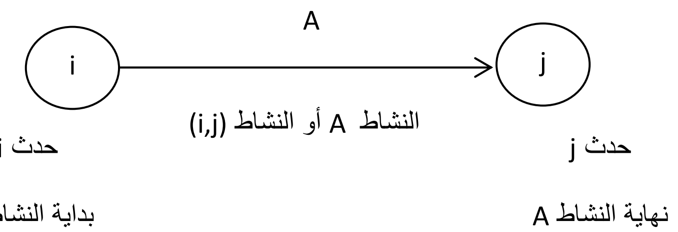
[32] إيمان فاضل السامرائي وهيثم محمد الزعبي ، "نظم المعلومات الإدارية"، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2004 ، ص 311

3-1-2- المفاهيم الأساسية للمخططات الشبكية

3-1-2-1- الحدث :

هو عبارة عن لحظة من الزمن تدل على إنجاز بعض الأزمنة وبداية الأزمنة الأخرى، حيث أن البداية والنهاية لكل نشاط يعبر عنهما بحدثين أحدهما يعرف بحدث البداية، ولآخر حدث النهاية، وتوصف الأحداث أيضا بأنها لحظة محددة من الزمن وليست مدة منه، وهي لا تحتاج إلى وقت أو موارد أو جهد، ويمكن تمثيلها بشكل هندسي غالبا ما يكون دائرة. كما في الشكل الموالي[33].

الشكل 3-26



3-1-2-2- النشاط :

يعبر عن الأداء الفعلي للعمل أو المهمة، وبالتالي فهو يتطلب وقت للتنفيذ ويحتاج التضحية ببعض الموارد المالية .ويمثل كل نشاط في شبكة الأعمال بسهم واحد فقط ويشير رأس السهم إلى اتجاه تدفق العمل، أي يتجه السهم من نقطة بدء النشاط وينتهي عند نقطة انتهاء النشاط. ومن ثم فإن السهم الممثل للنشاط على الشبكة يصل بين حدثين هما حدث بداية النشاط وحدث نهاية النشاط،[34] كما هو موضح بالشكل 3-26.
هذا، ويمكن تمييز كل نشاط علي شبكة الأعمال بحرف هجائي أو برقمي حدثي البدء والنهاية .فعلي سبيل المثال، النشاط الذي يصل بين الحدثين i و j في الشكل السابق، يمكن أن يشار إليه مثلاً بالنشاط A أو النشاط (i,j)، وتوضح اتجاهات الأسهم، التي تعبر عن الأنشطة، التتابع الفني والترتيب المنطقي للمهام المختلفة التي يتطلبها المشروع.

3-1-2-2-1- تقسيم الأنشطة:

أ- ويمكن تقسيم الأنشطة في شبكة الأعمال من حيث الوقت والموارد المستنفدة في النشاط إلى:

أ-1- **أنشطة حقيقة** : وهي تعبر عن المهام و الأعمال الواجب تنفيذها للانتقال من حدث معين إلى آخر في

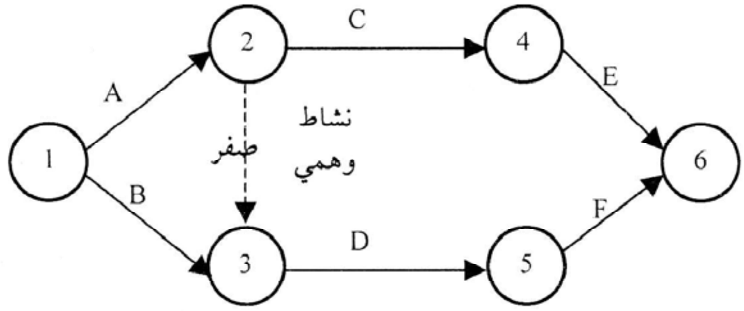
إطار شبكة متكاملة من المهام أو النشاطات، حيث يعبر عن هذه الأزمنة من خلال الأسهم التي يتجه رأسها إلى الأمام و بالتحديد انطلاقا من حدث البداية باتجاه حدث النهاية، وقد تكون هذه الأزمنة عادية أو حرجة.[35]

[33] مؤيد عبد الحسين الفضل، "بحوث عمليات محاسبية"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2008، 299 . بالتصرف
[34] جمال عبد العزيز صابر، مرجع سبق ذكره.. ص 105.
[35] مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سبق ذكره.. ص196

أ-2- **أنشطة وهمية:** وهي أنشطة ذات دور تنسيقي في شبكة الأعمال، وليس لها أي وجود في الواقع العملي لذلك فهي لا تستلزم أي موارد لإنجازها وأن وقت استغراقها يساوي صفرا، ، وعادة تمثل في هيئة سهم متقطع (-------) للتعبير عن العلاقة التتابعية بين الأنشطة المختلفة المكونة للشبكة، فضلا عن أهميتها في فك الارتباط بين حدثين أو أكثر في الشبكة.

و الشكل الموالي يمثل أحداث و أنشطة مختلفة.[36]

الشكل 3-27

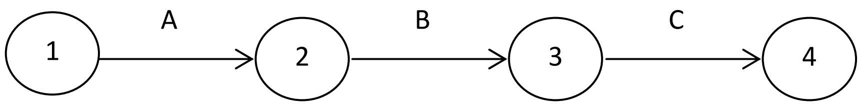


أ-3- **أنشطة انتظار:** وهي الأنشطة التي يستغرق تنفيذها وقتاً معيناً لتكامل إنجازها دون الحاجة إلي موارد، ومثال ذلك انتظار جفاف جدران المبني كي يبدأ نشاط طلاء هذه الجدران.

ب- و يمكن تقسيم الأنشطة من حيث التتابع الفني والترتيب المنطقي للمهام المختلفة التي يتطلبها المشروع إلى:

ب-1- **أنشطة متتابعة (متعاقبة)** :هي تلك الأنشطة التي تحدث في ترتيب متعاقب (متتابع)، أي يرتبط إنجاز هذه الأنشطة بالانتهاء من الأنشطة السابقة، وبالتالي فهي تأخذ تسلسلا معيناً تحكمه العملية الفنية . ففي الشكل 3-28 الموالي، نجد أن النشاط A يسبق النشاط B أو بمعني آخر النشاط B يتبع النشاط A وعلي هذا الأساس لا يمكن البدء بتنفيذ النشاط B إلا بعد الانتهاء من إنجاز النشاط A وينطبق نفس القول علي النشاطين B و C. ومن أمثلة الأنشطة المتتابعة أنشطة الدورة المحاسبية.

الشكل 3-28

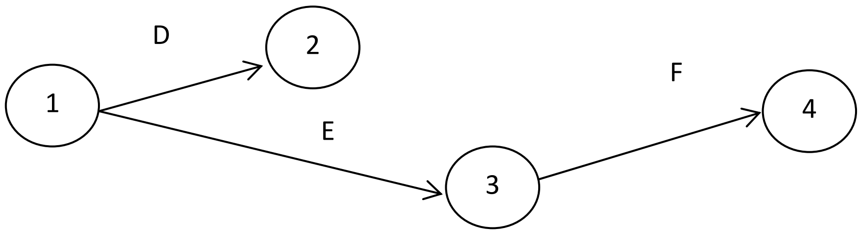


ب-2- **أنشطة متوازية** :هي الأنشطة التي يمكن تنفيذها في نفس الوقت، أي بشكل متزامن بحيث يمكن تنفيذ أكثر من نشاط في وقت واحد، إلا أنه لا يشترط أن تبدأ جميعها في لحظة معينة أو أن تنتهي جميعها في لحظة محددة. ويوضح الشكل التالي أن النشاطين D و E يحدثان في نفس الوقت[37].

[36] احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، "بحوث العمليات، تطبيقات على الحاسوب"، دار المنهج للنشر، الأردن، 2007. ص366

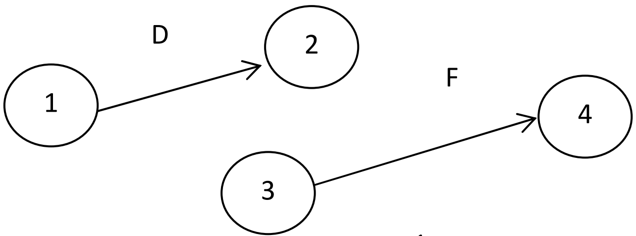
[37] جمال عبد العزيز صابر، مرجع سبق ذكره.. ص 131.

الشكل 3-29



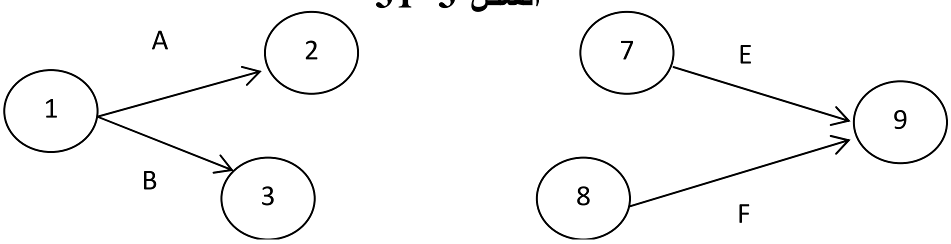
وقد تكون الأنشطة المتوازية مستقلة أي أنها لا تشترك في أي حدث (بداية أو نهاية) كما يظهر في الشكل التالي:

الشكل 3-30



وقد تشترك الأنشطة المتوازية في حدث بداية أو في حدث نهاية كما يظهر في الشكل التالي:

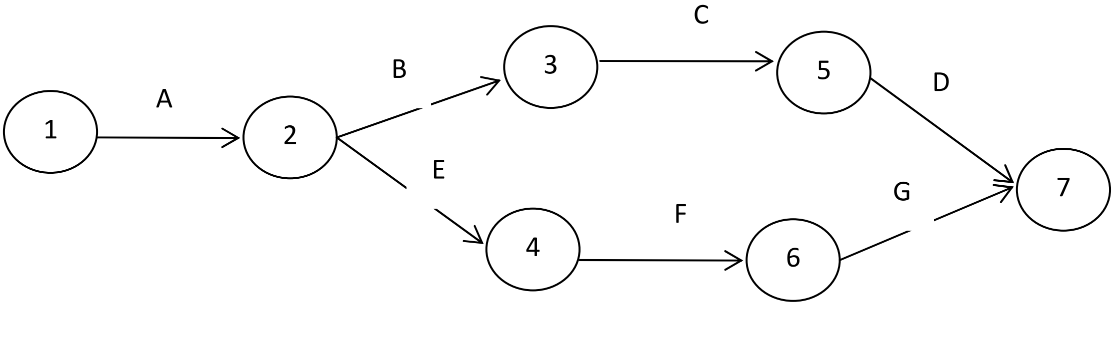
الشكل 3-31



أنشطة المتوازية مشتركة في حدث البداية أنشطة المتوازية مشتركة في حدث النهاية

ب-2- **أنشطة مختلطة:** عادة تجمع شبكة الأعمال بين الأنشطة المتتابعة والأنشطة المتوازية في آن واحد . ويوضح الشكل 3-32 الموالي أن مجموعة الأنشطة المتتابعة C،B و D يمكن تنفيذها في نفس الوقت الذي يتم فيه تنفيذ الأنشطة المتتابعة F،E و G وأن النشاطين B و E لا يمكن أن يبدأ تنفيذهما إلا إذا تم الانتهاء من النشاط A.[38]

الشكل 3-32



[38] علي العلاونة ، محمد عبيدات، عبد الكريم عواد،" بحوث العمليات في العلوم التجارية" ،دار المستقبل للنشر ، الأردن 2000، ص373

3-1-2-3- الشبكة : وهي المخططات التي تعرض تدفق الأزمنة ذات الترابط و التزامن المنطقي بالإضافة إلى إظهار العلاقات المتبادلة بينهما.[39]

3-1-2-4- المسار: عبارة عن مجموعة متتابعة من الأنشطة تبدأ من الحدث الأول في المشروع وتنتهي عند الحدث الأخير للمشروع، وليس من الضروري أن يمر المسار بجميع الأحداث في الشبكة، ولا أن يمر علي أحداث متسلسلة[40].

3-1-2-5- المسار الحرج : هو عبارة عن سلسلة مستمرة من الأزمنة الحرجة التي تربط بين نقطة البدء ونقطة إتمام المشروع، وهي أطول المسارات على الشبكة وتعطي أقل وقت لازم لإتمام المشروع، ومن الممكن أن يكون للمشروع الواحد أكثر من مسار حرج.

3-1-2-5- النشاط الحرج : هو النشاط الذي سوف يترتب على تأخيره تأخير في وقت إتمام المشروع بالكامل ، وغالبا ما يوجد أكثر من نشاط حرج واحد على الشبكة.[41]

3-1-2-6- الزمن العادي: وهو مقدار الزمن المقدر والمتوقع لإنجاز النشاط بالموارد العادية.

3-1-2-7- الزمن المختزل (المعجل) : ويسمى أيضا الزمن العائم، وهو مقدار الزمن الذي يمكن اختزاله من زمن النشاط العادي دون التأثير سلبيا على الزمن الكلي لإنجاز المشروع، ويستخدم عادة هذا الزمن في اختزال الزمن الكلي للمشروع.

3-1-2-8- التكلفة العادية :وهي مجموع النفقات المستخدمة في تنفيذ النشاط العادي.

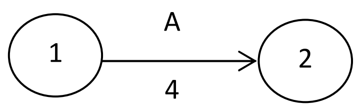
3-1-2-9- التكلفة المختزلة :وهي تكلفة الزمن المختصر وتزداد كلما زاد الزمن والعكس صحيح[42].

3-1-3- الاعتبارات الواجب مراعاتها عند بناء شبكة الأعمال:

عند رسم شبكة الأعمال الممثلة لأي مشروع يجب مراعاة الآتي:

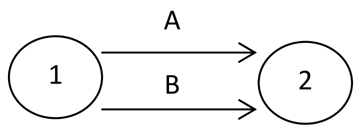
- تمثيل كل نشاط بسهم ويكتب الاسم فوق السهم ومدة النشاط تحته، فالنشاط A الذي مدته أربع أيام يمكن تمثيله بالسهم التالي:

الشكل 3-33



- يجب مراعاة ألا يخرج سهمان من حدث معين (دائرة) ويدخلان معًا في حدث أخر (دائرة أخرى).

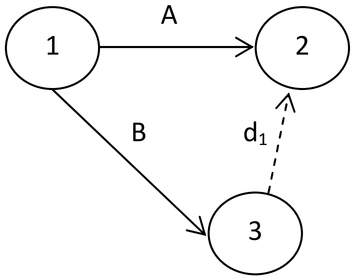
الشكل 3-34



[39] عبد الستار محمد العلي ،"إدارة المشروعات العامة" ، ط1،دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ،عمان - ألأردن،2009 ، ص293
[40] دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، "بحوث العمليات" ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ،عمان-الأردن ، 2008 ، ص 209
[41] محمد توفيق ماضي، "إدارة وجدولة المشاريع"، الدار الجامعية، القاهرة، 2014. ص73
[42] عبد الستار محمد العلي ، مرجع سبق ذكره. ، ص294

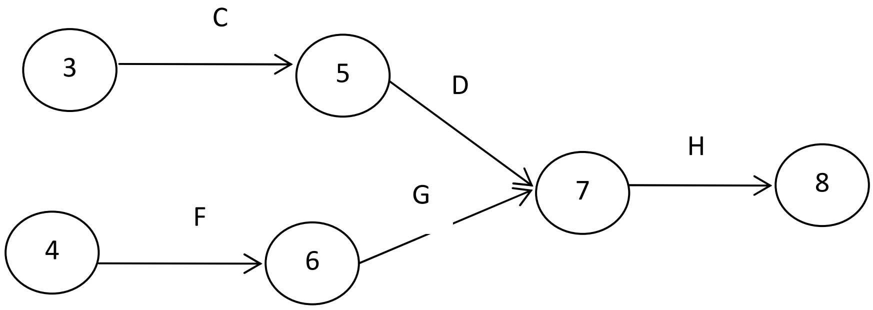
ويفترض أن يعالج هذا الأمر من خلال إدخال نشاط ثالث وسيط يعرف بالنشاط الوهمي (d_1)، كما يلي:

الشكل 3-35



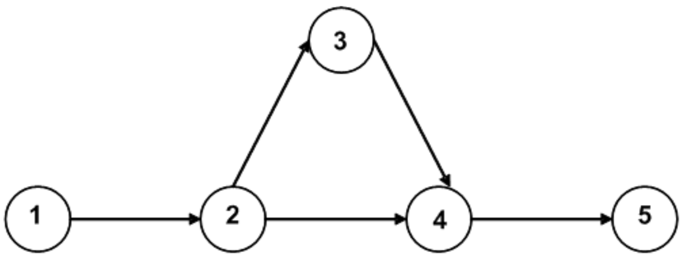
- قبل البدء بأي نشاط (Activity) فإن جميع الأزمنة السابقة لابد أن تكون قد استكملت فالنشاط H لا يمكن البدء به قبل إنهاء النشاطين D و G.

الشكل 3-36

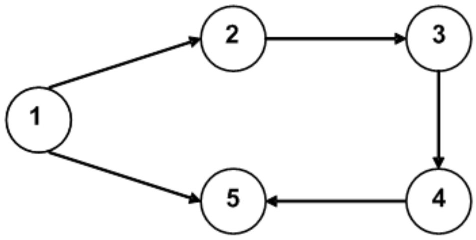


- لا يمكن تكرار الأحداث في المخطط الشبكي.
- إن اتجاه الرسم يكون على أساس قاعدة البدء من الحدث الصغير لغاية الحدث الكبير وليس العكس.[43]
- إن الأسهم التي تمثل الأزمنة يجب أن تأخذ اتجاها محددا من حدث البداية للمشروع إلى حدث النهاية ، ولا يجوز في هذه الحالة العودة إلى الوراء أو إتباع أسلوب الدوران.[44]

الشكل 3-37



حالة العودة إلى الوراء

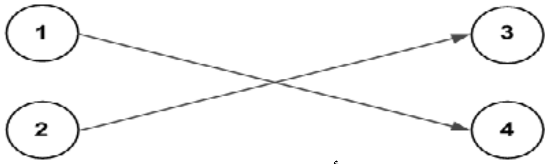


حالة الدوران

- كل نشاط داخل الشبكة يمثل بسهم واحد فقط.
- تجنب تقاطع الأسهم داخل الشبكة.

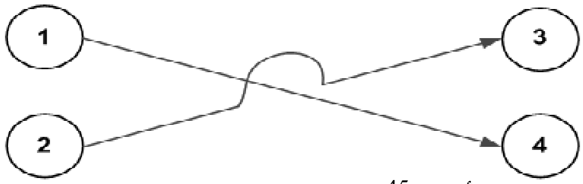
[43] محمود العبيدي،" إدارة المشاريع منهج كمي"، مؤسسة الوراق للنشر، عمان، 2010. ص136
[44] عبد الرسول عبد الرازق الموسوي،" المدخل لبحوث العمليات" ، ط2 ، دار وائل للنشر والطباعة ،عمان- ألأردن ،2000. ص173

الشكل 3-38



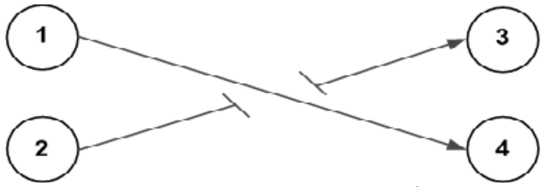
ويمكن معالجة ذالك إما باستخدام رسم الأنابيب

الشكل 3-39



أو باستخدام رسم تقاطع الأزمنة[45]

الشكل 3-40



- لكل حدث يمكن أن يخرج منه أكثر من نشاط واحد
- لا يجوز الرجوع من حدث مبكر إلى آخر تم سابقا إلا في حالة استخدام الأزمنة الوهمية.[46]

- أن تبدأ شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث البداية وتنتهي كذلك بحدث واحد هو حدث النهاية، لذلك يجب التأكد من عدم وجود أنشطة معلقة[47]، ويتم تفادي ذلك باستخدام الأنشطة الوهمية. وقد يطلق على حدث البداية نقطة المنبع و حدث النهاية نقطة المصب.
- التحديد الدقيق للأنشطة التي يتضمنها المشروع وترتيب هذه الأنشطة بشكل يعكس التتابع الفني والترتيب المنطقي للأعمال أو المهام المختلفة التي يتضمنها المشروع، حيث يتعين عند تحديد كل نشاط علي الشبكة ضرورة التعرف علي النشاط أو الأنشطة التي قد تحدث في نفس وقت حدوثه وكذلك النشاط أو الأنشطة التي قد تليه (تلحقه).

3-1-4- تحديد المسر الحرج:

المسار الحرج هو أطول مسار يربط بين بداية ونهاية المشروع ومدته تساوي المدة اللازمة لإنجاز المشروع، ويمثل المسار الحرج مجموعة من الأنشطة المتتالية تعرف بالأنشطة الحرجة والتي يحدث عن تأخير أي منها تأخير موعد انتهاء المشروع ككل، أما بقية الأنشطة فهي غير حرجة، ولتحديد المسار الحرج يتم حساب عدد من الأوقات يعتمد عليها في التسيير الزمني لكامل المشروع.

وتستخدم في شبكات الأعمال العادية خمس أوقات هي:[48]

[45] دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، مرجع سبق ذكره. ص210

[46] سهيلة عبد الله سعيد ،" الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات" ، الطبعة الأولى ، دار الحامد ،عمان-ألأردن ، 2007 ،ص 230

[47] **النشاط المعلق:** هو النشاط الذي لا يرتبط بالحدث الحقيقي لنهاية المشروع او بدايته فينتج عنه أكثر من نشاط (بداية، نهاية) للمشروع. (بالتصرف)

- الوقت المبكر لبداية النشاط
- الوقت المبكر لنهاية أو انجاز النشاط
- الوقت المتأخر لبداية النشاط
- الوقت المتأخر لنهاية أو انجاز النشاط
- وقت السماح الكلي

تحسب هذه الأوقات على مراحل

3-1-4-1- مرحلة الذهاب أو التقدم إلى الأمام:

وتحسب فيها الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة

3-1-4-1- الوقت المبكر لبداية النشاط Earliest start time (ES):

الوقت المبكر لبداية نشاط معين هو الوقت الذي يجب أن يمر من بداية المشروع وحتى يتحقق هذا النشاط، وذلك بافتراض أن كل الأنشطة السابقة لهذا النشاط قد تم الانتهاء منها جميعاً في أوقاتها المقدرة دون تأخير. ويمكن حساب الوقت المبكر لنشاط معين بإتباع الخطوات الآتية:

أ- تحديد المسارات المختلفة التي تبدأ من بداية المشروع (بداية أول نشاط) وتصل إلى النشاط المراد حساب وقته المبكر.

ب- تجميع الأوقات المتعلقة بالأنشطة المختلفة التي يتكون منها كل مسار من المسارات المؤدية إلى النشاط.

ت- حساب الوقت المبكر للنشاط على أساس أطول المسارات التي تصل لهذا النشاط من حيث فترة الإتمام

ونظراً لأنه لا توجد أنشطة سابقة النشاط بداية المشروع، فإن الوقت المبكر لنشاط بداية المشروع يكون دائماً صفر أي: $ES_1 = 0$.

هذا، ويمكن حساب الوقت المبكر لأي نشاط بطريقة أخرى من خلال العلاقة الرياضية التالية:

الوقت المبكر للنشاط = الوقت المبكر لبداية النشاط السابق له+الوقت المتوقع لانجاز للنشاط السابق له.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: عندما يكون النشاط مسبوق بأكثر من نشاط واحد فان بدايته المبكرة تساوي الوقت الأكبر بين الأوقات المبكرة للأنشطة السابقة له زائد مدة انجازها، ونعبر عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية:

أي: $ES_j = Max\,(ES_i + d_i)$

حيث:

ES_j: هو الوقت المبكر لبداية النشاط j .

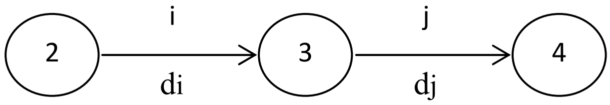
ES_i: هو الوقت المبكر لبداية النشاط i السابق للنشاط j .

d_i: هي مدة انجاز النشاط i .

[48] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص 299.

ويمكن توضيح هذه العلاقة من خلال الشكل الموالي:

الشكل 3-41



3-1-4-1- مرحلة الإياب أو الرجوع نحو الخلف:

وتحسب فيها الأوقات المتأخرة لنهاية الأنشطة

3-1-4-1-1- الوقت المتأخر لنهاية النشاط (LC) Latest completion time:

الوقت المتأخر لنهاية النشاط هو آخر وقت يمكن أن ينتهي عنده نشاط ما دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في وقت انجاز المشروع.

إن الوقت الذي ينتهي عنده المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية أخر الأنشطة زائد مدة تنفيذ هذه الأنشطة، ونسميه أبكر وقت لإنهاء المشروع، و يكون:

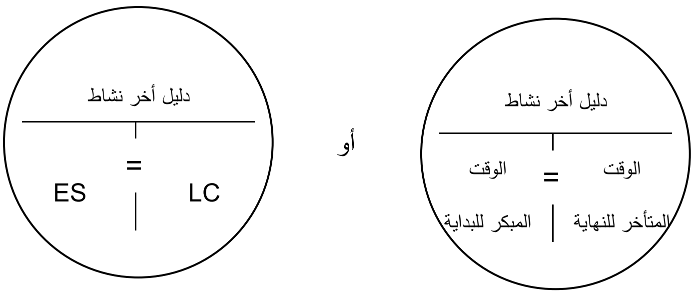
الوقت المبكر لنهاية المشروع=الوقت المتأخر لنهاية المشروع أو الوقت المتأخر لتنفيذ أخر الأنشطة.

أي انه في أخر قمة أي حدث النهاية يكون لدينا:

الوقت المبكر للبداية= الوقت المتأخر للنهاية

تدون هذه الأوقات في أخر حدث من الشروع كما يلي:

الشكل 3-42



في بقية القمم يكون لدينا:

الوقت المتاخر لنهاية النشاط = الوقت المتأخر لنهاية النشاط اللاحق – مدة تنفيذ النشاط اللاحق.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: عندما يكون النشاط متبوع بأكثر من نشاط واحد فان نهايته المتأخرة تساوي الوقت الأصغر بين الأوقات المتأخرة لنهاية للأنشطة التابعة له ناقص مدة انجازها، ونعبر عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية:

أي: $LC_i = \mathrm{Min}(LC_j - d_j)$

حيث:

LC_i: هو الوقت المتأخر لنهاية للنشاط i .

LC_j: هو الوقت المتأخر لنهاية للنشاط j التابع للنشاط i .

d_j: هي مدة انجاز النشاط j .

2-1-4-1-3 مرحلة إعداد جدول المراقبة الزمنية:

وتحسب و تدون فيه الأوقات الثلاث المتبقية وهي:

- الوقت المبكر لنهاية أو انجاز النشاط
- الوقت المتأخر لبداية النشاط
- وقت السماح الكلي

وتحسب كما يلي:

ا- **الوقت المبكر لنهاية أو انجاز النشاط (EC):** وهو أبكر وقت ممكن لإنهاء النشاط ويحسب وفق العلاقة:

الوقت المبكر لنهاية أو انجاز النشاط=الوقت المبكر لبداية النشاط+مدة تنفيذ هذا النشاط

أي بعبارة أخرى:

$$EC = ES + d$$

ب- **الوقت المتأخر لبداية النشاط (LS):** وهو خر وقت يمكن بدا النشاط فيه دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير نهاية المشروع ويحسب وفق العلاقة:

الوقت المتأخر لبداية النشاط = الوقت المتأخر لنهاية النشاط - مدة تنفيذ هذا النشاط

أي بعبارة أخرى:

$$LS = LC - d$$

ج- وقت السماح الكلي (ST) Stack Time:

هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت غايته المبكرة الممكن بدون التسبب في إطالة مدة تنفيذ المشروع، أي أنه عبارة عن مقدار الوقت الذي يمكن للنشاط أن يستهلكه زيادة على المدة المقدرة التي يحتاجها النشاط دون أن يتسبب ذلك في إطالة مدة المشروع، و يحسب كما يلي:

وقت السماح الكلي (ST) = البداية المتأخرة (LS) – البداية المبكرة (ES)

وقت السماح الكلي(ST) = النهاية المتأخرة (LC) – النهاية المبكرة (EC)

بعد تحديد هذه الأزمنة المختلفة فانه يمكن وضع جدول زمني للأنشطة المكونة لهذا المشروع (الجدول 3-7)، و نحدد المسار الحرج بأنه المسار الذي يمر على الأنشطة التي يكون فيه **وقت السماح الكلي يساوي الصفر مما يجعلها أنشطة حرجة،** فانه لا يوجد تأخير في هذه الأنشطة إلا إذا كان التأخير في المشروع ككل .أما الأنشطة الأخرى فهي أنشطة غير حرجة و يمكن تأخير البدء فيها في حدود الفائض من الوقت المتاح لها.

الجدول 3-7

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		وقت السماح الكلي	الأنشطة الحرجة
			البداية	النهاية	البداية	النهاية		

3-1-5- مثال تطبيقي 9 (دارسة حالة):

يوضح الجدول الموالي البيانات عن الأنشطة و الأنشطة السابقة و الخاصة بانجاز احد المشاريع الصناعية.

الجدول 3-8

النشاط	النشاط السابق	مدة تنفيذ الأنشطة (بالأسابيع)	كلفة انجاز الأنشطة (ألف دج)
A	-	2	40
B	A	4	45
C	A	8	60
D	C	10	45
E	D	1	20
F	D	5	16
G	E	1	70
H	F,H	3	60
I	G	5	10
J	I,J	1	22
K	K	8	42
L	A	7	20

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال

2- حدد على الشبكة الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية

3- اكتب جدول المراقبة الزمنية وحدد عليه الأوقات المبكرة للنهاية و الأوقات المتأخرة للبداية و وقت السماح الكلي

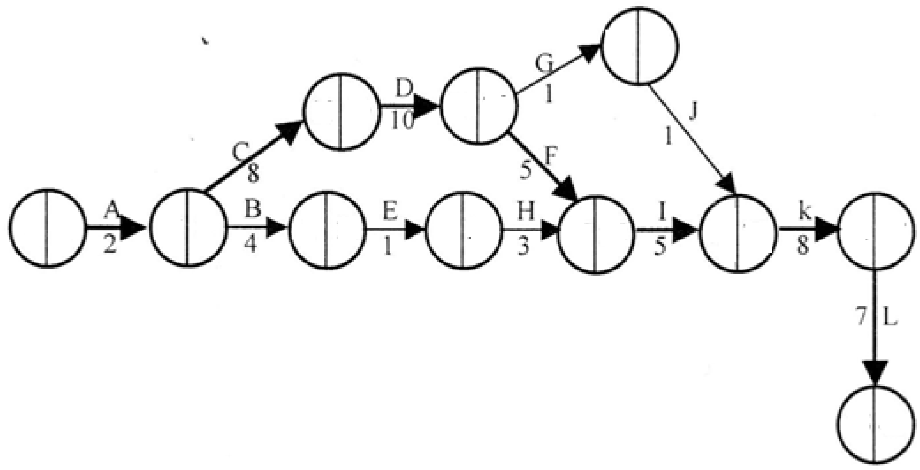
4- حدد الأنشطة الحرجة (المسار الحرج).

5- حدد وقت انجاز المشروع و تكلفته.

الحل:[49]

1- رسم شبكة الأعمال

الشكل 3-43



من رسم الشبكة أعلاه يمكن أن نستنتج ثلاث مسارات وهي:

المسار الأول	A–C–D–G–J–K–L
المسار الثاني	A–C–D–F–I–K–L
المسار الثالث	A–B–E–H–I–K–L

2- تحدد على الشبكة الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية

أ- حساب الأوقات المبكرة للبداية (مرحلة التقدم إلى الأمام):

لدينا بالنسبة للنشاط A أول نشاط في المشروع تساوي بدايته المبكرة بداية المشروع المبكرة وهي الصفر بعدها نلاحظ أن للنشاطين B و C يسبقهما نفس النشاط A و بالتالي تكون بدايتهما المبكرة نفسها وهي:

$$\mathrm{ES}_C = \mathrm{ES}_C = \mathrm{Max}\ (\mathrm{ES}_A + \mathrm{d}_A) = 0 + 2 = 2$$

بالنسبة للنشاط D يسبقه نشاط واحد هو C و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

$$\mathrm{ES}_D = \mathrm{Max}\ (\mathrm{ES}_C + \mathrm{d}_C) = 2 + 8 = 10$$

بالنسبة للنشاط E يسبقه نشاط واحد هو B و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

$$\mathrm{ES}_E = \mathrm{Max}\ (\mathrm{ES}_B + \mathrm{d}_B) = 2 + 4 = 6$$

بالنسبة للنشاط F و G يسبقهما نشاط واحد هو D و بالتالي تكون بدايتهما المبكرة نفسها وهي:

$$\mathrm{ES}_F = \mathrm{ES}_G = \mathrm{Max}\ (\mathrm{ES}_D + \mathrm{d}_D) = 10 + 10 = 20$$

بالنسبة للنشاط H يسبقه نشاط واحد هو E و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

[49] بالتصرف

$$ES_H = Max\,(ES_E + d_E) = 6 + 1 = 7$$

بالنسبة للنشاط I يسبقه نشاطان هما F و H و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

$$ES_I = Max\,[(ES_F + d_F), (ES_H + d_H)] = Max\,[(20 + 5), (7 + 3)] = Max\,(25,10) = 25$$

بالنسبة للنشاط K يسبقه نشاطان هما I و J و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

$$ES_K = Max\,[(ES_I + d_I), (ES_J + d_J)] = Max\,[(25 + 5), (21 + 1)] = Max\,(30,22) = 30$$

بالنسبة للنشاط الأخير L يسبقه نشاط واحد هو K و بالتالي تكون بدايته المبكرة هي:

$$ES_L = Max\,(ES_K + d_K) = 30 + 8 = 38$$

بعد ذلك نحسب الوقت المبكر لنهاية المشروع وفق القاعدة:

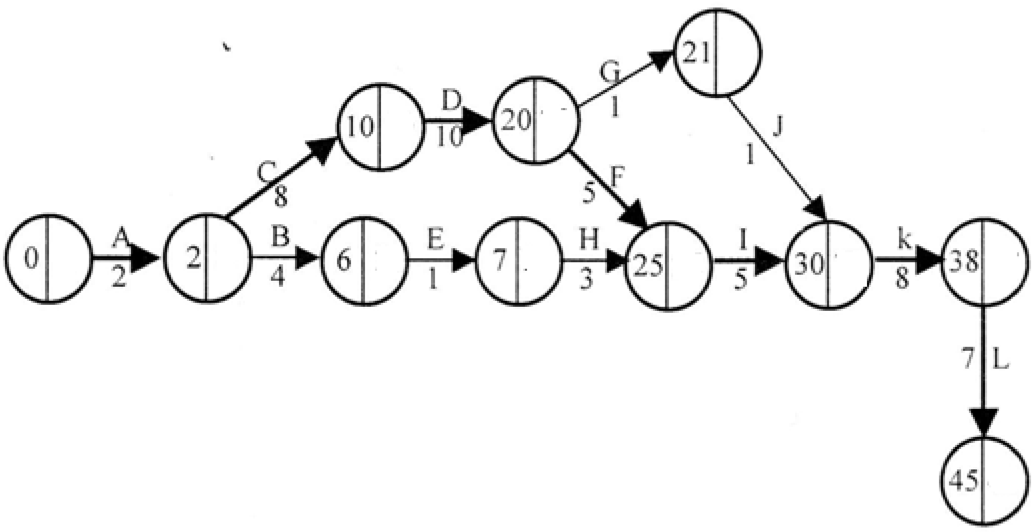
الوقت المبكر لنهاية المشروع=الوقت المتأخر لنهاية المشروع أو الوقت المتأخر لتنفيذ أخر الأنشطة.

وعليه فان:

$$EC_{PROJET} = Max\,(ES_L + d_L) = 38 + 7 = 45$$

و بالتالي فانه يمكننا تحديد أزمنة البدء المبكرة على الشبكة كالتالي:

الشكل 3−44



ب− حساب الأوقات المتأخرة للنهاية (مرحلة الرجوع للخلف):

بالنسبة للنشاط الأخير L تكون نهايته المتأخرة هي النهاية المتأخرة للمشروع التي حسبت في أخر مرحلة التقدم للأمام وكانت :

$$LC_L = EC_{PROJET} = 38$$

بالنسبة للنشاط K يليه نشاط واحد هو L و بالتالي تكون نهايته المتاخرة هي:

$$LC_K = Min(LC_L - d_L) = 45 - 7 = 38$$

بالنسبة للنشاطين I و J يليهما نشاط واحد هو K و بالتالي تكون نهايتهما المتاخرة هي:

$$LC_I = LC_J = Min(LC_K - d_K) = 38 - 8 = 30$$

بالنسبة للنشاطين H و F يليهما نشاط واحد هو K و بالتالي تكون نهايتهما المتأخرة هي:

$$LC_H = LC_F = \mathrm{Min}(LC_I - d_I) = 30 - 5 = 25$$

بالنسبة للنشاط G يليه نشاط واحد هو J و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_G = \mathrm{Min}(LC_J - d_J) = 30 - 1 = 29$$

بالنسبة للنشاط E يليه نشاط واحد هو H و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_E = \mathrm{Min}(LC_H - d_H) = 25 - 3 = 22$$

بالنسبة للنشاط D يليه نشاطان هما G و F و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_D = \mathrm{Min}[(LC_G - d_G), (LC_F - d_F)] = \mathrm{Min}[(29 - 1), (25 - 5)] = \mathrm{Min}(28,20) = 20$$

بالنسبة للنشاط C يليه نشاط واحد هو D و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_C = \mathrm{Min}(LC_D - d_D) = 20 - 10 = 10$$

بالنسبة للنشاط B يليه نشاط واحد هو E و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_B = \mathrm{Min}(LC_E - d_E) = 22 - 1 = 21$$

بالنسبة للنشاط A يليه نشاطان هما B و C و بالتالي تكون نهايته المتأخرة هي:

$$LC_A = \mathrm{Min}[(LC_B - d_B), (LC_C - d_C)] = \mathrm{Min}[(21 - 4), (10 - 8)] = \mathrm{Min}(17,2) = 2$$

بعد ذلك نحسب الوقت المتأخر لبداية المشروع وفق القاعدة:

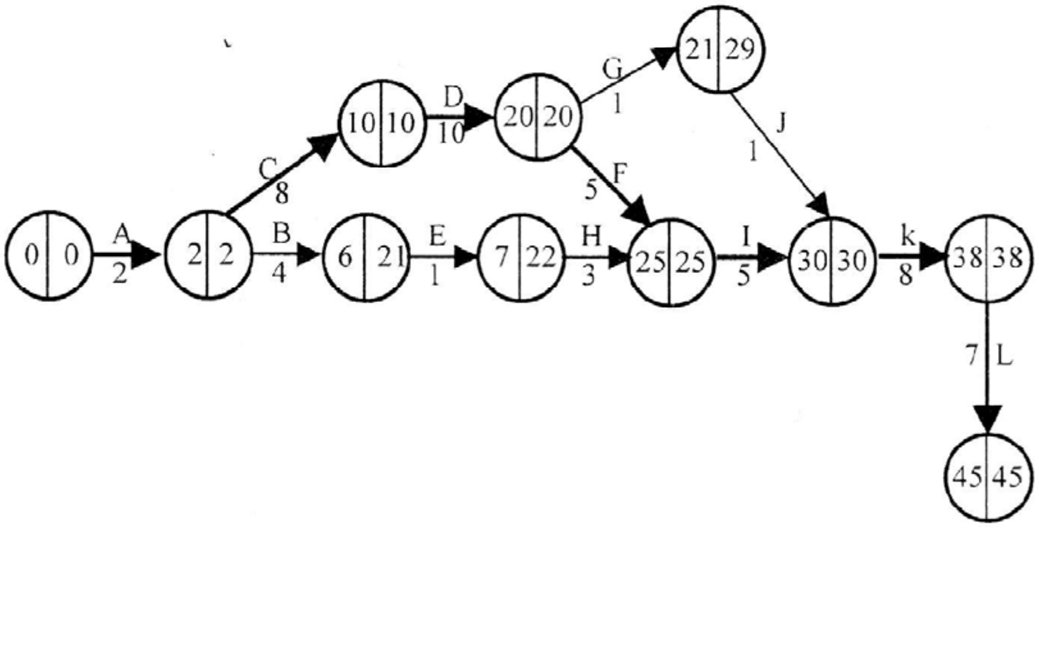
المتأخر لبداية المشروع =الوقت المبكر لبداية المشروع أو الوقت المبكر للبداية لأول الأنشطة.

وعليه فان:

$$lS_{PROJET} = ES_A = \mathrm{Min}(LC_A - d_A) = 2 - 2 = 0$$

و بالتالي فانه يمكننا تحديد الأزمنة المتأخر للنهاية على الشبكة كالتالي:

الشكل 3-45



3- اكتب جدول المراقبة الزمنية وحدد عليه الأوقات المبكرة للنهاية و الأوقات المتأخرة للبداية و وقت السماح الكلي:

الجدول 3-9

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	كلفة النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		وقت السماح الكلي	الأنشطة الحرجة
				البداية	النهاية	البداية	النهاية		
A	-	2	40	0	2	0	2	0	حرج
B	A	4	45	2	6	17	21	15	غير حرج
C	A	8	60	2	10	2	10	0	حرج
D	C	10	45	10	20	10	20	0	حرج
E	D	1	20	6	7	21	22	15	غير حرج
F	D	5	16	20	25	20	25	0	حرج
G	E	1	70	20	21	28	29	8	غير حرج
H	F,H	3	60	7	10	22	25	15	غير حرج
I	G	5	10	25	30	25	30	0	حرج
J	I,J	1	22	21	22	29	30	8	غير حرج
K	K	8	42	30	38	30	38	0	حرج
L	A	7	20	38	45	38	45	0	حرج

في الجدول أعلاه تم حساب الأوقات المبكرة للنهاية وفق العلاقة:

الوقت المبكر لنهاية أو انجاز النشاط=الوقت المبكر لبداية النشاط+مدة تنفيذ هذا النشاط

فمثلا بالنسبة للنشاط A فان الوقت المبكر للنهاية له هو:

$$\mathrm{EC}_A = \mathrm{ES}_A + \mathrm{d}_A = 0 + 2 = 2$$

وتم حساب الوقت المتأخر لبداية الأنشطة وفق العلاقة:

الوقت المتأخر لبداية النشاط = الوقت المتأخر لنهاية النشاط - مدة تنفيذ هذا النشاط

فمثلا بالنسبة للنشاط A فان الوقت المتأخر للبداية له هو:

$$\mathrm{L}S_A = \mathrm{LC}_A - \mathrm{d}_A = 2 - 0 = 0$$

وتم حساب **وقت السماح الكلي** وفق إحدى العلاقتين:

وقت السماح الكلي (ST) = البداية المتأخرة (LS) – البداية المبكرة (ES)

وقت السماح الكلي(ST) = النهاية المتأخرة (LC) – النهاية المبكرة (EC)

فمثلا بالنسبة للنشاط A فان **وقت السماح الكلي** له هو:

$$ST_A = \mathrm{LS}_A - \mathrm{ES}_A = \mathrm{LC}_A - \mathrm{EC}_A = 0 - 0 = 2 - 2 = 0$$

4- حدد الأنشطة الحرجة (المسار الحرج).

5- حدد وقت انجاز المشروع و تكلفته.

من الجدول أعلاه يمكن أن نستنتج ثلاث مسارات وهي:

الجدول 3-10

المسار	تحديده	وقت الانجاز	تكلفة الانجاز
المسار الأول	A-C-D-G-J-K-L	37	299
المسار الثاني	A-C-D-F-I-K-L	45	213
المسار الثالث	A-B-E-H-I-K-L	30	237

وعليه فان المشروع ينجز في مدة 45 أسبوع بتكلفة 213000 دج

3-1-6- طرق تسريع المشاريع:

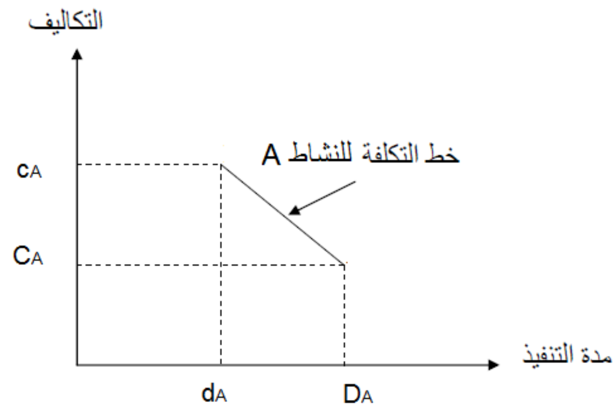
إن أهم ما تهدف إليه طريقة المسار الحرج (CPM) هو المفاضلة بين الزمن والتكلفة بغية تقليص المدة الزمنية للمشروع من خلال زيادة الموارد بأنواعها المختلفة ومعرفة التكاليف الإضافية، فهي تضع المدير في موقف المفاضلة والاختيار بين أن ينفذ المشروع في الزمن الطبيعي ويتفادى التكلفة الإضافية، أو أن ينفذ المشروع في الزمن المضغوط ويتحمل التكلفة الإضافية، أي عملية الموازنة بين:[50]

أ- خفيض التكاليف الثابتة عن طريق ضغط زمن المشروع

ب- زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة زيادة الموارد اللازمة لضغط زمن المشروع.

و الشكل الموالي يظهر مبادلة الوقت بالتكاليف لنشاط معين:

الشكل 3-46



حيث:

D_A : الزمن العادي لانجاز النشاط A

d_A: الزمن المضغوط لانجاز النشاط A

[50] سونيا محمد البكري، مرجع سبق ذكره. ص107

C_A: الكلفة العادية لانجاز النشاط A

c_A: الكلفة المضغوطة لانجاز النشاط A

تتم عملية ضغط شبكة العمل من خلال تخفيض أزمنة الأنشطة الحرجة التي تؤثر في موعد إنهاء المشروع، حيث لهذا التخفيض جانبان هما:[51]

- **الأول هندسي** :يتمثل في تحديد ومعرفة مدى إمكانية تخفيض زمن النشاط من الناحية الفنية، فهناك أنشطة لا يمكن ضغط زمنها لأسباب فنية، لذا يجب الأخذ في الحسبان أثر عمليات المتغيرات الفنية والتنظيمية والبشرية أثناء عملية الضغط.
- **الثاني اقتصادي** :يمثل العبء الإضافي الذي يتحمله المشروع الناتج عن عملية تخفيض زمن النشاط الحرج، وبالتالي للمشروع كُله، إذ لا تتوفر الموارد اللازمة للقيام بعملية التخفيض في أحيان أخرى كثيرة، أو تكون تكاليف التخفيض أكبر من الوفر الحاصل في التكاليف الثابتة.

تنطلق جميع طرق الضغط من افتراض أن العلاقة بين التكاليف المباشرة والزمن هي علاقة خطية، وأن التخفيض يبدأ بالأنشطة الحرجة ذو الميل الأقل لمنحنى التكلفة، كما أنها تفترض أن الموارد المتاحة كافية للقيام بعملية الضغط، حيث تتم عملية الضغط بأقل زيادة ممكنة في التكاليف المباشرة والى أقصى حد ممكن فنيا، ومن أهم طرق الضغط للشبكات في طريقة المسار الحرج (CPM) نجد:

3-1-6-1- طريقة الضغط خطوة خطوة لأنشطة المسار الحرج :

يتطلب ضغط الشبكة وفق هذه الطريقة ما يلي:

- تحديد أنشطة المشروع والعلاقات المنطقية بين هذه الأنشطة.
- تقدير المؤشرات التالية لكل نشاط في المشروع:

D_A : الزمن العادي لانجاز النشاط A

d_A: الزمن المضغوط لانجاز النشاط A

C_A: الكلفة العادية لانجاز النشاط A

c_A: الكلفة المضغوطة لانجاز النشاط A

- تحديد الأنشطة الحرجة بناء على الأزمنة الطبيعية، وحساب أزمنة المسارات جميعها في الشبكة.
- حساب ميل منحنى التكلفة b_A **من الشكل 3-46** حيث:[52]

$$\mathbf{b_A = \frac{c_A - C_A}{d_A - D_A}}$$

- نختار النشاط الحرج ذو الميل الأقل لمنحنى التكلفة، ونخفض زمنه بمقدار وحدة واحدة فينخفض زمن المشروع أيضا بمقدار وحدة زمنية واحدة.
- ينتج عن عملية ضغط زمن النشاط في الخطوة السابقة تكاليف إضافية، فإذا كانت تلك التكاليف

[51] منصور كاسر ، "تعجيل زمن إنهاء المشروع باستخدام المرونة في زمن إنهاء النشاط في ظل أسلوب PERT/COST"، مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية،جامعة بغداد، كلية الاقتصاد والتجارة، العدد.28 ص 286.

[52] محمد سالم الصفدي،" بحوث العمليات – تطبيقات وخوارزميات-"، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2004 ، ص348

الإضافية أقل من الوفر الحاصل في التكاليف الثابتة الناتجة عن تخفيض زمن المشروع فان التخفيض يستمر، أي أنه إذا كانت التكاليف الكلية للمشروع أقل من تلك المحسوبة بالاعتماد على زمن المشروع المحدد باستخدام الأزمنة الطبيعية لأنشطته.

- نقوم بتكرار العملية إلى أن تصبح التكاليف الإجمالية للمشروع أكبر مما كانت عليه قبل الضغط، وبالتالي تكون الخطة الزمنية المثلى هي الخطة التي أعطتنا أقل قيمة للتكاليف الإجمالية للمشروع.

3-1-6-2- طريقة الضغط باستخدام الاحتياطي الزمني الحر:

تعتمد هذه الطريقة على استخدام الاحتياطي الزمني الحر للأنشطة غير الحرجة في عملية ضغط زمن المشروع حيث تتم عملية الضغط كما يلي:[53]

- حساب حدود فترة الضغط لكل نشاط وذلك بعد القيام بالخطوات الأولى المتبعة في طريقة الضغط بمقدار وحدة واحدة في كل خطوة.
- ترتيب أولوية البدائل بالاعتماد على ميل منحنى التكلفة وحدود فترة الضغط لكل نشاط .
- تعديل الزمن والتكلفة وفقا للترتيب السابق.
- حساب الاحتياطي الزمني الحر للنشطة غير الحرجة في حال الحصول على مسار حرج أو أكثر .
- تحديد الأنشطة التي لها احتياطي زمني حر موجب وتحديد القيم الموجبة لهذا الاحتياطي الزمني .
- تحديد النشاط الحرج الذي له أقل ميل لمنحنى التكلفة لضغط زمنه على أن تحدد الحدود التي يتم ضغط الزمن فيها.
- تم ضغط زمن النشاط الحرج بمقدار الاحتياطي الزمني الحر الموجب أو في حدود فترة ضغط النشاط الحرج.
- تكرر عملية الضغط التالية على المنوال نفسه، حتى تصبح جميع مسارات الشبكة حرجة

3-1-6- مثال تطبيقي 10 (دراسة حالة): الحل عن طريق برنامج WinQSB

يوضح الجدول الموالي البيانات عن الأنشطة و الأنشطة السابقة و الخاصة بانجاز احد المشاريع الإنشائية، و كذالك الزمن العادي و المسرع و التكلفة العادية و المسرعة لمختلف الأنشطة.

[53] منصور كاسر، مرجع سبق ذكره. ص 195.

الجدول 3-11[54]

كلفة انجاز المسرعة (ألف دج)	كلفة انجاز العادية (ألف دج)	مدة التنفيذ المسرعة (بالأسابيع)	مدة تنفيذ العادية (بالأسابيع)	النشاط السابق	النشاط
45	30	4	7	-	A
16	10	3	5	-	B
20	20	4	4	-	C
25	18	5	6	A	D
50	40	5	7	C	E
35	25	6	8	B,E	F
30	30	4	4	C	G
15	15	6	6	B,E	H
20	18	3	5	D,F	I
30	24	4	6	H,G	J

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال

2- إيجاد جدول الأوقات

3- تحديد مدة تنفيذ المشروع العادية و تكلفته مع تحديد المسار الحرج

4- إيجاد جدول الأوقات المسرعة و مدة تنفيذ المشروع المسرعة و تكلفته السرعة

الحل:

1- ارسم شبكة الأعمال

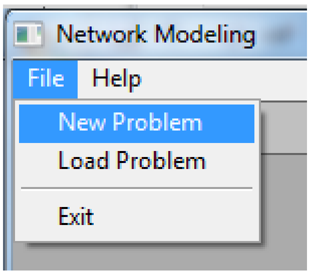
للحصول على مخطط الشبكة للمسالة أعلاه نقوم بفتح تطبيق PERT/CPM لرنامج WinQSB

الشكل 3-47

[54] مثال وارد في مرجع: محمد راتول،"بحوث العمليات"،ديوان المطبوعات الجامعية،2011. ص318 يمكن للمتصفح الاطلاع على الحل الوارد في المرجع و مقارنة النتائج بما تحصلنا عليه عن طريق البرنامج WinQSB.

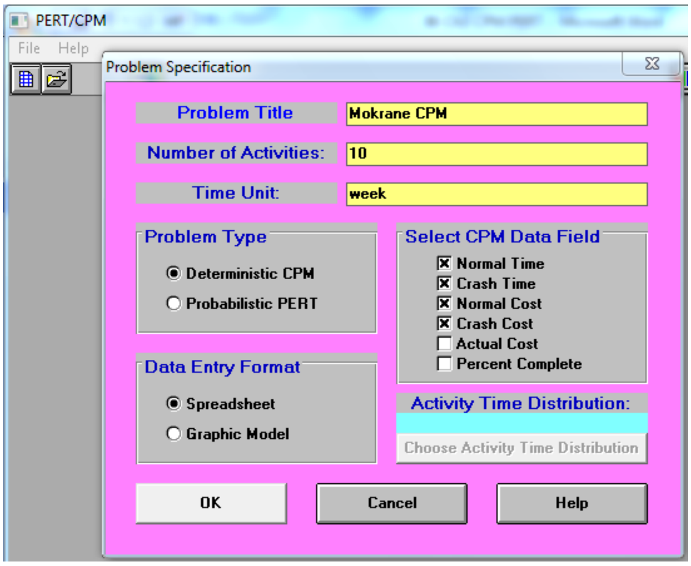
- بعدها نقوم بفتح مسالة جديدة عن طريق الأمر New problem من القائمة File

الشكل 3-48



- بعدها نقوم بإدخال خصائص المسالة كما يظهر في الشكل الموالي:

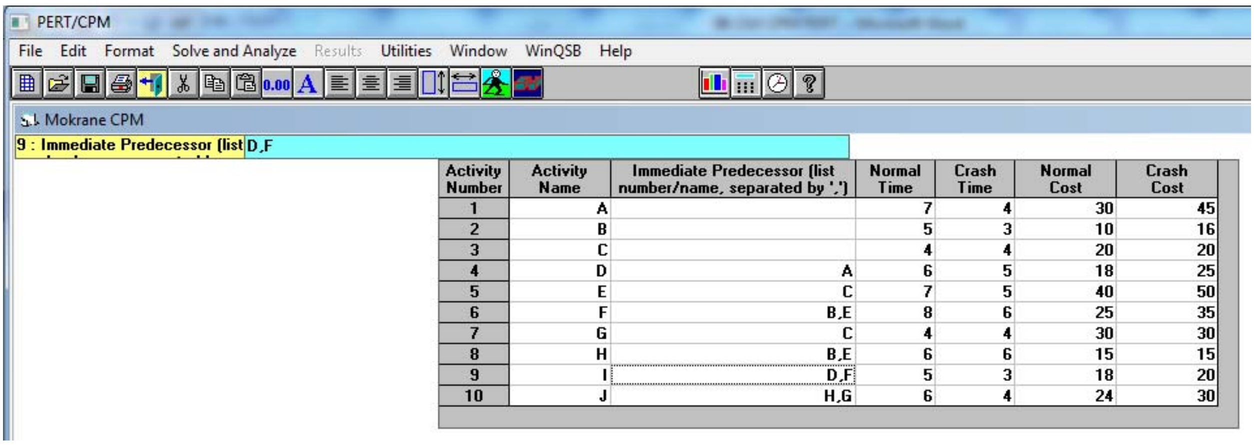
الشكل 3-49



لاحظ أننا قمنا بتحديد الأزمنة العادية و المسرعة والكلف العادية و المسرعة في الجزء Select CPM data field

- بعد نضغط على الزر ok تظهر لنا نافذة إدخال البيانات و نقوم بإدخال البيانات كالتالي:

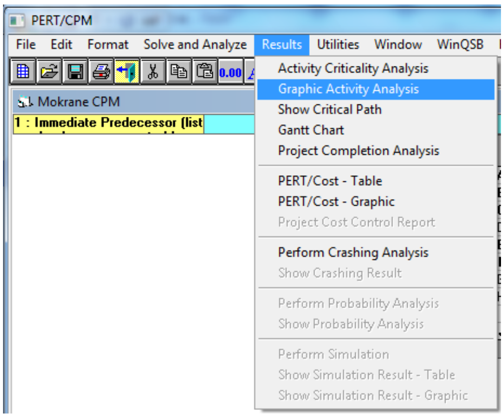
الشكل 3-50



Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		7	4	30	45
2	B		5	3	10	16
3	C		4	4	20	20
4	D	A	6	5	18	25
5	E	C	7	5	40	50
6	F	B,E	8	6	25	35
7	G	C	4	4	30	30
8	H	B,E	6	6	15	15
9	I	D,F	5	3	18	20
10	J	H,G	6	4	24	30

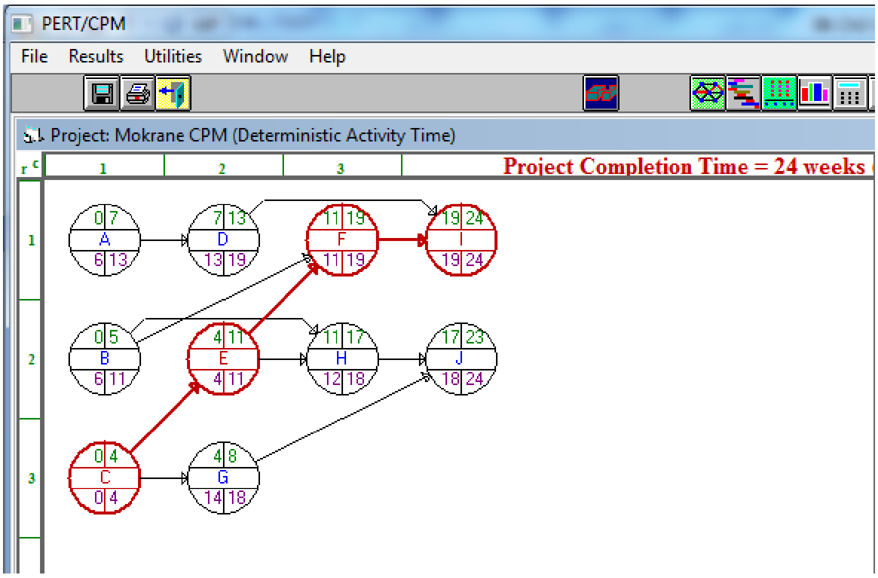
- لإظهار مخطط الشبكة للمسالة نقوم باختيار الأمر Graphic activity analysis من القائمة Results كما يظهر في الشكل الموالي:

الشكل 3-51



فنحصل على مخطط الشبكة للمسالة كما هو مبين أسفله:

الشكل 3-52

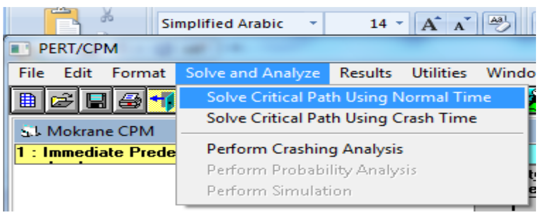


نلاحظ إن الشكل يسمح بقراءة مختلف الأوقات الخاصة بطريقة CPM بالإضافة إلى إعطاء وقت انجاز المشروع 24 أسبوع.

2- إيجاد جدول الأوقات العادية

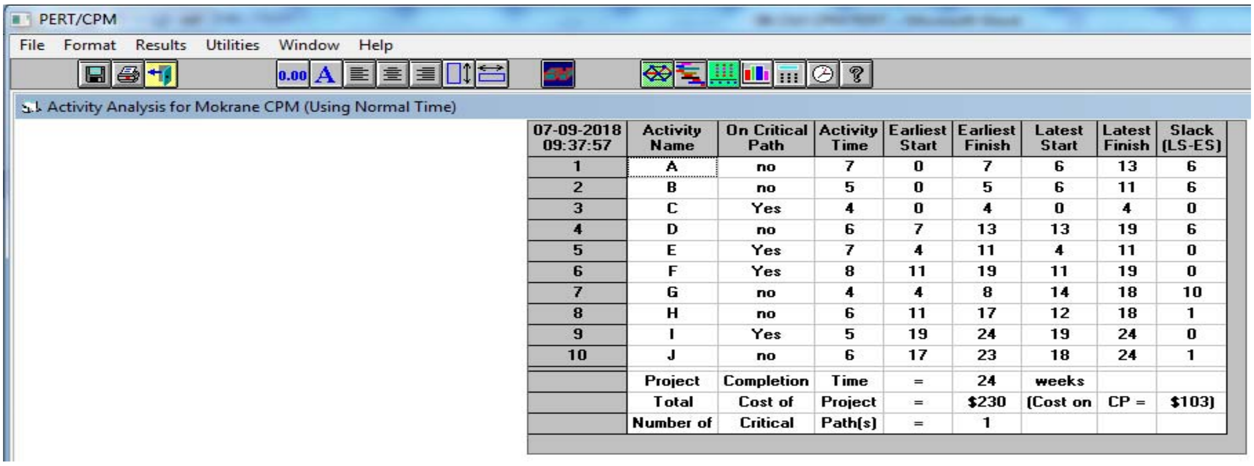
لإيجاد جدول الأوقات العادية للمسالة نختار الأمر Solve critical path using normal time من القائمة Solve and analyze كالتالي:

الشكل 3-53



فنحصل على جدول الأوقات العادية و التكلفة العادية كالتالي:

الشكل 3-54



07-09-2018 09:37:57	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	7	0	7	6	13	6
2	B	no	5	0	5	6	11	6
3	C	Yes	4	0	4	0	4	0
4	D	no	6	7	13	13	19	6
5	E	Yes	7	4	11	4	11	0
6	F	Yes	8	11	19	11	19	0
7	G	no	4	4	8	14	18	10
8	H	no	6	11	17	12	18	1
9	I	Yes	5	19	24	19	24	0
10	J	no	6	17	23	18	24	1
	Project	Completion	Time	=	24	weeks		
	Total	Cost of	Project	=	$230	(Cost on	CP =	$103)
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

3-تحديد مدة تنفيذ المشروع العادية و تكلفته مع تحديد المسار الحرج

يمكن من خلال الشكل 3-53 أعلاه قراءة:

زمن إنهاء المشروع العادي = 24 أسبوع

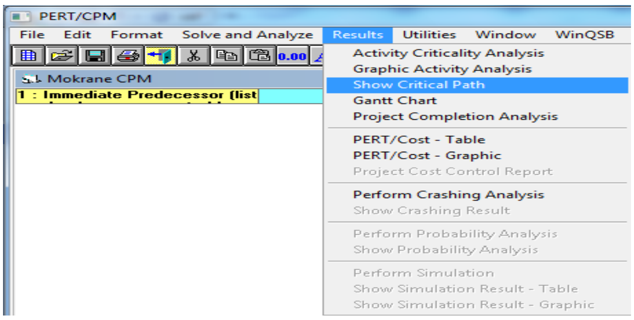
تكلفة المشروع العادية = 230 ألف دج

تكلفة أنشطة المسار الحرج = 103 ألف دج

بينما المسار الحرج يوافق الخانات المعدومة في العمود (LS-ES) Slack .

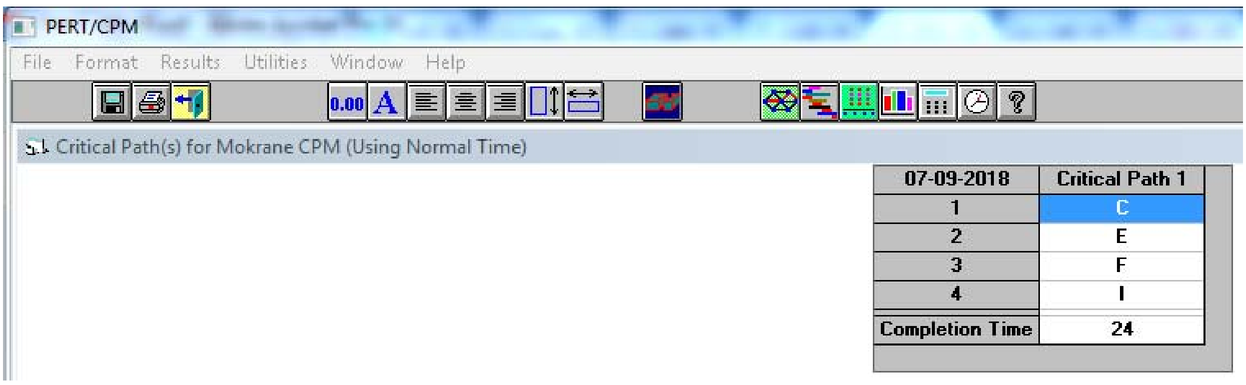
و يمكن إظهار نشاطات المسار الحرج عن طريق الأمر Show critical path من القائمة Results كالتالي:

الشكل 3-55



فيظهر جدول لنشاطات المسار الحرج كالتالي:

الشكل 3-56

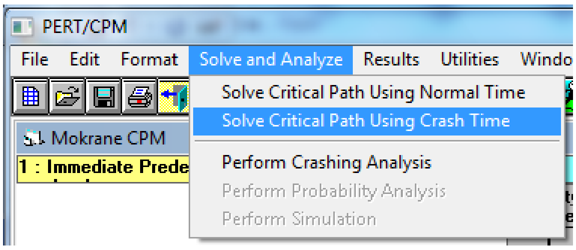


07-09-2018	Critical Path 1
1	C
2	E
3	F
4	I
Completion Time	24

4- إيجاد جدول الأوقات المسرعة و مدة تنفيذ المشروع المسرعة و تكلفته السرعة

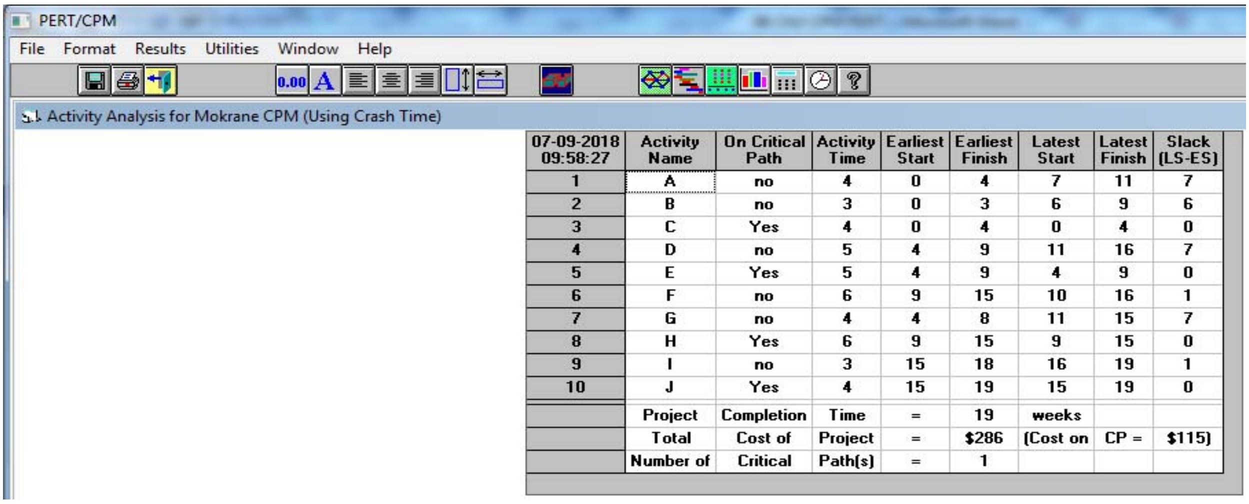
لإيجاد جدول الأوقات المسرعة للمسالة نختار الأمر Solve critical path using crash time من القائمة Solve and analyze كالتالي:

الشكل 3-57



فنحصل على جدول الأوقات المسرعة و التكلفة المسرعة كالتالي:

الشكل 3-58



07-09-2018 09:58:27	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	4	0	4	7	11	7
2	B	no	3	0	3	6	9	6
3	C	Yes	4	0	4	0	4	0
4	D	no	5	4	9	11	16	7
5	E	Yes	5	4	9	4	9	0
6	F	no	6	9	15	10	16	1
7	G	no	4	4	8	11	15	7
8	H	Yes	6	9	15	9	15	0
9	I	no	3	15	18	16	19	1
10	J	Yes	4	15	19	15	19	0
	Project	Completion	Time	=	19	weeks		
	Total	Cost of	Project	=	$286	(Cost on	CP =	$115)
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

يمكن من خلال الشكل 3-57 أعلاه قراءة:

زمن إنهاء المشروع المسرع = 19 أسبوعا

تكلفة المشروع المسرع = 286 ألف دج[55]

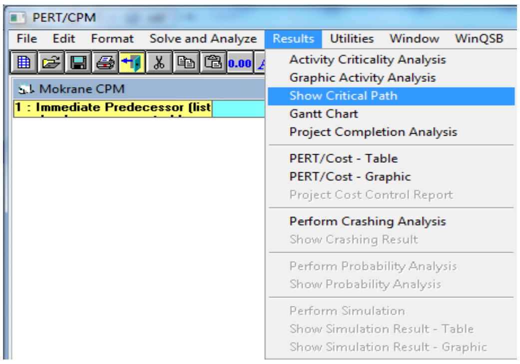
تكلفة أنشطة المسار الحرج المسرع = 115 ألف دج

بينما المسار الحرج المسرع يوافق الخانات المعدومة في العمود Slack (LS-ES) .

و يمكن إظهار نشاطات المسار الحرج المسرع عن طريق الأمر Show critical path من القائمة Results كالتالي:

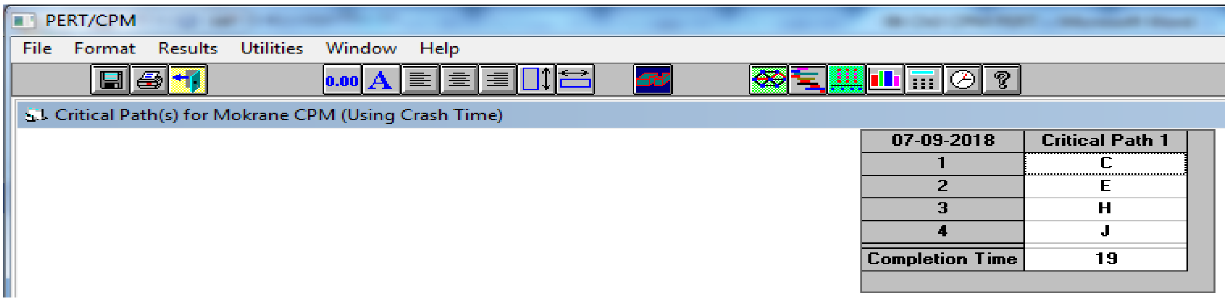
[55] في المرجع: محمد راتول،"بحوث العمليات"،ديوان المطبوعات الجامعية،2011. ص331 ، وجدت تكلفة المشروع المسرع = 286 ألف دج و **هو خطا وارد في المرجع**.

الشكل 3-59



فيظهر جدول لنشاطات المسار الحرج المسرع كالتالي:

الشكل 3-60



3-2- أسلوب مراجعة وتقييم المشروع (PERT):

يعد منهج " بارت " نموذجا شبكيا يستخدم في جدولة وتخطيط ورقابة المشروعات التي تحتوي على نوع من عدم التأكد في مدة انجاز بعض الأنشطة التي تتكون منها، حيث يعالج هذا النموذج مسألة عدم التأكد في ظل الاحتمالات المتوقعة، وهذا لان هناك عوامل ومتغيرات خارجية تؤثر في عملية الانجاز. فمن الصعب الاعتماد على تقدير واحد لزمن النشاط، وللحد من هذا التأثير ومعالجة الانحرافات في أزمنة النشاط يعتبر زمن كل نشاط متغيرا عشوائيا خاضعا لتوزيع احتمالي معين وليس مقدارا ثابتا، وبما أن زمن انجاز كل نشاط من أنشطة المشروع هو متغير عشوائي مستمر فهو يخضع لتوزيع احتمالي مستمر، ومن بين التوزيعات التي يمكن استخدامها في تقدير أزمنة الأنشطة في أسلوب مراجعة وتقييم المشروع (PERT) نذكر ما يلي:

أ- **التوزيع المثلثي:** هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم عندما تكون البيانات الفعلية مفقودة أو لم يتم جمعها، أو يكون جمعها مستحيلا، ويكون هذا التوزيع المعرف على المجال [a,b] بالشكل التالي:[56]

$$f(X) = \begin{cases} \frac{2}{b-a}\left(\frac{x-a}{u-a}\right) & a \le x \le u \\ \frac{2}{b-a}\left(\frac{b-x}{b-x}\right) & u \le x \le b \end{cases}$$

[56] Ang ALFREFO H-S & Wilson H TANG, "Probability concepts in Engineering planning and Design", volume 1, JOHN Wiley & Sons, Singapore, 1975, p224.

حيث: f(x) التوزيع الاحتمالي يحقق الشرط $\int_a^b f(x)dx = 1$

a: الحد الأدنى.

u: القيمة الأكثر احتمالا

b: الحد الأعلى

بحيث: $a \leq x \leq b$

ب- التوزيع المنتظم :ويستخدم هذا التوزيع لتقدير الزمن اللازم لانجاز مهمة ما، وذلك بعد تقدير الحد الأعلى والأدنى لذلك المتغير، وهو من الشكل:[57]

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & other\ wise \end{cases}$$

ج- توزيع بيتا بارت PERT- $\boldsymbol{\beta}$: يشتق هذا التوزيع من توزيع Beta العام، ويكون محصورا في معرفة الزمن التقريبي للنشاط في شبكة PERT، وذلك عندما تكون البيانات الفعلية مفقودة، ويقوم هذا التوزيع على قاعدة ثلاث تقديرات لزمن انجاز النشاط هي:[58]

ج-1- الزمن المتفائل a: هو الوقت المقدر للانتهاء من العمل من بين حدثين مأخوذين بحدود دنيا، حيث تكون جميع الشروط ملائمة لسير العمل دون أية عراقيل في التنفيذ، أي كل الظروف الخاصة بالأداء والموارد اللازمة على ما يرام، وهذا يمثل الوقت الأمثل لتحقيق الحادث، ولا يمكن تقليل هذه الفترة إلى ما دون ذلك إلا بزيادة النفقات.

ج-2- الزمن المتشائم b: هو الوقت اللازم لإنهاء العمل بين حدثين باعتبار جميع الظروف السيئة التي يمكن أن تطرأ على المشروع أثناء القيام بالعمل، أي أن أسوأ الظروف سوف تواجه تنفيذ هذا النشاط.

ج-3- الزمن الأكثر احتمالا m: ويعبر عن أفضل التقديرات للوقت اللازم للانتهاء من النشاط، وتكون درجة احتمال حدوثه عالية، حيث يمثل الوسط بين التفاؤل والتشاؤم، أي العمل وفق الظروف الاعتيادية.

أسلوب (PERT) يتم إنشائه من أجل الربط ومراقبة أنشطة المشروع التي لا يجب أن نتجاوزها ، كما أنه يبين لنا الأزمنة الحرجة التي لا يجب أن يتأخر إنجازها ،لأنه في حالة تأخرها فإنها سوف تؤثر على المدة الزمنية الإجمالية للمشروع.

ومن أجل تطبيق أسلوب (PERT) يجب معرفة نوعين من المعلومات:

- المعلومات التي تخص العلاقة التي تربط بين الأزمنة.
- تقدير الوقت اللازم الذي يتطلبه كل نشاط[59].

[57] Ang ALFREFO H-S & Wilson H TANG op cit.,p225

[58] منصور البدري، دراسات كمية واتخاذ القرارات، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 1987 ، ص180

[59] Boualem Benmazouz, op cit., P193

3-2-1- آلية عمل أسلوب (PERT):

إن النقطة الأساسية التي تميز أسلوب بارت (PERT) عن أسلوب المسار الحرج (CPM)، كون الأول يستند إلى مفهوم الاحتمالية في تحديد الأوقات للزمن الذي تستغرقه الأزمنة ، في حين أن أسلوب المسار الحرج (CPM) يقوم على أساس زمن مقرر ومؤكد للأنشطة ولوقت المشروع ككل.

إن أسلوب بارت (PERT) يقوم على أساس التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير العشوائي التي يجب أن يكون في مجموعها النهائي الواحد الصحيح.

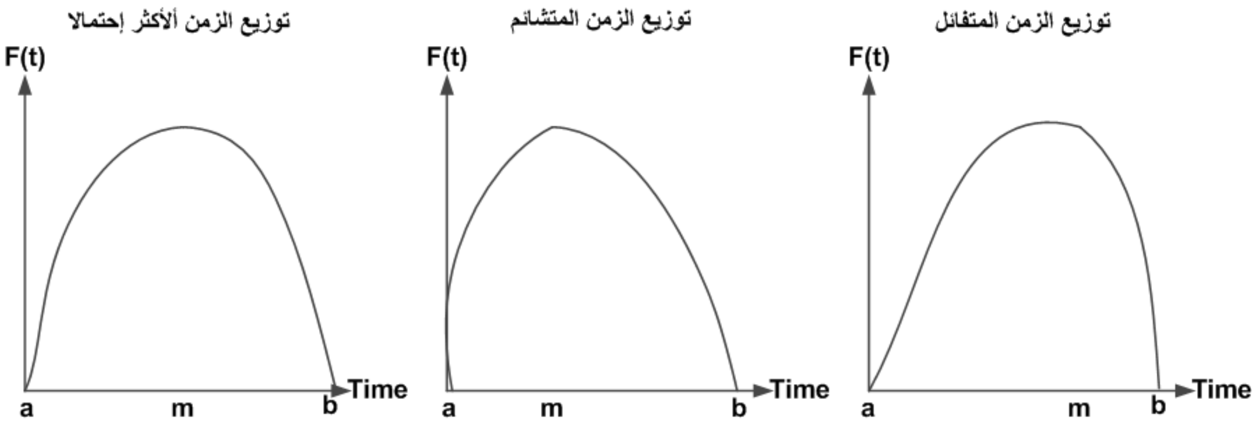
إن وجود الفروض الاحتمالية في أسلوب (PERT) يعني وجود ظاهرة عدم التأكد في تحديد الفترة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع، بالرغم من أن هناك رغبة في إنجاز المشروع بأقل وقت ممكن.

وارتباطا بموضوع الإحتمالية، فإن أسلوب (PERT) يقوم على أساس وضع تقديرات زمنية متباينة تنعكس في حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة للأحداث.

تستخدم لأغراض التوزيع الاحتمالي معادلات بسيطة لاستخراج الوسط الحسابي وكذلك الانحراف المعياري استنادا لتوزيع بيتا (Beta) حيث يقوم بوضع ثلاث أوقات محتملة للزمن المقدر للانتهاء من الأزمنة، كما اشرنا له سابقا عند تعرضنا لتوزيع بيتا بارت $\beta - \text{PERT}$.

إن التقديرات الثلاثة للمدد الزمنية اللازمة لتنفيذ كل نشاط تتبع التوزيع الاحتمالي المعروف باسم بيتا (Beta) ذات الصفات الاحتمالية، حيث تكون نقطة التحدب الوحيدة عند **الزمن الأكثر احتمالا (m)**، وأن نقاط النهاية تكون عند النقطتين (a و b) أي (**الزمن المتفائل و الزمن المتشائم**) كما هو موضح في الشكل 3-61 أدناه.

الشكل 3-61[60]



وبسبب هذه الأنواع الثلاثة من الحالات يتم اللجوء إلى حساب المعدل المتوسط والذي يرمز له ب T_e وكذلك نحسب التباين لتوزيع بيتا (Beta).

[60] مؤيد الفضل، مرجع سبق ذكره. ص442

ويحدد متوسط هذه التقديرات باستخدام العلاقة التالية[61]:

$$T_e = \frac{b+4(m)+a}{6} = \frac{\frac{b+a}{2}+2m}{3}$$

حيث:

a: الزمن المتفائل.

b: الزمن المتشائم

m: الزمن الأكثر احتمالا

من واقع التقديرات الثلاثة للأزمنة فإننا نستنتج أن الزمن المتوقع هو:

$$\text{الوقت المتوقع} = \text{الوسط الحسابي المرجح للاوقات الثلاث} = \frac{\text{المتشائم} + 4(\text{الاكثر احتمالا}) + \text{التفائل}}{6}$$

وعند تحديدنا للزمن المتوقع فإنه ولإيجاد المسار الحرج نتبع نفس الخطوات المتبعة في طريقة المسار الحرج (CPM).

و من المفيد تحديد درجة الثقة لهذا التقدير بالطرق الإحصائية وذلك عن طريق اختبار درجة التغير في تقديرات الأوقات المتفائلة و المتشائمة و مقدار الاختلاف بينها عن الوقت الأكثر احتمالا، فإذا ما وجدنا أن مقدار الاختلاف بين الأوقات الثلاثة كبيرا، فإن ذلك يدل على أن درجة الثقة في التقدير الخاص بالوقت المتوقع سوف يكون ضعيفا.

و يحسب الانحراف المعياري لكل نشاط كما يلي:

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{b-a}{6}\right)^2} = \left(\frac{b-a}{6}\right)$$

تعتمد هذه المعادلة على المفهوم الإحصائي القائل بأن هناك (6) ستة انحرافات معيارية مابين نهايتي توزيع بيتا (Beta)،(±3 انحرافات معيارية من الوسط).[62]

التقديرات الزمنية الثلاثة وقيمها (a,b,m) ، تحسب وفق توزيع بيتا مع الأخذ بعين الاعتبار أن هذه القيم تساوي ($a=0,b=1,m=\alpha/\alpha+\beta$)، عندئذ نجد قيم α و β والتي تساوي تقريبا القيمة $2 \mp \sqrt{2}$ عندئذ يمكننا القول أن: $m = \frac{2\mp\sqrt{2}}{2}$.[63]

وكذلك من المعادلة السابقة نلاحظ أنه كلما زاد الفرق بين الوقت التفاؤلي والوقت التشاؤمي كلما زاد الانحراف المعياري σ، ولحساب التباين σ_T^2 فإننا نقوم بتربيع قيمة الانحراف المعياري ،أي الانحراف المعياري أي σ_T^2.

[61] عبد الله سعيد ،" الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات" ، الطبعة الأولى ، دار الحامد ،عمان-الأردن ،2007 ، ص 245.
[62] نعيم نصير، "إدارة وتقييم المشروعات"، منشورات المنظمة العربية للتنمية الإدارية ،عمان– الأردن 2005 ، ص203
[63] Georges Morel, "Gestion des projets et fabrications sur devis", modern edition, paris, 1972, p197

3-2-1-1- مثال تطبيقي 11 (دراسة حالة):

إذا كان لدينا نشاطين A و B و مختلف الأوقات بالأيام هي:

الجدول 3-12

	النشاط A	النشاط B
الزمن المتفائل	4	6
الزمن الأكثر احتمالا	12	10
الزمن المتشائم	14	20

- احسب الزمن المتوقع لانجاز كل نشاط
- ما هو النشاط الذي يعطي أحسن زمن المتوقع من حيث درجة التقدير

الحل:

لحسب الزمن المتوقع لانجاز كل نشاط وفق العلاقة التالية:

$$\text{الوقت المتوقع} = \text{الوسط الحسابي المرجح للاوقات الثلاث} = \frac{\text{المتشائم}+4\left(\text{الاكثر احتمالا}\right)+\text{التفائل}}{6}$$

فنجد:

الزمن المتوقع لانجاز نشاط A= $\frac{4+14+4\times12}{6} = 11$ يوم

الزمن المتوقع لانجاز نشاط B= $\frac{6+20+4\times10}{6} = 11$ يوم

نلاحظ أن الزمن المتوقع لانجاز النشاطين متساوي، ولتحديد أيهما أحسن زمن المتوقع من حيث درجة التقدير نقوم بحساب التباين لكل منهما كالتالي:

تباين النشاط A= $\frac{14-4}{6} = 2,69$

تباين النشاط B= $\frac{20-6}{6} = 5,43$

و منه نستنتج أن درجة التأكد لتنفيذ النشاط A في 11 يوم، هي أحسن من درجة التأكد لتنفيذ النشاط B.

3-2-2- احتمال تنفيذ المشروع خلال فترة معينة:

يتم على الشبكة حساب الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع، غير أن إدارة المشروع قد ترغب في معرفة احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة T_p ، قد تكون أكبر أو أصغر من الفترة المتوقعة T_e عن طريق الشبكة، لذلك فإنه يتم حساب معامل احتمال تنفيذ المشروع في تلك الفترة و يتم بعد ذلك استخراج قيمة الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي.

و يتم حساب معامل الاحتمال عن طريق الإحصائية Z التالية:[64]

$$Z = \frac{T_p - T_e}{\sigma_{cp}}$$

[64] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص341

حيث:

T_p: المدة المرغوب دراسة احتمال الانجاز فيها

T_e: المدة المقدرة لانجاز المشروع

σ_{cp} : الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة المكونة للمسار الحرج للمشروع، وتحسب كالتالي:[65]

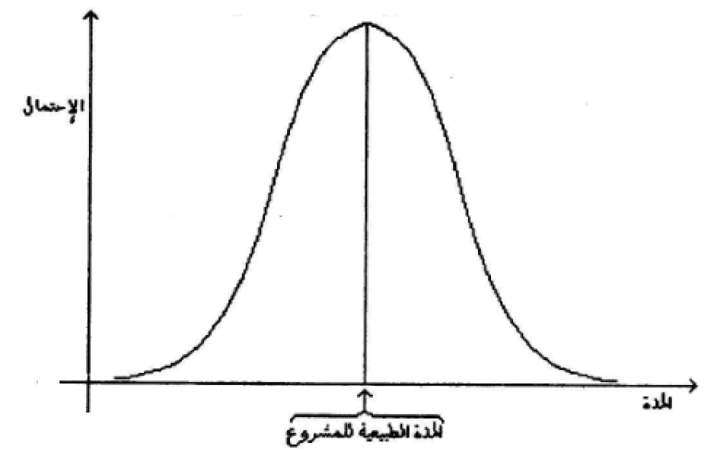
بفرض أن جميع الأنشطة المكونة للمشروع في الشبكة مستقلة إحصائيا عن بعضها فإننا نستطيع حساب الانحراف المعياري لمتوسط المدة الزمنية المتوقعة لانجاز المشروع كالتالي:[66]

$$\text{الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج} = \sigma_{cp} = \sqrt{\text{مجموع التباين لأزمنة الأنشطة الحرجة}}$$

بعد إيجاد قيم Z من المعادلة السابقة لجميع الأحداث الحرجة للشبكة، نستخرج الاحتمال المقابل لهذه القيم من جدول المساحات (الجدول 3−13) تحت المنحنى الطبيعي القياسي الممثل في الشكل 3−62 أسفله ، وهذا الاحتمال الزمني لإنجاز تنفيذ نشاطات المشروع يوفر لإدارة المشروع وسيلة لتقييم ومراجعة أزمنة تنفيذ أنشطة المشروع وإعادة الجدولة الزمنية للأنشطة.[67]

و الشكل الموالي يبين منحنى التوزيع الطبيعي القياسي: [68]

الشكل 3−62



[65] احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سبق ذكره. ص385

[66] بالتصرف

[67] سهيلة عبد الله سعيد ، مرجع سبق ذكره. ص 248

[68] محمد راتول، مرجع سبق ذكره. ص342

والجدول الموالي يبين جدول التوزيع الطبيعي القياسي المعتمد عليه في استخراج القيم **احتمال تنفيذ المشروع خلال فترة معينة (Z) :**

الجدول 3-13

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,00	0,00135									
-2,90	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
-2,80	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
-2,70	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
-2,60	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
-2,50	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
-2,40	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
-2,30	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
-2,20	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
-2,10	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
-2,00	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
-1,90	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
-1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
-1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
-1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
-1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
-1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
-1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
-1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
-1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
-1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
-0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
-0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
-0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
-0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
-0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
-0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
-0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
-0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
-0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,00	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,10	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,20	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,30	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,40	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,50	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,60	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,70	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,80	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,90	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,00	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,10	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,20	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,30	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,40	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,50	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,60	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,70	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,80	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,90	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,00	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,10	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,20	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,30	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,40	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,50	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,60	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,70	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,80	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,90	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,00	0,99865									

3-2-3- تحديد زمن ثقة الانجاز : يتم تحديد الزمن T_c الذي تكون فيه الإدارة على ثقة من إنجاز المشروع بمستوى معنوية α=5% أي بدرجة ثقة تعادل 1−α=0,95 ويتم ذلك بإيجاده من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

العدد المقابل للاحتمال 0,95 والذي يساوي 1,65 وعندئذ الزمن يحسب من العلاقة التالية[69]:

زمن ثقة الانجاز= الزمن المقدر لانجاز المشروع + 1,65 (الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج)

بعبارة أخرى:

$$T_c = T_e + 1{,}65\sigma_{cp}$$

حيث:

T_c: المدة الثقة لانجاز المشروع بمستوى معنوية α%

T_e: المدة المقدرة لانجاز المشروع

σ_{cp} : الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة المكونة للمسار الحرج للمشروع

3-2-4- مزايا تطبيق أسلوب مراجعة وتقييم المشروع (PERT):

يفيد تطبيق أسلوب (PERT) الإدارة في تحديد ما يلي:[70]

- زمن تنفيذ المشروع
- زمن بداية و نهاية المشروع، فضلا عن زمن بداية و نهاية كل نشاط من الأنشطة المختلفة
- إمكانية تحويل الموارد الفائضة من الأنشطة الغير حرجة (الأنشطة التي يمكن التأخير فيها)، إلى الأنشطة الحرجة، أي (التي يجب أن تنتهي في موعدها المحدد) دون أن يؤثر تحويل تلك الموارد على وقت الانتهاء الكلي للمشروع.
- الأنشطة التي تستوجب تركيز مضاعف من قبل الإدارة.

3-2-5- مثال تطبيقي 12 (دراسة حالة):

يوضح الجدول أدناه البيانات الخاصة حول انجاز احد المشاريع الصناعية، مع تسلسل الأنشطة و الأزمنة كالتالي:

[69] إبراهيم نائب ،أنعام باقية، بحوث العمليات خوارزميات وبرامج حاسوبية ، الطبعة الأولى،دار وائل للنشر والطباعة ، الأردن سابق ، ص 213
[70] احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سبق ذكره.ص387

الجدول 3-14

النشاط	النشاط السابق	الأوقات المتعددة (بالأسابيع)		
		الوقت المتفائل a	الأكثر احتمالا m	الوقت المتشائم b
A	–	6	8	10
B	–	**3**	6	9
C	–	**1**	3	5
D	A	**0**	0	0
E	A	**2**	4	12
F	B	**2**	3	4
G	C	**3**	4	5
H	C	**2**	2	2
I	D,F,G	**3**	7	11
J	D,F,G	**2**	4	6
K	J,H	**0**	0	0
L	E	**1**	4	7
M	I,K	**1**	10	13

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال للمشروع

2- حدد الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط

3- اكتب جدول المراقبة الزمنية و حدد عليه الأوقات المتوقعة للأنشطة و تباينها.

4- تحديد المسار الحرج و مدة تنفيذ المشروع.

5- ما هو احتمال أن ينجز المشروع خلال:

أ- 30 اسبوع

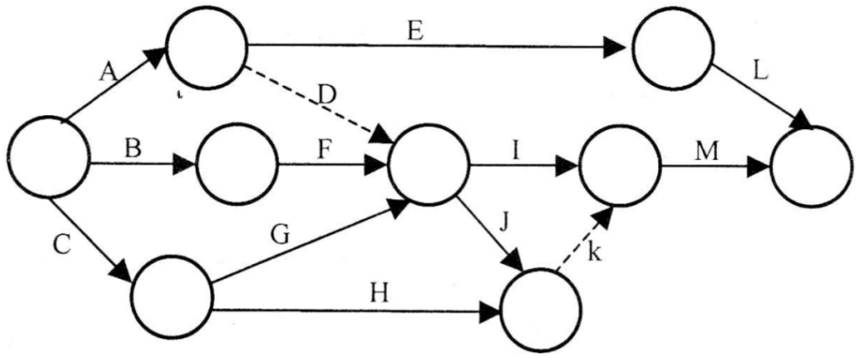
ب-22 أسبوع

6- أحسب زمن ثقة انجاز المشروع في الحالتين عند مستوى معنوية α=5%.

الحل:[71]

1- رسم شبكة الأعمال للمشروع

الشكل 3-63



2- تحديد الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط

الجدول 3-15

النشاط	النشاط السابق	الأوقات المتعددة (بالأسابيع)			الوقت المتوقع $T_e = \frac{b+4(m)+a}{6}$	التباين $\sigma^2{}_T = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
		الوقت المتفائل a	الأكثر احتمالا m	الوقت المتشائم b		
A	–	6	8	10	8	$0,66^2=0,44$
B	–	3	6	9	6	$1^2=1$
C	–	1	3	5	3	$0,66^2=0,44$
D	A	0	0	0	0	$0^2=0$
E	A	2	4	12	5	$1,66^2=2,77$
F	B	2	3	4	3	$0,33^2=0,11$
G	C	3	4	5	4	$0,33^2=0,11$
H	C	2	2	2	2	$0^2=0$
I	D,F,G	3	7	11	7	$1,33^2=1,78$
J	D,F,G	2	4	6	4	$0,66^2=0,44$
K	J,H	0	0	0	0	$0^2=0$
L	E	1	4	7	4	$1^2=1$
M	I,K	1	10	13	9	$2^2=4$

[71] بالتصرف

3- كتابة جدول المراقبة الزمنية و حدد عليه الأوقات المتوقعة للأنشطة و تباينها.

يمكننا لأجل ذالك استعمال برنامج WinQSB كما رأينا سابقا فنحصل على جدول المراقبة الزمنية كالتالي:

الشكل 3-64

PERT/CPM
File Format Results Utilities Window Help

Activity Analysis for Mokrane PERT

07-11-2018 02:39:55	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	no	8	0	8	1	9	1	3-Time estimate	0,6667
2	B	Yes	6	0	6	0	6	0	3-Time estimate	1
3	C	no	3	0	3	2	5	2	3-Time estimate	0,6667
4	D	no	0	8	8	9	9	1	3-Time estimate	0
5	E	no	5	8	13	16	21	8	3-Time estimate	1,6667
6	F	Yes	3	6	9	6	9	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	4	3	7	5	9	2	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	2	3	5	14	16	11	3-Time estimate	0
9	I	Yes	7	9	16	9	16	0	3-Time estimate	1,3333
10	J	no	4	9	13	12	16	3	3-Time estimate	0,6667
11	K	no	0	13	13	16	16	3	3-Time estimate	0
12	L	no	4	13	17	21	25	8	3-Time estimate	1
13	M	Yes	9	16	25	16	25	0	3-Time estimate	2
	Project	Completion	Time	=	25	weeks				
	Number of	Critical	Path(s)	=	1					

4- تحديد المسار الحرج و مدة تنفيذ المشروع.

من مخرجات برنامج WinQSB يمكننا تحديد المسار الحرج الموافق للأنشطة ذات فترة السماح الكلية المعدومة، او كما راينا سابقا في طريقة تحديد المسار الحرج عن طريق برنامج WinQSB فنجد:

الشكل 3-65

PERT/CPM
File Format Results Utilities Window Help

Critical Path(s) for Mokrane PERT

07-11-2018	Critical Path 1
1	B
2	F
3	I
4	M
Completion Time	25
Std. Dev.	2,62

وعليه فان المسار الحرج هو المسار المتكون من مجموع الأنشطة B,F,I,M و المدة المقدرة لتنفيذ المشروع T_e تقدر ب 25 أسبوع

نلاحظ ان برنامج WinQSB يعطينا بالإضافة للمسار الحرج مجموع الانحرافات المعيارية للمسار الحرج وهي تساوي:

$$\boxed{\text{الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج} = \sigma_{cp} = \sqrt{\text{مجموع التباين لأزمنة الأنشطة الحرجة}}}$$

أي: $\sqrt{1 + 0{,}11 + 1{,}78 + 4} = \sqrt{6{,}89} = 2{,}62$

5- ما هو احتمال أن ينجز المشروع خلال:

أ- 30 اسبوع

ب-22 أسبوع

- لحساب احتمال انجاز المشروع في مدة 30 أسبوع نستعين بالإحصائية Z التي رأيناها سابقا وهي:

$$Z = \frac{T_p - T_e}{\sigma_{cp}}$$

وعليه فان:

$$Z_{30} = \frac{30-25}{2,62} = 1,91$$

و بالرجوع إلى جدول الإحصائيات للتوزيع الطبيعي القياسي (الجدول 3-13) نقرا القيمة 0,9719 وعليه فان نسبة احتمال انجاز المشروع في مدة 30 أسبوع هي: 97,19 %

- بنفس الطريقة نقوم بحساب احتمال انجاز المشروع في مدة 22 أسبوع نستعين بالإحصائية Z فنجد:

$$Z_{22} = \frac{22-25}{2,62} = -1,14$$

و بالرجوع إلى جدول الإحصائيات للتوزيع الطبيعي القياسي (الجدول 3-13) نقرا القيمة 0,1271 وعليه فان نسبة احتمال انجاز المشروع في مدة 30 أسبوع هي: 12,71 %

أي أن نسبة احتمال انجاز المشروع ثلاثة أسابيع قبل الموعد المقدر هو اقل من 13%

6- أحسب زمن ثقة انجاز المشروع في الحالتين عند مستوى معنوية α=5%.

- لحساب ثقة انجاز المشروع في مدة 30 أسبوع نستعين بالعلاقة التي رأيناها سابقا وهي:

زمن ثقة الانجاز= الزمن المقدر لانجاز المشروع + 1,65 (الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج)

$$T_c = T_e + 1,65\sigma_{cp}$$

زمن ثقة الانجاز في المشروع في مدة 30 أسبوع = الزمن المقدر لانجاز المشروع + 1,65 (الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج)

زمن ثقة الانجاز = 25+1,65(2,62)=29,32

اي انه بعد مضي 29,32 يوم على بداية المشروع تكون الإدارة على ثقة من إنجاز المشروع بنسبة 95%

- لحساب ثقة انجاز المشروع في مدة 22 أسبوع نستعين بالعلاقة ولكن بما ان زمن الانجاز في هذه الحالة اقل من الزمن المقدر و هو 25 أسبوع نكتب العلاقة بالشكل التالي:

زمن ثقة الانجاز= الزمن المقدر لانجاز المشروع - 1,65 (الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج)

$$T_c = T_e - 1,65\sigma_{cp}$$

ويكون عليه:

زمن ثقة الانجاز في المشروع في مدة 22 أسبوع = الزمن المقدر لانجاز المشروع + 1,65 (الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج)

زمن ثقة الانجاز = 20,67=(2,62)1,65−25

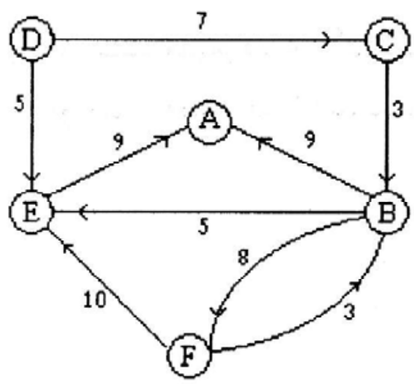
أي انه بعد مضي 20,67 يوم على بداية المشروع تكون الإدارة على ثقة من إنجاز المشروع بنسبة 95%

4- تمارين تطبيقية مقترحة حول الفصل الثالث:

4-1- التمرين 1:

ليكن الشكل الموال لبيان الموجه.

الشكل 3-66[72]



المطلوب:

1- علم مختلف المصطلحات التالية على الشكل السابق إن وجدت:

القمة، الحرف، القوس، الدائرة السلسلة، المسار، الحلقة

2- قم بتمثيل البيان الموجه للشكل السابق، باستعمال:

مصفوفة تجاور بولينية (Boolean)

مصفوفة السعة أو الكلفة

مصفوفة المساقط

مصفوفة الأقواس

4-2- التمرين 2:

اوجد أعظم تدفق بين الخزانات B،A و C و القرى W,X,Y وZ إذا علمت أن طاقة تصريف الأنابيب الرابطة بين الخزانات و القرى و طاقة تصريف كل خزان و طاقة استقبال كل قرية موضحة في الجدول الموالي:

[72] محمد راتول، مرجع سبق ذكره.ص223

الجدول 3-16

المصب (القرى) / المنبع (الخزانات)	W	X	Y	Z	الكميات المصرفة
A	20	30	10	–	**100**
B	10	70	50	30	**120**
C	–	–	30	70	**80**
الكميات المستقبلة	**30**	**40**	**70**	**60**	

4-3- التمرين 3:

يوضح الجدول الموالي البيانات عن الأنشطة و الأنشطة السابقة و الخاصة بانجاز احد المشاريع الإنشائية، و كذالك الزمن العادي و المسرع و التكلفة العادية و المسرعة لمختلف الأنشطة.

الجدول 3-17

النشاط	**النشاط السابق**	**مدة تنفيذ العادية (بالأسابيع)**	**مدة التنفيذ المسرعة (بالأسابيع)**	**كلفة انجاز العادية (ألف دج)**	**كلفة انجاز المسرعة (ألف دج)**
A	–	2	1	40	45
B	A	4	3	45	48
C	A	8	6	60	60
D	C	10	8	45	49
E	D	1	1	20	22
F	D	5	4	16	19
G	E	1	1	70	77
H	F,H	3	2	60	64
I	G	5	4	10	18
J	I,J	1	1	22	26
K	K	8	6	42	49
L	A	7	6	20	27

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال

2- حدد على الشبكة الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية

3- اكتب جدول المراقبة الزمنية وحدد عليه الأوقات المبكرة للنهاية و الأوقات المتأخرة للبداية و وقت السماح الكلي

4- حدد الأنشطة الحرجة (المسار الحرج).

5- حدد وقت انجاز المشروع و تكلفته.

6- إيجاد جدول الأوقات المسرعة و مدة تنفيذ المشروع المسرعة و تكلفته السرعة

4-4- التمرين 4:

يوضح الجدول أدناه البيانات الخاصة حول انجاز احد المشاريع الصناعية، مع تسلسل الأنشطة و الأزمنة كالتالي:

الجدول 3-18

النشاط	النشاط السابق	الأوقات المتعددة (بالأيام)		
		الوقت المتفائل a	الأكثر احتمالا m	الوقت المتشائم b
A	–	4	11	12
B	–	**45**	48	63
C	B	**13**	33	35
D	B	**25**	29	39
E	A,C	**14**	21	22
F	D,E	**18**	32	34
G	A,C	**17**	19	27
H	G	**15**	20	25

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال للمشروع

2- حدد الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط

3- اكتب جدول المراقبة الزمنية و حدد عليه الأوقات المتوقعة للأنشطة و تباينها.

4- تحديد المسار الحرج و مدة تنفيذ المشروع.

5- ما هو احتمال أن ينجز المشروع خلال:

أ- 140 يوم

ب- 123 يوم

6- أحسب زمن ثقة انجاز المشروع في الحالتين عند مستوى معنوية α=5%.

قائمة مراجع الفصل الثالث: التحليل الشبكي

المراجع بالعربية:

إبراهيم نائب ، أنعام باقية، "بحوث العمليات خوارزميات وبرامج حاسوبية" ، الطبعة الأولى،دار وائل للنشر والطباعة ، الأردن.

احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، "بحوث العمليات، تطبيقات على الحاسوب"، دار المنهج للنشر، الأردن، 2007.

السعدي رجال، "بحوت العمليات في الإدارة، المالية، التجارة" منشورات جامعة المنتوري، قسنطينة الجزائر 2004-2005 .

إيمان فاضل السامرائي وهيثم محمد الزعبي ، "نظم المعلومات الإدارية"، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2004 .

جمال عبد العزيز صابر، "بحوث العمليات في المحاسبة"،جامعة القاهرة، مصر،2009.

دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، "بحوث العمليات" ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ،عمان-ألأردن ، 2008 .

رند عمران مصطفى الاسطل، "بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية"،موسوعة الكتب الجامعة، جامعة فلسطين، 2016.

سونيا محمد البكري،" استخدام الأساليب الكمية في الإدارة"، مكتبة ومطبعة الإشعاع، الإسكندرية، مصر،سنة 1997.

سهيلة عبد الله سعيد ، "الجديد في ألأساليب الكمية وبحوث العمليات" ، الطبعة الأولى ، دار الحامد ،عمان-ألأردن ، 2007 .

عبد الله سعيد ،" الجديد في ألأساليب الكمية وبحوث العمليات" ، الطبعة الأولى ، دار الحامد ،عمان-ألأردن ،2007.

عبد الرسول عبد الرازق الموسوي،" المدخل لبحوث العمليات" ، ط2 ، دار وائل للنشر والطباعة ،عمان-ألأردن ،2000.

علي العلاونة ، محمد عبيدات، عبد الكريم عواد،" بحوث العمليات في العلوم التجارية" ،دار المستقبل للنشر ، الأردن 2000.

عبد الستار محمد العلي ،"إدارة المشروعات العامة" ، ط1،دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ،عمان – ألأردن،2009 .

محمد توفيق ماضي،" إدارة وجدولة المشاريع"، الدار الجامعية، القاهرة، 2014.

محمود العبيدي، "إدارة المشاريع منهج كمي، مؤسسة الوراق للنشر، عمان، 2010.

محمد الصبيح،" نظرية البيان"، مطبوعة جامعية، جامعة تشرين، كلية الهندسة المعلوماتية، سوريا.2008
محمد سالم الصفدي، "بحوث العمليات – تطبيقات وخوارزميات–"، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2004 .
منصور البدري، "دراسات كمية واتخاذ القرارات"، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 1987 .
منصور كاسر ، "تعجيل زمن إنهاء المشروع باستخدام المرونة في زمن إنهاء النشاط في ظل أسلوب PERT/COST"، مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية،جامعة بغداد، كلية الاقتصاد والتجارة، العدد.28
مؤيد الفضل، " تقييم وإدارة المشروعات المتوسطة والكبيرة"، الطبعة ألأولى ، دار الوراق للنشر والتوزيع ، عمان – ألأردن،2009.
مؤيد عبد الحسين الفضل ، "المنهج الكمي في إدارة الوقت" ،دار المريخ للنشر والتوزيع ،الرياض–السعودية ، 2008 .
مؤيد عبد الحسين الفضل، "بحوث عمليات محاسبية"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2008 .
نعيم نصير، "إدارة وتقييم المشروعات" ، منشورات المنظمة العربية للتنمية ألإدارية ،عمان– ألأردن 2005 .

المراجع بالأجنبية:

Ang ALFREFO H-S & Wilson H TANG, "Probability concepts in Engineering planning and Design",
volume 1, JOHN Wiley & Sons, Singapore, 1975.

Boualem Benmazouz, « recherche opérationnelle de gestion », Edition Atlas, Algérie, 1995.

Didier Maquin, « Élément de théorie des graphes », Institut national de polytechnique de Loraine, 2003.

F.Droesbeke , M.hallin, CL.Lefevre, « les graphes par l'exemple », Edition ellipes,Aubin imprimeur, paris, 2001.

Georges Morel, "Gestion des projets et fabrications sur devis", modern edition, paris, 1972.

Jean Hélary, « Algorithmique des graphes », INFIC .juin.2004.

Jean pierre Védrine, Elisabeth Bringuier & Alain Brisard. « Techniques quantitatives de gestion », Vuibert gestion, Paris, 1985.

Nadia Belharrat, « Théorie des graphes – Recherche opérationnelle »", Edition les pages blues internationales, juillet 2005 Algérie.

Robert Faure, « Recherche Operationelle », Presse de France, paris, 1961.

الفصل الرابع:

البرمجة الديناميكية

الفصل الرابع: البرمجة الديناميكية

تفترض الطرق والتقنيات السابقة والتي تمت دراستها، بأن المسائل التي تواجهها المؤسسة لا تتطور ولا تتميز بالحركة، لأن معطيات هذا النوع من المسائل تتميز بنوع من الثبات، وأن المؤسسة بحد ذاتها نظاما ستاتيكيا (système statique)، وأن المؤسسة تنطلق من وضعية معينة لاتخاذ القرارات على اعتبار أن تلك الوضعية سوف تستمر مستقبلا ولا يمكن أن تتغير، لكن في الواقع فإن المؤسسة نظاما ديناميكي و أكثر حركة، ولا تتعلق الحركة هنا بعامل الزمن فقط، ففي بعض المسائل فإنها تكون هذه الحركية وهمية يشكل مراحل.

كل هذه المسائل و غيرها والتي تتميز بالتطور والحركة يتم حلها بكيفية تدعى البرمجة الديناميكية، وهو ما سنتناوله بشيء من التفصيل في هذا ألفصل من عملنا بحول الله.

1- التعريف بالبرمجة الديناميكية ومزاياها:

يعتبر العالم ريتشارد بيلمان (Richard Bellman) المؤسس الأول للبرمجة الديناميكية عندما قام بنشر نتائجه في شركة RAND ، لقد طور بيلمان أولا البرمجة الديناميكية في نهاية الأربعينيات و مطلع الخمسينيات و قام في مطلع عام 1957 بتأليف أول كتاب بعنوان البرمجة الديناميكية .و منذ ذلك الحين غدا هذا الكتاب مصدرا مستمرا لتطبيقات فريدة و لمنطق حل العديد من مسائل البرمجة الديناميكية .و ظهر كتاب ثان لبيلمان عام 1961 و نشر كتابا ثالثا بالتعاون مع دريفس و في نفس
الوقت الذي كان فيه بيلمان و شركاؤه ينشرون تقنيات و منهجيات البرمجة الديناميكية، قدم مؤلفون آخرون بإسهامات جليلة أخرى .فقد وضع آريس (Aris) كتابين في البرمجة الديناميكية .و أسهم ميتين (Mitten) أيضا إسهاما عظيما خلال الستينيات و وفر العديد من الأفكار الأساسية لتطور البرمجة الديناميكية .و نشر نمهاوزر (Nemhauser) في عام 1966 كتابا ممتازا يتعامل مع تطبيقات البرمجة الديناميكية، عنوانه، مقدمة في البرمجة الديناميكية، بالإضافة إلى الكثير من المراجع الهامة الأخرى.[1]
و مع أن لفظ ديناميكية في الواقع يعني عدم السكون على مر الزمن، أي أن عامل الزمن يعد من العوامل الهامة في تحديد صفة الديناميكية التي يوصف بها متغير معين أو مسألة معينة فقد يفهم من أسلوب البرمجة الديناميكية أنه يختص في حل المسائل التي يمثل الزمن فيها أحد المتغيرات المهمة المكونة لها.
و في الواقع إن هذا الكلام غير دقيق لأن البرمجة الديناميكية بشكل دقيق هي التوصل إلى الحل الأمثل لمجموعة من المسائل التي يتميز كل منها بتعدد المراحل و التي يتم فيها اتخاذ قرارات معينة.[2]
يمكن تعريف البرمجة الديناميكية بأنها إحدى الطرق الرياضية في نمذجة المسائل تهتم بإيجاد الحل الأمثل للمسائل التي يتميز كل منها بتعدد المراحل بحيث يسهل تجزئتها إلى مراحل متعددة و مترابطة، و ذلك عن

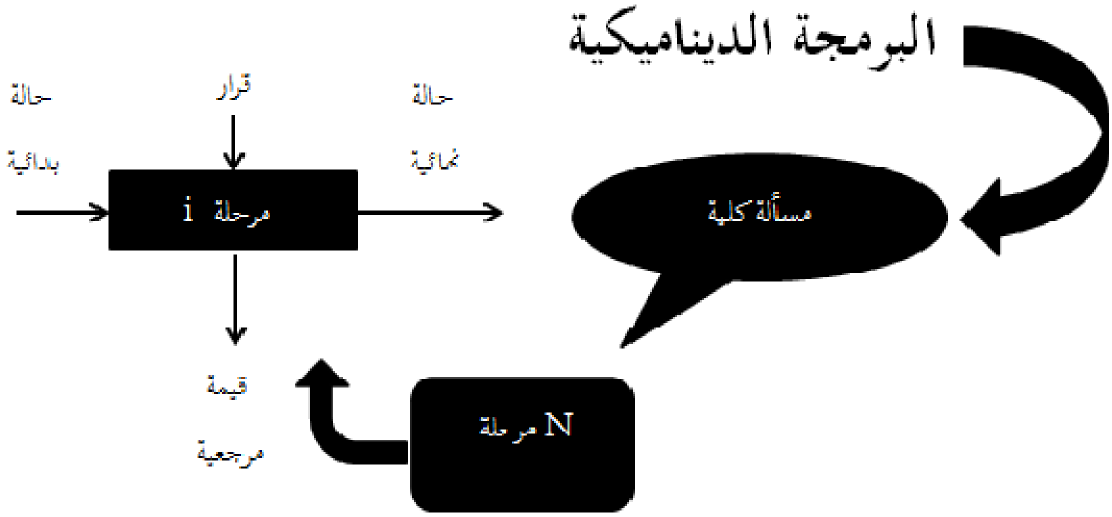
[1] Bellman R. , « Dynamic Programing », Princeton University press.1957, p311.
[2] Howard R.A. , "Dynamic Programing and Markov Processes" The technology press of M.t with John Wiley and Sons,1960, p196.

طريق تحويل كل منها إلى عدة مسائل جزئية و من ثم إيجاد الحل الأمثل الشرطي لكل مسألة جزئية على حدة، ثم يتقدم الحل من مرحلة إلى أخرى، بحيث يكون القرار الذي يمكن اتخاذه في أي مرحلة لاحقة هو القرار الأمثل بصرف النظر عن نوعية القرار الذي تم اتخاذه في المرحلة الثانية، و أخيرا نحصل بالنتيجة على الحل المثالي للمسألة الكلية.[3]

حيث أجمعت جل الأدبيات التي تعرضت لتقنية البرمجة الديناميكية من حيث المضمون على تقديم التعريف التالي لهذه التقنية بالرغم من تعدد الأشكال التي تمت بها صياغة هذا التعريف، فالبرمجة الديناميكية هي تقنية رياضية تستخدم لحل مسائل القرارات المتعددة المراحل، تقوم على تقسيم المسألة الأصلية إلى مسائل جزئية أبسط حسابيا ثم إتباع أسلوب العلاقات التتابعية لمعالجتها وتقديم الحل الأمثل لها[4].

يمكن التعبير عن التعريف السابق بالشكل 4-1

بالشكل 4-1



وتتمتع تقنية البرمجة الديناميكية التي وضعها الأستاذ ريتشارد بيلمان، بمزايا مكنتها من تجاوز العقبات الرئيسية التي تواجه تقنيات الأمثلية، إذ بإمكانها التعامل مع الأنماط التالية من المسائل:

- القدرة على حل المسائل غير الخطية
- القدرة على معالجة مناطق الحلول غير المحدبة
- القدرة على معالجة المسائل ذات المتغيرات المنقطعة (الأعداد الصحيحة)

2- عمليات القرار متعددة المراحل للبرمجة الديناميكية:

إن الغرض من أي قرار هو مواجهة موقف معين أو حل مشكلة قائمة أو محتمل الوقوع فيها، و إن عملية القرار هي عملية تتطلب لاستكمالها إما اتخاذ قرار واحد، و يعرف هذا النوع من العمليات بعمليات

---

[3] حسن علي مشرقي، زياد عبد الكريم القاضي، "بحوث العمليات، تحليل كمي في الإدارة"، دار المسيرة للنشر، عمان، 1997. ص271.

[4] Budnik Frank S., McLeavey D., Mojena R. « Principles of Operations Research for Management », ,Irwin ,paris, 1991, p 562.

القرار ذات مرحلة واحدة أو اتخاذ سلسلة متتالية من القرارات في إطار ما يسمى بعمليات القرار المتعددة المراحل و هذا هو جوهر تقنية البرمجة الديناميكية[5].

حيث أن القرار الرشيد هو ذلك القرار الذي يعتمد في اتخاذه على مجموعة من العناصر حيث يمكن توضيح هذه العناصر كالتالي:

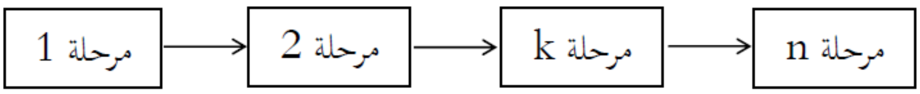
3- عناصر عمليات القرار المتعددة المراحل للبرمجة الديناميكية:

إن العناصر الرئيسية التي تستند إليها عمليات القرار متعددة المراحل و التي تمثل في الوقت نفسه أركان تقنية البرمجة الديناميكية التي تقوم بتقسيم المسألة المدروسة إلى مسائل جزئية تتم معالجتها على مراحل، مما يعني أن تقنية البرمجة الديناميكية تتعامل مع عمليات قرار متعددة المراحل (القرارات المتتابعة).
و يترتب علينا عند كل مرحلة اتخاذ قرار ما، فمسألة القرارات المتتابعة أو مسألة القرارات المتعددة المراحل Multistage Decision Problem هي مسألة تتألف من ثلاثة عناصر رئيسية هي :المرحلة Stage و البدائل Alternatives و أخيرا حالة State النظام في كل مرحلة.

3-1- المراحل (Stages) :

تعتبر المرحلة أولى عناصر عمليات القرار المتعددة المراحل، و هي تمثل جزءا من المسألة يتم اتخاذ قرار بشأنه، كما يعتبر تحديد نوعية المرحلة جزءا مهما من الصياغة الإجمالية لمسألة البرمجة الديناميكية، و تمثل المراحل المتعاقبة إحدى أبسط الأنماط لدى الصياغة، حيث يتوافر فيها التسلسل الطبيعي سواء خلال الزمن أم ألفراغ المدروس.
و هذه المراحل المتتالية يمكن تصويرها بيانيا كما هو موضح في الشكل 4-2

الشكل 4-2



3-2- البدائل (متغيرات القرار أو القيم المرجعية):

يمثل تحديد البدائل جزءا مهما لتعريف المرحلة، إذ يتم استكمال المرحلة باتخاذ قرار معين يمثل بديلا من البدائل المتاحة في هذه المرحلة، و يشكل تسلسل القرارات المتخذة السياسة المتبعة في المسألة و التي من المفترض بأن تكون مثلى.
و لكل قرار متخذ قيمة يتم تقديرها من خلال تابع العائد المرافق للمرحلة، و تمثل القرارات فرصة لتغيير قيم متغيرات الحالة.

[5] محمد إسماعيل بلال، "بحوث العمليات، استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار"، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية،2007، ص273

3-3- حالة النظام في كل مرحلة:

تمثل حالة النظام أهم مفهوم لدى صياغة نموذج البرمجة الديناميكية، كونها تمثل حلقة الوصل بين المراحل المتتالية بحيث يكون أي قرار متخذ في سياق عملية التحسين و في أي مرحلة كانت، ممكنا بالنسبة للمسألة ككل، كما تسمح باتخاذ القرارات المثلى للمراحل المتبقية دون الحاجة لتفقد آثار القرارات المستقبلية، على القرارات المتخذة سابقا.

و يعتبر تحديد الحالة من أدق الأمور لدى صياغة خوارزمية الحل لعدم وجود طريقة سهلة تمكننا من ذلك، و لكن يمكن الاهتداء إلى ذلك من خلال الإجابة عن السؤالين التاليين:

-ما هي العلاقة التي تربط المراحل ببعضها ؟

-ما هي المعلومات التي نحتاجها للوصول إلى قرارات ممكنة للمرحلة الحالية دون التأكد من إمكانية القرارات المتخذة في المراحل السابقة ؟

و يتم التعبير عن حالة النظام بشرط العملية في مرحلة ما، إذ يخبرنا بما نحتاج معرفته عن النظام في هذه المرحلة حيث تحدد قيم متغيرات الحالة وضع العملية تماما فبهدف اتخاذ القرار المناسب بشأن مسألة إنتاج على سبيل المثال، قد نحتاج لمتغيرات الحالة الخاصة بطاقة المصنع الإنتاجية و المخزون الحالي.

و يمكننا التوسع في عدد متغيرات الحالة كيفما نشاء، فلو أخذنا مسألة استثمار على سبيل المثال، فيمكننا أن نقتصر على متغير حالة وحيد يعبر عن الكمية الإجمالية للاستثمار الحالي، كما يسعنا تعريف متغيري حالة يعبران عن الدخل و نمو رأس المال أو تحديد متغير حالة يمثل كمية الاستثمار في كل صناعة، أو حتى في كل شركة على حدة.

و من الصعب التوسع في عدد متغيرات الحالة من الناحية العملية، على الرغم من الإمكانية النظرية لهذا الأمر، و ذلك بسبب تضاعف المصاعب أثناء الحل، و بالتالي فمن المستحسن تحديد أقل عدد ممكن من هذه القرارات.

3-4- مبدأ بلمان (Bellman) للأمثلية:

ينص هذا المبدأ الذي وضعه الأستاذ بلمان، و الذي تبنى على أساسه البرمجة الديناميكية على ما يلي:

للسياسة المثلى خاصية أنه بصرف النظر عن الحالة الابتدائية و القرار الابتدائي، فإن القرارات المتبقية يجب أن تكون سياسة مثلى لترك الحالة الناتجة عن القرار الأول.[6]

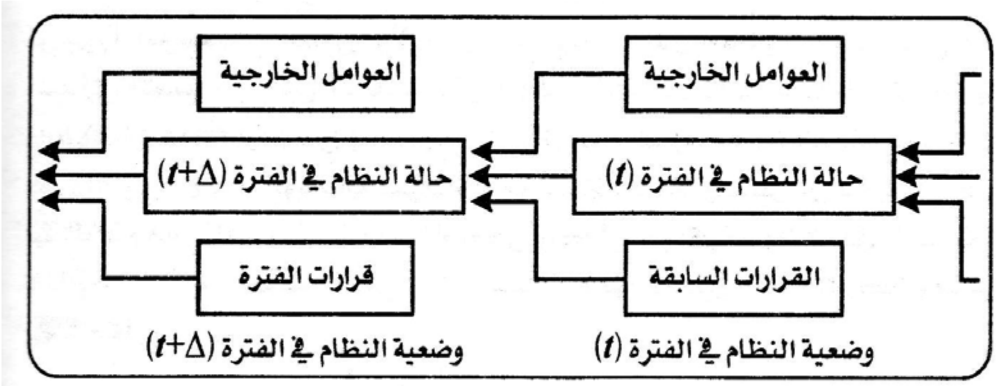
ذلك أن انتقال النظام من وضعية معينة في ألفترة (t) إلى وضعية أخرى في ألفترة (t+Δ) يكون النظام أحسن مهما كان عليه الوضع قبل الانتقال، هذا الأخير يتأثر بعوامل ثلاث وهي:

- المتغيرات الخارجية.
- حالة النظام في ألفترة (t)
- القرارات السابقة

[6] Bellman R. and Kalaba R. "Dynamic Programing and Modern Control Theory" Academic Press 1966, p.95

و الشكل 4-3 الموالي يبين العوامل المؤثرة في انتقال النظام من فترة إلى أخرى.[7]

الشكل 4-3



4- الخصائص المميزة للمشاكل التي يمكن حلها بإستخدام أسلوب البرمجة الديناميكية:

هناك أربع سمات تميز المشاكل التي يمكن تطبيق أسلوب البرمجة الديناميكية عليها وهي كما يأتي:[8]

- إن المشكلة المراد حلها بأسلوب البرمجة الديناميكية يجب أن تكون قابلة للتقسيم إلى مراحل ، إذ أن القرار يتخذ عند كل مرحلة، ولتحديد حجم الطلبية الأمثل للمواد الداخلة في عملية إنتاج متعدد ألفترات، فأن المراحل تمثل نقاطاً مختلفة في الزمن.
- كل مرحلة من مراحل المشكلة يجب أن يكون لها عدد محدد من متغيرات الحالة المرتبطة بها.
- إن تأثير القرار في كل مرحلة من مراحل المشكلة يتمثل في تحويل متجه الحالة الحالية إلى متجه حالة مرتبط بمرحلة قادمة.
- تكوين علاقة رياضية تكرارية تعطي الحل الأمثل لكل مرحلة من مراحل المشكلة و بالاعتماد على الحالة المرتبطة فيها.

عند كل حالة ومرحلة حالية معطاة من المشكلة فان التعاقب الأمثل للقرارات يكون معتمد على القرار المتخذ في المرحلة السابقة.

[7] اليمين فالته، " بحوث العمليات"، اتراك للطباعة و لنشر،القاهرة، 2006. ص248.
[8] السعدي دنيا احمد، "استخدام البرمجة الديناميكية في تحليل نماذج الخزين "، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد 1999. ص26

5- صياغة وحل مشاكل البرمجة الديناميكية:

هناك مجموعة من الخطوات و الإجراءات التي تستخدم في حل مشاكل البرمجة الديناميكية وهي كالتالي:[9]

- تحديد متغيرات المشكلة ومن ثم دالة الهدف سواء كانت تقليل التكاليف أو تعظيم الأرباح، وكذلك تحديد قيود المشكلة.
- تحديد مراحل Stages مشكلة القرار المتعدد، ومن ثم حدد متغيرات القرار والقيم المرتبطة بالحالة لكل مرحلة من المراحل، وما هي متطلبات القرارات عند كل مرحلة.
- تحديد دالة الحالة State transformation fonction و العلاقة لأي من الحالة عند المرحلة الواحدة والتي تكون هي الدالة للحالة والقرار للمرحلة القادمة.
- تطوير Develop دالة العائد الأمثل والذي يسمح لحساب السياسة المثلى، المعطاة للحالة عند أي مرحلة ومن ثم حدد دالة العائد الأمثل للمرحلة الأولى Stages1، وبما أن هذه الدالة عادة ما تختلف قليلا في النموذج من دالة العائد الأمثل العام للمراحل الأخرى.
- ابتكار جدول توضيحي والذي يبين بوضوح القيم المطلوبة وحساباتها لكل مرحلة Stages.
- تحديد القيم الرقمية والعلاقات في المشكلة، ثم تحدد كل السياسات المثلى وقيمها، حيث من الممكن أن يكون هنالك أكثر من سياسة مثلى[10].

و مهما كانت مسالة البرمجة الديناميكية يمكن الانطلاق و الشروع في حلها من المرحلة الأولى أو البداية وتسمى هذه الطريقة (بخوارزمية الحل الأمامي)، أو من المرحلة الأخيرة أو النهاية وتسمى هذه الطريقة (خوارزمية الحل الخلفي أو الراجع) وتستعمل طرق كثيرة في حل مسائل البرمجة الديناميكية أهمها:

- الطريقة الشبكية أو طريقة الرسم البياني (المسار الأقصر للتنقل)
- الطريقة الرياضية أو طريقة الجداول (تخصيص الموارد)

5-1- الطريقة الشبكية أو طريقة الرسم البياني:

تستخدم هذه الطريقة غالبا في مسائل المتعلقة بالتنقل و النقل، و لشرح هذه الطريقة نستعين بالمثال التطبيقي الموالي:

5-1-1- مثال تطبيقي 1 (دراسة حالة):

يريد احد الأشخاص التنقل من المدينة A إلى المدينة J إلا انه لا يوجد خط سفر مباشر بين المدينتين لهذا فهو مضطر للمرور بمدن مختلفة للوصول إلى وجهته، حيث ولطبيعة المواصلات فان عليه التنقل في اربعة مراحل بتكاليف مرصودة في الجدول الموالي: (التكاليف دج)

[9] حسين محمود الجنابي، "الأحدث في بحوث العمليات"، دار الحامد للنشر، الأردن،2010. ص306-307.
[10] **السياسة المثلى:** مجموعة من قواعد القرارات يتم تنميتها كنتيجة للمعايير التي يتم اتخاذ القرار على أساسها و التي تتخذ القرار الأفضل في كل مرحلة حسب ظروف هذه المرحلة.

الجدول 4-1

الوصول / الانطلاق	B	C	D	E	F	G	H	I	J
المرحلة الأولى									
A	30	20	40						
المرحلة الثانية									
B				10	30				
C				25	30				
D				15	35				
المرحلة الثالثة									
E						40	50	20	
F						30	45	50	
المرحلة الرابعة									
G									10
H									25
I									30

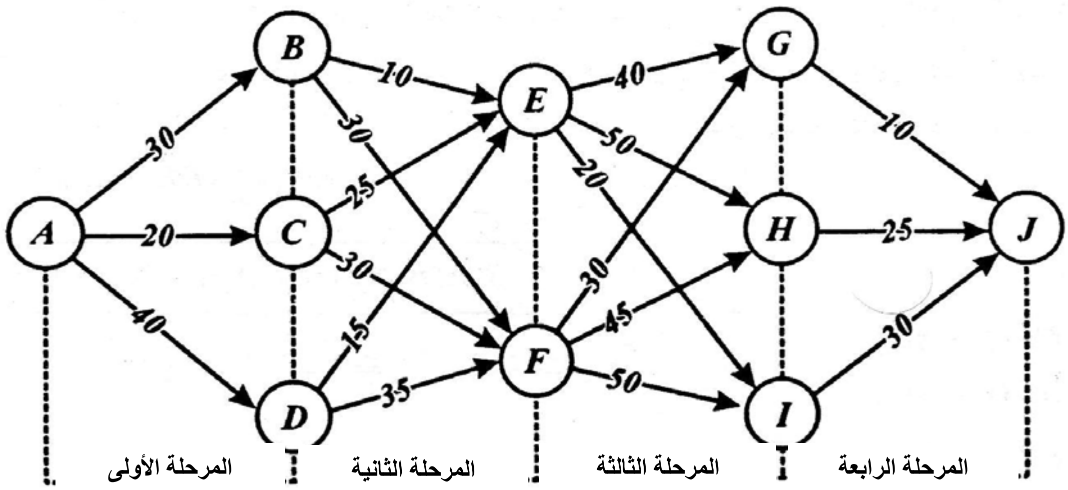
المطلوب: إيجاد أفضل كلفة سفر يمكن للشخص دفعها للوصول إلى المدينة J.

في هذا المثال سنقوم بالحل وفق خوارزمية الحل الخلفي أو الراجع أي أننا سنقوم بالبدء من المرحلة الأخيرة أي من مدينة الوصول J.

خطوات الحل:

أولا: رسم شبكة التنقل و تقسيمها إلى المراحل الواردة في المسالة كالتالي:

الشكل 4-4



في الشكل أعلاه يمثل كل سهم، طريق السفر بين مدينتين و كل رقم يقع على السهم يمثل كلفة التنقل. ن المسافر يريد التنقل من المدينة A إلى المدن التي تليها (B، C،D) و من ثم إلى (E،F) و من ثم إلى (I، G،H) وصولا إلى المدينة J و بالتالي لديه احتمالات عديدة و يصعب تحديدها.

دراسة المرحلة الرابعة الأخيرة:

بتطبيق نظرية Belman في البرمجة الديناميكية على هذا المثال، حيث ينظر إلى المرحلة الأخيرة فيوجد خيار وحيد للوصول إلى المدينة الأخيرة J سواء انطلقنا من المدينة J ،H أو I، بتكاليف تقدر ب 10،25،30 على الترتيب.

لنقوم ألان بترجمة هذه الرحلة رياضيا باستخدام العلاقات التتابعية الخلفية.

نرمز إلى $F_n(s)$ إلى تكلفة السياسة المثلى فيما إذا تم الانطلاق من المدينة s في المرحلة n و لغاية الوصول إلى المدينة الأخيرة k، و إذا رمزنا ب C_{SK} إلى أجور السفر بين المدينتين s و k في أي رحلة كانت، فان العلاقة التتابعية الخلفية لهذه المسالة تأخذ الصيغة التالية:

$$F_n(s) = Min\{C_{sk} + F_{n+1}(k)\}$$

و نبدأ بحل هذه المسالة من المرحلة الأخيرة حيث نقوم بحساب: $F_4(G)$ ،$F_4(H)$ و $F_4(I)$

لدينا:

$$F_4(G) = C_{GJ} = 10$$
$$F_4(H) = C_{HJ} = 25$$
$$F_4(I) = C_{IJ} = 30$$

دراسة المرحلة الثالثة:

للوصول إلى المدينة J انطلاقا من مدن الانطلاق في المرحلة الثالثة وهي E و F فانه علينا حساب تكلفة السياسة لكل منهما كما يلي:

بالنسبة للمسار EJ:

لدينا:

$$F_3(E) = Min\{(C_{EG} + F_4(G)), (C_{EH} + F_4(H)), (C_{EI} + F_4(I))\}$$
$$F_3(E) = Min\{(40 + 10), (50 + 25), (20 + 30)\}$$
$$F_3(E) = Min\{(50), (75), (50)\} = 50$$

نلاحظ أن كل من المسارين EGJ و EIJ يعطي نفس تكلفة التنقل و هي 50 دج، ويشكلان السياسة المثلى للانتقال من E إلى J

بالنسبة للمسار FJ:

لدينا:

$$F_3(F) = Min\{(C_{FG} + F_4(G)), (C_{FH} + F_4(H)), (C_{FI} + F_4(I))\}$$
$$F_3(E) = Min\{(30 + 10), (45 + 25), (50 + 30)\}$$
$$F_3(E) = Min\{(40), (70), (80)\} = 40$$

و منه فان السياسة المثلى للانتقال من F الى J هو المسار FGJ بتكلفة تنقل هي 40 دج

دراسة المرحلة الثانية:

للوصول إلى المدينة J انطلاقا من مدن الانطلاق في المرحلة الثانية وهي B،C و D فانه علينا حساب تكلفة السياسة لكل منهما كما يلي:

بالنسبة للمسار BJ:

لدينا:

$$F_2(B) = Min\{(C_{BE} + F_3(E)), (C_{BF} + F_3(F))\}$$
$$F_2(B) = Min\{(10 + 50), (30 + 40)\}$$
$$F_2(B) = Min\{(60), (70)\} = 60$$

و منه فان السياسة المثلى للانتقال من B إلى J هما المسارين BEGJ و BEIJ بتكلفة تنقل تساوي 60 دج

بالنسبة للمسار CJ:

لدينا:

$$F_2(C) = Min\{(C_{CE} + F_3(E)), (C_{CF} + F_3(F))\}$$
$$F_2(C) = Min\{(25 + 50), (30 + 40)\}$$
$$F_2(C) = Min\{(75), (70)\} = 70$$

و منه فان السياسة المثلى للانتقال من C إلى J هو المسار CFGJ بتكلفة تنقل تساوي 70 دج

بالنسبة للمسار DJ:

لدينا:

$$F_2(D) = Min\{(C_{DE} + F_3(E)), (C_{DF} + F_3(F))\}$$
$$F_2(D) = Min\{(15 + 50), (35 + 40)\}$$
$$F_2(D) = Min\{(65), (75)\} = 65$$

و منه فان السياسة المثلى للانتقال من D إلى J هما المسارين DEGJ و DEIJ بتكلفة تنقل تساوي 65 دج

دراسة المرحلة الأولى:

للوصول إلى المدينة J انطلاقا من مدينة الانطلاق في المرحلة الأولى وهي A فانه علينا حساب تكلفة السياسة لها كما يلي:

بالنسبة للمسار AJ:

لدينا:

$$F_1(A) = Min\{(C_{AB} + F_2(B)), (C_{AC} + F_2(C)), (C_{AD} + F_2(D))\}$$
$$F_1(A) = Min\{(30 + 60), (20 + 70), (40 + 65)\}$$
$$F_1(A) = Min\{(90), (90), (105)\} = 60$$

و منه فان السياسة المثلى للانتقال من A إلى J هي المسارات ABEGJ و ABEIJ و ACFGJ بتكلفة تنقل تساوي 90 دج. وتعتبر هذه المسارات كسياسات بديلة للانتقال من A إلى J.

5-1-2- مثال تطبيقي 2 (دراسة حالة): الحل باستخدام برنامج WinQSB

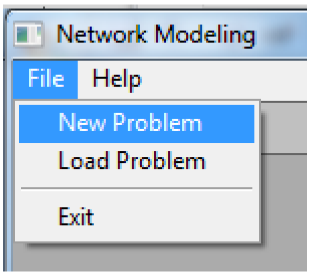
ويمكن حل المسالة السابقة و إيجاد نفس النتائج باستخدام برنامج WinQSB كما يلي:

- أولا نقوم بها هي فتح تطبيق Dynamic Programming لبرنامج WinQSB

الشكل 4-5

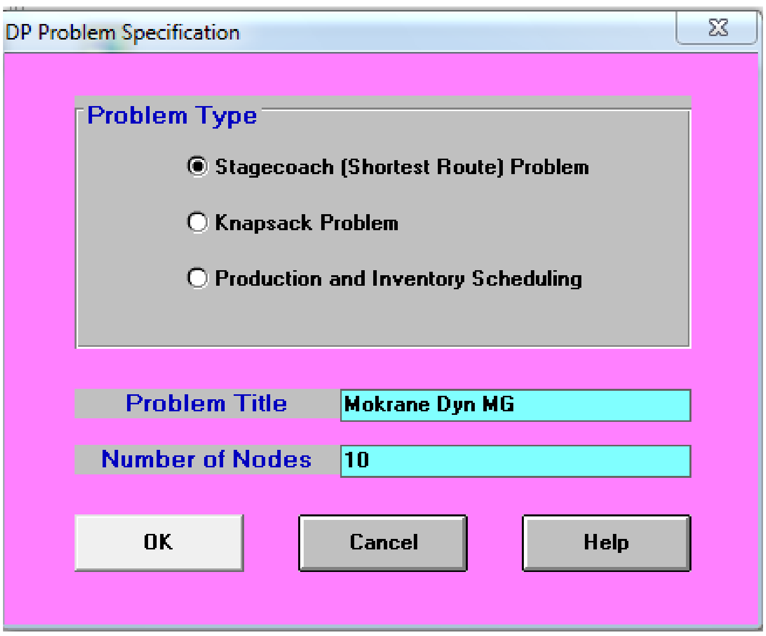
- بعدها نقوم بفتح مسالة جديدة عن طريق الأمر New problem من القائمة File

الشكل 4-6



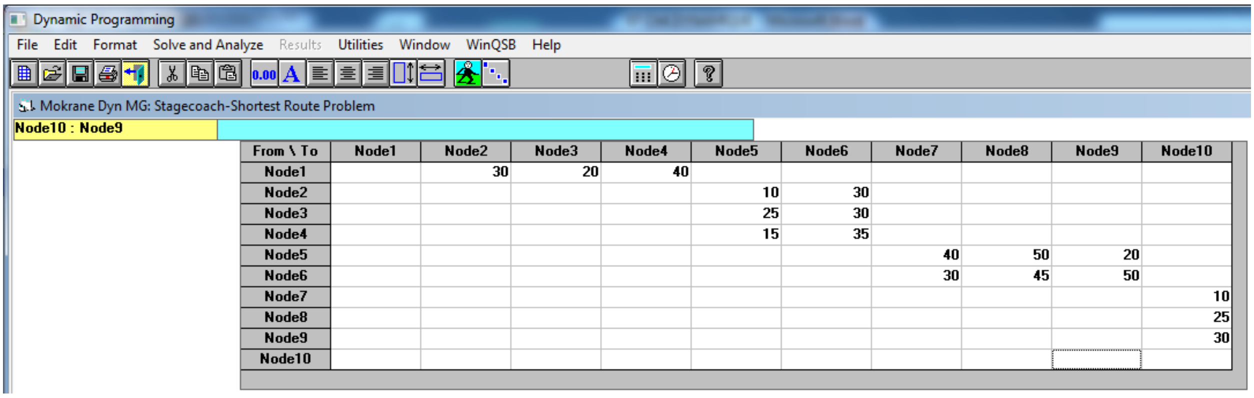
- بعدها نقوم بإدخال خصائص المسالة كما يظهر في الشكل الموالي:

الشكل 4-7



- بعد اضغط على الزر ok تظهر لنا نافذة إدخال البيانات و نقوم بإدخال البيانات كالتالي:

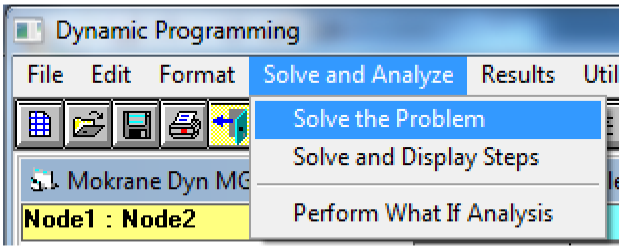
الشكل 4-8



في البرنامج أعلاه تمثل العقدة Node1 مدينة انطلاق المسافر المشار لها في المثال التطبيقي 1 بالمدينة A، و تمثل العقدة Node9 مدينة الوصول او وجهة المسافر، المشار لها في المثال التطبيقي 1 بالمدينة J.

- و لإظهار حل المسألة نقوم باختيار الأمر Solve the problem من القائمة Solve and analyse كما يظهر في الشكل الموالي:

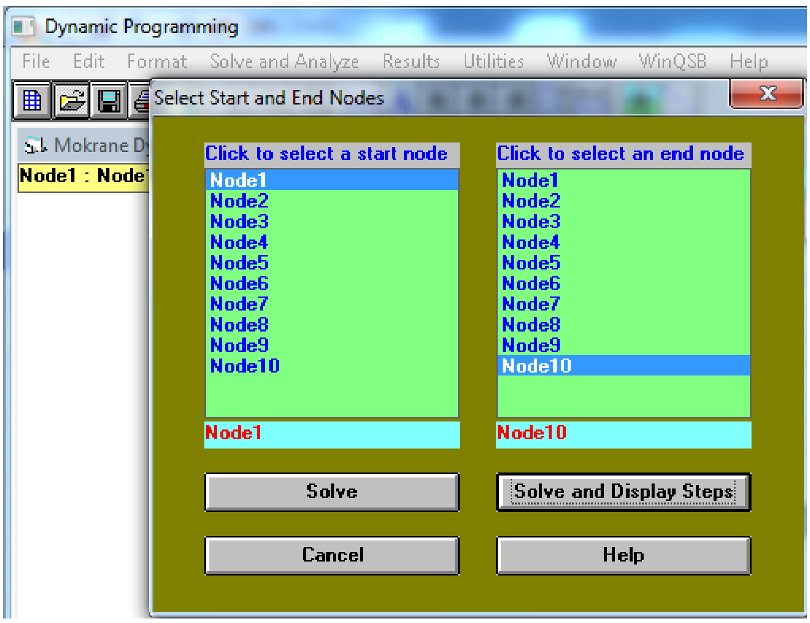
الشكل 4-9



- فتظهر النافذة التي من خلالها يتم تحديد بداية و نهاية الشبكة كما يلي:

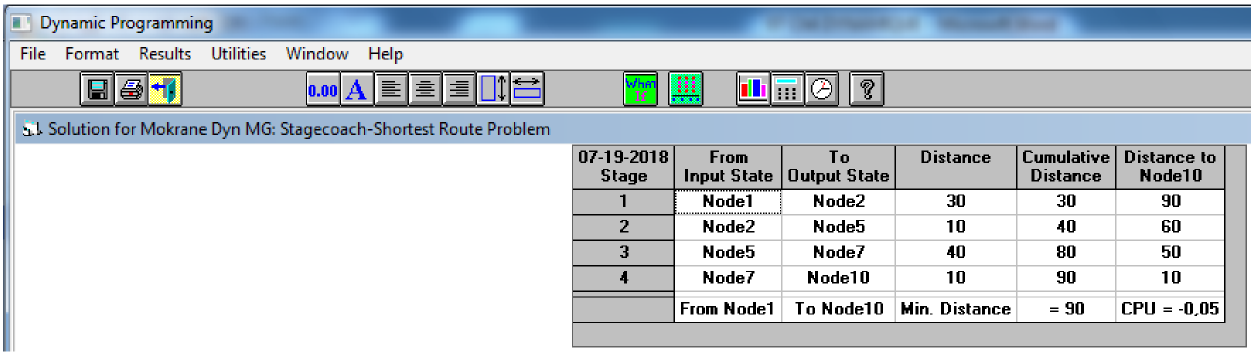
بالنسبة لهذه الحالة نختار العقدة Node1 كمنبع أو مدخل و العقدة Node9 كمصب أو مخرج

الشكل 4-10



- بعد الضغط غلى الزر Solve يقوم البرنامج بحساب الحل الأمثل بطريقة Bellman ثم نحصل على جدول الحل النهائي كالتالي:

الشكل 4-11



07-19-2018 Stage	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to Node10
1	Node1	Node2	30	30	90
2	Node2	Node5	10	40	60
3	Node5	Node7	40	80	50
4	Node7	Node10	10	90	10
	From Node1	To Node10	Min. Distance	= 90	CPU = -0.05

ونقرا أنه للانتقال من العقدة 1 الممثلة للمدينة A إلى العقدة 2 الممثلة لمدينة الوصول J فان الكلفة المثلى التي يدفعها المسافر تقدر ب 90 دج حسب المسار 1،2،5،7،10 الموافق للمسار ABEGJ و هو احد الحلول المثلى البديلة المتوصل إليها بتطبيق طريقة Bellman في المثال التطبيقي رقم 1.

5-2- الطريقة الرياضية أو طريقة الجداول (تخصيص الموارد):

تستخدم هذه الطريقة غالبا في مسائل المتعلقة بتخصيص الموارد، و توزيع الاستثمارات و لشرح هذه الطريقة نفرض انه لدينا رأس مال قدره (k) يطلب توزيعه واستثماره على مشروعات اقتصادية عددها أربعة، و هذا ما يمكن أن نستثمره ككتلة واحدة في احد المشروعات أو نوزعه على أكثر من مشروع، وذالك استنادا إلى نظرية Bellman و معادلته.

إذا أردنا أن نوزع رأس مال المستثمر بين مشروعين، الأول A و معادلة دخله f(x) و المشروع الثاني B و معادلة دخله g(x)، بحيث: $0 \leq x \leq k$

على فرض أننا خصصنا للمشروع الأول x من رأس مال المستثمر، فيكون للمشروع الثاني k-x ، و بالتالي نتلقى دخلا قدره f(x) من المشروع الأول A، و المشروع الثاني يكون دخله هو g(k-x).

وعليه فان الدخل الإجمالي للمشروعين A و B عن ألفترة المخططة يكون:

$$R(k,x) = f(x) + g(k-x)$$

و بالتالي فانه من اجل عدة قيم يمكن ل x أن يأخذها فإننا نختار القيمة العظمى من خلال العلاقة F(x) كالتالي:[11]

$$F(x) = \max_{0 \leq x \leq k} R(k,x) = \max_{0 \leq x \leq k}[f(x) + g(k-x)]$$

و هذه العلاقة مطابقة بشكل كبير لمعادلة العالم Bellman.

[11] محمد عبد العال النعيمي، "بحوث العمليات"، دار وال للنشر، الأردن، 1999. ص 318. بالتصرف

فإذا أردنا أن نوزع رأس المال المستثمر على مشروعين في المرحلة الأولى يكون الحل المبدئي للمشروع الأول A المخصص له x، و المشروع الثاني B المخصص له k−x في النتيجة نتلقى دخلا هو:

$$R(k,x)=f(x)+g(k-x)$$

أما إذا أردنا أن نوزع رأس المال المستثمر k على مشروعين في المرحلة الثانية، فيكون للمشروع الأول A المتبقي من المرحلة الأولى هو αx حيث: $0 \leq \alpha \leq 1$، اما المشروع الثاني المتبقي فيكون $\beta(k\text{-}x)$ حيث $0 \leq \beta \leq 1$.

إن المداخل المتوقعة المطابقة للمرحلة الثانية تتألف من $f(\alpha x)$ للمشروع الأول و $g[\beta(k-x)]$ بالنسبة للمشروع الثاني.

إن الأمثلية في طريقة البرمجة الديناميكية تبدأ قاعدتها من المرحلة الأخيرة، لذالك نبدأ بالمرحلة الثانية، لدراسة المرحلة الأولى و التي نرمز لها بالرمز f_1 (الدخل الأعظمي الممكن من المشروعين في المرحلة الثانية)

$$F_1[\alpha x+\beta(k-x)]=\max_{0\leq x\leq k}[\,f(\alpha x)+g[\beta(k-x)]\,]$$

بعدها ننظر إلى المراحل المتتالية كما لو أن المرحلة السابقة كأنها المرحلة الأولى و بالتالي يكون الدخل من المرحلتين للمشروعين هو:

$$F_2(k)=\max_{0\leq x\leq k}[\,f(x)+g(k-x)+F_1[\alpha x+\beta(k-x)]\,]$$

وبنفس المنطق نكتب بعد n مرحلة:

$$F_n(k)=\max_{0\leq x\leq k}[\,f(x)+g(k-x)+F_{n-1}[\alpha x+\beta(k-x)]\,]$$

حيث:

F_{n-1} : دالة الهدف في نهاية المرحلة n−1

وهذه الدالة ترتبط و تشابه دالة العالم Bellman في البرمجة الديناميكية و التي تمتلك الشكل التالي:[12]

$$F_n(k)=\max_{0\leq x\leq k}\{\varphi(x)+F_{n-1}(\alpha x)\}\quad 0\leq\alpha\leq 1$$

حيث:

F_{n-1} : الدخل الأعظمي للفترة ما قبل الأخيرة n−1

F_n : الدخل الأعظمي لكل المراحل بعد n مرحلة.

5−2−1− مثال تطبيقي 3 (دراسة حالة): (تخصيص رأس المال لعدد من المشاريع)

ليكن لدينا رأس مال قدره 400 ألف دج أي (k=400) يطلب توزيعه و استثماره على أربعة مشروعات، بحيث يكون زيادة إنتاج المنتجات أفضل ما يمكن باستخدام البرمجة الديناميكية و المعلومات الخاصة بحجم رأس المال و المداخيل المترتبة من كل حجم مستثمر للمشاريع الأربعة، ملخصة في الجدول التالي:

[12] حسن علي مشرقي، زياد عبد الكريم القاضي، مرجع سبق ذكره. ص273.

الجدول 4−2

رأس المال الموظف x (ألف دج)	زيادة إنتاج المنتجات في الوحدة (نسبيا) %			
	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	50	40	90	70
200	100	60	100	80
300	150	80	120	170
K=400	200	100	130	200

الحل:[13]

يجب أن نشير في البداية إلى انه في حالة عدم توزيع رأس المال على أي من المشاريع فينتج عن ذلك زيادة معدومة في حجم الإنتاج الموافق لكل مشروع أي:

$$f_i(0) = 0 \ \forall i = \overline{1,4}$$

بافتراض أننا نقوم بتوزيع إجمالي الدخل و هو (k=400) على المشاريع الأربعة بالتساوي، فسيكون نصيب كل من المشاريع هو 100 ألف دج و حسب الجدول الوارد في المثال التطبيقي 3 أعلاه فان مجموع المداخل المتوقعة من هذا التوزيع تكون:

$$f_1(100) + f_2(100) + f_3(100) + f_4(100) = 50 + 40 + 90 + 70 = 250$$

أي باستثمار 100 ألف دج في كل مشروع نحصل على زيادة نسبية في الإنتاج تقدر ب 250%

ألان نود معرفة الإمكانيات الأخرى الممكنة لتوزيع رأس المال المتاح مع الزيادات المتوقعة في إنتاج المنتجات، و لأجل ذالك سنقوم بتطبيق معادلات البرمجة الديناميكية ل Bellman.

وعليه فإننا نقسم المسالة إلى أربعة مراحل:

حيث ندرس في المرحلة الأولى الاستثمار في المشروع الأول فقط، وندرس في المرحلة الثانية الاستثمار في المشروعين الأول و الثاني، بعدها و في المرحلة الثالثة سنقوم بدراسة الاستثمار في ثلاثة مشاريع، و أخيرا و في المرحلة الرابعة سندرس توزيع و استثمار رأس المال المتاح (k=400) في المشاريع الأربعة.

[13] بالتصرف

نبدأ بالمرحلة الأولى:

في هذه المرحلة سندرس الاستثمار في المشروع الأول فقط، حيث نرمز ب $F_1(k)$ الزيادة العظمى للمنتجات المرتبطة بالمشروع الأول في حال خصصنا له رأس مال مقدر ب (k) ونكتب:

$$F_1(k) = \max_{0 \le x \le k}\{f_1(x)\} = f_1(k)$$

و بالتالي تكون الزيادة العظمى للمنتجات المرتبطة بالمشروع الأول في ألفترة الأولى كالتالي:

$$F_1(100) = 50$$
$$F_1(200) = 100$$
$$F_1(300) = 150$$
$$F_1(400) = 200$$

ننتقل إلى المرحلة الثانية من الحسابات، في هذه الحالة من الضروري تحديد التوزيع الأفضل لرأس المال المستثمر، فإذا وزعنا بين مشروعين فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار ألفعالية المثلى لهذا التوزيع في المشروع الأول.

نرمز ب $F_2(k)$ الزيادة العظمى للمنتجات من جراء توزيع راس المال (k) المستثمر بين المشروعين ونكتب:

$$F_2(k) = \max_{0 \le x \le k}\{f_2(x) + F_1(k-x)\}$$

نقوم الآن بإجراء الحسابات المختلفة الموافقة لكل مستوى من رأس المال المستثمر الواردة في عمود (رأس المال الموظف) في الجدول 4-2.

من اجل k=100 لدينا:

$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}\{f_2(x) + F_1(100-x)\}$$
$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}\{f_2(0) + F_1(100); f_2(100) + F_1(0)\}$$
$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}\{0+50; 40+0\} = \max_{0 \le x \le 100}\{50; 40\} = 50$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_2(100) = 50$

ملاحظة:

الكتابة $f_2(100) + F_1(0)$ تعني انه نقوم بتخصيص 100 ألف دج للمشروع الثاني و لا نقوم باستثمار شيء في المشروع الأول.

في هذه الحالة سيتبقى رأس مال يقدر ب k−100 =300 ألف دينار يوزع بين المشاريع الباقية.

من اجل k=200 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 200}\{f_2(x) + F_1(200-x)\}$$
$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 200}\{f_2(0) + F_1(200); f_2(100) + F_1(100); f_2(200) + F_1(0)\}$$
$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 200}\{0+100; 40+50; 60+0\} =$$
$$\max_{0 \le x \le 200}\{100; 90; 60\} = 100$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_2(200) = 100$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل (**k=200**) هو أن نوزع 200 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق 100 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة نسبيا.

من اجل k=300 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(300) = \max_{0\le x\le 300}\{f_2(x) + F_1(300 - x)\}$$

$$F_2(300) = \max_{0\le x\le 300}\{f_2(0) + F_1(300); f_2(100) + F_1(200); f_2(200) + F_1(100); f_2(300) + F_1(0)\}$$

$$F_2(300) = \max_{0\le x\le 300}\{0 + 150; 40 + 100; 60 + 50; 80 + 0\} = \max_{0\le x\le 300}\{150; 140; 110; 80\} = 150$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_2(300) = 150$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل (**k=300**) هو أن نوزع 300 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق 150 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة نسبيا.

في هذه الحالة سيتبقى رأس مال يقدر ب k−300 =100 ألف دينار يوزع بين المشاريع الباقية.

من اجل k=400 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(400) = \max_{0\le x\le 400}\{f_2(x) + F_1(400 - x)\}$$

$$F_2(400) = \max_{0\le x\le 400}\{f_2(0) + F_1(400); f_2(100) + F_1(300); f_2(200) + F_1(200); f_2(300) + F_1(100); f_2(400) + F_1(0)\}$$

$$F_2(400) = \max_{0\le x\le 400}\{0 + 200; 40 + 150; 60 + 100; 80 + 50; 100 + 0\} = \max_{0\le x\le 400}\{200; 190; 160; 130; 100\} = 200$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_2(400) = 200$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل (**k=400**) هو أن نوزع 400 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق 200 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة نسبيا.

في هذه الحالة لن يتبقى رأس مال ليوزع على بقية المشاريع.

ننتقل إلى المرحلة الثالثة من الحسابات، حيث نحدد الإمكانيات المثلى لتوزيع رأس المال المستثمر في حال خصص رأس المال للمشاريع الثلاث الأولى معا. فإذا وزعنا بين المشاريع الثلاث الأولى فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار ألفعالية المثلى لهذا التوزيع في المرحلة الثانية أي فعالية التوزيع على المشروعين الأول و الثاني.

نرمز ب $F_3(k)$ الزيادة العظمى للمنتجات من جراء توزيع رأس المال (k) المستثمر بين المشاريع الثلاث الأولى ونكتب:

$$F_3(k) = \max_{0\le x\le k}\{f_3(x) + F_2(k - x)\}$$

نقوم الآن بإجراء الحسابات المختلفة الموافقة لكل مستوى من رأس المال المستثمر.

من اجل k=100 لدينا:

$$F_3(100) = \max_{0\le x\le 100}\{f_3(x) + F_2(100-x)\}$$
$$F_3(100) = \max_{0\le x\le 100}\{f_3(0) + F_2(100); f_3(100) + F_2(0)\}$$
$$F_3(100) = \max_{0\le x\le 100}\{0+50; 90+0\} = \max_{0\le x\le 100}\{50; 90\} = 90$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_3(100) = 90$

ملاحظة:

الكتابة $f_3(100) + F_2(0)$ تعني انه نقوم بتخصيص 100 ألف دج للمشروع الثالث و لا نقوم باستثمار شيء في المشروع الأول و الثاني .

في هذه الحالة سيتبقى رأس مال يقدر ب k−100 =300 ألف دينار يستثمر في المشروع الرابع.

من اجل k=200 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(200) = \max_{0\le x\le 200}\{f_3(x) + F_2(200-x)\}$$
$$F_3(200) = \max_{0\le x\le 200}\{f_3(0) + F_2(200); f_3(100) + F_2(100); f_3(200) + F_2(0)\}$$
$$F_3(200) = \max_{0\le x\le 200}\{0+100; 90+50; 100+0\} = \max_{0\le x\le 200}\{100; 140; 100\} = 140$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_3(200) = 140$

ملاحظة:

إن $f_3(100) + F_2(100)$ توافق ألفعالية العظمى وعليه فان التوزيع الأفضل في المرحلة الثالثة من اجل **(k=200)** هو أن نوزع 100 ألف دينار على المشروع الثالث و 100 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق 140 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة نسبيا.

من اجل k=300 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(300) = \max_{0\le x\le 300}\{f_3(x) + F_2(300-x)\}$$
$$F_3(300) = \max_{0\le x\le 300}\{f_3(0) + F_2(300); f_3(100) + F_2(200); f_3(200) + F_2(100); f_3(300) + F_2(0)\}$$
$$F_3(300) = \max_{0\le x\le 300}\{0+150; 90+100; 100+50; 120+0\} = \max_{0\le x\le 300}\{150; 190; 150; 120\} = 190$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_3(300) = 190$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل **(k=300)** يوافق التركيبة $f_3(100) + F_2(200)$

أي أننا نوزع 100 ألف دينار على المشروع الثالث و 200 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق هذا التوزيع 190 زيادة في الإنتاج نسبيا.

في هذه الحالة سيتبقى رأس مال يقدر ب 300−k =100 ألف دينار يوزع على المشروع الرابع.

من اجل k=400 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(400) = \max_{0\leq x\leq 400}\{f_3(x) + F_2(400-x)\}$$

$$F_3(400) = \max_{0\leq x\leq 400}\{f_3(0) + F_2(400); f_3(100) + F_2(300); f_3(200) + F_2(200); f_3(300) + F_2(100); f_3(400) + F_2(0)\}$$

$$F_3(400) = \max_{0\leq x\leq 400}\{0 + 200; 90 + 150; 100 + 100; 120 + 50; 130 + 0\} = \max_{0\leq x\leq 400}\{200; 240; 200; 170; 130\} = 240$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_3(400) = 240$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل **(k=400)** يوافق التركيبة $f_3(100) + F_2(300)$

أي أننا نوزع 100 ألف دينار على المشروع الثالث و 300 ألف دينار على المشروع الأول و سيحقق هذا التوزيع 240 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة.

في هذه الحالة لن يتبقى رأس مال ليوزع على المشروع المتبقي.

ننتقل إلى المرحلة الرابعة و الأخيرة من الحسابات، حيث نحدد الإمكانيات المثلى لتوزيع رأس المال المستثمر في حال خصص رأس المال لكل المشاريع. فإذا وزعنا بين المشاريع الأربع فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار الفعالية المثلى لهذا التوزيع في المرحلة الثالثة أي فعالية التوزيع على المشاريع الثلاث الأولى.

نرمز ب $F_4(k)$ الزيادة العظمى للمنتجات من جراء توزيع راس المال (k) المستثمر بين كل المشاريع ونكتب:

$$F_4(k) = \max_{0\leq x\leq k}\{f_4(x) + F_3(k-x)\}$$

نقوم الآن بإجراء الحسابات المختلفة الموافقة لكل مستوى من رأس المال المستثمر.

ملاحظة:

باعتبار أن المشروع الرابع هو الاحتمال الأخير لاستثمار رأس المال فلا داعي لدراسة الاحتمالات التي تتبقى منها كتلة من رأس المال حيث انه لا يجب ترك رأس المال بدون توظيف، وعليه سندرس حالة واحدة و هي **(k=400)**.

من اجل k=400 لدينا:

$$F_4(400) = \max_{0\leq x\leq 400}\{f_4(x) + F_4(400-x)\}$$

$$F_4(400) = \max_{0\leq x\leq 400}\{f_4(0) + F_3(400); f_4(100) + F_3(300); f_4(200) + F_3(200); f_4(300) + F_3(100); f_4(400) + F_3(0)\}$$

$$F_4(400) = \max_{0\le x\le 400}\{0+240; 70+190; 80+140; 170+90; 200+0\} = \max_{0\le x\le 400}\{240; 260; 220; 260; 200\} = 260$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $F_3(400) = 260$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثالثة من اجل **(k=400)** يوافق تركيبتين $f_4(100) + F_3(300)$ و $f_4(300) + F_3(100)$ أي أننا بصدد إيجاد حلين بديلين:

فبالنسبة للحل البديل الأول: فإننا نوزع 100 ألف دينار على المشروع الرابع و 100 ألف دينار على المشروع الثالث و 200 ألف دينار على المشروع الأول ولا شيء على المشروع الثاني، وسيحقق ذالك 260 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة.

أما بالنسبة للحل البديل الثاني: فإننا نوزع 300 ألف دينار على المشروع الرابع و 100 ألف دينار على المشروع الثالث ولا شيء على المشاريع الأول و الثاني، وسيحقق ذالك 260 زيادة في إنتاج المنتجات في الوحدة.

5-2-2- مثال تطبيقي 4 (دراسة حالة): (تخصيص عدد من الموظفين في الأسواق)

تريد مؤسسة لصناعة الخزف بوضع سياسة تسويقية جديدة في ثلاث أسواق هي A،B و C ، بحيث أنها لا تستطيع توظيف أكثر من 3 ممثلين تجاريين، وبناءا على التقديرات الواردة في الجدول أسفله لحجم المبيعات الممكن $f_i(x)$ من توظيف الأشخاص المعنيين في كل سوق، فان المديرية التجارية للمؤسسة تتخذ القرار بعدد الممثلين التجاريين الذين ستقوم بتوظيفهم في كل سوق.

الجدول 4-3

عدد الممثلين التجاريين الموظفين	حجم المبيعات الممكن تحقيقه (مليون دج)		
	السوق A	السوق B	السوق C
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	19	20	30
1	20	21	32
2	24	25	34
3	29	30	39

المطلوب:

حدد التوزيع الأمثل لهؤلاء الممثلين على مختلف الأسواق بحيث تحصل المؤسسة في المقابل على أعظم رقم أعمال.

الحل:

نلاحظ من خلال الجدول 4-3 أن المؤسسة إذا أرادت توظيف ممثلا واحد في السوق A فإنها تتوقع أن تحقق رقم أعمال يبلغ 20 مليون دج، و أنها إذا لم تقم بتعيين أي ممثل في هذه السوق فإنها سوف تحقق رقم أعمال قدره 19 مليون دج، وان وظفت مثلا 3 ممثلين تجاريين في السوق C فإنها ستحقق رقم أعمال يقدر ب 39 مليون دج وهكذا.

بافتراض أننا نقوم بتوزيع إجمالي الممثلين التجاريين و هو (k=3) على الأسواق الثلاث بالتساوي، فسيكون نصيب كل من الأسواق هو ممثل تجاري واحد، و حسب الجدول 4-3 الوارد في المثال التطبيقي 4 أعلاه فان حجم المبيعات المتوقعة من هذا التوزيع يكون:

$$f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) = 20 + 21 + 32 = 73$$

أي بتوظيف ممثل تجاري واحد في كل سوق نحصل على حجم المبيعات يقدر ب 73 مليون دج.

ا الآن نود معرفة الإمكانيات الأخرى الممكنة لتوزيع الممثلين التجاريين مع حجم المبيعات المتوقعة في كل حالة، و لأجل ذالك **سنقوم بتطبيق معادلات البرمجة الديناميكية ل Bellman.**

وعليه فإننا نقسم المسالة إلى ثلاث مراحل:

حيث ندرس في المرحلة الأولى توظيف الممثلين التجاريين في السوق A فقط، وندرس في المرحلة الثانية توظيف الممثلين التجاريين في الأسواق A و B، بعدها و في المرحلة الثالثة سنقوم بدراسة توظيف الممثلين التجاريين في الأسواق الثلاث.

نبدأ بالمرحلة الأولى:

في هذه المرحلة سندرس توظيف الممثلين التجاريين في السوق A فقط ، حيث نرمز ب $F_1(k)$ حجم المبيعات أو رقم الأعمال الأعظم المحقق من توظيف (k) ممثل تجاري في السوق A ونكتب:

$$F_1(k) = \max_{0 \le x \le k}\{f_1(x)\} = f_1(k)$$

و بالتالي يكون رقم الأعمال الأعظم المحقق من توظيف (k) ممثل تجاري في السوق A في المرحلة الأولى كالتالي:

$$\boxed{F_1(0) = 19}$$
$$\boxed{F_1(1) = 20}$$
$$\boxed{F_1(2) = 24}$$
$$\boxed{F_1(3) = 29}$$

يمكن تلخيص الحسابات السابقة لهذه المرحلة الأولى في الجدول الموالي: [14]

الشكل العام لمعادلة الانتقال للمرحلة الأولى هي كالتالي:

$$F_2(k) = \max_{0 \le x \le k}\{f_2(x) + F_1(k - x)\}$$

[14] بالتصرف

الجدول 4-5

رقم الأعمال المحقق في المرحلة الأولى (مليون دج)				
3	2	1	0	
29	24	20	19	

ننتقل إلى المرحلة الثانية من الحسابات، في هذه الحالة من الضروري تحديد التوظيف الأفضل للممثلين التجاريين في الأسواق، فإذا وزعنا بين السوق الأول A و الثاني B ، فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار الفعالية المثلى لهذا التوزيع في السوق الأول.

نرمز ب $F_2(k)$ حجم المبيعات أو رقم الأعمال الأعظم المحقق من توظيف (k) ممثل تجاري في السوق A و B ونكتب:

$$F_2(k) = \max_{0\leq x\leq k}\{f_2(x) + F_1(k-x)\}$$

نقوم الآن بإجراء الحسابات المختلفة الموافقة لكل ممثل موظف في هذه المرحلة

من اجل k=0 لدينا:

$$F_2(0) = \max_{x=0}\{f_2(0) + F_1(0-x)\}$$
$$F_2(0) = \max_{0\leq x\leq 100}\{f_2(0) + F_1(0)\}$$
$$F_2(0) = \max_{0\leq x\leq 100}\{20 + 19\} = 39$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق هي: $\boxed{F_2(0) = 39}$

ملاحظة:

الكتابة $f_2(0) + F_1(0)$ تعني انه لن نخصص ممثلا تجاريا لكلا الأسواق A و B. ويكون

من اجل k=1 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(1) = \max_{0\leq x\leq 1}\{f_2(x) + F_1(1-x)\}$$
$$F_2(1) = \max_{0\leq x\leq 1}\{f_2(0) + F_1(1); f_2(1) + F_1(0)\}$$
$$F_2(1) = \max_{0\leq x\leq 1}\{20 + 20; 21 + 19\} = \max_{0\leq x\leq 1}\{40; 40\} = 40$$

عند توظيف ممثل واحد تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق هي: $\boxed{F_2(1) = 40}$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل **(k=1)** يوافق تركيبتين:

$f_2(0) + F_1(1)$ و $f_2(1) + F_1(0)$ أي أننا بصدد إيجاد حلين بديلين في هذه الحالة.

أي انه سواء قمنا بتوظيف الممثل التجاري في السوق الأول أو السوق الثاني فإننا نحصل على نفس رقم الأعمال المرتقب في الحالتين.

1من اجل k=2 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(2) = \max_{0\le x\le 2}\{f_2(x) + F_1(2-x)\}$$
$$F_2(2) = \max_{0\le x\le 2}\{f_2(0) + F_1(2); f_2(1) + F_1(1); f_2(2) + F_1(0)\}$$
$$F_2(2) = \max_{0\le x\le 2}\{20 + 24; 21 + 20; 25 + 19\} = \max_{0\le x\le 2}\{44; 41; 44\} = 44$$

عند توظيف ممثلين اثنين تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق هي: $\boxed{F_2(2) = 44}$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل **(k=2)** يوافق تركيبتين:

$f_2(0) + F_1(2)$ و $f_2(2) + F_1(0)$ أي أننا بصدد إيجاد حلين بديلين في هذه الحالة.

أي انه سواء قمنا بتوظيف الممثلين التجاريين في السوق الأول معا أو السوق الثاني معا، فإننا نحصل على نفس رقم الأعمال المرتقب في الحالتين.

من اجل k=3 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_2(3) = \max_{0\le x\le 3}\{f_2(x) + F_1(3-x)\}$$
$$F_2(3) = \max_{0\le x\le 3}\{f_2(0) + F_1(3); f_2(1) + F_1(2); f_2(2) + F_1(1); f_2(3) + F_1(0)\}$$
$$F_2(3) = \max_{0\le x\le 3}\{20 + 29; 21 + 24; 25 + 20; 30 + 19\} =$$
$$\max_{0\le x\le 3}\{49; 45; 45; 49\} = 49$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $\boxed{F_2(3) = 49}$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثانية من اجل **(k=3)** يوافق تركيبتين:

$f_2(0) + F_1(3)$ و $f_2(3) + F_1(0)$ أي أننا بصدد إيجاد حلين بديلين في هذه الحالة.

أي انه سواء قمنا بتوظيف ثلاث ممثلين تجاريين في السوق الأول معا أو السوق الثاني معا، فإننا نحصل على نفس رقم الأعمال المرتقب في الحالتين.

يمكن تلخيص الحسابات السابقة لهذه المرحلة الثانية في الجدول الموالي:

الشكل العام لمعادلة الانتقال للمرحلة الثانية هي كالتالي:

$$F_2(k) = \max_{0\le x\le k}\{f_2(x) + F_1(k-x)\}$$

وعليه نكتب الجدول كما يلي:[15]

الجدول 4-5

		رقم الأعمال المحقق في المرحلة الثانية (مليون دج)			
	k	0	1	2	3
x					
0	20	**39**	**40**	**44**	**49**
1	21		**40**	41	45
2	25			**44**	45
3	30				**49**

و يمكن التعليق على الجدول كالتالي:

إن عدم توظيف أي ممثل تجاري يعني أن المؤسسة ستحقق رقم أعمال يقدر ب 39 مليون دج و الذي يقابل اكبر قيمة في عمود $F_1(k)$ من اجل k=0. وهو ناتج من رقم الأعمال المحقق في السوق A من اجل k=0 وهو 19 مليون دج زائد رقم الأعمال المحقق في السوق B من اجل k=0 وهو 20 مليون دج.

أما عند توظيف عامل تجاري واحد أي k=1 فنلاحظ أن المؤسسة إن اختارت توظيفه في السوق الأول فهذا يحقق رقم إعمال يقدر ب 40 مليون دج، أما إن اختارت توظيفه في السوق الثاني أي B فهذا يحقق رقم أعمال يقدر ب 40 مليون دج كذالك وهي تشكل حلولا بديلة، و هو ما إستنتجناه سابقا من خلال المعادلة التالية:

$$F_2(1) = \max_{0\le x\le 1}\{20+20; 21+19\} = \max_{0\le x\le 1}\{40; 40\} = 40$$

ننتقل إلى المرحلة الثالثة من الحسابات، حيث نحدد الإمكانيات المثلى لتوظيف الممثلين التجاريين في الأسواق الثلاث معا. فإذا وزعنا بين الأسواق الثلاث، فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار الفعالية المثلى لهذا التوزيع في المرحلة الثانية أي فعالية التوزيع على السوق A و B.

نرمز ب $F_3(k)$ حجم المبيعات أو رقم الأعمال الأعظم المحقق من توظيف (k) ممثل تجاري في الأسواق الثلاث ونكتب:

$$F_3(k) = \max_{0\le x\le k}\{f_3(x) + F_2(k-x)\}$$

نقوم الآن بإجراء الحسابات المختلفة الموافقة لكل ممثل موظف في هذه المرحلة الثالثة.

[15] بالتصرف

من اجل k=0 لدينا:

$$F_3(0) = \max_{x=0}\{f_3(0) + F_2(0-x)\}$$
$$F_3(0) = \max_{0\le x\le 100}\{f_3(0) + F_2(0)\}$$
$$F_3(0) = \max_{0\le x\le 100}\{30 + 39\} = 69$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق هي: $\boxed{F_3(0) = 69}$

ملاحظة:

الكتابة $f_2(0) + F_1(0)$ تعني انه لن نخصص ممثلا تجاريا لكلا الأسواق A و B. ويكون

من اجل k=1 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(1) = \max_{0\le x\le 1}\{f_3(x) + F_2(1-x)\}$$
$$F_3(1) = \max_{0\le x\le 1}\{f_3(0) + F_2(1); f_3(1) + F_2(0)\}$$
$$F_3(1) = \max_{0\le x\le 1}\{30 + 40; 32 + 39\} = \max_{0\le x\le 1}\{70; 71\} = 71$$

عند توظيف ممثل واحد تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق هي: $\boxed{F_3(1) = 71}$

ملاحظة:

نجد أنه في المرحلة الثالثة من اجل **(k=1)**، التركيبة: $f_3(1) + F_2(0)$ توافق الفعالية العظمى وعليه فان التوزيع الأفضل للممثلين التجاريين في المرحلة الثالثة من اجل **(k=1)** هو أن نوظف الممثل التجاري في السوق الثالثة.

من اجل k=2 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(2) = \max_{0\le x\le 2}\{f_3(x) + F_2(2-x)\}$$
$$F_3(2) = \max_{0\le x\le 2}\{f_3(0) + F_2(2); f_3(1) + F_2(1); f_3(2) + F_2(0)\}$$
$$F_3(2) = \max_{0\le x\le 2}\{30 + 44; 32 + 40; 34 + 39\} = \max_{0\le x\le 2}\{74; 72; 73\} = 74$$

عند توظيف ممثلين اثنين تكون القيمة العظمى لرقم الأعمال المحقق في المرحلة 3 هي: $\boxed{F_3(2) = 74}$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثالثة من اجل **(k=2)** يوافق تركيبة: $f_3(2) + F_2(0)$

وعليه فان التوزيع الأفضل للممثلين التجاريين في المرحلة الثالثة من اجل **(k=2)** هو أن نوظف الممثلين التجاريين في السوق الثالثة.

من اجل k=3 لدينا:

نتبع نفس المنطق السابق في الحساب فنجد:

$$F_3(3) = \max_{0\le x\le 3}\{f_3(x) + F_2(3-x)\}$$
$$F_3(3) = \max_{0\le x\le 3}\{f_3(0) + F_2(3); f_3(1) + F_2(2); f_3(2) + F_2(1); f_3(3) + F_2(0)\}$$
$$F_3(3) = \max_{0\le x\le 3}\{30 + 49; 32 + 44; 34 + 40; 39 + 39\} =$$
$$\max_{0\le x\le 3}\{79; 76; 74; 78\} = 79$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى هي: $\boxed{F_2(3) = 79}$

ملاحظة:

نجد أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثالثة من اجل **(k=3)** يوافق تركيبة: $f_3(0) + F_2(3)$

وعليه فان التوزيع الأفضل للممثلين التجاريين في المرحلة الثالثة من اجل **(k=3)** هو أن لا يتم توظيف أي ممثل تجاري بالسوق الثالث C و يوظف الممثلين الثلاث معا إما في السوق A أو في السوق B لأننا وجدنا في المرحلة الثانية انه من اجل **(k=3) فان** $F_2(3)$ يوافق تركيبتين:

$f_2(0) + F_1(3)$ و $f_2(3) + F_1(0)$ أي انه سواء قمنا بتوظيف ثلاث ممثلين تجاريين في السوق الأول معا أو السوق الثاني معا، فإننا نحصل على نفس رقم الأعمال المرتقب في الحالتين.

و يمكن تلخيص الحسابات السابقة لهذه المرحلة الثالثة في الجدول الموالي:

الشكل العام لمعادلة الانتقال للمرحلة الثالثة هي كالتالي:

$$F_3(k) = \max_{0\le x\le k}\{f_3(x) + F_2(k-x)\}$$

وعليه نكتب الجدول كما يلي:[16]

الجدول 4−5

		رقم الأعمال المحقق في المرحلة الثالثة (مليون دج)			
	k	0	1	2	3
x					
0	30	**69**	70	**74**	**79**
1	32		**71**	72	76
2	34			73	74
3	39				78

من الجدول الأخير نلاحظ أن توظيف ثلاث ممثلين تجاريين يؤدي إلى تحقيق مبيعات إجمالية مثلى بقيمة 79 مليون دج و هو ما يجبر المؤسسة على توظيف هؤلاء الممثلين التجاريين في الأسواق الثلاث، ويكون توزيعهم في هذه الأسواق من خلال معادلة Bellman التي توصلنا إليها في المرحلة الثالثة من اجل k=3 كالتالي:

$$F_3(3) = \max_{0\le x\le 3}\{f_3(0) + F_2(3); f_3(1) + F_2(2); f_3(2) + F_2(1); f_3(3) + F_2(0)\}$$

[16] بالتصرف

حيث وجدنا أن التوزيع الأفضل في المرحلة الثالثة من اجل **(k=3)** يوافق تركيبة: $f_3(0)+F_2(3)$
وعليه فان التوزيع الأفضل للممثلين التجاريين في المرحلة الثالثة من اجل **(k=3)** هو أن لا يتم توظيف أي ممثل تجاري بالسوق الثالث C و يوظف الممثلين الثلاث معا إما في السوق A أو في السوق B (حلول بديلة).

6- البرمجة الديناميكية في ضل اليقين و اللايقين:

تكون عمليه القرار المتعدد المراحل مؤكدة Deterministic إذا كان الناتج من كل قرار معروفا تتاما، أما إذا كان العائد المرتبط بقرار واحد على الأقل في العملية عشوائيا فتعد البرمجة الديناميكية إحتمالية أو تصادفيه Stochastic.

ويمكن عد البرمجة الديناميكية أنها في ظل اللايقين إذا تحقق الشرطان الآتيان:[17]

أولهما: إذا كان العائد المرتبط بحالة أو أكثر غير مؤكد

وثانيهما: إذا كانت الحالات الناتجة من واحد أو أكثر من التكرارات غير مؤكدة.

وقد يستخدم أسلوب البرمجة الديناميكية المؤكدة في جعل عملية القرار التصادفية المتعددة المراحل مثلى متى ما توفر شرطان أساسيان هما: أن التوزيع الاحتمالي الذي يحكم الأحداث العشوائية يكون معروفا والآخر يشير إلى أن عدد الحالات والمراحل محددتان.

إن الحالة الشائعة في البرمجة الاحتمالية هي أمثلية العائد المتوقع لذلك فان العشوائية تحدد في العائد المرتبط بالحالات وليس في الحالات الناتجة من القرارات.

أما إذا كانت الحالة الناتجة من القرارات عشوائية، نجد أن السياسة المثلى تعرض في صورة جدول كما هو موضح في الجدول 4-6 أسفله، و هنا نرى أن: $X_j(a_i)$، حيث $j=\overline{1,n}$ و $i=\overline{1,m}$ تدل على القرار في المرحلة j إذا وجدت العملية نفسها في الحالة a_i

الجدول 4-6

المراحل	a_1	a_2	……	a_m
1	$X_1(a_1)$	$X_1(a_2)$	….	
2	$X_2(a_1)$	$X_2(a_2)$	….	
……	…….	……	……	…….
n	$X_n(a_1)$	$X_n(a_2)$	….	

و لتوضيح دخول العشوائية بالطريقتين المذكورتين، نقدم المثالين التوضيحيين التاليين:

[17] ريتشارد ب رونسون" بحوث العمليات "سلسلة ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، الطبعة3، 2011. ص275.

6-1- مثال توضيحي 1:

ثمانية صناديق من بضاعة معينة يجب أن توزع على ثلاثة مخازن، إن الطلب على هذه الصناديق في كل مخزن هو عشوائي وفقا لما هو موضح في الجدول 4-7، و إن الربح من الكمية المبيعة في المخازن 1،2 و 3 هو 18،20 و 21 على التوالي:

الجدول 4-7

عدد الصناديق	احتمالات الطلب		
	مخزن 1	مخزن 2	مخزن 3
0	0,1	0	0,1
1	0,2	0,2	0,3
2	0,3	0,6	0,2
3	0,2	0	0,2
4	0,1	0,2	0
5	0,1	0	0,2

هذه العملية تتألف من ثلاث مراحل، و المرحلة j تمثل تسليم الصناديق إلى المخزن j و الحالات لكل مرحلة $\delta = 0,1,2,\dots,5$ تمثل عدد الصناديق المتاحة للتسليم للمخزن.

لا يوجد عشوائية في الحالة الناتجة عن أي قرار (إذا خصص صندوقان للمخزن، فإن هذا المخزن سيخزن صندوقين) و لكن هناك عشوائية في عائد كل حالة، فعند وجود صندوقين في المخزن، فإن المخزن يمكن أن يبيع 1 أو 2 صندوق و في كل حالة احتمال ينتج عائد مختلف

و تحل هذه المسألة باستخدام المعادلة Bellman بعد تطويرها إلى الصيغة التالية:

$$\vartheta_k(\delta) = \max_{xk} E\{f_k(x_k) + \vartheta_{k+1}(\delta - x_k)\}$$

حيث تشير E إلى القيمة المتوقعة للربح.

6-2- مثال توضيحي 2:

يمتلك شخص ثلاث وحدات نقدية (ألف دج) للاستثمار في إحدى فرص العمل التي تمر في كل عام و العمل بكل فرصة يعتبر مجازفة، فإما أن يتضاعف العائد باحتمال 1,61 ، أو أن يضيع الإستثمار بكامله باحتمال 1,41 ويطلب تحديد إستراتيجية للاستثمار للسنوات الأربع التالية.

إذا كان الربح خلال عام يمكن إعادة استثماره في العام التالي هذه العملية ذات أربع مراحل حيث تمثل كل مرحلة سنة كاملة وتكون الحالات هي المبالغ المتاحة للاستثمار:

الجدول 4-8

للمرحلة الأولى	
للمرحلة الثانية	
للمرحلة الثالثة	
للمرحلة الرابعة	

و تحدث العشوائية هنا في الحالة التي تدخل بقرار خاص، فمثلا إذا قرر المستثمر استثمار وحدتين، فإن الحالة التالية إما 5 أو 1 و تتوقف على مضاعفة أو خسارة المبلغ المستثمر.

و بالتعميم، إذا دخل المستثمر المرحلة j ب u_j وحدة نقدية، فإن X وحدة نقدية $X=0,1,2,\ldots,u_j$ يمكن أن تستثمر تاركة (u_j-x) كاحتياطي.

إذا تضاعفت الكمية المستثمرة فسيكون هناك: $2x+(u_j-x)=u_j+x$ وحدة متاحة للمرحلة التالية، و إذا خسرت الوحدات المستثمرة، فإن الاحتياطي u_j-x وحدة سيكون متاحا للمرحلة التالية فقط،

و أحسن عائد من هذه النقطة سيكون $\vartheta_{j+1}(u_j-x)$ أو $\vartheta_{j+1}(u_j+x)$

و القيمة المتوقعة لهذا العائد تكون: $0.6\ \vartheta j-1(uj+x)+0.45\ \vartheta j-1(uj-x)$

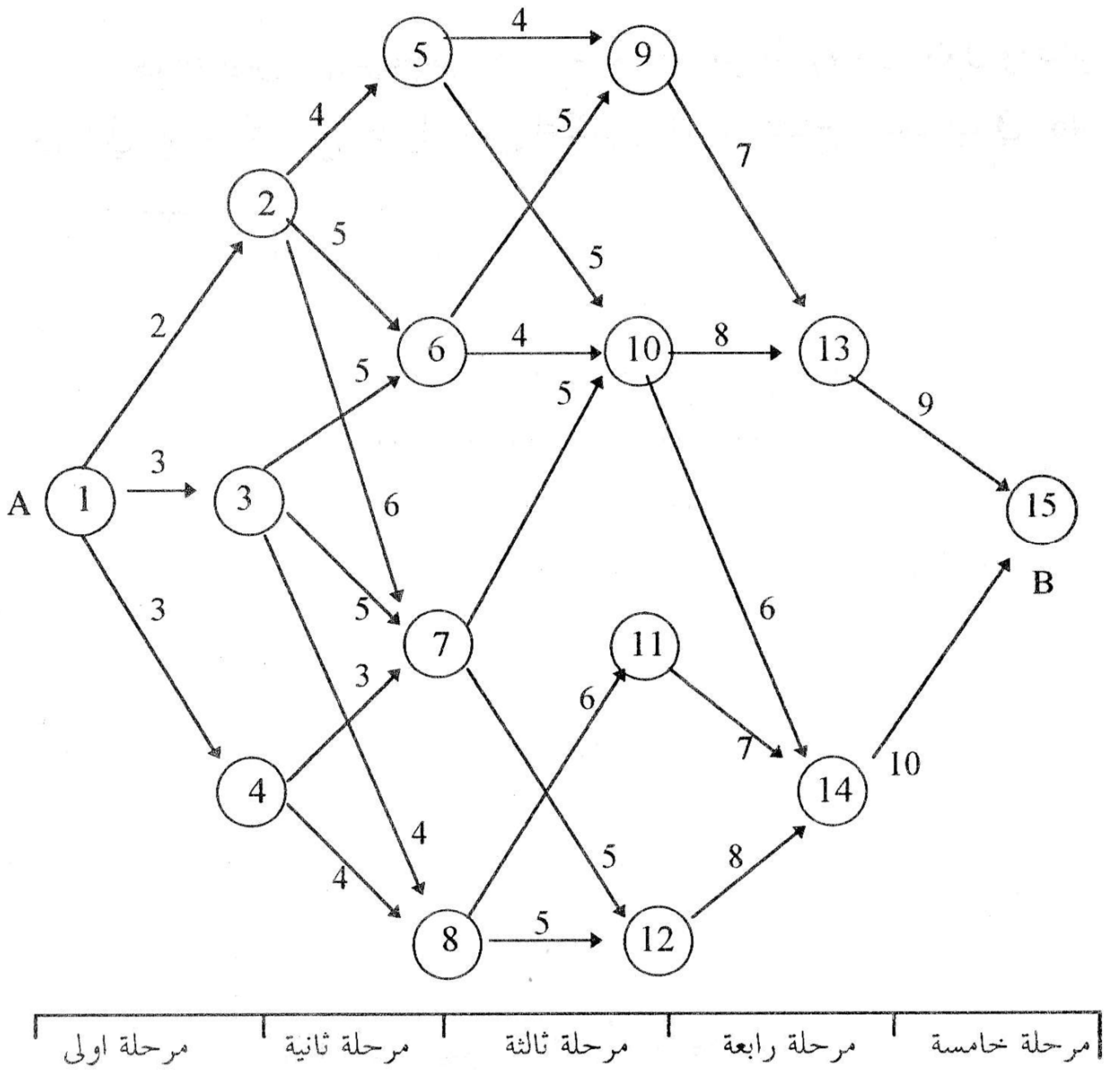
و باستخدام هذا الأسلوب من التحليل يمكن تطبيق المعادلة التتابعية السابقة الذكر في المثال التوضيحي 2 أي: $\vartheta_k(\delta) = \max_{xk} E\{f_k(x_k) + \vartheta_{k+1}(\delta - x_k)\}$

للوصول إلى الحل الأمثل.

7- تمارين تطبيقية مقترحة حول الفصل الرابع:

7-1- التمرين الأول:[18]

لتكن الشبكة التالية الممثلة للطرقات المختلفة للانتقال من المدينة A إلى المدينة B بعد اجتياز عدد من النقاط وان الأزمنة بين هذه النقاط موضوعة على الأسهم و المقدرة بالساعات



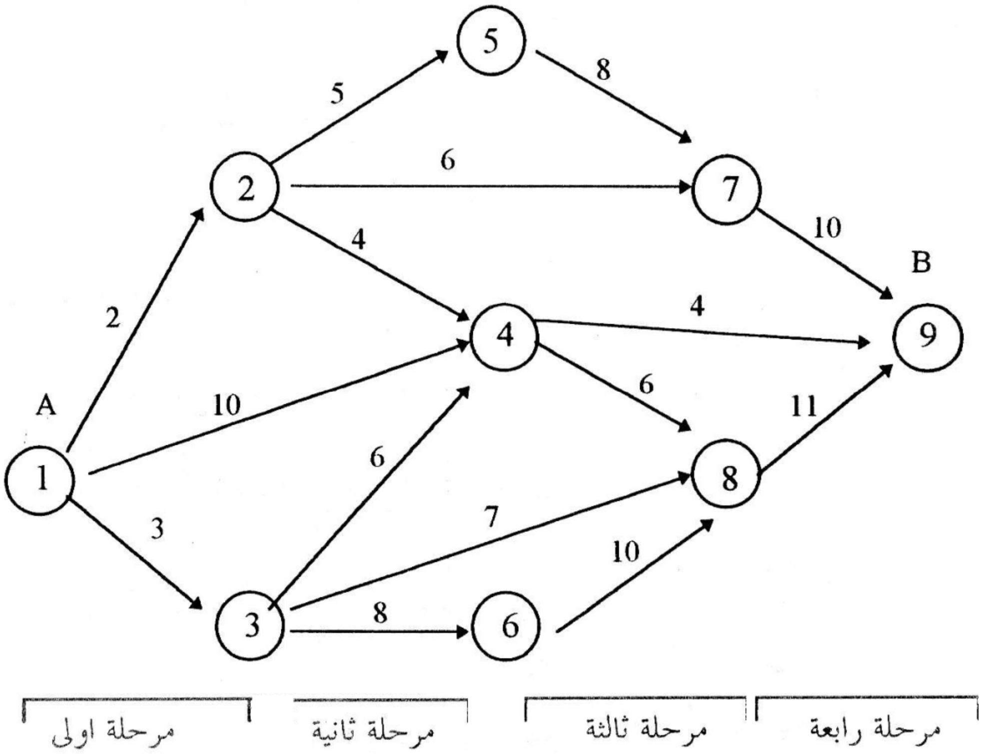
المطلوب:

تحديد اقصر طريق للوصول بحيث يكون الزمن الكلي أدنى ما يمكن و ذلك بعد صياغتها في شكل نموذج حركي.

[18] **طالع الحل في المرجع:** حسن علي مشرقي، زياد عبد الكريم القاضي، "بحوث العمليات، تحليل كمي في الإدارة"، دار المسيرة للنشر، عمان، 1997. ص284

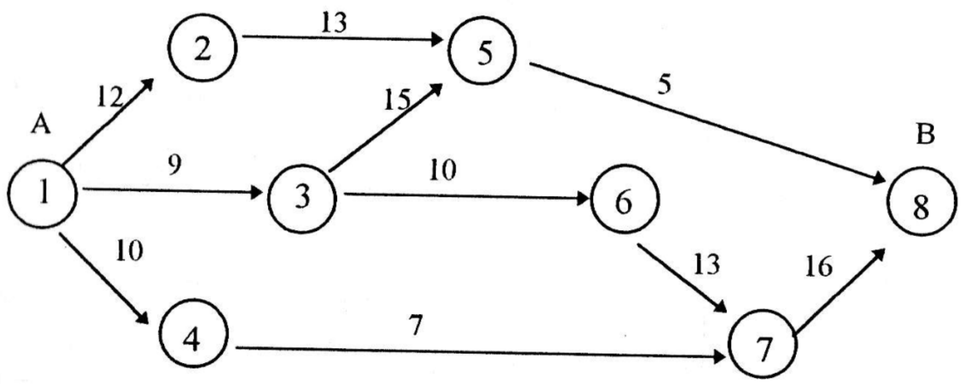
7-2- التمرين الثاني:

نفس أسئلة التمرين السابق بالنسبة للشبكة التالية:



7-3- التمرين الثالث:

لتكن الشبكة التالية الممثلة للطرقات المختلفة للانتقال من المدينة A إلى المدينة B مع مختلف البيانات الضرورية



المطلوب:

- قم بتحديد المراحل التي يمر بها المسافر على هذه الشبكة
- تحديد اقصر طريق للوصول بحيث يكون الزمن الكلي أدني ما يمكن و ذلك بعد صياغتها في شكل نموذج ديناميكي.

7-4- التمرين الرابع:[19]

ليكن لدينا رأس مال قدره 200 ألف دج أي (k=200) يطلب توزيعه و استثماره على أربعة مشروعات، بحيث يكون زيادة إنتاج المنتجات أفضل ما يمكن باستخدام البرمجة الديناميكية و المعلومات الخاصة بحجم رأس المال و المداخيل المترتبة من كل حجم مستثمر للمشاريع الأربعة، ملخصة في الجدول التالي:

الجدول 4-9

رأس المال الموظف في الاستثمار x (ألف دج)	زيادة مداخيل العملية الإنتاج للمنتجات			
	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
K=200	140	122	130	142

المطلوب:

حدد التوزيع الأمثل لرأس المال على مختلف المشاريع بحيث تحصل المؤسسة في المقابل على أعظم زيادة في مداخيل العملية الإنتاج للمنتجات.

7-4- التمرين الخامس:

احد مؤسسات بيع الأدوية الطبية لديها عشرة وكلاء يعملون في ثلاث مناطق بيع، الجدول أسفله يظهر أرباح الوكلاء في مختلف المناطق التسويقية.

الجدول 4-10

عدد الوكلاء / المناطق	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15	22	30	38	45	48	54	60	65	70	71
2	26	35	40	46	55	62	70	76	83	90	95
3	30	38	44	50	60	65	72	80	85	90	85

المطلوب: اوجد التخصيص الأمثل لوكلاء بيع الأدوية بما يعظم أرباح المؤسسة الطبية.

[19] **طالع الحل في المرجع:** حسن علي مشرقي، زياد عبد الكريم القاضي، "بحوث العمليات، تحليل كمي في الإدارة"، دار المسيرة للنشر، عمان، 1997. ص274

قائمة مراجع الفصل الرابع: البرمجة الديناميكية

المراجع بالعربية:

اليمين فالته، " بحوث العمليات"، اتراك للطباعة و لنشر،القاهرة، 2006.

السعدي دنيا احمد، "استخدام البرمجة الديناميكية في تحليل نماذج الخزين "، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد 1999.

حسن علي مشرقي، زياد عبد الكريم القاضي، "بحوث العمليات، تحليل كمي في الإدارة"، دار المسيرة للنشر، عمان، 1997.

حسين محمود الجنابي، "الأحدث في بحوث العمليات"، دار الحامد للنشر، الأردن،2010.

ريتشارد ب رونسون، "بحوث العمليات "سلسلة ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، الطبعة3، 2011.

محمد عبد العال النعيمي، "بحوث العمليات"، دار وال للنشر، الأردن، 1999.

محمد إسماعيل بلال، "بحوث العمليات، استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار"، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية،2007.

المراجع بالأجنبية:

Bellman R. , « Dynamic Programing », Princeton University press.1957.

Bellman R. and Kalaba R. “Dynamic Programing and Modern Control Theory” Academic Press 1966.

Budnik Frank S., McLeavey D., Mojena R. « Principles of Operations Research for Management », ,Irwin ,paris, 1991.

Howard R.A. , “Dynamic Programing and Markov Processes” The technology press of M.t with John Wiley and Sons,1960.