

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



**SUR L'ÉTUDE D'EXISTENCE DE POINTS FIXES  
POUR DES APPLICATIONS DE TYPE  
NON-EXPANSIVE DANS DES ESPACES DE  
BANACH**

PAR  
**HAMALIT** lydia

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER  
EN MATHÉMATIQUES  
**DOMAINE : MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES**  
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUES

Soutenue publiquement, le 25 juin 2019 devant le jury composé de :

<i>Dr. ADJABI Yassine</i>	<i>MCA</i>	<i>UMBB</i>	<i>Président</i>
<i>Dr. MECHROUK Salima</i>	<i>MCA</i>	<i>UMBB</i>	<i>Examinatrice</i>
<i>Dr. HAMMACHE Karima</i>	<i>MCA</i>	<i>ENP</i>	<i>Encadreur</i>
<i>Pr. SEBA Djamila</i>	<i>PROF</i>	<i>UMBB</i>	<i>Co-Encadreur</i>

---

## Résumé

L'étude d'existence de points fixes est un domaine d'intérêt pour beaucoup de chercheurs en mathématique. Cette étude consiste à résoudre des équations abstraites dont la forme générale est  $Tx = x$  où  $T$  est un opérateur défini sur un espace métrique complet  $(X, d)$  muni de sa distance noté par  $d$  (ou un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  muni de sa norme  $\|\cdot\|$ ). L'élément  $x$  de l'espace  $E$  est appelé un point fixe. Cette théorie possède beaucoup d'applications dans différents domaines tels que la physique, l'économie, la théorie des jeux, la chimie, l'ingénierie et bien autres.... De nos jours, la théorie du point fixe est un domaine de recherche très actif dans lequel de nombreux nouveaux théorèmes sont publiés, certains appliqués et d'autres abstraits.

Motivés par tout cela, nous donnons plusieurs résultats basiques sur l'existence de points fixes pour des applications du type non-expansive définies sur des espaces de *Banach*. La structure de l'espace de *Banach* 'géométrique, topologique ou algébrique' et la nature des opérateurs en question jouent un rôle primordial dans l'établissement des théorèmes d'existence de points fixes.

On a commencé ce mémoire par une introduction et généralités sur l'analyse fonctionnelle et quelques notions de Topologie, puis on a traité les propriétés géométriques des espaces de *Banach*.

Après, nous donnons une introduction à la théorie du point fixe. Cette théorie a plusieurs applications.

Notre traitement du sujet principal dans ce mémoire commence dans le Chapitre 3. Dans ce chapitre, nous considérons plusieurs problèmes d'existence de points fixes pour des applications non expansives dans des espaces de *Banach* dont la structure est normale ou bien uniformément convexe ou encore qui vérifie la condition "Opial".

Enfin, dans le Chapitre 4, on s'intéressera à quelques applications à des équations différentielles ou intégrales.

---

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissances et de remerciement à  
Mes chers parents.  
Mes chers frères .  
Mes chères soeurs.  
La mémoire de ma chère grand-mère.  
Tous les membres de ma famille petits et grands.  
Tous les éléments de ma promotion et mes camarades.  
Tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui nous sont chers.

---

## Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu, le tout puissant pour ses faveurs et ses grâces, de m'avoir donné le courage et la patience pour avoir mené ce travail durant cette année.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma promotrice de mémoire, Madame HAMMACHE Karima. Je la remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée.

Je tiens à remercier spécialement ma co-promotrice de mémoire, Madame SEBA Djamilia et Madame LAOUBI Karima, Madame MECHROUK Salima qui ont partagé leur connaissances et expériences, tout en m'accordant leur confiance et une large indépendance dans l'exécution de missions durant mes deux années de master.

Mes remerciements sont aussi adressés à Monsieur ADJABI Yassine, Madame MECHROUK Salima qui nous font l'honneur de présider et examiner ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant ma formation universitaire.

Enfin, je remercie mes amis Nadia, Sarah, Ibtissem qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>2</b>
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>8</b>
1.1 Espace métrique . . . . .	8
1.2 Espace Normé . . . . .	8
1.3 Espace de Banach . . . . .	9
1.4 Espace b-métrique . . . . .	9
1.5 Espace quasi-métrique . . . . .	10
1.6 Espace quasi-b-métrique . . . . .	10
1.7 Topologies faibles, Espaces réflexifs . . . . .	11
1.7.1 Topologies faibles . . . . .	11
1.7.2 Espaces réflexifs . . . . .	11
1.8 Ensemble ordonnés . . . . .	13
1.9 La Géométrie des Espaces de Banach . . . . .	13
1.9.1 Convexité stricte . . . . .	13
1.9.2 Convexité uniforme . . . . .	16
1.9.3 Le module de convexité . . . . .	16
1.9.4 Le centre asymptotique, le rayon asymptotique . . . . .	17
1.9.5 Structure normale . . . . .	17
1.9.6 Condition Opial . . . . .	19
<b>2 Introduction A La Théorie de points fixes</b>	<b>20</b>
2.1 Le principe des applications contractantes de Banach . . . . .	21
2.1.1 Méthode 1 de la preuve . . . . .	21

2.1.2	Méthode 2 de la preuve . . . . .	23
2.2	La version locale du théorème de <i>Banach</i> . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Théorèmes de points fixes du type Browder et Kirk</b>	<b>33</b>
3.1	Théorèmes de points fixes du type <i>Browder</i> . . . . .	33
3.2	Théorèmes de points fixes du type <i>Kirk</i> . . . . .	37
3.3	Théorèmes de points fixes avec la condition <i>Opial</i> . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Exemple d'Applications</b>	<b>42</b>
4.1	Application au principe de contraction de Banach . . . . .	42
4.1.1	Equation intégrale de <i>Fredholm</i> . . . . .	43
4.1.2	Equation intégrale de <i>Volterra</i> . . . . .	44
4.2	Application du théorème de Browder Göhde Kirk . . . . .	46
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

---

## Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse principalement à l'existence de points fixes pour des applications du type "non expansive" dans des espaces de *Banach*. La théorie du points fixes a trouvé de nombreuses applications en mathématiques pures et appliquées (voir, [1], [2], [3], [9], [14].), on peut citer à titre d'exemple l'analyse théorique et appliquée, en géométrie algébrique, physique mathématique, chimie, théorie de l'optimisation, théorie des jeux, systèmes dynamiques, économie, sciences médicales et plusieurs autres (voir[5], [10], [15]). Par conséquent, cette théorie est devenue un domaine de recherche très actif.

La théorie du point fixe consiste à résoudre l'équation abstraite suivante :  $Tx = x$ , c'est à dire que notre objectif est de trouver l'existence d'un élément  $x$  dans un espace de Banach  $X$  pour un opérateur  $T$  défini de  $X$  dans  $X$ . On note l'ensemble des points fixes par  $FixT$ .

Cette théorie est l'une des technique mathématique qui nous permet de résoudre des équations différentielles ou intégrales, vu que généralement trouver des solutions pour ces équations revient à trouver des points fixes pour des opérateurs associés à ces dernière.

Notre motivation pour ce travail était partie du célèbre théorème de *Banach* connu sous le nom du principe de contraction de *Banach* ou encore le principe des applications contractantes de Banach, qu'on va retrouver aux sections 2.1.1-2.1.2. Ce théorème, a été prouvée en 1922 par *Stefan–Banach* [4], dit que toute application contractante  $T$  définie sur un espace métrique complet  $(X, d)$  muni de sa distance noté par  $d$  (ou un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  muni de sa norme  $\|\cdot\|$ ) admet un point fixe unique. Rappelons qu'une application contractante  $T : X \rightarrow X$ , satisfait la condition suivante :  $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$  ou  $\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$ , où  $k$  est la constante de Lipschitz vérifiant  $0 < k < 1$ .

Notons que le principe de contraction de *Banach* peut être utilisé pour prouver le théorème de *Picard – Lindelof* ([17], théorème 5.3 – 1) qui est utilisé pour prouver l'existence et l'unicité des solutions de certains types d'équa-

tions différentielles. Il peut également être utilisé pour prouver l'existence et l'unicité de solutions d'équations intégrales, comme le montre l'exemple 4.1.1.

Par la suite la communauté scientifique s'est intéressé au cas  $k = 1$  c'est à dire aux applications dite "non-expansive" et là, la théorème de *Banach* ne fonctionne plus car ces d'application peuvent admettre une infinité de solutions, on peut citer à titre d'exemple l'opérateur identité, comme elles peuvent ne pas admettre aucun point fixe et là, on metionne le cas des translations. Pour surmonter cette difficulté, on a utilisé la géométrie de l'espace sur le quel est défini l'opérateur qui a joué un *rôle* primordiale pour prouver l'existence de points fixes.

Motivés par tout cela, nous présentons dans ce mémoire, quelques théorèmes de points fixes pour des applications non expansive dans des espace de *Banach*.

On a structuré ce mémoire en quatre chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, intitulé Chapitre 1, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle : Espace de Banach, espace métrique, espace b-métrique ,espace réflexif, la convexité uniforme, la structure normale, le centre asymptotique, le rayon asymptotique et la condition *Opial*...

Dans le Chapitre 2 , nous donnons une introduction à la théorie du point fixe et nous discutons le principe de contraction de *Banach* et quelques résultats dans des espaces b-métriques.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de quelques théorèmes de points fixes pour des applications non expansive. Les résultats principaux donné sont : le théorème 3.1.5 qui a été obtenue, en 1965, par *Browder*[8] et qui donne un résultat d'existence de points fixes dans des espace uniformément convexe. Dans le théorème (3.2.1) nous présentons un résultat d'existence dans des espace dont la structure est normale, cette notion a été introduite par *Brodskii – et – Milman*[7]. Nous terminons ce chapitre par un théorème d'existence de point fixe pour des applications non-expansive vérifiant la condition *Opial*.

Enfin, on termine ce mémoire par le Chapitre 4, où nous présentons quelques applications aux théorèmes de points fixes cités précédement, à titre d'exemple la résolution des équations intégrales du type *Voltera* et *fredholm*.

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires que nous utiliserons dans la suite du mémoire. On peut trouver ces derniers dans les références suivantes : [2], [6], [13], [19], [21], [2].

## 1.1 Espace métrique

**Définition 1.1.1.** Soient  $X$  un ensemble non vide,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ := [0, \infty[$  une application. On dit que  $d$  est une distance si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- i)  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  pour  $x, y \in X$ .
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ .

Un ensemble  $X$  muni d'une distance  $d$  est appelé espace métrique qu'on note  $(X, d)$ .

## 1.2 Espace Normé

**Définition 1.2.1.** Soient  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction. On dit que  $f$  est une norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- i)  $f(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- ii)  $f(\lambda x) = |\lambda|f(x) \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ .
- iii)  $f(x, y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X$ .

Le couple  $(X, f)$  est appelé espace normé.

## 1.3 Espace de Banach

**Définition 1.3.1.** *Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

*Autrement dit, toute suite de Cauchy est convergente dans  $X$ .*

## 1.4 Espace b-métrique

**Définition 1.4.1.** ([21])

*Soit  $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction vérifiant les trois conditions suivantes :*

- i) Si  $D(x, y) = 0$  alors  $x = y$  ; pour tout  $x, y \in X$ ,*
- ii)  $D(x, y) = D(y, x)$  ; pour tout  $x, y \in X$ ,*
- iii)  $D(x, z) \leq s[D(x, y) + D(y, z)]$ , pour tout  $x, y, z \in X$ , et la constante  $s \geq 1$ .*

*alors  $D$  est dite une b-métrique et le couple  $(X, D)$  est dit un espace b-métrique ('b-metric-like').*

*Quelques concepts dans des espaces de type b-métrique ('b-metric-like'), ont été introduits comme suit.*

**Propriétés 1.4.1.**

- *Toute b-métrique  $D$  définie sur  $X$  généralise une topologie  $\tau_D$  sur  $X$  dont la base est la famille des boules ouvertes*

$$B_{D(x, \epsilon)} = \{y \in X : |D(x, y) - D(x, x)| < \epsilon\} \quad \text{pour tous } x \in X \quad \text{et } \epsilon > 0.$$

- *Toute suite  $\{x_n\}$  dans espace b-métrique  $(X, D)$  converge vers un point  $x \in X$  si et seulement si*

$$D(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} D(x, x_n).$$

- *Une suite  $\{x_n\}$  dans espace b-métrique  $(X, D)$  est dite une suite de Cauchy s'il existe*

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} D(x_n, x_m).$$

- *Un espace b-métrique est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy  $\{x_n\}$  dans  $X$  converge par rapport à  $\tau_D$  vers un point  $x \in X$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(x, x_n) = D(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} D(x_n, x_m).$$

## 1.5 Espace quasi-métrique

**Définition 1.5.1.** Soit  $X$  un ensemble non vide. L'application  $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  est dite quasi-métrique sur l'ensemble  $X$  si pour tout  $x, y, z \in X$  les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  ;
- ii)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Le couple  $(X, \rho)$  est dit un espace quasi métrique.

## 1.6 Espace quasi-b-métrique

**Définition 1.6.1.** Une quasi-b-métrique sur un ensemble non vide  $X$  est une fonction  $b : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  tel que pour tout  $x, y, z \in X$ , les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $b(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  ;
- ii)  $b(x, z) \leq s[b(x, y) + b(y, z)]$ , où  $s$  est une constante vérifiant  $s \geq 1$ .

Le couple  $(X, b)$  est dit un espace quasi-b-métrique.

Le nombre  $s$  est la constante de  $(X, b)$ .

**Exemple 1.6.1.** Soit  $X = \{0, 1, 2\}$ , et soit

$$b(x, y) = \begin{cases} 2, & x = y = 0, \\ 1/2, & x = 0, y = 1, \\ 2, & x = 1, y = 0, \\ 1/2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$(X, b)$  est un espace quasi-b-métrique avec une constante  $s = 2$ , mais comme  $b(0, 1) \neq b(1, 0)$ , alors  $(X, b)$  n'est pas un espace b-métrique.

**Définition 1.6.2.** Soit  $(X, b)$  un espace quasi-b-métrique alors

1. Toute suite  $\{x_n\}$  définie dans l'espace  $(X, b)$  est dite convergente vers  $x \in X$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b(x, x_n) = b(x, x).$$

2. Toute suite  $\{x_n\}$  définie sur l'espace  $(X, b)$  est dite une suite de Cauchy si

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) \quad \text{et} \quad \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_m, x_n) \quad \text{existent et elles sont finies.}$$

3. Un espace quasi-b-métrique  $(X, b)$  est dit Complet si et seulement si pour toute suite de Cauchy  $\{x_n\}$  définie dans l'espace  $(X, b)$ , il existe  $x \in X$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b(x, x_n) = b(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_m, x_n).$$

4. Une suite  $\{x_n\}$  définie dans l'espace  $(X, b)$  est dite une suite 0-Cauchy si

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_m, x_n) = 0.$$

5. Un espace quasi-b-métrique  $(X, b)$  est dit 0-complet si et seulement si pour toute suite 0-Cauchy  $\{x_n\}$  définie dans l'espace  $X$ , il existe  $x \in X$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b(x, x_n) = b(x, x) = 0 = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_m, x_n).$$

**Remarque 1.6.1.** Il est évident que toute suite 0-Cauchy est une suite de Cauchy dans l'espace quasi-b-métrique  $(X, b)$ , et chaque espace quasi-b-métrique complet est un espace quasi-b-métrique 0-complet.

## 1.7 Topologies faibles, Espaces réflexifs

### 1.7.1 Topologies faibles

Soient  $X$  un espace de Banach et  $X'$  son dual topologique, et soit  $f \in X'$ . On désigne par  $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$ . On rappelle que  $\langle f, x \rangle = f(x)$ . Lorsque  $f$  décrit  $X'$  on obtient une famille  $(\varphi_f)_{f \in X'}$  d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.7.1.** La **topologie faible** sur  $X$  est la plus faible (moins fine (c'est-à-dire avec le moins d'ouverts possibles)) des topologies sur  $X$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_f)_{f \in X'}$ , qu'on note  $\sigma(X, X')$ .

**Définition 1.7.2.** La suite  $(x_n)$  tend vers  $x$  pour la topologie faible  $\sigma(X, X')$  si et seulement si  $\langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$  pour toute  $f \in X'$ .

La convergence correspondante à  $\sigma(X, X')$  est appelée convergence faible.

### 1.7.2 Espaces réflexifs

**Définition 1.7.3.** Si l'application linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est bijective bicontinue on dit que  $T$  est une **isomorphisme**.

**Définition 1.7.4.** L'application  $T : X \rightarrow Y$  est dite **isométrie**, s'il vérifie

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Remarque 1.7.1.** Si  $T$  est isomorphisme isométrie, on dit que  $X$  s'identifie à  $Y$ .

Soit  $X$  un espace de Banach, soit  $X'$  son dual et soit  $X''$  son bidual.[6] On rappelle qu'on a une **injection canonique**  $J : X \rightarrow X''$  telle que pour  $x \in X$  fixé, l'application de  $X'$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $f \mapsto \langle f, x \rangle$  est une forme linéaire continue sur  $X'$  (c'est-à-dire un élément de  $X''$  noté  $J(x)$ ). On a donc,

$$\langle Jx, f \rangle_{X'', X'} = \langle f, x \rangle_{X', X} \quad \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

$J$  est linéaire et isométrie **i.e.**  $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$

**Définition 1.7.5.** Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que  $X$  est **réflexif** si  $J(X) = X''$ .

Autrement dit,  $X$  s'identifie à son bidual  $X''$ . On pourra associer à chaque élément  $g \in X''$  un unique  $x \in X$  fixé tel que

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \quad \text{avec } f \in X'.$$

**Exemple 1.7.1.**

- $l_p$  et  $\mathcal{L}_p$ ,  $1 < p < \infty$  sont des espaces réflexifs de Banach.
- $\mathbb{R}^n$  est réflexif.
- Chaque espace de Hilbert est un espace de Banach réflexif.

**Théorème 1.7.1.** [11] Un espace de Banach  $X$  est réflexif si et seulement si  $B_X$  est faiblement compacte.

**Preuve 1.7.1.** Pour la preuve, voir (chapitre3 page75 [11]).

**Théorème 1.7.2.** (Eberlein-Smulian)[6] Soit  $X$  de Banach et  $C \subset X$  faiblement compact. Alors de toute suite de  $C$  on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de  $C$ .

**Preuve 1.7.2.** Voir par exemple Yosida[18].

## 1.8 Ensemble ordonnés

**Lemme 1.8.1.** (Lemme de Zorn,[6]) Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal (minimal).

**Définition 1.8.1.** Soit  $X$  un ensemble muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$ . Alors on dit que

1.  $C \subset X$  est **totalelement ordonné** si pour tout couple  $x, y$  de  $C$  on a (au moins) l'une des relations  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .
2.  $\alpha \in X$  est un **majorant (minorant)** de  $C$  si pour tout  $x \in C$  l'on a  $x \leq \alpha$  ( $x \geq \alpha$ ).
3.  $m \in X$  est un élément **maximal(minimal)** de  $X$  si pour tout  $x \in X$  tel que  $m \leq x$  ( $m \geq x$ ) on a nécessairement  $x = m$ .
4.  $X$  est **inductif** si tout sous-ensemble totalement ordonné de  $X$  admet un majorant (minorant).

## 1.9 La Géométrie des Espaces de Banach

### 1.9.1 Convexité stricte

**Définition 1.9.1.** Soit  $X$  Un espace vectoriel.

1.  $X$  est dit **convexe** si et seulement si pour tout  $x, y \in X$  on a  $[x, y] \subset X$  c'est à dire  $\{(1 - \lambda)x + \lambda y\}; \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1]\} \subset X$ .

**Définition 1.9.2.** On dit que  $X$  est un espace de Banach **strictement convexe** si pour  $x, y \in X$  avec  $\|x\| = \|y\| = 1$  et  $x \neq y$  on a  $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1, \forall \lambda \in ]0, 1[$ .

**Définition 1.9.3.** On appelle **point extrême** d'un ensemble convexe  $X$  tout point, à distance finie, qui ne peut pas être représenté comme une combinaison linéaire convexe à coefficients non nuls de deux points distincts de  $X$ , c'est-à-dire  $z$  est un point extrême si et seulement si il est impossible de trouver deux points  $x$  et  $y$  distincts de  $X$  vérifiant la relation  $z = ((1 - \lambda)x + \lambda y)$  avec  $\lambda \in [0, 1]$ .

Un **point extrême** ne peut donc pas être compris entre deux autres points  $x, y$  quelconques de l'ensemble.

**Remarque 1.9.1.** (point extrémal)

Soit  $K \subset X$  un ensemble convexe. On dit qu'un point  $x \in K$  est extrémal si

$$(x = (1 - t)x_0 + tx_1 \quad \text{avec} \quad t \in ]0, 1[ \quad \text{et} \quad x_0, x_1 \in K) \quad \Rightarrow \quad (x_0 = x_1 = x).$$

**Théorème 1.9.1.** *On dit que  $X$  est un espace de Banach strictement convexe si et seulement si pour chaque point  $z$  avec  $\|z\| = 1$  de la boule unité fermé  $B_x := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  de  $X$ , est un **point extrême**.*

**Preuve 1.9.1.** *Soit  $X$  un espace strictement convexe. Montrons que pour tout élément  $z$  de  $X$  vérifiant  $\|z\| = 1$  est un point extrême de  $B_x := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ .*

*Par l'absurde supposons qu'il existe :  $z_0 \in X$  tel que  $\|z_0\| = 1$  mais  $z_0$  n'est pas un point extrême. Alors, on obtient immédiatement qu'il existe deux point distincts  $x_0, y_0 \in X$  tel que  $x_0 \neq y_0$  et  $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$  avec  $z_0 = (1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0$ .*

*Maintenant, Montrons que  $\|x_0 + y_0\| = 2$ . En effet, dans le cas contraire on a  $\|x_0 + y_0\| < 2$  et par ailleurs,*

$$\begin{aligned} 1 = \|z_0\| &= \|(1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0\| \\ &= \|(1 - \lambda)[(1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0] + \lambda[(1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0]\| \\ &= \|(1 - \lambda)^2 x_0 + \lambda(1 - \lambda)(x_0 + y_0) + \lambda^2 y_0\| \\ &< ((1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + \lambda^2) = 1, \end{aligned}$$

*contradiction, d'où  $\|x_0 + y_0\| = 2$  et ceci implique  $x_0 = y_0$  ontradiction.*

*Inversement, on suppose que pour tout élément  $z$  de  $B_X$  de  $X$  tel que  $\|z\| = 1$  est un point extrême et montrons que  $X$  est strictement convexe.*

*En effet, soit  $x, y$  deux éléments de  $X$  tel que  $\|x\| = \|y\| = 1$  et  $\|x + y\| = 2$ . Posons  $u = (x + y)/2$  ceci implique que  $\|u\| = 1$  donc  $u$  est un point extrême, d'où  $x = y$ . Par conséquent  $X$  est strictement convexe.*

**Exemple 1.9.1.** [12] *On considère  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , muni de la norme*

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

*Avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = \mathbb{R}^n$ . On montre que  $\mathbb{R}^n$  est strictement convexe.*

*Soient  $x, y \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ , avec  $x \neq y$ . Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,*

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , on a :

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_2^2 &= \|((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2, \dots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n)\|^2, \\
&= \left(\sum_{i=1}^n [(1-\lambda)x_i + \lambda y_i]^2\right). \\
&= [(1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(1-\lambda)\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2]. \\
&\leq [(1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(1-\lambda)\lambda \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2]. \\
&< [(1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(1-\lambda)\lambda (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^n |y_i|^2)^{1/2} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2] \quad \text{car } x \neq y.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_2^2 &< (1-\lambda)^2 \|x\|_2^2 + 2(1-\lambda)\lambda \|x\|_2 \|y\|_2 + \lambda^2 \|y\|_2^2. \\
&= (1-\lambda) + \lambda. \\
&= 1 \quad \text{pour } \lambda \in ]0, 1[.
\end{aligned}$$

Donc,  $\mathbb{R}^n$  est strictement convexe.

**Exemple 1.9.2.** [2] On considère  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Donc,  $X$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  n'est pas strictement convexe. En effet, soient  $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$  et  $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ . Il est facile de voir que  $x \neq y$ ,  $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$ , mais  $\|x + y\|_1 = 2$ .

**Définition 1.9.4.** (L'enveloppe convexe fermée)

Soit  $X$  un e.v.n. et soit  $A \subset X$ . L'enveloppe convexe fermée de  $A$  - notée  $\overline{\text{co}}A$  - est la plus petit ensemble convexe fermé contenant  $A$ .

**Théorème 1.9.2.** (krein-Milman). [6]

Soit  $K \subset X$  un ensemble convexe compact. Alors  $K$  coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

## 1.9.2 Convexité uniforme

**Définition 1.9.5.** On dit que  $X$  est un espace de Banach uniformément convexe, si  $\forall \epsilon \in ]0, 2]$ ,  $\forall x, y \in X$ , il existe une fonction  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  telle que les conditions

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \text{ et } \|x - y\| \geq \epsilon,$$

entraînent

$$\|x + y/2\| \leq 1 - \delta(\epsilon),$$

nous appellerons  $\delta(\epsilon)$  le **module d'uniformité** de  $X$ .

**Exemple 1.9.3.** [2]

*l'espace  $l_1$  n'est pas uniformément convexe.*

*Soient  $x = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $y = (0, -1, 0, \dots)$ , et  $\epsilon = 1$ .*

*on a  $x, y \in l_1$  et  $\|x\| = \|(1, 0, 0, \dots)\| = 1$ ,  $\|y\| = \|(0, -1, 0, \dots)\| = 1$ ,  $\|x - y\| = \|(1, 1, 0, \dots)\| = 2 > 1 = \epsilon$ .*

*Ce qui donne,  $\|\frac{x+y}{2}\| = \|\frac{(1, -1, 0, \dots)}{2}\| = 1$ . On ne peut pas trouver  $\delta > 0$  tels que  $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$ .*

*Donc,  $l_1$  n'est pas uniformément convexe.*

**Théorème 1.9.3.** [2] *Un espace de Banach uniformément convexe est strictement convexe.*

**Preuve 1.9.2.** *Soit  $X$  un espace uniformément convexe.*

*Soit  $x, y \in X$  tel que  $\|x\| = \|y\| = 1$  et  $x \neq y$ .*

*Prenons  $\epsilon = \|x - y\|/2$ ,  $\epsilon > 0$ . Comme  $X$  est uniformément convexe, alors il existe une fonction  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  telle que les conditions*

$$\|x\| = \|y\| = 1, \text{ et } \|x - y\| \geq \epsilon,$$

entraînent

$$\|x + y/2\| \leq (1 - \delta(\epsilon)) < 1,$$

ce qui donne :

$$\|x + y/2\| < 1,$$

par conséquent  $X$  est strictement convexe.

## 1.9.3 Le module de convexité

**Définition 1.9.6.** *Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que la fonction  $\delta_X : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$  est le 'module de convexité' de  $X$  si*

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}.$$

*Avec  $\delta_X(0) = 0$  et  $\delta_X(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ .*

## 1.9.4 Le centre asymptotique, le rayon asymptotique

**Définition 1.9.7.** Soient  $C$  un sous-ensemble non vide de l'espace de Banach  $X$ ,  $\{x_n\}$  une suite bornée de  $X$ . On considère la fonctionnel  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x_n - x\|, \quad x \in X$$

. On note la fonctionnel  $f(x)$  par  $r_a(x, x_n)$ .

1. l'infimum de  $f(x)$  sur  $C$  est appelé '**le rayon asymptotique**' noté par  $r_a(C, x_n)$ .
2. On dit que le point  $z \in C$  est '**le centre asymptotique**' de la suite  $\{x_n\}$  sur  $C$  si

$$f(z) = r_a(z, x_n) = \inf\{f(x) = r_a(x, x_n) : x \in C\}.$$

On note l'ensemble des centres asymptotiques de  $\{x_n\}$  sur  $C$  par  $\mathcal{A}_a(C, \{x_n\})$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}_a$  peut être **vide**, **singleton**, ou **certaine infinité de points**.

**Remarque 1.9.2.** — Si  $\{x_n\}$  converge fortement vers  $x \in C$ , alors

$$r_a(C, x_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_a(C, \{x_n\}) = \{x_n\}.$$

— Si  $\{x_n\}$  converge fortement vers  $x \notin C$ , alors

$$r_a(C, x_n) = d(x, C) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_a(C, \{x_n\}) = \{z \in C : \|x - z\| = d(x, C)\}.$$

— Si  $\{x_n\}$  est périodique avec seulement deux valeurs  $(x, y) \in C$  alors

$$r_a(C, x_n) = \|x - y\|/2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_a(C, \{x_n\}) = \{z \in C : \|x - z\| = \|y - z\| = \|x - y\|/2\}.$$

Le point  $(x - y)/2$  appartient toujours à cet ensemble. Mais si  $X$  est strictement convexe  $\mathcal{A}_a(C, \{x_n\})$  peut contenir d'autres points.

Le fonctionnel  $r_a(x, x_n)$  est convexe et non-expansive (est donc continu).

## 1.9.5 Structure normale

**Définition 1.9.8.** Soit  $C$  un sous ensemble non vide borné de  $X$  de Banach, Alors le point  $x_0 \in C$  est dit

- i) **Point diamétrale** de  $C$  si

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in C\} = \text{diam}(C),$$

ii) **Point non diamétrale** de  $C$  si

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in C\} < \text{diam}(C),$$

**Définition 1.9.9.** On dit qu'un sous ensemble convexe non vide  $C$  de  $X$  de Banach, a une structure normale si pour tout sous ensemble convexe et bornée  $D \subset C$  avec  $\text{diam}D > 0$ , (avec au moins deux points) il contient un point non diamétrale. **c'est à dire** : Il existe  $x_0 \in D$  tel que

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in D\} < \text{diam}(D).$$

**Exemple 1.9.4.** On considère  $\mathcal{C}[0, 1]$  l'espace des fonctions continues à valeur réelle dans l'intervalle  $[0, 1]$ . muni de la norm  $\|\cdot\|_\infty$ .

On montre que  $\mathcal{C}[a, b]$  n'a pas une structure normale.

Soit  $\Gamma = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : 0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 1, t \in [0, 1]\}$ .

Soit  $f_1, f_2 \in \Gamma, \lambda \in [0, 1]$  and  $f = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$ .

Évidemment,  $f(0) = 0, f(1) = 1$  et  $0 \leq f(t) \leq 1$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . il s'en suit que  $f \in \Gamma$ . d'où  $\Gamma$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}[0, 1]$  non vide, convexe, borné avec

$$\text{diam}(\Gamma) = \sup\{\|f - g\| : f, g \in \Gamma\} = 1.$$

Nous montrons que chaque point de  $\Gamma$  est un point diamétral.

Pour  $f_0 \in \Gamma$ , on a

$$\sup\{\|f_0 - f\|_\infty : f \in \Gamma\} = 1 = \text{diam}(\Gamma).$$

D'où  $\mathcal{C}[0, 1]$  n'a pas une structure normale.

Les théorèmes suivants donnent des exemples d'espaces de Banach qui ont une structure normale.

**Théorème 1.9.4.** [2] Chaque sous-ensemble compact  $C$  d'un espace Banach  $X$  a une structure normale.

**Théorème 1.9.5.** [2] Tout espace de Banach de dimension finie a une structure normale.

**Théorème 1.9.6.** [2] Chaque sous-ensemble  $C$  fermé, convexe, borné d'un espace de Banach a une structure normale.

**Théorème 1.9.7.** [2] Tout espace Banach uniformément convexe a une structure normale.

## 1.9.6 Condition Opial

**Définition 1.9.10.** *On dit qu'un espace  $X$  de Banach satisfait à la Condition Opial si à chaque fois qu'une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  converge faiblement vers  $x_0 \in X$ , alors*

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| \quad \text{pour tout } x \in X, \quad x \neq x_0.$$

**Remarque 1.9.3.** *Si on remplace la  $\liminf$  par  $\limsup$  dans la Définition 1.9.10 on obtient une définition équivalente de la condition – opial. De plus si on remplace l'inégalité stricte ' $<$ ' dans la Définition 1.9.10 par l'inégalité large ' $\leq$ ', nous obtenons la définition de ce qu'on appelle la Condition Opial stricte (ou bien faible).*

# 2 Introduction A La Théorie de points fixes

**Définition 2.0.1.** Soient  $X$  un ensemble, et  $C$  sous-ensemble non vide de  $X$ . On dit que l'application  $T : C \rightarrow X$  admet un '**point fixe**', s'il existe  $x \in C$  tel que  $T(x) = x$ .

**Définition 2.0.2.** Soit  $X$  un espace métrique. On dit que l'application  $T : X \rightarrow X$  est '**lipschitizienne**' de constante  $k \geq 0$  si

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \quad x, y \in X.$$

On note  $K(T)$  la constante de lipschitz.

**Remarque 2.0.1.**

- Une application lipschitizienne est nécessairement continue.
- La composition de deux applications lipschitizienne est une application lipschitizienne.  
*i.e* :  $T, S : X \rightarrow X \quad K(T \circ S) \leq K(T)K(S)$ ,
- Si  $T$  est une application lipschitizienne,  $T^n$ , la composition  $n$  fois de  $T$  avec elle même est aussi lipschitizienne.  
*i.e* :  $K(T^n) \leq K^n(T)$ ,
- On dit que  $T$  est dite contractante si  $0 \leq k < 1$ .

**Définition 2.0.3.** Soient  $C$  un sous-ensemble de l'espace de Banach  $X$  et  $T : X \rightarrow X$  une application. On dit que  $T$  est une application '**non expansive**' si

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad x, y \in C.$$

## 2.1 Le principe des applications contractantes de Banach

**Théorème 2.1.1.** (Principe de contraction de Banach, 1922) [2]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, et soit  $T : X \rightarrow X$  une application contractante de constante de contraction  $k \in ]0, 1[$ . Alors :

1.  $T$  admet un unique point fixe  $\alpha \in X$ .
2.  $d(x_n, \alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.1.1 Méthode 1 de la preuve

**Preuve 2.1.1.** On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

- Unicité : Supposons, par l'absurde que  $T$  admet deux points fixes  $x$  et  $y$  tels que  $x, y \in X$  et  $x \neq y$  donc  $T(x) = x$ , et  $T(y) = y$ . Alors on a  $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$  et donc  $\frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)} = 1 > L$  ce qui contredit le fait que  $\frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)} \leq L$ . D'où l'unicité de point fixe.
- Existence : Soit  $x_0$  un point quelconque de  $X$ .  
on construit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir de  $x_0$  telle que

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = T(x_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On démontre que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

Soit  $p, q \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\leq d(x_q, x_{q-1}) + d(x_{q-1}, x_p), \\ &\leq d(x_q, x_{q-1}) + d(x_{q-1}, x_{q-2}) + d(x_{q-2}, x_p), \\ &\vdots \\ d(x_q, x_p) &\leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_{k+1}, x_k). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T(x_{k-1}), T(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k).$$

On va montrer par récurrence que

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k d(x_1, x_0) \dots \quad (2.1)$$

- *Initialisation* : Evidente pour  $k = 0$ .
- *Généralisation* : supposons que pour un certain entier  $k$  quelconque mais fixé on ait la propriété 2.1. Alors

$$\begin{aligned}
d(x_{k+1}, x_{k+2}) &= d(T(x_k), T(x_{k+1})), \\
&\leq Ld(x_k, x_{k+1}), \\
&\leq LL^k d(x_1, x_0), \\
&\leq L^{k+1} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a alors pour tout  $p, q$  tel que  $q > p$  :

$$\begin{aligned}
d(x_q, x_p) &\leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_{k+1}, x_k), \\
&\leq \sum_{k=p}^{q-1} L^k d(x_1, x_0), \\
&= d(x_1, x_0) \sum_{k=p}^{q-1} L^k.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout  $p > q$ ,

$$\begin{aligned}
d(x_q, x_p) &\leq d(x_1, x_0) \frac{1 - L^{q-p}}{1 - L} L^p, \\
&\leq d(x_1, x_0) \frac{L^p}{1 - L}.
\end{aligned}$$

On fait  $d(x_1, x_0) \frac{L^p}{1-L} < \epsilon$ . Donc

$$\begin{aligned}
L^p &< \epsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)}, \\
\log(L^p) &< \log\left(\epsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)}\right), \\
p \log(L) &< \log\left(\epsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)}\right), \\
p &> \frac{\log\left(\epsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)}\right)}{\log(L)}.
\end{aligned}$$

$\forall p, q \in \mathbb{N}, \exists n_0 = \frac{\log\left(\epsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)}\right)}{\log(L)} + 1 \in \mathbb{N}$ , tels que  $p > q > n_0$ , on a  $d(x_q, x_p) < \epsilon$ .

On en déduit alors que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy. Etant donné que  $(X, d)$  est espace complet, il en résulte que la suite  $(x_p)$  converge vers un point limite  $\alpha \in X$ . De plus on a  $T(x_p) \rightarrow T(\alpha)$  quand  $p \rightarrow \infty$  car  $T$  est continue et  $T(x_p) = x_{p+1}$ . Or  $x_{p+1} \rightarrow \alpha$  quand  $p \rightarrow \infty$ , d'où par l'unicité de la limite on a

$$T(\alpha) = \alpha$$

### 2.1.2 Méthode 2 de la preuve

**Preuve 2.1.2.** Soit  $C = \{d(x, Tx), x \in X\}$ . Posons  $a = \inf C$  et montrons que  $a = 0$ .

D'après la propriétés de la borne inférieure, on a pour un  $\epsilon > 0$ , il existe un  $x \in X$  : tel que

$$a \leq d(x, Tx) \leq a + \epsilon.$$

Par ailleurs, étant donné que  $d(Tx, T^2x) \in C$ . On obtient

$$\begin{aligned} a &\leq d(Tx, T^2x), \\ &\leq kd(x, Tx), \\ &\leq k(a + \epsilon). \end{aligned}$$

Comme  $k < 1$  et  $\epsilon \rightarrow 0$  on obtient

$$0 \leq (1 - k)a < \epsilon.$$

En faisant tendre vers zéro et en utilisant le fait que  $1 - k \neq 0$ , on obtient :

$$a = \inf\{d(x, Tx), x \in X\} = 0.$$

Maintenant, pour tout  $\epsilon > 0$ , considérons l'ensemble

$$M_\epsilon = \{x \in X : d(x, Tx) \leq \epsilon\}.$$

$\{M_\epsilon\}$  est non vide, fermé. Montrons que  $\text{diam} M_\epsilon \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Soit  $x, y \in M_\epsilon$ , on a

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) + d(Ty, y), \\ &\leq \epsilon + kd(x, y) + \epsilon, \\ &\leq 2\epsilon + kd(x, y), \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(1 - k)d(x, y) \leq 2\epsilon,$$

$$d(x, y) \leq \frac{2\epsilon}{1 - k}.$$

D'où

$$\sup d(x, y) = \text{diam}(M_\epsilon) \leq \frac{2\epsilon}{1 - k} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Puisque la famille  $\{M_\epsilon\}$  décroît quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , le théorème d'intersection de Cantor implique que  $\bigcap_{\epsilon > 0} M_\epsilon$  contient uniquement un point, noté par  $x$ . De plus  $x = Tx$ .

**Remarque 2.1.1.** Le théorème de Banach n'est pas applicable si l'une des conditions du théorème n'est pas satisfaite :

- L'espace complet
- $X$  est stable par  $T$ . ( $T(X) \subset X$ )
- $T$  est contractante.

**Exemple 2.1.1.** Soit l'application  $T$  définie sur  $X = [0, 1]$  par  $T(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

$X = [0, 1]$  un fermé dans  $\mathbb{R}$  qui est complet ceci implique que  $X = [0, 1]$  est à son tour complet. On a

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq x^2 \leq 1,$$

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2,$$

$$1 \leq \sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{2}.$$

Ce qui implique  $T(x) \in [1, \sqrt{2}] \not\subset [0, 1]$ .  $X$  n'est pas stable. Alors le théorème de Banach n'est pas applicable dans ce cas.

**Exemple 2.1.2.** Soit l'application  $T$  définie sur  $X = [0, +\infty[$  par  $T(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

$X$  est fermé dans un complet ceci implique que  $X$  est complet. Mais  $T$  n'est pas contractante, car  $\sup_{x \in [0, +\infty[} |T'(x)| = 1$ .

**Exemple 2.1.3.** Soit l'application  $T$  définie sur  $X = ]0, \frac{\pi}{4}]$  par  $T(x) = \frac{\sin x}{2}$ .

On a  $T(]0, \frac{\pi}{4}[) = ]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$  et  $\max_{x \in ]0, \frac{\pi}{4}[} |T'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ , alors  $T$  est contractante.

Mais  $X$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$  donc  $X$  n'est pas complet. Les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes satisfait.

**Théorème 2.1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compacte avec  $T : X \rightarrow X$  satisfaisant

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \text{pour } x, y \in X \text{ et } x \neq y.$$

Alors  $f$  admet un point fixe unique dans  $X$ .

**Preuve 2.1.3.** *l'unicité est facile à prouver. Pour l'existence, il suffit de remarquer que l'application  $K : x \mapsto d(x, T(x))$  est continue sur  $X$  qui est compacte alors elle atteint son minimum en un point que nous notons  $x_0 \in X$ . Nous avons  $T(x_0) = x_0$  car autrement*

$$\begin{aligned} K(T(x_0)) &= d(T(T(x_0)), T(x_0)), \\ &< d(T(x_0), x_0), \\ &= T(x_0). \end{aligned}$$

Contradiction avec  $K(x_0)$  est le minimum de  $K$  dans  $X$ .

**Théorème 2.1.3.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une application (pas nécessairement continue). Supposons que la condition suivante est vérifiée

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que si } d(x, T(x)) < \delta(\epsilon), \text{ alors } T(B(x, \epsilon)) \subseteq B(x, \epsilon); \\ \text{sinon, } B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Si pour  $u \in X$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(u), T^{n+1}(u)) = 0,$$

alors la suite  $\{T^n(u)\}$  converge vers le point fixe de  $T$ .

**Preuve 2.1.4.** Soit  $u \in X$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(u), T^{n+1}(u)) = 0$  et soit  $u_n = T^n(u)$ .

Nous affirmons que  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy.

Soit  $\epsilon > 0$ . Nous choisissons  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que

$$d(x, T(y)) < \delta(\epsilon), \quad y \in B(x, \epsilon).$$

Nous pouvons choisir  $N$  suffisamment grand tel que

$$d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\epsilon) \quad \text{pour tout } n \in N.$$

Comme,  $d(u_N, T(u_N)) < \delta(\epsilon)$ , alors (2.2) garantit que

$$T(B(u_N, \epsilon)) \subseteq B(u_N, \epsilon),$$

et donc,  $T(u_N) = u_{N+1} \in B(u_N, \epsilon)$ . Par induction, on trouve

$$T^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N, \epsilon) \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Ainsi

$$d(u_k, u_l) \leq d(u_k, u_N) + d(u_N, u_l) < 2\epsilon \quad \text{pour tout } k, l \geq N,$$

et donc  $(u_n)$  est une suite de Cauchy. De plus, il existe  $y \in X$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = y$ .

Nous affirmons maintenant que  $y$  est un point fixe de  $T$ . Supposons qu'il ne l'est pas alors

$$d(y, T(y)) = \gamma > 0$$

Nous pouvons choisir  $u_n \in B(y, \frac{\gamma}{3})$  fixe tel que

$$d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\frac{\gamma}{3}).$$

2.2 entraîne que

$$T(B(u_n, \frac{\gamma}{3})) \subseteq B(u_n, \frac{\gamma}{3}),$$

et par conséquent  $T(y) \in B(u_n, \frac{\gamma}{3})$ . C'est une contradiction puisque

$$d(T(y), u_n) \geq d(T(y), y) - d(u_n, y) > \gamma - \frac{\gamma}{3} = \frac{2\gamma}{3}.$$

Ainsi  $d(y, T(y)) = 0 \Rightarrow T(y) = y$ .

**Théorème 2.1.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit

$$d(T(x), T(y)) < \phi(d(x, y)) \quad \text{pour tout } x, y \in X;$$

où  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction monotone, (pas nécessairement continue) avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Alors  $T$  admet un unique point fixe  $u \in X$  avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = u \quad \text{pour chaque } x \in X.$$

**Preuve 2.1.5.**

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \phi^n(d(x, T(x))) \quad \text{pour } x \in X,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = 0 \quad \text{pour chaque } x \in X.$$

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $\delta(\epsilon) = \epsilon - \phi(\epsilon)$ .

Si  $d(x, T(x)) < \delta(\epsilon)$ , alors pour tout  $z \in B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$  nous avons

$$\begin{aligned} d(T(z), x) &\leq d(T(z), T(x)) + d(T(x), x); \\ &\leq \phi(d(z, x)) + d(T(x), x); \\ &< \phi(d(z, x)) + \delta(\epsilon); \\ &\leq \phi(\epsilon) + (\epsilon - \phi(\epsilon)); \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

et donc  $T(z) \in B(x, \epsilon)$ . Le Théorème 2.1.3 entraîne que  $f$  admet un point fixe  $u$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = u$  pour chaque  $x \in X$ .

Enfin, il est facile de voir que  $T$  n'a qu'un seul point fixe en  $X$ .

**Théorème 2.1.5.** Soit  $(X, d)$  un espace quasi-b-métrique 0 – complet avec coefficient  $s \geq 1$ , et soit une application  $T : X \rightarrow X$  tel que

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(b(x, y)). \quad (2.3)$$

pour tout  $x, y \in X$ , avec  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  une application continue tel que

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad t = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) < t \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} s^n \varphi^n(t)$  converge pour tout  $t > 0$ , avec  $\varphi^n$  est la  $n^{\text{ième}}$  itération de  $\varphi$ , alors  $T$  a un unique point fixe.

De plus, pour chaque  $x_0 \in X$  la suite itérative  $\{T^n(x_0)\}$  converge vers un point fixe.

**Preuve 2.1.6.** Soit  $x_0 \in X$  d'après théorème 2.1.5, on a donc

$$d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) \leq \varphi d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \cdots \leq \varphi^n(d(x_0, T(x_0))), \quad n > 1. \quad (2.4)$$

et

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \varphi(d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) \leq \cdots \leq \varphi^n(d(T(x_0), x_0)), \quad n > 1. \quad (2.5)$$

Si  $(d(x_0, T(x_0)) = 0)$  ou  $(d(T(x_0), x_0) = 0)$ , alors  $x_0 = T(x_0)$ , ceci implique que  $x_0$  est une point fixe de  $T$ .

On suppose que  $d(x_0, T(x_0)) > 0$  et  $d(T(x_0), x_0) > 0$ .

Montrons que  $\{T^n(x_0)\}$  est une suite 0 - Cauchy.

pour n'importe quel entier  $r \in \mathbb{Z}^+$ , et la propriétés  $d(x, z) \leq s(d(x, y) + d(y, z))$  implique que

$$d(T^n(x_0), T^{n+r}(x_0)) \leq s(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + d(T^{n+1}(x_0), T^{n+r}(x_0))),$$

$$\leq s(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0))) + s^2(d(T^{n+1}(x_0), T^{n+2}(x_0)) + d(T^{n+2}(x_0), T^{n+r}(x_0))),$$

$$\leq s(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0))) + s^2(d(T^{n+1}(x_0), T^{n+2}(x_0))) + s^3(d(T^{n+2}(x_0), T^{n+3}(x_0)) + d(T^{n+3}(x_0), T^{n+r}(x_0))),$$

⋮

$$\leq s(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0))) + s^2(d(T^{n+1}(x_0), T^{n+2}(x_0))) + s^3(d(T^{n+2}(x_0), T^{n+3}(x_0))) \dots + s^{r-1}(d(T^{n+r-2}(x_0), T^{n+r-1}(x_0)) + d(T^{n+r-1}(x_0), T^{n+r}(x_0))),$$

$$\leq s(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0))) + s^2(d(T^{n+1}(x_0), T^{n+2}(x_0))) + s^3(d(T^{n+2}(x_0), T^{n+3}(x_0))) \dots + s^{r-1}(d(T^{n+r-2}(x_0), T^{n+r-1}(x_0))) + s^r d(T^{n+r-1}(x_0), T^{n+r}(x_0))), \quad (2.6)$$

L'équation (2.4) et (2.6) donne

$$\begin{aligned}
d(T^n(x_0), T^{n+r}(x_0)) &\leq s\varphi^n(d(x_0, T(x_0))) + s^2\varphi^{n+1}(d(x_0, T(x_0))) \\
&\quad + s^3\varphi^{n+2}(d(x_0, T(x_0))) + \dots \\
&\quad + s^{r-1}\varphi^{n+r-2}(d(x_0, T(x_0))) + s^r\varphi^{n+r-1}(d(x_0, T(x_0))), \\
&\leq s^n\varphi^n(d(x_0, T(x_0))) + s^{n+1}\varphi^{n+1}(d(x_0, T(x_0))) \\
&\quad + s^{n+2}\varphi^{n+2}(d(x_0, T(x_0))) + \dots \\
&\quad + s^{n+r-2}\varphi^{n+r-2}(d(x_0, T(x_0))) + s^{n+r-1}\varphi^{n+r-1}(d(x_0, T(x_0))), \\
&= \sum_{k=n}^{n+r-1} s^k\varphi^k(d(x_0, T(x_0))).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} s^n\varphi^n(t)$  converge pour tout  $t > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x_0), T^{n+r}(x_0)) = 0$  ceci donne pour  $m > n$ ,

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(T^n(x_0), T^m(x_0)) = 0. \tag{2.8}$$

De plus, on applique (2.5), nous procédons de la même manière on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^{n+r}(x_0), T^n(x_0)) = 0$ , ceci donne pour  $m > n$ ,

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(T^m(x_0), T^n(x_0)) = 0. \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9), on obtient que  $\{T^n(x_0)\}$  est une suite 0 - Cauchy. Comme  $(X, d)$  est 0 - Complet, alors la suite  $\{T^n(x_0)\}$  converge vers le point  $z \in X$ , tel que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x_0), z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} d(z, T^n(x_0)) = d(z, z) = 0, \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(T^n(x_0), T^m(x_0)), \\
&= \lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(T^n(x_0), T^m(x_0)).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Montrons que  $z$  est le point fixe de  $T$ .

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
d(z, Tz) &\leq s(d(z, T^{n+1}(x_0)) + d(T^{n+1}(x_0), Tz)), \\
&\leq s(d(z, T^{n+1}(x_0)) + d(T(T^n(x_0)), Tz)), \\
&\leq s(d(z, T^{n+1}(x_0))) + s\varphi(d(T^n(x_0), z)).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Utilisant (2.10) dans l'inégalité précédente, on obtient  $d(z, Tz) = 0 \Rightarrow Tz = z$ .

Comme  $z$  est le point fixe de  $T$ . Ensuite, on montre que  $z$  est l'unique point fixe de  $T$ .

On suppose que  $u$  est aussi le point fixe de  $T$ , Par la suite nous prétendons que  $d(z, u) = 0$ . Supposons que ce ne soit pas le cas, alors

$$d(z, u) = d(Tz, Tu) \leq \varphi(d(z, u)) < d(z, u). \quad (2.12)$$

C'est une contradiction, comme  $d(z, u) = 0$ , ceci implique que  $z = u$ , par conséquent  $T$  admet un unique point fixe.

## 2.2 La version locale du théorème de Banach

le théorème d'inversion locale est une application du théorème de Banach de point fixe. Il se peut que  $T$  ne soit pas une contraction sur tout l'espace  $X$  mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

**Théorème 2.2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad \text{où } x_0 \in X \text{ et } r > 0.$$

Supposons que  $T : B(x_0, r) \rightarrow X$  est contractante de constante de contraction  $k$ , avec

$$d(T(x_0), x_0) < (1 - k)r.$$

Alors  $T$  admet un unique point fixe dans  $B(x_0, r)$ .

**Preuve 2.2.1.** Il existe  $r_0$  avec  $0 \leq r_0 \leq r$ , tel que  $d(T(x_0), x_0) < (1 - k)r_0$ .

On Montre que  $T : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B(x_0, r_0)}$ .

Soit  $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$  alors

$$\begin{aligned} d(T(x_0), x_0) &\leq d(T(x), T(x_0)) + d(T(x_0), x_0), \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0, \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0, \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application  $T : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B(x_0, r_0)}$  est contractante.

De plus,  $\overline{B(x_0, r_0)}$  est un espace complet. Par conséquent, l'application du théorème de contraction de Banach à  $T$  admet un unique point fixe dans  $B(x_0, r)$ .

**Théorème 2.2.2.** Soit  $\overline{B_r} = \overline{B(0, r)}$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r > 0$ , et  $E$  un espace de Banach. On définit l'application contractante  $f : \overline{B_r} \rightarrow E$ . Tel que  $f(\partial\overline{B_r}) \subseteq \overline{B_r}$ .

Alors  $f$  a un unique point fixe dans  $\overline{B_r}$ .

**Preuve 2.2.2.** On utilisant l'application

$$G(x) = \frac{x + f(x)}{2}$$

Nous montrons que  $G : \overline{B_r} \rightarrow \overline{B_r}$ . Soit

$$x^* = r \frac{x}{\|x\|} \quad \text{où } x \in \overline{B_r} \quad \text{et } x \neq 0.$$

si  $x \in \overline{B_r}$  et  $x \neq 0$ . alors

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x^*)\| &\leq k\|x - x^*\|, \\ &\leq k\left\|\frac{x}{\|x\|}(\|x\| - r)\right\|, \\ &= k(r - \|x\|). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\leq \|f(x^*)\| + \|f(x) - f(x^*)\|, \\ &\leq r + k(r - \|x\|), \\ &\leq 2r - \|x\|. \end{aligned}$$

Par suite, pour  $x \in \overline{B_r}$  et  $x \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} \|G(x)\| &= \left\|\frac{x + f(x)}{2}\right\|, \\ &\leq \frac{\|x\| + \|f(x)\|}{2}, \\ &\leq r. \end{aligned}$$

De plus, Par continuité nous avons aussi

$$\|G(0)\| \leq r.$$

et par conséquent  $G : \overline{B_r} \rightarrow \overline{B_r}$ .

Montrons que  $G$  est contractante.

Soit  $x, y \in \overline{B_r}$

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\| &= \left\| \frac{x + f(x)}{2} - \frac{y + f(y)}{2} \right\|, \\ &\leq \frac{1}{2} \|(x - y) + (f(x) - f(y))\|, \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - y\| + \frac{1}{2} \|f(x) - f(y)\|, \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - y\| + \frac{1}{2} k \|x - y\|, \\ &\leq \frac{1}{2} (1 + k) \|x - y\|.\end{aligned}$$

avec

$$k < 1 \quad 1 + k < 2 \quad \frac{1 + k}{2} < 1.$$

Donc  $G$  est une application contractante.

Par le théorème du point fixe de Banach l'application  $G$  admet un unique point fixe  $x \in \overline{B_r}$

$$G(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + f(x)}{2} = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x.$$

D'où l'unicité de point fixe.

---

## Théorèmes de points fixes du type Browder et Kirk

Dans ce chapitre, on va présenter trois théorèmes de points fixes pour des applications "non-expansive".

Le premier théorème est le Théorème de *Browder* introduit en 1965 par cet auteur, qui nous donne un résultat d'existence pour cette classe d'application dans des espace de Banach uniformément convexe.

### 3.1 Théorèmes de points fixes du type *Browder*

Avant de prouver le théorème de *Browder*, nous avons besoin d'énoncer les résultats suivants.

**Théorème 3.1.1.** [20] *Dans un espace uniformément convexe, toute suite décroissante  $(C_n)$  de parties non vides, convexes, fermées et bornées admet une intersection non vide.*

**Théorème 3.1.2.** (Milman-pettis). [6] *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

**Preuve 3.1.1.** *Pour la preuve voir (Brézis pp 51 [6]).*

**Lemme 3.1.1.** [2] *Soit  $C$  un sous ensemble faiblement compacte d'un espace de Banach  $X$ . Alors  $C$  est borné.*

**Théorème 3.1.3.** [2] *Soit  $X$  un espace de Banach. Alors  $X$  est réflexif si et seulement si chaque sous-ensemble fermé, borné, convexe de  $X$  est faiblement compact.*

**Théorème 3.1.4.** [2] *Soit  $C$  un sous-ensemble d'un espace de Banach réflexif. Alors*

$$\text{C'est faiblement compact} \quad \Leftrightarrow \quad \text{C'est borné.}$$

**Théorème 3.1.5.** (Browder). [2] Soient  $X$  un espace de Banach uniformément convexe et  $C$  un sous ensemble non vide ,fermé ,convexe ,borné de  $X$ . Alors tout application  $T : C \rightarrow C$  non expansive a un point fixe dans  $C$ .

**Preuve 3.1.2.** Soit  $\Omega$  une famille de sous-ensembles non vides fermés convexes de  $C$ , qui sont invariantes par  $T$ , **i.e.** pour tout  $C_1 \in \Omega$ ,  $T(C_1) \subset C_1$ .

$\Omega$  est non vide puisque  $C \in \Omega$ .

On définit une relation d'ordre (partiel) ( $\leq$ ) sur  $\Omega$  tels que  $C_1 \leq C_2$  si  $C_1 \subset C_2$ .

Soit  $\mathcal{C} = \{C_\alpha \subset \Omega : \alpha \in I\}$ .

Puisque  $C_\alpha$  est convexe pour tout  $\alpha \in I$ , il s'ensuit que  $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$  est aussi convexe.

Puisque  $C_\alpha$  est fermé pour tout  $\alpha \in I$ , il s'ensuit que  $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$  est aussi fermé.

Donc  $C' = \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$  est un sous ensemble fermé, convexe de  $C$ .

Montrons que  $C'$  est invariante par  $T$ .

Constatons que :

$$\begin{aligned} T(C') &= T\left(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha\right) \\ &= \bigcap_{\alpha \in I} T(C_\alpha) \quad \text{avec} \quad (T(C_\alpha) = C_\alpha) \\ &= \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \\ &= C' \end{aligned}$$

Donc  $C'$  est invariante par  $T$ .

Par conséquent,  $C'$  a la propriété d'intersection finie (voir théorème 3.1.1.)  $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$ .

par ailleurs, d'après lemme de Zorn (1.8.1)  $\Omega$  a un élément minimal  $C_0$ .

On montre que  $C_0$  est l'enveloppe convexe fermée de  $T(C_0)$ .

Soit  $C_1$  l'enveloppe convexe fermée de  $T(C_0)$ . Comme  $T(C_0) \subset C_0$ , il s'ensuit que  $C_1$  est contenue dans l'enveloppe convexe fermée de  $C_0$ , qui est  $C_0$ .

Par conséquent,  $C_1 \subset C_0$ .

On montre que  $C_1$  est invariant par  $T$ .

On a

$$C_1 \subset C_0 \quad \text{et} \quad T(C_0) \subset C_1,$$

on obtient que

$$T(C_1) \subset T(C_0) \subset C_1.$$

D'où

$$T(C_1) \subset C_1.$$

On a  $C_1 \neq \emptyset$ . (Car  $T(C_0) \subset C_1$ ).

Donc  $C_1 \in \Omega$ . Par la minimalité de  $C_0$  dans  $\Omega$ , et le fait que  $C_1 \subset C_0$   
Ceci implique que

$$C_1 = C_0.$$

Montrons que  $C_0$  n'a qu'un seul élément (singleton).

Par contradiction, nous prouvons que  $C_0$  a au moins deux éléments.  
(prouvons que  $T$  a un point fixe).

Soit  $d = \text{diam}(C_0)$ . Pour deux éléments distincts  $x_1, x_2 \in C_0$  tels que  $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{d}{2}$ . Soit  $x = \frac{(x_1 - x_2)}{2}$ . (point milieu du segment unissant les deux  $x_1$  et  $x_2$ ).

Puisque  $C_0$  est convexe, alors  $x \in C_0$ . Pour  $y \in C_0$ ,  $x - y$  est le point milieu du segment unissant les deux points  $x_1 - y$  et  $x_2 - y$  car

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 - y) + (x_2 - y)}{2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)}{2} - y. \\ &= x - y. \end{aligned}$$

De plus

$$\|x_1 - y\| \leq d$$

et

$$\|x_2 - y\| \leq d.$$

Comme  $X$  est un espace uniformément convexe, alors il existe une constante  $\delta \geq 0$  tels que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \frac{(x_1 - y) + (x_2 - y)}{2} \\ &\leq (1 - \delta)d \\ &< d, \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} & \| (x_1 - y) + (x_2 - y) \| = \\ &= \|x_1 - x_2\| \\ &\geq \frac{d}{2}. (\text{car } 0 < \delta < 1) \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad \left\| \frac{(x_1 - y)}{d} \right\| \leq 1, \left\| \frac{(x_2 - y)}{d} \right\| \leq 1$$

et

$$\left\| \frac{(x_1 - y)}{d} - \frac{(x_2 - y)}{d} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

Soit  $d' = (1 - \delta)d < d = \text{diam}(C_0)$

Soit  $C_2 = \bigcap_{y \in C_0} \{u \in C_0 : \|u - y\| \leq d'\}$ .

L'ensemble  $C_2$  est un sous ensemble fermé, convexe de  $C_0$  (puisque  $C_0$  c'est un ensemble d'intersection fermées, convexes, non vides, et  $x$  est un élément de  $C_2$ ).

alors  $C_2 \subset C_0$  et  $C_2$  est non vide car  $x \in C_2$ .

On montre que  $C_2$  est invariante par  $T$  ( $T(C_2) \subset C_2$ ).

Soit  $z \in C_2$ , et soit  $y \in C_0$ . Comme  $\overline{\text{co}}(T(C_0)) = C_0$ , pour tout  $\epsilon > 0$  nous pouvons trouver une combinaison linéaire convexe  $\sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)$  (alors que  $\{x_i\} \subset C_0$ ) tels que

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) \right\| < \epsilon, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Ce qui donne  $\|Tz - y\|$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| Tz - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) - y \right\| \\ &< \left\| Tz - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) \right\| + \epsilon \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (Tz - T(x_i)) \right\| + \epsilon \quad (\text{car } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|Tz - T(x_i)\| + \epsilon \quad (\text{car } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1). \end{aligned}$$

Et comme  $T$  est une application non expansive, on a

$$\|Tz - Tx_i\| \leq \|z - x_i\| \leq d' \quad (z \in C_2, x_i \in C_0, 1 \leq i \leq n).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Tz - y\| &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i d' + \epsilon \\ &= d' \sum_{i=1}^n \lambda_i + \epsilon \\ &= d' + \epsilon \quad (\text{car } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\|Tz - y\| \leq d', \forall y \in C_0.$$

Alors  $Tz \in C_2$ .

$C_2$  est invariante par  $T$ . Donc  $C_2 \subset C_0$ .

Cependant, cela cause une contradiction avec la minimalité de  $C_0$ .

Par conséquent,  $C_0 = \{x_0\}$  pour  $x_0 \in X$ . Comme  $T(C_0) = C_0$ , il s'en suit que  $T(x_0) = x_0$ .

## 3.2 Théorèmes de points fixes du type *Kirk*

Le deuxième résultat qu'on va présenter dans cette section consiste en le Théorème de *Kirk* qui nous assure l'existence de points fixes pour des application non expansive dans des espace de Banach dont la structure est normale. Avant de prouver le théorème de *kirk* on a besoin de prouver ces deux lemmes.

**Remarque 3.2.1** (Notation). Soit  $C$  un sous-ensemble non vide, borné de l'espace de Banach  $X$ . On adopte les notations suivantes :

1.  $r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}, x \in C$ ;
2.  $r(C) = \inf\{r_x(C) : x \in C\}$ ;
3.  $\mathcal{A}(C) = \{x \in C : r_x(C) = r(C)\}$ ;

**Lemme 3.2.1.** (Proposition 3.3.14, [2]) Soit  $C$  un sous-ensemble faiblement compacte, convexe de  $X$  de Banach. Alors  $\mathcal{A}(C)$  est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe de  $C$ .

**Preuve 3.2.1.** Soit  $x \in C$  et posons  $C_n(x) = \{y \in C : \|x - y\| \leq r(C) + \frac{1}{n}\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  un sous-ensemble de  $C$ . Il est facile à vérifier que  $C_n(x)$  est non vide, fermé et convexe de  $C$ . Maintenant considérons l'ensemble  $C_n = \bigcap_{x \in C} C_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  qui est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de  $C$ . Par ailleurs, on a  $\{C_n\}$  est une suite décroissante, donc  $C_{n+1} \subset C_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Etant donné  $C$  est faiblement compacte, alors  $\mathcal{A}(C) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$  (voir le Théorème 3.1.1).

**Lemme 3.2.2.** (Proposition 3.3.15, [2]) Soient  $X$  un espace de Banach et  $C$  un sous-ensemble faiblement compacte, convexe de  $X$ , avec  $\text{diam}(C) > 0$ . Supposant que  $C$  a une structure normale. Alors

$$\text{daim}(\mathcal{A}(C)) < \text{daim}(C).$$

**Preuve 3.2.2.** Comme  $C$  a une structure normale, Alors il existe au moins un point non diamétral  $y \in C$ ,

$$\text{c'est à dire , } \quad r_y(C) = \sup\{\|y - x\| : y \in C\} < \text{daim}(C).$$

Pour deux points quelconques  $u, v \in \mathcal{A}(C)$ . On a  $\|u - v\| \leq r_u(C) = r(C)$ . Par conséquent,

$$\|u - v\| \leq \sup\{\|u - v\| : u, v \in \mathcal{A}(C)\} \leq r(C) \leq r_y(C) < \text{daim}(C).$$

ce qui donne

$$\text{daim}(\mathcal{A}(C)) < \text{daim}(C).$$

**Théorème 3.2.1.** (Théorème de Kirk, 1965) Soient  $X$  un espace de Banach dont la structure est normale et  $C$  un sous ensemble faiblement compacte, convexe de  $X$ . Alors toute application  $T : C \rightarrow C$  non expansive a un point fixe.

Preuve de Théorème du Kirk :[2]

**Preuve 3.2.3.** Soit  $\mathcal{F} = \{F_\alpha \subset C, \alpha \in I\}$  une collection de tous les sous-ensembles non vides convexes fermés de  $C$  tels que  $T(F_\alpha) \subset F_\alpha, \alpha \in I$ .

Comme  $C \in \mathcal{F}$ , il s'en suit que  $\mathcal{F}$  est non vide et peut être muni d'une relation d'ordre (partiel)  $(\mathcal{F}, \subset)$ . Puisque  $C$  est faiblement compacte (c'est à dire réflexif, voir chapitre 1 Théorème 1.7.1), alors d'après le Théorème de Eberlein – Smulian (voir chapitre 1 3.1.1), toute suite bornée de  $\mathcal{F}$  doit avoir une intersection non vide.

par ailleurs, d'après lemme de Zorn (1.8.1)  $\mathcal{F}$  a un élément minimal  $M$ . Notre Objectif est de montrer que  $M$  n'a qu'un seul élément (singleton).

Car étant donné que  $M = \{x\}$  est invariante par  $T$  ( $T(M) \subset M$ ). alors, on obtient que  $Tx = x$

Par l'absurde, supposons que  $M$  a au moins deux éléments. (prouvons que  $T$  a un point fixe). Suit à ca, on considère  $\mathcal{A}(M)$  (centre asymptotique) et on trouvera que  $\mathcal{A}(M) \subset M$  un élément minimale ce qui contredit le fait que c'est le plus petit des éléments .

Soit  $x_0 \in \mathcal{A}(M)$  et montrons que  $Tx_0 \in \mathcal{A}(M)$ . Alors pour  $x \in M$  on a par définition

$$\|x_0 - x\| \leq r_{x_0}(M) = r(M),$$

Par ailleurs, étant donné que  $T$  est non expansive on a

$$\|Tx_0 - Tx\| \leq \|x_0 - x\| \leq r_{x_0}(M) = r(M),$$

**i.e.**  $Tx$  est contenue dans la boule fermé  $\bar{B}$  de centre  $Tx_0$  et de rayon  $r(M)$ .

Puisque  $T(M) \subset M$  et  $T$  est non expansive, on trouve que  $T(M \cap \overline{B}) \subset M \cap \overline{B}$ . Par la minimalité de  $M$ ,

$$M = M \cap \overline{B}.$$

Évidemment,  $\overline{B}$  est un sous ensemble fermé, convexe, et non vide. Ainsi si  $u \in M$ , Alors  $\|u - Tx_0\| \leq r(M)$ , ceci implique que

$$r_{Tx_0}(M) \leq r(M).$$

Comme  $r_{Tx_0} \in M$ , il s'ensuit que

$$r(M) \leq r_{Tx_0}(M),$$

et donc

$$r_{Tx_0}(M) = r(M).$$

D'où

$$Tx_0 \in \mathcal{A}(M)$$

*i.e.*  $T(\mathcal{A}(M)) \subset \mathcal{A}(M)$ .

Puisque  $X$  est faiblement compacte (c-à-d réflexif, voir chapitre 1, Théorème 1.7.1),  $\mathcal{A}(M)$  est non vide, fermé, convexe par lemme 3.2.1. et donc un élément de  $\mathcal{F}$ .

Si  $\text{diam}(M) > 0$ , alors  $M$  a au moins deux éléments et  $M$  a la structure normale. Donc par lemme 3.2.2, on obtient

$$\text{diam}(\mathcal{A}(M)) < \text{diam}(M)$$

ceci implique que

$$\mathcal{A}(M) \subseteq M.$$

Comme  $T(\mathcal{A}(M)) \subset \mathcal{A}(M)$ , c'est une contradiction avec la minimalité de  $M$ .

D'où  $\text{diam}(M) = 0$  est  $M$  est un singleton.

Par conséquent,  $T$  a un point fixe dans  $C$ .

### 3.3 Théorèmes de points fixes avec la condition Opial

Dans cette section nous énonçons un troisième résultat d'existence pour des applications non expansives mais et ceci sous la condition dite "Opial", une condition qui a été introduite vers la fin des années soixante. Avant de prouver le théorème de points fixes avec la condition *Opial* on a besoin de prouver ces deux lemmes.

**Lemme 3.3.1.** Soit  $C$  un sous ensemble non vide convexe, fermé, borné de  $X$  de Banach et  $T : C \rightarrow C$  une application nonexpansive. Alors il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $C$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

**Preuve 3.3.1.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'application  $T_n : C \rightarrow C$  par

$$T_n x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx + \frac{1}{n}, \quad x \in C.$$

Notre objectif est de montrer que  $T_n$  est contractante et que  $x_n$  est le point fixe unique dans  $C$ .

— Montrons que  $T_n$  est contractante.

$$\begin{aligned} T_n x &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx + \frac{1}{n}. \\ \|T_n x - T_n y\| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)Ty + \frac{1}{n} \right\|, \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|, \quad \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1\right). \end{aligned}$$

$T_n$  est contractante, alors d'après le théorème de Banach, pour tout  $n$  fixé  $T_n$  admet un point fixe.

— Montrons que  $T$  admet une suite approché  $x_n$  dans  $C$ .  
tel que

$$x_n = T_n x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx_n + \frac{1}{n}.$$

En effet, on

$$\begin{aligned} \|x_n - Tx_n\| &= \left\| -\frac{1}{n}Tx_n \right\|, \\ &\leq \frac{1}{n}\|Tx_n\|, \\ &\leq \frac{M}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quand } (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $x_n$  est la suite approché de  $T$  dans  $C$ .

**Définition 3.3.1.** Soit  $C$  un sous ensemble non vide de  $X$  de Banach et  $T : C \rightarrow X$  une application. Alors  $T$  est dite semi-fermé à  $v \in X$  si pour tout suite  $\{x_n\}$  dans  $C$  alors l'implication suivante s'applique :

$$x_n \rightarrow u \in C \quad \text{et} \quad Tx_n \rightarrow v \quad \text{implique} \quad Tu = v.$$

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $X$  un espace de Banach qui satisfait la condition Opial,  $C$  un sous ensemble faiblement compacte de  $X$ , et  $T : C \rightarrow X$  une application non expansive. Alors l'application  $I - T$  est semi-fermé.*

**Preuve 3.3.2.** *Soit  $\{x_n\}$  une suite dans  $C$  tel que*

$$x_n \rightharpoonup x \in C.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - T)x_n - y\| = 0 \quad \text{pour certaine } y \in X.$$

Montrons que  $(I - T)x = y$ .

constatons que

$$\|x_n - Tx - y\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|Tx_n - Tx\|,$$

ce qui implique que

$$\liminf_{n \in \infty} \|x_n - Tx - y\| \leq \liminf_{n \in \infty} \|x_n - x\|.$$

Par la Condition Opial, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (Tx + y)\|,$$

C'est une contradiction. Par conséquent,  $(I - T)x = y$ .

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $X$  un espace de Banach réflexif qui satisfait la condition Opial,  $C$  un sous ensemble non vide, convexe de  $X$ , et  $T : C \rightarrow X$  une application non expansive. Alors  $I - T$  est semi-fermé.*

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $X$  un espace de Banach réflexif qui satisfait la condition Opial. Soit  $C$  un sous ensemble fermé, convexe, borné de  $X$  et  $T : C \rightarrow C$  une application non expansive. Alors  $T$  a un point fixe dans  $C$ .*

**Preuve 3.3.3.** *Notre objectif est de montrer que  $x$  est un point fixe de  $T$ .*

D'après lemme (3.3.1), il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $C$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \quad (3.1)$$

Etant donné que l'espace de Banach  $X$  est réflexif par hypothèse, il existe une sous suite  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  tel que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \in C. \quad (3.2)$$

Par ailleurs, le lemme (3.3.2), montre que  $I - T$  est semi-fermé en zéro, ce qui veut dire qu'on a

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \in C \quad \text{et} \quad x_{n_k} - Tx_{n_k} \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

Suite à ca, on trouvera que

$$x - Tx = 0.$$

Par conséquent,  $x$  est le point fixe de  $T$ .

# 4 Exemple d'Applications

## 4.1 Application au principe de contraction de Banach

Soit  $f$  une fonction continue à valeur réelle définie sur  $[a, b] \times [c, d]$ . La résolution du problème de Cauchy à valeur initiale  $y_0$  consiste à trouver une fonction continue différentiable par rapport à  $y$  en  $[a, b]$  satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.1)$$

On considère l'espace de *Banach*  $C[a, b]$  des fonctions continues à valeur réelle avec la norme suprême définie par

$$\|y\| = \sup\{|y(x)| : x \in [a, b]\}.$$

On intègre (4.1), on obtient l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4.2)$$

Le problème (4.1) est équivalent à l'équation de l'intégrale (4.2).

Nous définissons l'opérateur intégral  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  par

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Ainsi, une solution du problème de la valeur initiale de *Cauchy* (4.1) correspond à un point fixe de  $T$ . On peut facilement vérifier que si  $T$  est contractante, alors le problème (4.1) a une solution unique.

Maintenant notre but est d'imposer certaines conditions à  $f$  sous lesquelles l'opérateur intégral  $T$  est Lipschitzien avec  $K(T) < 1$ .

**Théorème 4.1.1.** Soit  $f(x, y)$  une fonction continue sur  $D_f = [a, b] \times [c, d]$  tel que  $f$  est Lipschitzienne par rapport à  $y$ , i.e.

Il existe  $L > 0$  tel que  $|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \forall u, v \in [c, d]$  est  $\forall x \in [a, b]$ .

Supposez que  $(x_0, y_0) \in \text{int}(D_f)$ .

Alors, pour  $h > 0$  suffisamment petit, il existe une solution unique au problème (4.1).

**Preuve 4.1.1.** Soit  $M = \sup\{|f(x, y)| : x, y \in D_f\}$  et choisissez  $h > 0$  tel que  $Lh < 1$  et  $[x_0 - h, x_0 + h] \subseteq [a, b]$ .

Fixons

$$C := \{y \in C[x_0 - h, x_0 + h] : |y(x) - y_0| \leq Mh\}.$$

Alors  $C$  est un sous-ensemble fermé de l'espace métrique complet  $C[x_0 - h, x_0 + h]$  et donc  $C$  est complet. notons que  $T : C \rightarrow C$  est une application contractante. En effet, pour  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  et deux fonctions continues  $y_1, y_2 \in C$ , on a

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(x, y_1) - f(x, y_2) dt \right\|, \\ &\leq |x - x_0| \sup_{s \in [x_0 - h, x_0 + h]} L \|y_1(s) - y_2(s)\|, \\ &\leq Lh \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $T$  a un point fixe unique, ce qui implique que le problème (4.1) a une solution unique.

### 4.1.1 Equation intégrale de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm pour une fonction inconnue  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (-\infty < a < b < +\infty)$  :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t) dt. \quad (4.3)$$

où

$k$  est une fonction continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ .

où

$f$  est fonction continue sur  $[a, b]$ .

On considère l'espace de *Banach*  $C[a, b]$ , espace des fonctions continues à valeur réelle avec la norme suprême définie par

$$\|y\| = \sup\{|y(x)| : x \in [a, b]\}.$$

et on définit un opérateur  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  par

$$Ty(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt. \quad (4.4)$$

Ainsi, une solution de l'équation intégrale de Fredholm (4.3) est un point fixe de  $T$ .

Nous imposons maintenant une restriction sur le nombre réel  $\lambda$  de sorte que  $T$  devienne une contraction.

**Théorème 4.1.2.** *Soit  $K(x, t)$  une fonction continue sur  $[a, b] \times [a, b]$  avec  $M = \sup\{|k(x, t)| : x, t \in [a, b]\}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , et  $\lambda$  un nombre réel tel que  $M(a - b)|\lambda| < 1$ . Alors l'équation intégrale de Fredholm (4.3) a une solution unique.*

**Preuve 4.1.2.** *Il suffit de montrer que l'application  $T$  définie par (4.4) est une contraction. Pour deux fonctions continues  $y_1, y_2 \in C[a, b]$ , nous avons*

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\| &= \sup_{x \in [a, b]} |\lambda| \left| \int_a^b k(x, t)[y_1(t) - y_2(t)]dt \right|, \\ &\leq |\lambda| \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, t)||y_1(t) - y_2(t)|dt, \\ &\leq |\lambda|M \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |y_1(t) - y_2(t)|dt, \\ &\leq |\lambda|M \|y_1 - y_2\| \int_a^b dt. \end{aligned}$$

## 4.1.2 Equation intégrale de Volterra

**Exemple 4.1.1.** [16]

*Considérons l'équation intégrale de Volterra*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)f(t)dt + g(x),$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $k(x, t)$  est continue sur l'intervalle  $[a, b] \times [a, b]$ . On considère l'espace métrique  $C[a, b]$  des fonctions continues à valeur réelle dans  $[a, b]$  et on considère l'application

$$T : C[a, b] \rightarrow C[a, b];$$

$$f \mapsto (Tf)(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)f(t)dt + g(x).$$

Pour  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}[a, b]$ , On peut montrer par récurrence que

$$d(T^n f_1, T^n f_2) \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(f_1, f_2),$$

où  $M = \max\{|k(x, t)| : (x, t) \in [a, b] \times [a, b]\}$ .

On montre que l'équation admet une unique solution  $f(x)$

Nous savons que  $\mathcal{C}[a, b]$  est un espace métrique complet.

$$d(f_1, f_2) = \max\{|f_1(x) - f_2(x)| : x \in [a, b]\}, \quad \text{pour tout } f_1, f_2 \in \mathcal{C}[a, b].$$

Puisqu'on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $|\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \in (0, 1)$  pour tout  $n \geq N$ , il s'en suit que  $T^n$  c'est une application contractante pour tout  $n \geq N$ .

C'est la raison pour laquelle, pour tout  $n \geq N$ ,  $T^n$  a un point fixe, noté  $g_n$ .

Donc  $T^n g_n = g_n$  pour tout  $n \geq N$ . D'où  $T^{n+1} g_{n+1} = g_{n+1}$  pour tout  $n \geq N$ .

$$\text{Or } T^{n+1} g_n = T(T^n g_n) = T g_n.$$

Par conséquent  $T^n(T g_n = T g_n)$  pour tout  $n \geq N$ . Par l'unicité du point fixe pour  $T^n$ , nous avons que  $T g_n = g_n$ .

Il s'en suit que  $T^{n+1} g_n = T^n(T g_n) = T^n g_n = T g_n$ , et donc  $g_{n+1} = g_n$  pour tout  $n \geq N$ , **i.e.**

tous  $T^n$  avec  $n \geq N$ , ont le même point fixe, noté  $f' \in \mathcal{C}[a, b]$  avec  $T f' = f'$ .

Observez que

$$\begin{aligned} d(T f', f') &= d(T^n(T f'), T^n f') \\ &\leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(T f', f'). \end{aligned}$$

$\forall n \geq N$ . Fait tendre  $n \rightarrow \infty$  et en rappelant que  $0 \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \leq 1$ . Il s'en suit que  $d(T f', f') = 0$  donc  $T f' = f'$ .

Ce qui prouve que l'équation intégrale de Volterra

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)f(t)dt + g(x).$$

a une solution unique sur  $\mathcal{C}[a, b]$ .

## 4.2 Application du théorème de Browder Göhde Kirk

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe, et soit  $f$  un élément de  $X$ , et  $T : X \rightarrow X$  une application nonexpansive. Alors l'équation opérateur*

$$x - Tx = f \quad (4.5)$$

*admet une solution  $x$  si et seulement si pour un  $x_0 \in X$  quelconque, la suite des itérations de Picard  $\{x_n\} \in X$  définie par*

$$x_{n+1} = Tx_n + f, n \in \mathbb{N} \quad \text{est bornée.} \quad (4.6)$$

**Preuve 4.2.1.** *Soit  $T_f : X \rightarrow X$  une application donnée par*

$$T_f(u) = Tu + f.$$

*Alors  $u$  est une solution de (4.5) si et seulement si  $u$  est un point fixe de  $T_f$ .*

*Montrons que  $T_f$  est nonexpansive.*

$$\begin{aligned} \|T_f(u) - T_f(v)\| &= \|(Tu + f) - (Tv + f)\|, \\ &= \|Tu - Tv\|, \end{aligned}$$

*Comme  $T$  est une application non expansive alors :*

$$\|T_f(u) - T_f(v)\| \leq \|u - v\|.$$

*Supposons que  $T_f$  possède un point fixe  $u \in X$ . Alors*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\| &= \|Tx_n + f - T_f u\|, \\ &= \|Tx_n + f - Tu - f\|, \\ &= \|Tx_n - Tu\|, \\ &\leq \|x_n - u\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Ceci implique par récurrence que*

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_0 - u\|.$$

*Par conséquent  $\{x_n\}$  est bornée.*

*Inversement, supposons maintenant que  $\{x_n\}$  est bornée.*

Soit

$$d = \text{diam}(\{x_n\})$$

et soit

$$B_d[x] = \{y \in X : \|x - y\| \leq d\} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Fixons  $C_n := \bigcap_{i \geq n} B_d[x_i]$ .

Alors  $C_n$  est un ensemble non vide, convexe pour tout  $n$ . et  $T_f(C_n) \subset C_{n+1}$ .

Soit  $C$  la fermeture de l'union de  $C_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , **i.e.**,  $C = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n}$ .

Etant donné  $\{C_n\}$  croît avec  $n$ ,  $C$  un sous ensemble fermé, convexe, borné de  $X$ . Comme  $T_f : C \rightarrow C$ , Alors par le théorème de Browder – GöhdeKirk  $T_f$  a un point fixe en  $C$ .

---

## Conclusion

A travers ce mémoire nous avons présenter quelques résultat de point fixes pour des applications du type non-expansive ainsi que le role important que joue la géométrie de l'espace pour établir des résultats d'existence ainsi que les différentes techniques utilisé dans ces espaces à titre d'exemple, on peut citer la technique du centre asymptotique, les suite de point fixe approché (a.f.p.s),...etc, il est important de mention que ces résultat ont ouvert beaucoup de perspective par la suite aux chercheurs et les théorème obtenue pour les applications non expansives ont été généralisé par la suite pour d'autre classe à titre d'exemple, on cite les travaux de *T.Suzuki* en 2008 pour les applications du type  $C$  ainsi que les travaux de *LIorens – Fuster* et *E.Galvez* effectués en 2011 pour les applications du type  $C_\lambda$  aussi en 2015 *Garcia – Falset* et *Liorens – Fuster* ont des résultats nouveaux pour des applications plus générale du type  $L$ , enfin récemment en 2018 des travaux ont été publié par *Ould – hammouda* et *Belbaki* pour des application du type *Reich*. Donc les techniques utilisé dans ce mémoire reste des techniques d'actualité pour des résultats nouveaux.

---

## Bibliographie

- [1] Ravi P Agarwal, Maria Meehan, and Donal O'Regan. *Fixed point theory and applications*, volume 141. Cambridge university press, 2001.
- [2] Ravi P Agarwal, Donal O'Regan, and DR Sahu. *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications*, volume 6. Springer, 2009.
- [3] Asuman G Aksoy and Mohamed A Khamsi. *Nonstandard methods in fixed point theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Stefan Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. math*, 3(1) :133–181, 1922.
- [5] Kim C Border. *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge university press, 1989.
- [6] Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 1. masson Paris, 1983.
- [7] MS Brodskii and DP Milman. On the center of a convex set. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 59, pages 837–840, 1948.
- [8] Felix E Browder. Nonexpansive nonlinear operators in a banach space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 54(4) :1041, 1965.
- [9] Siegfried Carl and Seppo Heikkilä. *Fixed Point Theory in Ordered Sets and Applications : From Differential and Integral Equations to Game Theory*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [10] Christian Constanda, Barbara S Bertram, and Allan A Struthers. *Integral methods in science and engineering*. Chapman and Hall/CRC, 2000.
- [11] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jan Pelant, and Václav Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [12] K Goebel and S Reich. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. 1984, 1984.
- [13] Kazimierz Goebel and William A Kirk. *Topics in metric fixed point theory*, volume 28. Cambridge University Press, 1990.
- [14] Andrzej Granas and James Dugundji. *Fixed point theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] Farmakis Ioannis and Moskowitz Martin. *Fixed point theorems and their applications*. World Scientific, 2013.
- [16] Mohamed A Khamsi and William A Kirk. *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, volume 53. John Wiley & Sons, 2011.
- [17] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. wiley New York, 1978.
- [18] Ralph S Phillips and Einar Hille. *Functional analysis and semi-groups*. RI, 1957.
- [19] Robert C Sine. *Fixed points and nonexpansive mappings*, volume 88. American Mathematical Soc., 1983.
- [20] Frédéric Testard. *Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite*. Calvage & Mounet, 2012.
- [21] Chuanxi Zhu, Chunfang Chen, and Xiaozhi Zhang. Some results in quasi-b-metric-like spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(1) :437, 2014.