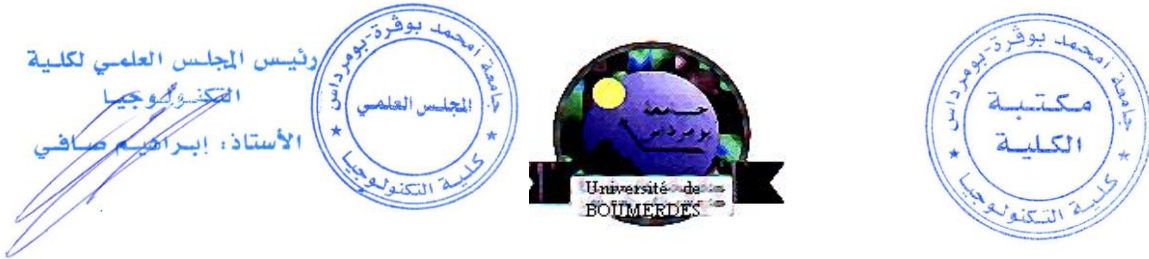


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université M'Hamad Bougara de Boumerdes
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

Polycopié de cours

**SUPPORT DE COURS EN MECANISMES
INDUSTRIELS ET TRANSMISSION DE
PUISSANCE**

AGUIB Salah

Maître de Conférences - UMBB

Année Universitaire : 2021/2022

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est un polycopié de cours de Mécanismes Industriels et Transmission de Puissance, destiné aux étudiants de la première année Master de la Filière Génie Mécanique et à d'autres spécialités éventuellement. Ce polycopié est élaboré sous forme d'un cours et des exercices avec solutions, dans le but de faciliter la compréhension des principes et méthodes appliqués dans cette discipline de mécanique.

Le contenu de ce cours est composé de trois chapitres.

Le premier Chapitre concerne les généralités et la réalisation des liaisons.

Le deuxième Chapitre traite une analyse détaillée des mécanismes.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des organes de transmission du mouvement et de puissance.

A la fin de chaque Chapitre, une série d'exercices résolus sont traités et présentés d'une façon détaillée pour faciliter l'assimilation du cours.

Chapitre 1

Généralités et réalisation des liaisons

1.1. Liaisons

Un mécanisme est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons en vue d'obtenir un mouvement déterminé. L'objectif de ce chapitre est de les recenser et de les décrire mécaniquement. A partir d'un ensemble de liaisons simples, tous les mouvements seront alors possibles et les actions mutuelles entre solides pourront être totalement caractérisées.

1.1.2. Définitions

a) Liaisons parfaites

Une liaison est dite parfaite si le jeu de fonctionnement est nul (ce n'est pas fondamental comme hypothèse) et si le contact se fait sans frottement. Une liaison est parfaite si et seulement si la **puissance dissipée** par la liaison est nulle. La puissance mécanique développée par les inter-efforts d'une liaison entre un solide S_1 et un solide S_2 , par rapport à un repère R , est égale au comoment du torseur cinématique de S_2 sur S_1 et du torseur des actions mécaniques de S_1 sur S_2 (on anticipe sur la suite mais on utilise ce résultat). Les torseurs cinématiques des liaisons, en un point de contact P , sont de la forme :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) \end{array} \right\}_P$$

Les torseurs des actions mécaniques, ou torseurs statiques, définis en un point P s'écrivent:

$$\{\delta(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}(P, S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}_P$$

b) Degré de mobilité d'une liaison

On dit qu'une liaison à un degré de mobilité m si elle permet m mouvements indépendants. Le degré de mobilité représente le nombre de mouvements indépendants possibles d'un solide par rapport à un autre. Généralement, il désigne le nombre de paramètres scalaires cinématiques utiles pour paramétrer la position d'un solide par rapport au repère de référence R et que l'on peut faire varier **indépendamment** de ces derniers. Les degrés de mobilité seront explicités pour chacune des liaisons décrites dans la suite du chapitre.

La définition de la fonction technique d'une liaison entre deux pièces revient à préciser le type de liaison donné et le nombre de degrés de liberté possibles entre ces deux pièces. A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison.

Dans tous les cas, dans une liaison entre deux pièces, on a la relation suivante :

$$\text{Nombre de degrés de liberté} + \text{Nombre degrés de liaison} = 6$$

1.1.3. Liaisons élémentaires

Une liaison simple entre deux pièces obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant aux deux pièces repose sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Le contact s'établit théoriquement en un point, une portion de ligne ou d'une surface de définition géométriquement simple: point, droite, cercle, plan, cylindre, sphère, surface hélicoïdale,
- ✓ Les surfaces de chacune des pièces sont supposées géométriquement parfaites et le maintien du contact est toujours assuré,
- ✓ La liaison est sans jeu.

Ces surfaces de contact sont appelées surfaces fonctionnelles.

a) Liaison ponctuelle

La liaison ponctuelle entre deux solides S_1 et S_2 est représentée par un point. Elle suppose dans la pratique des solides indéformables du type cône sur un plan (Figure 1.1), ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre surface en un point, comme une sphère en appui sur un plan (Figure 1.2). Le contact est supposé permanent en O, la vitesse ne peut donc pas avoir de composante selon l'axe (O, z) .

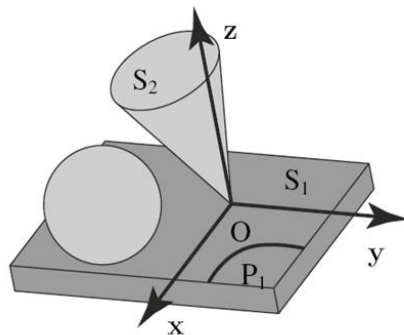


Fig.1.1

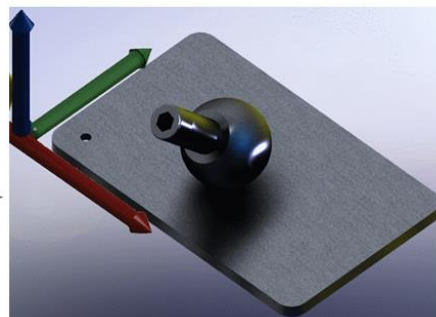


Fig.1.2

Le mouvement possible de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- ✓ Rotations autour de (O, x) , (O, y) , (O, z) ;

✓ Translations suivant (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) .

On peut résumer ces conditions sous la forme d'une condition :

$$V(O/R) \times z = 0$$

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$$

Le torseur statique s'écrit donc :

$$\{S(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{array} \right\}_O$$

Degrés de mobilité : En étudiant le torseur cinématique, il apparaît que cinq mouvements sont possibles, ils sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'une translation ou une rotation selon un axe peut être effectuée sans influencer sur les mouvements des autres axes. Le degré de mobilité m de cette liaison est donc de cinq.

b) Liaison linéaire rectiligne

La **liaison linéaire rectiligne** entre S_1 et S_2 est du type cylindre en appui sur un plan. Le contact entre les deux solides est une droite (figure 1.3).

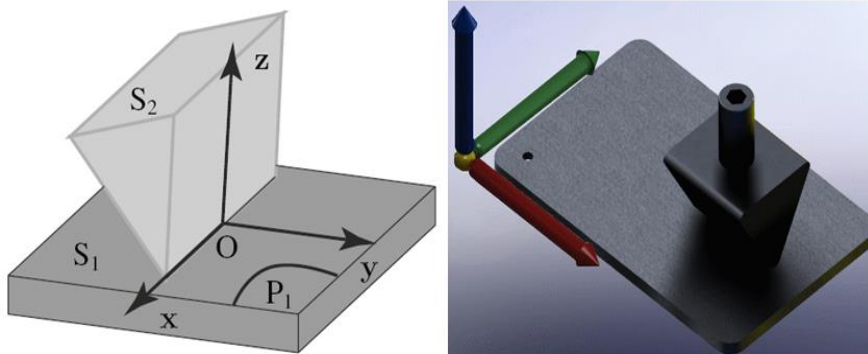


Fig.1.3

Mouvements possibles. Dans la configuration de la Figure 1.3, c'est-à-dire avec un repère $R(O, x, y, z)$ où la droite (O, x) est confondue avec la ligne de contact entre S_2 et S_1 et où z

est la normale au plan P_1 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit:

- ✓ Rotations autour de (O, x) , (O, z) ;
- ✓ Translations suivant (O, x) , (O, y) .

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\delta(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M_y & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Degré de mobilité : Le degré de mobilité m de cette liaison est de quatre.

c) Liaison linéaire annulaire

La **liaison linéaire annulaire** entre S_1 et S_2 est du type sphère dans un cylindre creux de même diamètre (Figure 1.4). La ligne de contact entre les deux solides est un cercle.

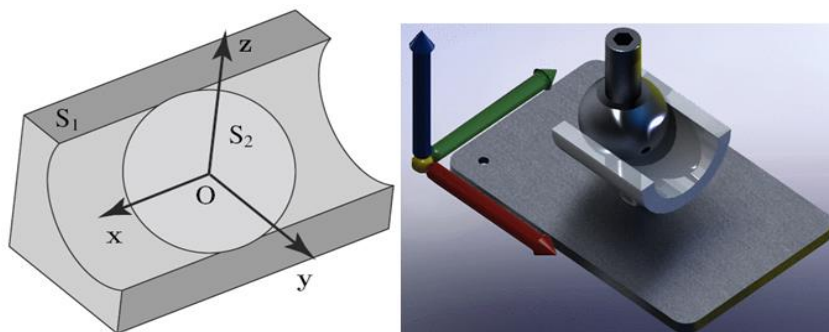


Fig.1.4

Mouvements possibles. Dans la configuration de la Figure 1.4, c'est-à-dire avec un repère $R(O, x, y, z)$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- ✓ Rotations autour de (O, x) , (O, y) , (O, z) ;
- ✓ Translation suivant (O, x) .

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$$

L'expression du torseur statique est donc :

$$\{\delta(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{array} \right\}_O$$

Degré de mobilité : Le degré de mobilité de cette liaison est de quatre.

d) Liaison rotule (Liaison sphérique)

La **liaison rotule** est du type sphère dans une sphère creuse de même diamètre (Figure 1.5). La surface de contact entre les deux solides est la surface de la sphère intérieure.

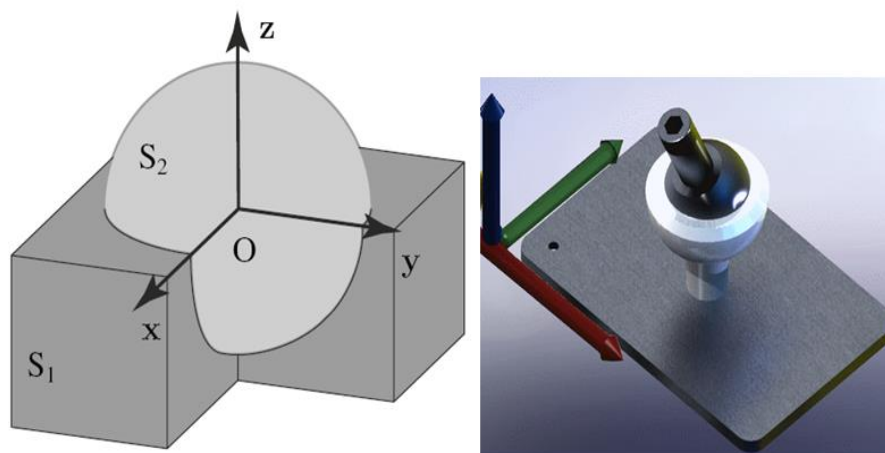


Fig.1.5

Mouvements possibles : Dans la configuration de la Figure 1.5, c'est-à-dire avec un repère $R(O, x, y, z)$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose suivant les trois rotations autour de (O, x) , (O, y) , (O, z) .

Torseur cinématique : Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{matrix} \right\}_O$$

D'où l'expression du torseur statique :

$$\{\delta(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{matrix} \right\}_O$$

Degré de mobilité : Le torseur cinématique fait apparaître trois mouvements indépendants. Le degré de mobilité vaut donc trois.

e) Liaison appui plan

La **liaison appui plan** est du type plan sur plan (figure 1.6). La surface de contact entre les deux solides est un plan.

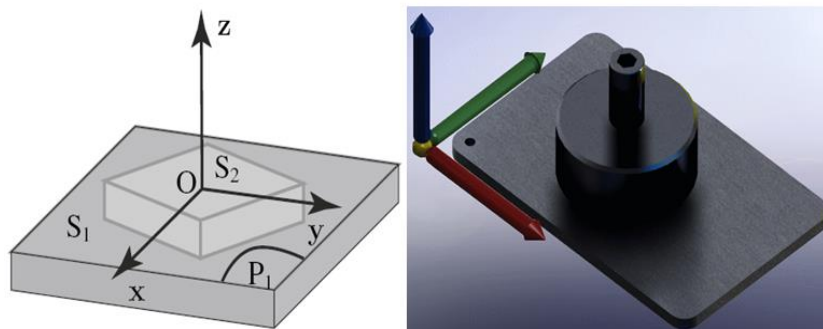


Fig.1.6

Mouvements possibles : Dans la configuration de la Figure 1.6, c'est-à-dire avec un repère R (O, x, y, z) au centre de S₂ en contact avec le plan S₁, le mouvement de S₂ par rapport à S₁ se décompose comme suit :

- ✓ Rotation autour de (O, z) ;
- ✓ Translations suivant (O, x), (O, y).

Torseur cinématique : Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S₂ par rapport à S₁ :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Torseur statique : Le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\delta(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} M_x & 0 \\ M_y & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Degré de mobilité : Trois mouvements indépendants sont identifiables à partir du torseur cinématique. Le degré de mobilité **m** de cette liaison vaut donc trois.

f) Liaison pivot glissant

La **liaison pivot glissant** est du type cylindre à base circulaire dans un cylindre creux à base circulaire de même rayon (figure 1.7). La surface de contact entre les deux solides est donc un cylindre.

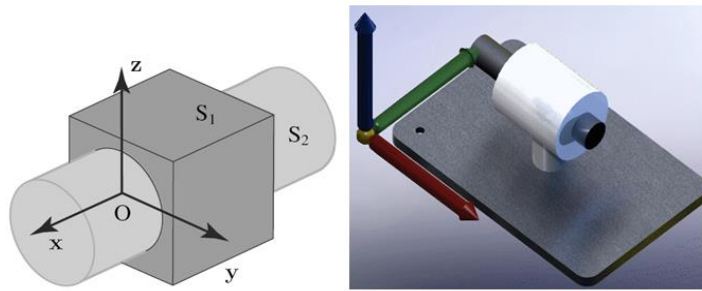


Fig.1.7

Mouvements possibles : Dans la configuration de la figure 1.7, c'est-à-dire avec un repère R (O, **x**, **y**, **z**) au centre de S₂, le mouvement de S₂ par rapport à S₁ se décompose comme suit :

- ✓ Rotation autour de (O, **x**) ;
- ✓ Translation suivant (O, **x**).

Torseur cinématique : Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S₂ par rapport à S₁ :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Torseur statique : Le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\mathcal{D}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M_y & R_y \\ M_z & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Degré de mobilité : Le torseur cinématique montre que deux mouvements sont possibles et sont indépendants. Le degré de mobilité de cette liaison est donc de deux.

g) Liaison pivot

La **liaison pivot** est du type forme de révolution non cylindrique dans une forme identique (Figure 1.8). La surface de contact entre les deux solides est la surface de cette forme. Dans le cas de la figure 1.8, le cylindre S_2 est bloqué en translation par les circlips. Il ne peut qu'effectuer des rotations selon l'axe (O, \mathbf{x}) .

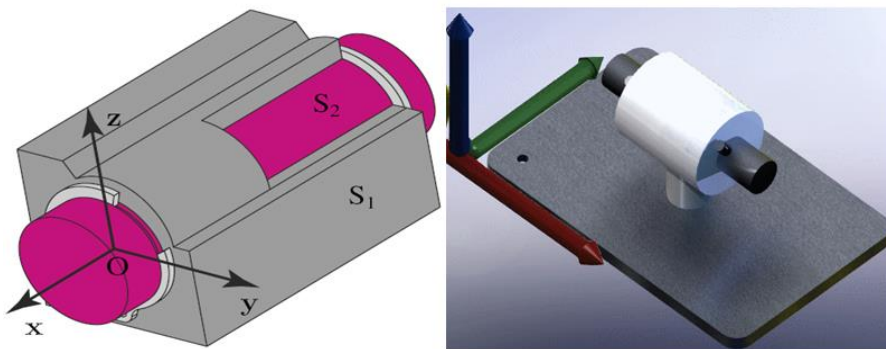


Fig.1.8

Mouvements possibles : Dans la configuration de la Figure 1.8, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose en une rotation autour de (O, \mathbf{x}) .

Torseur cinématique : Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Torseur statique :

$$\{\mathcal{D}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ M_y & R_y \\ M_z & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Degrés de mobilité : Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une rotation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un. De l'utilité d'exprimer les torseurs statiques en un point particulier (le centre de la liaison, un point de l'axe...).

h) Liaison glissière

La **liaison glissière** est du type cylindre à base non circulaire dans un cylindre présentant un creux de forme identique (figure 1.9). La surface de contact entre les deux solides est la surface du cylindre intérieur.

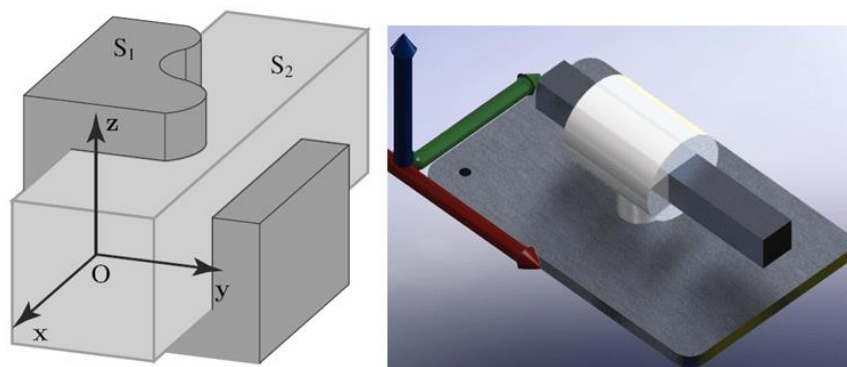


Fig.1.9

Mouvements possibles : Dans la configuration de la figure 1.9, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose selon une translation suivant (O, \mathbf{x}) .

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Torseur statique :

$$\{\mathcal{D}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} M_x & 0 \\ M_y & R_y \\ M_z & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Degrés de mobilité : Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une translation unique. Le degré de mobilité de cette liaison est donc de un.

i) Liaison hélicoïdale

La *liaison hélicoïdale* est caractérisée par l'existence d'un mouvement combiné qui rend possible la rotation uniquement s'il y a une translation simultanée (Figure 1.10). La surface de contact entre les deux solides est une surface hélicoïdale définie par le pas p de l'hélice.

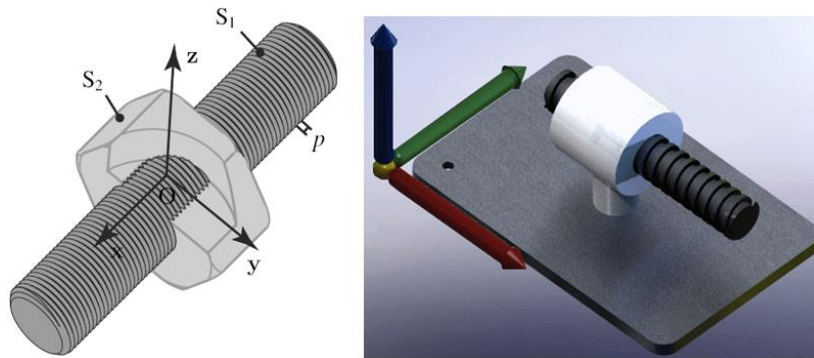


Fig.1.10

Mouvements possibles : Dans la configuration de la Figure 1.10, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- ✓ Rotation autour de (O, \mathbf{x}) ;
- ✓ Translation suivant (O, \mathbf{x}) .

Torseur cinématique : Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Torseur statique : Le torseur statique s'écrit alors :

$$\{\mathcal{D}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} M_x & R_x \\ M_y & R_y \\ M_z & R_z \end{Bmatrix}_O$$

Relation entre les composantes des torseurs cinématique et statique. Il est possible d'écrire le torseur cinématique pour tout point P de l'axe (O, \mathbf{x}) comme suit :

$$\{C(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega x \\ \Omega px \end{Bmatrix}$$

Où Ω est la vitesse de rotation de S_1 par rapport à S_2 . Le cas étudié fait avancer le solide S_1 selon $(O, +x)$. Dans le cas contraire, la composante du moment du torseur cinématique est négative ($V_x = -\Omega p$). Il s'agit alors d'hélice à droite pour le cas étudié ici, sinon d'hélice à gauche. En développant l'expression de la puissance qui est nulle dans les liaisons parfaites, il vient que :

$$p\Omega x + M_x \Omega = 0$$

La relation entre les deux composantes non indépendantes s'écrit alors :

$$M_x = -px$$

Degrés de mobilité : Le torseur cinématique de la liaison hélicoïdale fait apparaître deux mouvements possibles qui sont une translation et une rotation suivant le même axe. Cependant, nous venons de montrer qu'il existe une relation entre la translation et la rotation de S_2 par rapport à S_1 . Les deux mouvements sont donc liés, ils ne sont par conséquent pas indépendants. La connaissance d'un de ces mouvements permet d'obtenir l'autre grâce à la relation ci-dessus définie. Le degré de mobilité de cette liaison est donc de un.

j) Liaison encastrement

La *liaison encastrement* interdit tout mouvement relatif entre les solides suite à l'existence de multiples contacts entre eux (figure 1.11).

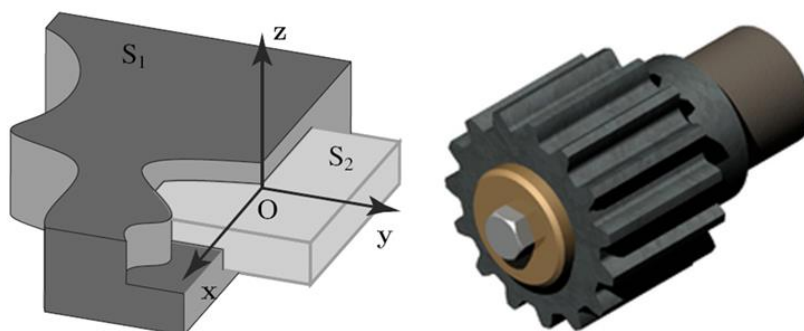


Fig.1.11

Les différentes liaisons élémentaires étudiées précédemment sont résumées dans le tableau 1.

Tableau 1. Liaisons mécaniques élémentaires

Nom	point(s) d'expression	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/1)\}$	Torseur des AM $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$
Encastrement	tout point de l'espace	0			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$\begin{Bmatrix} 0 & V_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x}) et de pas p	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & h\omega_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$ avec $h = \pm \frac{p}{2\pi}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & -hX_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$ avec $h = \pm \frac{p}{2\pi}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Appui plan de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$\begin{Bmatrix} 0 & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Linéique annulaire de centre A et de direction \vec{x}	centre de la liaison	4			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Linéique rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x} , \vec{y})	4			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de (A, \vec{y})	5			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

1.1.4. Liaisons composées

L'association de deux liaisons élémentaires permet de construire d'autres liaisons, appelées liaisons composées. Elles seront définies par deux surfaces de contact, et

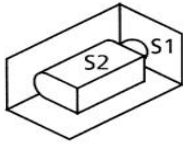
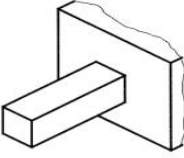
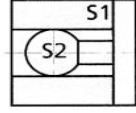
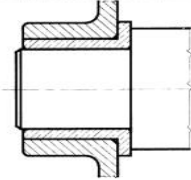
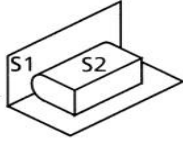
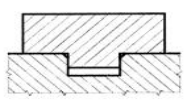

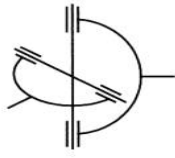
donneront lieu à des libertés de mouvements spécifiques (les liaisons composées sont obtenues par association cohérente de plusieurs liaisons élémentaires citées avant) :

Association Appui plan /Linéaire rectiligne /Ponctuelle → **Liaison complète**.

Association Appui plan /Linéaire rectiligne → **Liaison glissière**.

Association Linéaire Association Linéaire annulaire/Appui plan → **Liaison pivot**.

Association Rotule/Ponctuelle → **Liaison sphérique à doigt**.

Association de liaisons élémentaires	Exemple	Association de liaisons élémentaires	Exemple
 <p>Appui plan + linéaire rectiligne + ponctuelle</p>	 <p>Poutre encastrée</p>	 <p>Linéaire annulaire + appui plan</p>	 <p>Guidage en rotation</p>
 <p>Appui plan + linéaire rectiligne</p>	 <p>Guidage en translation</p>	 <p>Rotule + ponctuelle</p>	 <p>Joint de cardan</p>



Chapitre 2

Analyse des mécanismes

2.1. Définitions

2.1.1. Degré de mobilité d'un mécanisme

Le degré de mobilité d'un mécanisme est noté m et correspond au nombre m_u de paramètres à imposer pour obtenir une configuration géométrique donnée du système augmenté du nombre de mouvements m_i que pourraient avoir certaines pièces du mécanisme.

Exemple :

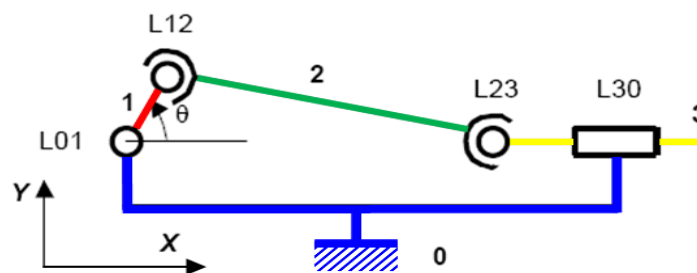


Fig.2.1

Pour obtenir une configuration donnée du mécanisme, il suffit d'imposer θ : $m_u=1$.

Les liaisons L_{12} et L_{23} sont des liaisons rotules, la pièce 2 a donc une mobilité en rotation autour de l'axe passant par le centre des deux rotules. On qualifie cette **mobilité d'interne** : $m_i=1$. Elle n'a aucune influence sur la loi entrée-sortie du mécanisme.

La mobilité de ce mécanisme est $m = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$.

2.1.2. Degré d'hyperstatisme (ou d'hyperstaticité) d'un mécanisme

Le degré d'hyperstatisme se note h . Il correspond au nombre d'inconnus statiques (N_s) du mécanisme diminué du nombre de relations indépendantes (r_s) entre ces inconnues.

Le degré d'hyperstatisme h , correspond aussi au nombre de conditions géométriques et/ou dimensionnelles qu'il faut imposer au mécanisme pour que celui-ci fonctionne correctement.

Lorsque $h=0$, on qualifie le système d'isostatique.

Lorsque $h>0$, on qualifie le système d'hyperstatique.

Exemple :

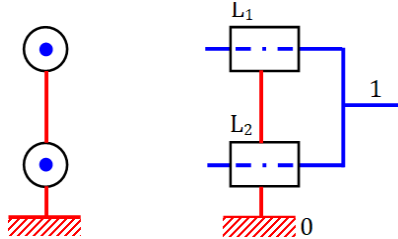


Fig.2.2

La pièce 1 est guidée par rapport à la pièce 0 par deux liaisons « pivot glissant ».

Pour que le mécanisme fonctionne correctement, il faut :

- Que l'entraxe des deux cylindres de 1 soit le même que l'entraxe des deux alésages de 0. Ce qui fait **1 condition dimensionnelle**.
- Que les axes des deux alésages de 0 soient parallèles ce qui fait **1 condition géométrique**.
- Que les axes des deux cylindres de 1 soient aussi parallèles ce qui fait **nouvelle condition géométrique**.

Au total, il faut imposer 3 conditions pour que le système fonctionne correctement. Le degré d'hyperstatisme h est donc égal à 3.

2.1.3. Isostatisme ou hyperstatisme (isostaticité ou hyperstaticité)

Un mécanisme isostatique présente les avantages suivants :

- ✓ Il est constitué de pièces plus faciles à réaliser du point de vue des contraintes dimensionnelles et géométriques.
- ✓ Il se prête aussi beaucoup mieux aux calculs de mécanique, car on a l'assurance que les surfaces de liaison sont bien en contact.

Il présente les inconvénients suivantes :

- ✓ Il est souvent moins rigide qu'un mécanisme hyperstatique.
- ✓ Il est parfois plus complexe en termes de nombre de pièces.

Un système hyperstatique est à l'inverse, constitué de pièces plus difficiles à réaliser du fait des contraintes dimensionnelles et géométriques. Les calculs de mécanique sont plus complexes, il faut faire intervenir la déformation des pièces. Il est en revanche souvent plus rigide et, comporte généralement moins de pièces pour une même fonction.

On peut régler les problèmes dus à l'hyperstaticité :

- En donnant des jeux suffisants dans les liaisons quand cela est possible,
- En prévoyant des dispositifs de réglages,
- En faisant de l'appairage,
- En combinant les trois propositions précédentes.

2.2. Etude des chaînes de solides indéformables

2.2.1. Graphe des liaisons

Dans le graphe de liaisons d'un mécanisme, les solides sont représentés par des cercles dans lesquels on indique le repère du solide et, les liaisons sont représentées par des arcs joignant ces cercles.

Exemple : Graphe de liaisons associées au mécanisme de la figure 1 :

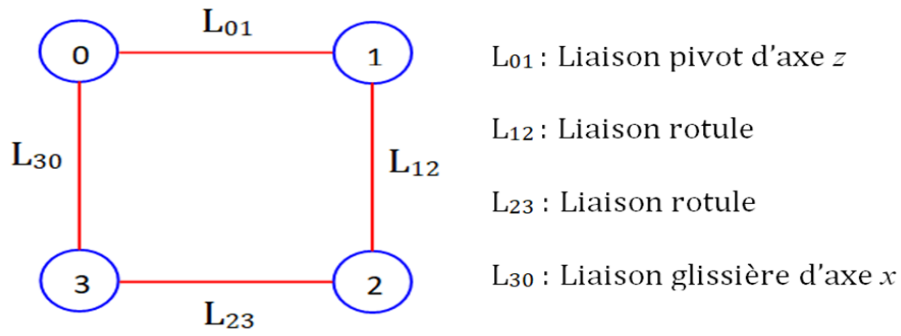


Fig.2.3

2.2.2. Liaison équivalente

La liaison équivalente à un ensemble de liaisons situées entre deux solides (S₁) et (S₂) est une liaison théorique qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement relatif de ces deux solides.

a. Torseur de liaison équivalente à un ensemble de liaisons en parallèle

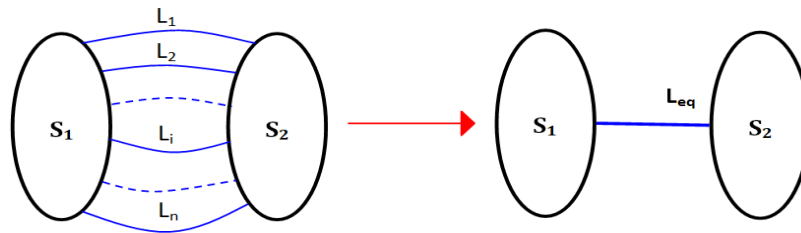


Fig.2.4

Torseur statique

Notons, pour simplifier, $\{\delta_{eq}\}$ le torseur statique de liaison équivalente (torseur des efforts transmissibles de S₁ à S₂ par la liaison équivalente) et $\{\delta_i\}$ le torseur des efforts de S₁ à S₂ transmissibles par la liaison L_i, alors :

$$\{\delta_{seq}\} = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

Torseur cinématique

Notons, pour simplifier : $\{C_{eq}\}$ le torseur cinématique de liaison équivalente ; $\{C_i\}$ le torseur cinématique de la liaison L_i. Alors :

$$\{C_{eq}\} = \{C_1\} = \{C_2\} = \dots = \{C_i\} = \dots = \{C_n\}$$

Hyperstaticité, mobilité :

On montre que :

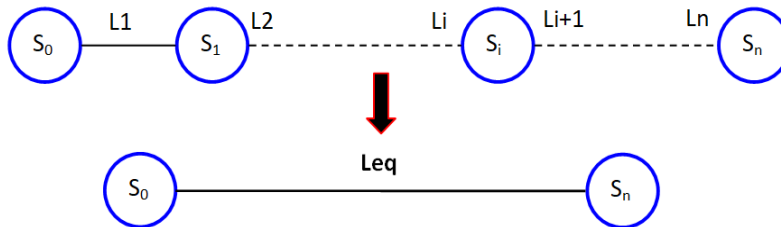
$$h = N_s - r_s$$

$$m = 6 - r_s$$

b. Torseur de la liaison équivalente à un ensemble de liaisons en série

N liaisons sont dites en série si elles sont disposées l'une à la suite de l'autre par l'intermédiaire de N+1 solides.

On dit également que les N+1 solides assemblés par les N liaisons en série constituent une **chaîne continue ouverte**.



Torseur statique :

$$\{\delta_{eq}\} = \{\delta_1\} = \{\delta_2\} = \dots = \{\delta_i\} = \dots = \{\delta_n\}$$

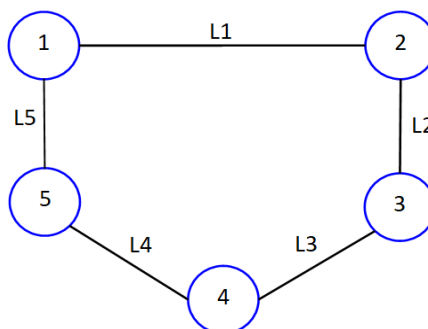
Torseur cinématique :

$$\{C_{eq}\} = \sum_{i=1}^n \{C_i\}$$

2.2.3. Chaîne continue fermée

Une chaîne continue ouverte, dont les deux solides extrêmes ont une liaison entre eux, constitue une chaîne continue fermée.

Notons p le nombre de liaisons constituant une chaîne continue fermée.



Approche statique

Soit :

- N_s le nombre d'inconnues statiques des p liaisons.

$$N_s = \sum_{i=1}^p ns_i$$

- r_s le nombre d'équations scalaires indépendantes entre le N_s inconnues statiques.

On définit le degré d'hyperstaticité h de la chaîne continue fermée par :

$$h = N_s - r_s \quad (1)$$

Approche cinématique

Soit :

- N_c le nombre d'inconnues cinématiques des p liaisons.

$$N_c = \sum_{i=1}^p nc_i$$

- r_c le nombre d'équations scalaires indépendantes entre le N_c inconnues cinématiques

On définit le degré de mobilité m de la chaîne continue fermée par :

$$m = N_c - r_c \quad (2)$$

Synthèse

Pour chaque liaison i , on a la relation : $ns_i + nc_i = 6$ car le nombre d'inconnues du torseur statique au centre d'une liaison est le complément à 6 du nombre d'inconnues du torseur cinématique.

Pour p liaisons :

$$\sum_{i=1}^p nc_i + \sum_{i=1}^p ns_i = \sum_{i=1}^p (nc_i + ns_i) = 6.p \Rightarrow N_c + N_s = 6.p \quad (3)$$

On montre, d'autre part, que le degré de mobilité est :

$$m = 6(p-1) - r_s \quad (4)$$

En éliminant r_s entre les relations (1) et (4) on obtient :

$$h = N_s + m - 6(p-1) \quad (5)$$

En éliminant r_s entre les relations (3) et (5) on obtient :

$$h = m - 6 - N_c \quad (6)$$

2.2.4. Chaîne complexe

Définition :

Une chaîne complexe est une chaîne cinématique constituée de plusieurs chaînes continues fermées imbriquées.

Nombre cyclomatique d'une chaîne complexe :

On appelle nombre cyclomatique d'une chaîne complexe le nombre de chaînes continues fermées indépendant à cette chaîne complexe. On note ce nombre γ .

Soit p le nombre de solides et L le nombre de liaisons de la chaîne complexe on montre que :

$$\gamma = L - p + 1 \quad (7)$$

Approche statique :

On définit le degré d'hyperstaticité de la chaîne complexe par :

$$h = N_s - r_s \quad (8)$$

Approche cinématique :

Le degré de mobilité de la chaîne complexe est :

$$m = N_c - r_c \quad (9)$$

Synthèse

$$\sum_{i=1}^L nc_i + \sum_{i=1}^L ns_i = \sum_{i=1}^L (nc_i + ns_i) = 6.L \quad \Rightarrow \quad N_c + N_s = 6.L \quad (10)$$

On montre d'autre part que le degré de mobilité de la chaîne complexe est :

$$m = 6(p-1) - r_s \quad (11)$$

En éliminant r_s entre (8) et (11), on obtient :

$$h = N_s + m - 6(p-1) \quad (12)$$

En éliminant N_s entre (10) et (12), on obtient :

$$h = 6L - N_c + m - 6(p-1) = m + 6(L - p + 1) - N_c$$

Soit :

$$h = m + 6\gamma - N_c \quad (13)$$

Exercices

Exercice1 :

Les chasses d'eau des WC classiques comportent un petit système mécanique muni d'un levier, qui, une fois actionné, libère la quantité d'eau stockée dans le réservoir.

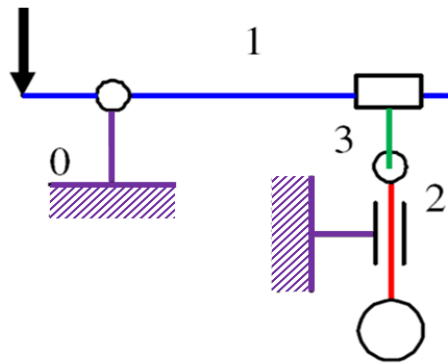


Schéma cinématique d'une chasse d'eau

- 0 : Corps du réservoir,
- 1 : Levier,
- 2 : Cloche,
- 3 : Transmetteur.

- 1- Citer les types de liaisons qui lient les différentes parties du système (ci-dessus) entre elles.
- 2- Indiquer le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons et en déduire le nombre d'inconnues qui y correspondent.
- 3- Calculer le degré d'hyperstaticité du système tout en définissant, si elles existent, les mobilités internes et utiles du système. Si vous trouvez que le système n'est pas isostatique, proposer la modification nécessaire au bon fonctionnement.

Réponse :

1-2/

L_{10} : Liaison pivot (5 inconnues statiques, 1 mobilité (rotation)).

L_{31} : Liaison glissière (5 inconnues statiques, 1 mobilité (translation)).

L_{23} : Liaison pivot-glissant (4 inconnues statiques, 2 mobilités (1 rotation et 1 translation)).

L_{03} : Liaison pivot-glissant (4 inconnues statiques, 2 mobilités (1 rotation et 1 translation)).

3/ Il y a 3 pièces (ou groupes de pièces) en mouvement donc $3 \times 6 = 18$ mobilités potentielles.

Les liaisons amènent $5+5+4+4=18$ inconnues (blocage des mobilités)

L'analyse intuitive donne 1 mobilité utile.

$h = 18 + 1 - 18 = 1$. Il y a 1 blocage en trop, le système est hyperstatique de degré 1.

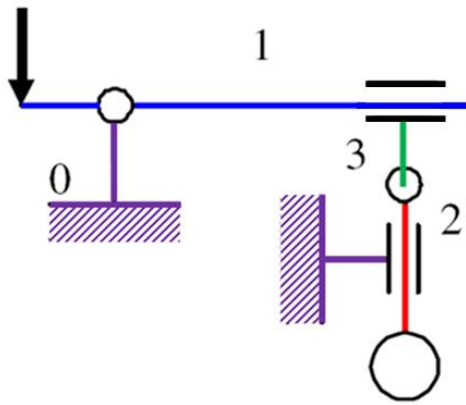
On va libérer une mobilité en rotation au niveau de la glissière en la remplaçant par une liaison pivot glissant.

Il y a 3 pièces (ou groupes de pièces) en mouvement donc $3 \times 6 = 18$ mobilités potentielles.

Les liaisons amènent $5+4+4+4=17$ inconnues (blocage des mobilités)

L'analyse intuitive donne 1 mobilité utile.

$H = 17 + 1 - 18 = 0$. Ca y est, le système est isostatique.

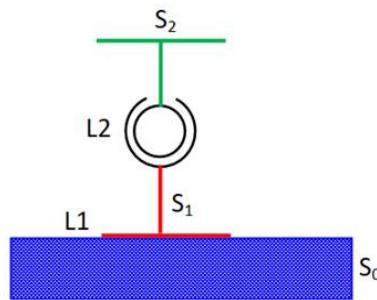


Exercice2 :

Soit le mécanisme ci-dessous réalisé par deux liaisons, une liaison sphérique et une autre plan/plan.

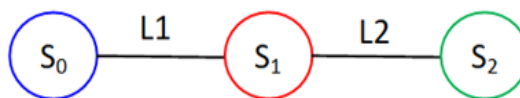
On demande de :

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Donner le type des liaisons.
3. Ecrire les équations statiques et cinématiques ; en déduire le degré d'hyperstaticité et mobilité ainsi que la liaison équivalente.



Réponse :

1. Graphe des liaisons.



2. Type des liaisons.

L₁ : Liaison plane.

L₂ : Liaison sphérique.

3. Torseur statique de la liaison équivalente :

$$\{\delta_1\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & M_{x1} \\ 0 & M_{y1} \\ \hline F_{z1} & 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad \{\delta_2\} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{x1} & 0 \\ F_{y1} & 0 \\ \hline F_{z1} & 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{\delta_{eq}\} = \{\delta_1\} = \{\delta_2\}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} F_{xeq} & M_{xeq} \\ F_{yeq} & M_{yeq} \\ F_{zeq} & M_{zeq} \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o = \begin{Bmatrix} 0 & M_{x1} \\ 0 & M_{y1} \\ F_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o = \begin{Bmatrix} F_{x2} & 0 \\ F_{y2} & 0 \\ F_{z2} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \\
 \Rightarrow & \begin{cases} F_{xeq} = 0 = F_{x2} \\ F_{yeq} = 0 = F_{y2} \\ F_{zeq} = 0 = F_{z2} \\ M_{xeq} = M_{x1} = 0 \\ M_{yeq} = M_{y1} = 0 \\ M_{zeq} = 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ \delta_{eq} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o}
 \end{aligned}$$

Torseur statique d'une **liaison ponctuelle** de normale (o, \vec{z}) .

Torseur cinématique de la liaison équivalente :

$$\begin{aligned}
 \{C_1\} &= \begin{Bmatrix} 0 & v_{x1} \\ 0 & v_{y1} \\ \omega_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o & \{C_2\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & 0 \\ \omega_{z2} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o \\
 \{C_{eq}\} &= \{C_1\} + \{C_2\} \\
 \{C_{eq}\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{xeq} & v_{xeq} \\ \omega_{yeq} & v_{yeq} \\ \omega_{zeq} & v_{zeq} \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x1} \\ 0 & v_{y1} \\ \omega_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o + \begin{Bmatrix} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & 0 \\ \omega_{z2} & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o \\
 \Rightarrow & \begin{cases} \omega_{xeq} = 0 + \omega_{x2} \\ \omega_{yeq} = 0 + \omega_{y2} \\ \omega_{zeq} = \omega_{z1} + \omega_{z2} \\ v_{xeq} = v_{x1} + 0 \\ v_{yeq} = v_{y1} + 0 \\ v_{zeq} = 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ C_{eq} \right\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Big|_o}
 \end{aligned}$$

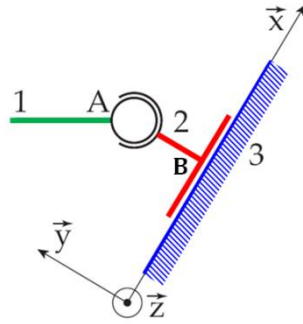
Torseur statique d'une **liaison ponctuelle** de normale (o, \vec{z}) .

Exercice3 :

Soit le mécanisme ci-dessous réalisé par deux liaisons, une liaison sphérique et une autre plan/plan.

On demande de :

1. Donner le type des liaisons.
2. Ecrire les équations cinématiques ; en déduire le degré mobilité ainsi que la liaison équivalente.



Réponse :

1. Type des liaisons

L_{12} : Liaison sphérique.

L_{23} : Liaison plane.

3. Equations cinématiques

$$\{C_{1/0}^A\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_A, \quad \{\delta_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ \beta_B & 0 \\ 0 & V_{Bz} \end{Bmatrix}_B$$

Les liaisons sont en série donc :

$$\{C_{eq}\} = \{C_{1/2}^A\} + \{C_{2/3}^B\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ \beta_B & 0 \\ 0 & V_{Bz} \end{Bmatrix}_B \Rightarrow \boxed{\{\delta_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A = \alpha_{eq} & V_{Bx} = V_{eq} \\ \beta_A + \beta_B = \beta_{eq} & 0 \\ \gamma_A = \gamma_{eq} & V_{Bz} = V_{eq} \end{Bmatrix}_B}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha_A = \alpha_{eq} \\ \beta_A + \beta_B = \beta_{eq} \\ \gamma_A = \gamma_{eq} \\ V_{Bx} = V_{eq} \\ 0 = 0 \\ V_{Bz} = V_{eq} \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=5}$$

Liaison équivalente réalisée par les deux liaisons sphérique et plane est une **liaison ponctuelle**.

Exercice 4:

Soit le mécanisme ci-dessous donné par son schéma cinématique et réalisé par deux liaisons, une liaison pivot-glissant et une ponctuelle.

On demande de :

2. Tracer le graphe des liaisons.
3. Calculer le nombre cyclomatique du mécanisme.
4. Ecrire les équations statiques et cinématiques en déduire le degré d'hyperstaticité et mobilité ainsi que la liaison équivalente.

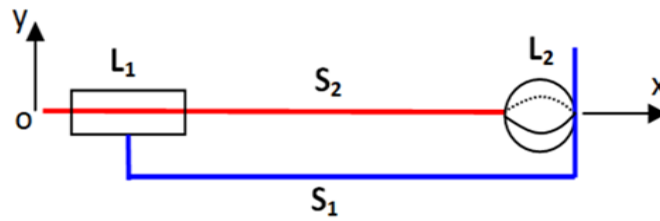
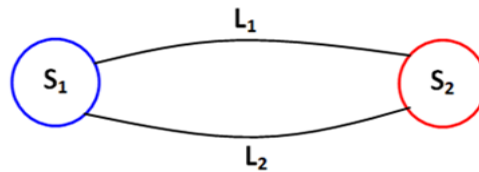


Schéma cinématique

Réponse :

1. Graphe des liaisons



Graphe des liaisons

2. Nombre cyclomatique

$$\gamma = L - p + 1 = 2 - 2 + 1 \Rightarrow \gamma = 1$$

3. Torseur statique de la liaison équivalente :

$$\{\delta_1\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ F_{y1} & M_{y1} \\ F_{z1} & M_{z1} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad \{\delta_2\} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{x2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{\delta_{eq}\} = \{\delta_1\} + \{\delta_2\}$$

$$\{\delta_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{x_{eq}} & M_{x_{eq}} \\ F_{y_{eq}} & M_{y_{eq}} \\ F_{z_{eq}} & M_{z_{eq}} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ F_{y1} & M_{y1} \\ F_{z1} & M_{z1} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} + \left\{ \begin{array}{c|c} F_{x2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{x_{eq}} = F_{x2} & M_{x_{eq}} = 0 \\ F_{y_{eq}} = F_{y1} & M_{y_{eq}} = 0 \\ F_{z_{eq}} = F_{z1} & M_{z_{eq}} = 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

5 équations statiques indépendantes et 5 inconnues statiques.

$$\{\delta_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & 0 \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

Torseur cinématique de la liaison équivalente :

$$\{C_1\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x1} & v_{x1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad \{C_2\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & v_{y2} \\ \omega_{z2} & v_{z2} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{C_{eq}\} = \{C_1\} = \{C_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_{xeq} \\ \omega_{yeq} \\ \omega_{z eq} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{xeq} \\ v_{yeq} \\ v_{z eq} \end{Bmatrix} \Big|_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = \begin{Bmatrix} \omega_{x1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Big|_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = \begin{Bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{Bmatrix} \Big|_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{xeq} = \omega_{x1} = \omega_{x2} \\ \omega_{yeq} = 0 = \omega_{y2} \\ \omega_{z eq} = 0 = \omega_{z2} \\ v_{xeq} = v_{x1} = 0 \\ v_{yeq} = 0 = v_{y2} \\ v_{z eq} = 0 = v_{z2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Big|_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}}$$

Hyperstaticité, mobilité

$$\begin{aligned} N_s &= 5 & h &= 5 - 5 = 0 \\ r_s &= 5 & m &= 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$

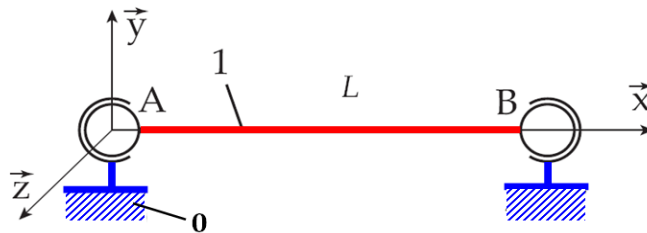
Le système est isostatique et a une mobilité de 1

Torseurs statique et cinématique d'une **liaison pivot**.

Exercice5 :

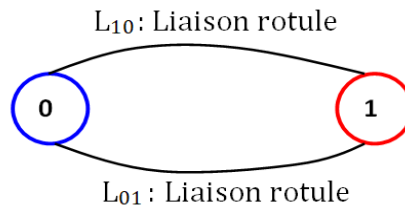
On considère le mécanisme ci-dessous réalisé à l'aide de deux liaisons.
On demande de :

5. Tracer le graphe des liaisons.
6. Donner le type des liaisons.
7. Calculer le nombre cyclomatique du mécanisme.
8. Ecrire les équations statiques et cinématiques. En déduire le degré d'hyperstaticité et mobilité ainsi que la liaison équivalente.



Réponse :

1. /2. Graphe et type des liaisons



4. Nombre cyclomatique

$$\gamma = L - p + 1 = 2 - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

5. Equations statiques et cinématiques

5.1. Equations statiques

$$\{\delta_{1/0}^A\} = \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} \Big|_A \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad \{\delta_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix} \Big|_B \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Les liaisons sont en parallèles donc :

$$\{\delta_{eq}\} = \{\delta_{1/0}^A\} + \{\delta_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} \Big|_A \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix} \Big|_B \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \{\delta_{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_A + X_B \\ Y_A + Y_B \\ Z_A + Z_B \end{Bmatrix} \Big|_B \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{A,1/0}^B = \vec{M}_{B,1/0}^B + \vec{R}_{1/0}^B \wedge \vec{AB} = \vec{0} + \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -LZ_B \\ LY_B \end{pmatrix}.$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} X_A + X_B = X \\ Y_A + Y_B = Y \\ Z_A + Z_B = Z \\ 0 = 0 \\ -LZ_B = 0 \\ LY_B = 0 \end{cases}$$

$$h = N_s - r_s = 6 - 5 \Rightarrow \boxed{h = 1}$$

$$h = N_s + m - 6(p - 1) = 6 + m - 6(2 - 1) \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

4.1. Equations cinématiques

$$\{C_{1/0}^A\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A \\ \beta_A \\ \gamma_A \end{Bmatrix} \Big|_A \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad \{C_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \\ \gamma_B \end{Bmatrix} \Big|_B \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Les liaisons sont en parallèles donc :

$$\{C_{eq}\} = \{C_{1/0}^A\} = \{C_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ \beta_B & 0 \\ \gamma_B & 0 \end{Bmatrix}_B \Rightarrow \{ \delta_{eq} \} = \begin{Bmatrix} \alpha_A = \alpha_B & 0 \\ \beta_A = \beta_B & 0 \\ \gamma_A = \gamma_B & 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\vec{V}_{A,1/0}^B = \vec{V}_{B,1/0}^B + \vec{\Omega}_{1/0}^B \wedge \vec{AB} = \vec{0} + \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \\ \gamma_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L\gamma_B \\ L\beta_B \end{pmatrix}.$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha_A = \beta_B \\ \beta_A = \beta_B \\ \gamma_A = \gamma_B \\ 0 = 0 \\ -L\gamma_B = 0 \\ L\beta_B = 0 \end{cases}$$

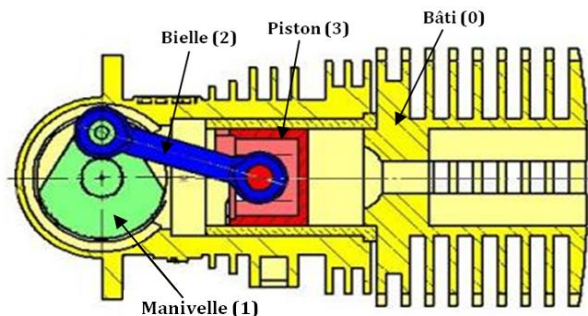
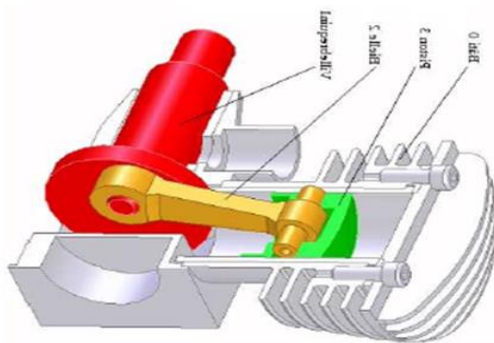
$$m = N_c - r_c = 6 - 5 \Rightarrow m = 1$$

$$h = m + 6\gamma - N_c = 1 + 6 \times 1 - 6 \Rightarrow h = 1$$

Liaison équivalente réalisée par les deux liaisons sphérique est une **liaison pivot**.

Exercice6 :

Nous proposons dans cet exercice de considérer le système bielle-manivelle classique. Le solide S_1 est en rotation (liaison pivot L_1) à la vitesse $V = \dot{\alpha} z$, le solide S_2 est en liaison pivot L_2 (vitesse de rotation $\dot{\theta} z$) et le solide S_3 (un piston par exemple) est en translation le long de l'axe (O, x) . Dans le cas général, la liaison entre le piston et le bâti est aussi de type pivot glissant (qui autorise une rotation et une translation) mais nous sommes dans le cas particulier d'un problème plan et par conséquent il ne reste comme mouvement possible que la translation.

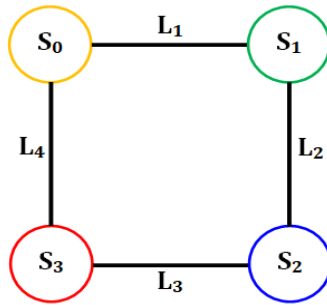


On demande de :

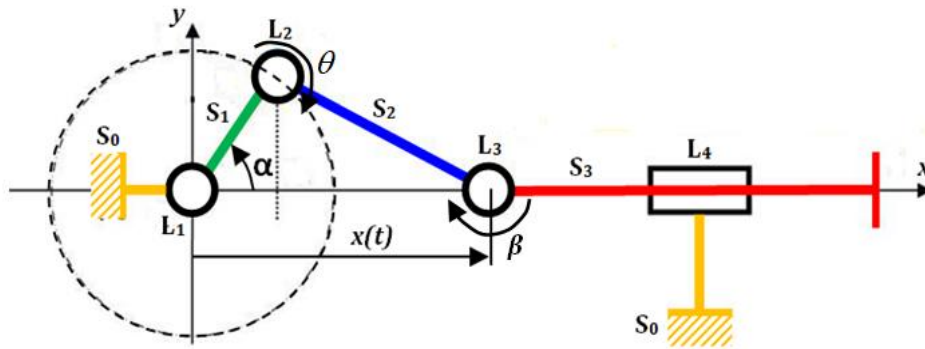
1. Tracer le schéma cinématique.
2. tracer le graphe des liaisons.
3. Déterminer le nombre cyclomatique.
4. Déterminer le degré de mobilité.

Réponse :

1. Graphe des liaisons



2. Schéma cinématique



3. Nombre cyclomatique

$$\gamma = L - p + 1 = 4 - 4 + 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

4. Degré de mobilité

Étude cinématique :

$$\{C_{1/0}^{L_1}\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

$$\{C_{2/1}^{L_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{B \in 2/1} \end{array} \right\}_{R_0} \quad \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{e}_{0,1,2}$$

$$\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}_{21} \Lambda \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \Lambda \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \dot{\theta} L \vec{y}_2 = \dot{\theta} L \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\{C_{2/1}^{L_2}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -\dot{\theta} L_1 \sin \alpha \\ 0 & \dot{\theta} L_1 \cos \alpha \\ \dot{\theta} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

$$\{C_{3/2}^{L_3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}_{C \in 3/2} \end{array} \right\}_{R_0}, \quad \vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\beta} \vec{z}_{0,1,2}$$

$$\vec{V}_{C \in 3/2} = \vec{\Omega}_{32} \Lambda \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}_{R_0} \Lambda \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\{C_{3/2}^{L_3}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\beta} x(t) \\ \dot{\beta} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

$$\{C_{1/4}^{L_4}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dot{x}(t) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \dot{\alpha} = \dot{\theta} = \dot{\beta} = 0 \\ -\dot{\theta} L_1 \sin \alpha = \dot{x} = 0 \\ \dot{\theta} L_1 \cos \alpha = \dot{\beta} x(t) = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{3 équations indépendantes, 4 inconnues.}$$

$$m = N_c - r_c = 4 - 3 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

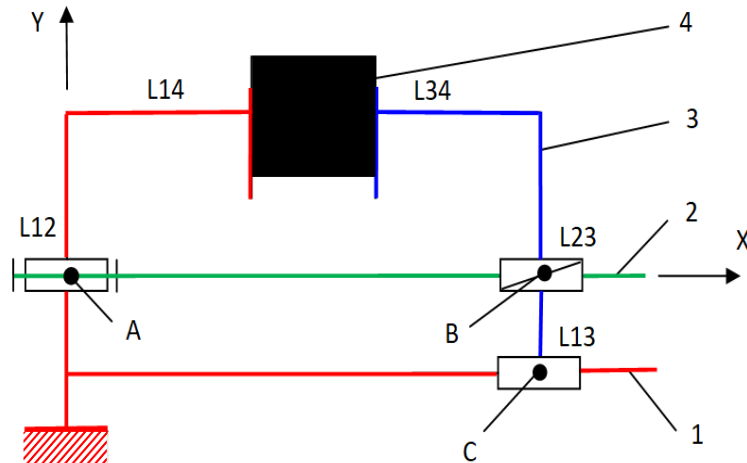
Exercice 7:

Soit le mécanisme de serrage donné par son schéma cinématique ci-dessous et constitué des solides suivants :

- 1 : Mors fixe
- 2 : Vis de commande
- 3 : Mors mobile
- 4 : Pièce

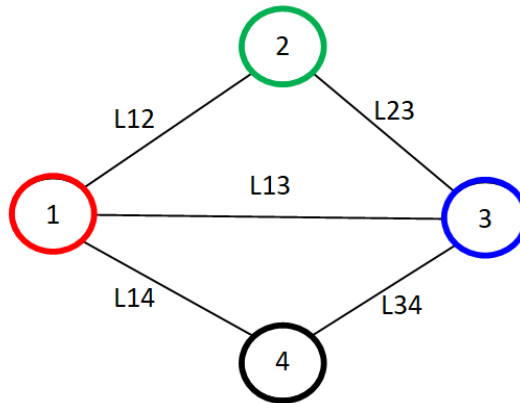
On demande de :

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Citer les différents types des liaisons.
3. Déterminer le nombre cyclomatique.
4. Déterminer le degré de mobilité et d'hyperstaticité.



Réponse :

1. graphe des liaisons



2. Type des liaisons

L₁₂ : Liaison pivot ($n_s=5, n_c=5$)

L₁₃ : Liaison glissière ($n_s=5, n_c=1$)

L₁₄ : Liaison plane ($n_s=3, n_c=3$)

L₂₃ : Liaison hélicoïdale ($n_s=5, n_c=1$)

L₃₄ : Liaison plane ($n_s=3, n_c=3$)

3. Nombre cyclomatique

$$\gamma = L - p + 1 = 5 - 4 + 1 \Rightarrow \gamma = 2$$

Donc on trouve deux chaînes continues fermées indépendantes faisant intervenir toutes

les liaisons. Choisissons : (1)-(2)-(3)-(1) et (1)-(3)-(4)-(1)

4. Expression des torseurs cinématiques

Tous les torseurs gardent leur forme en A

$$\begin{aligned}
 \{C_{2/1}\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \\ A}} &
 \{C_{3/1}\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & v_{x31} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \\ A}} &
 \{C_{4/1}\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x41} & 0 \\ 0 & v_{y41} \\ 0 & v_{z41} \end{array} \right\}_{\substack{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \\ A}} &
 \{C_{2/3}\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x23} & p' \cdot \omega_{x23} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \\ A}} \\
 \{C_{3/4}\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x34} & 0 \\ 0 & v_{y34} \\ 0 & v_{z34} \end{array} \right\}_{\substack{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \\ A}}
 \end{aligned}$$

Chaîne (1)-(2)-(3)-(1) :

$$\begin{aligned}
 \{C_{1/2}\} + \{C_{2/3}\} + \{C_{3/1}\} &= \{0\} \\
 -\omega_{x21} + \omega_{x23} &= 0 \\
 v_{x31} + p' \cdot \omega_{x23} &= 0
 \end{aligned}$$

Chaîne (1)-(3)-(4)-(1) :

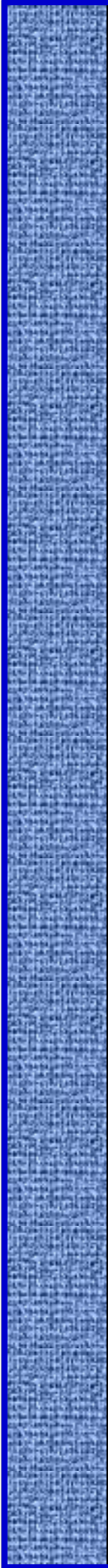
$$\begin{aligned}
 \{C_{1/3}\} + \{C_{3/4}\} + \{C_{4/1}\} &= \{0\} \\
 \omega_{x34} + \omega_{x41} &= 0 \\
 -v_{x13} &= 0 \\
 -v_{y34} + v_{y41} &= 0 \\
 -v_{z34} + v_{z41} &= 0
 \end{aligned}$$

Les 6 équations cinématiques sont indépendantes donc : $r_c=6$.

Il y a 9 inconnues cinématiques donc : $N_c=9$.

$$m = N_c - r_c = 9 - 6 \Rightarrow m = 3$$

$$h = m + 6\gamma - N_c \Rightarrow h = 3 + 6 \times 2 - 9 = 15 - 9 = 6 \Rightarrow h = 6$$



Chapitre 3

Organes de transmission du mouvement et de puissance

3.1. Transmission par poulie et courroie

La transmission d'un mouvement de rotation par poulie et courroie est possible grâce à la résistance que deux matériaux en contact opposent à leur déplacement par glissement l'un sur l'autre.

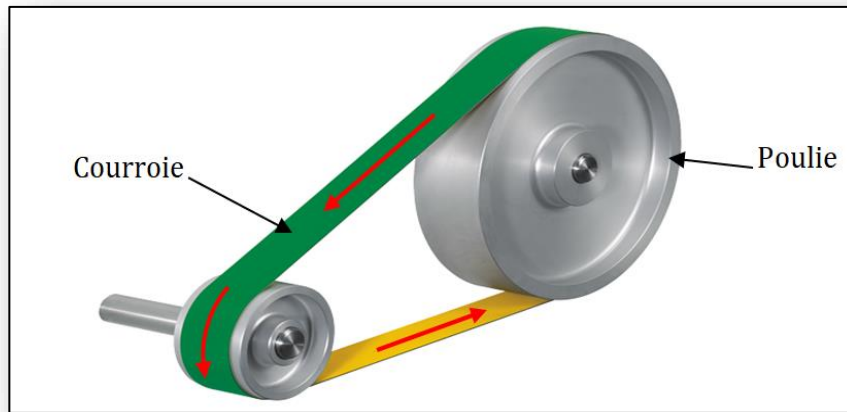


Fig.3.1. Poulie et courroie

La courroie est entraînée par adhérence sur la poulie motrice (Fig.3.1). Elle entraîne à son tour la poulie réceptrice par adhérence. Il est nécessaire de la tendre convenablement pour éviter son glissement sur les poulies.

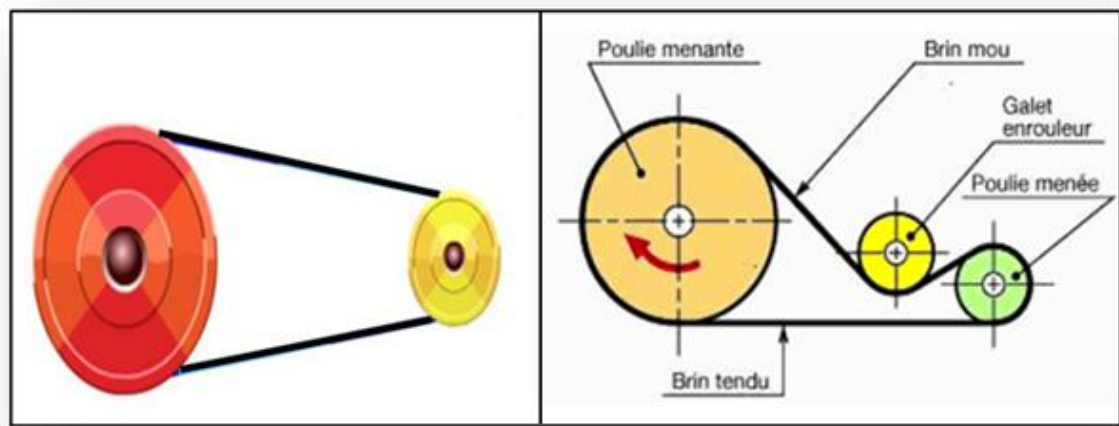


Fig.3.2

Fig.3.3. Carroie tendue

Lorsque les diamètres des poulies sont très différents et que leurs axes sont rapprochés (Fig.3.2), l'angle d'enroulement de la courroie sur la petite poulie se trouve réduit et favorise le glissement.

Pour éviter d'avoir à tendre exagérément la courroie on utilise alors un enrouleur de courroie (Fig.3.3) qui réduit l'adhérence à une valeur convenable.

3.1.1. Sens de rotation

La courroie droite (Fig.3.4) transmet le mouvement sans changement de rotation.

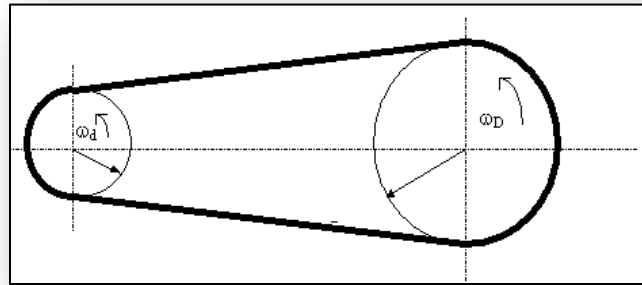


Fig.3.4

La courroie croisée et non croisée (Fig.3.5) inverse le sens de rotation.

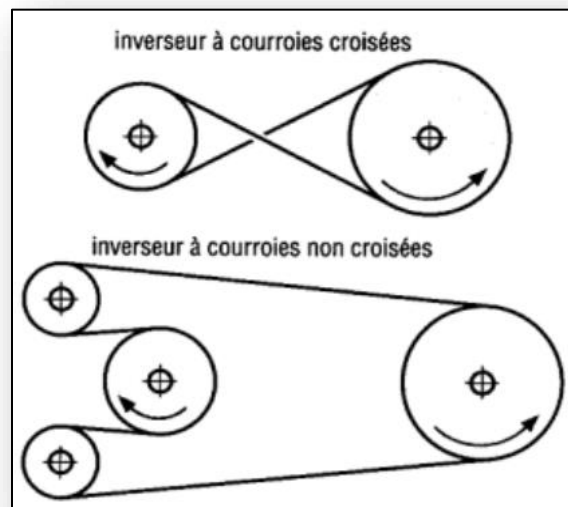


Fig.3.5

3.1.2. Calcul de la vitesse de rotation

Nous considérons le mécanisme en mouvement uniforme (Fig.3.6). Pendant chaque minute les deux poulies font défiler la même longueur de courroie.

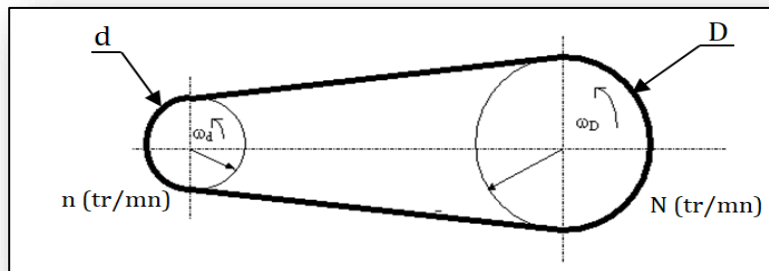


Fig.3.6

Pour la petite cette longueur vaut : πdn .

Pour l'autre poulie elle vaut : πDN .

Ces deux quantités égales sont les vitesses circonférentielles des poulies.

$$\pi dn = \pi DN$$

L'égalité ci-dessus permet d'écrire :

$$dn = DN$$

Ou $\frac{n}{N} = \frac{D}{d}$

Le rapport des vitesses de rotation de deux poulies est égal au rapport inverse de leurs diamètres.

$$\frac{n}{N} = \frac{D}{d}$$

3.1.3. Poulies étagées

Les poulies étagées (Fig.3.7) permettent d'obtenir plusieurs vitesses de rotation d'un arbre récepteur à partir d'un arbre moteur tournant à vitesse constante. La courroie peut être passée d'un étage à un autre pendant l'arrêt.

Puisque la même courroie est utilisée successivement sur les différents étages, la somme des diamètres des poulies placées en vis-à-vis doit être la même pour tous les étages.

Souvent, les deux poulies étagées du mécanisme sont identiques et les différences entre les diamètres des poulies consécutives ont la même valeur.

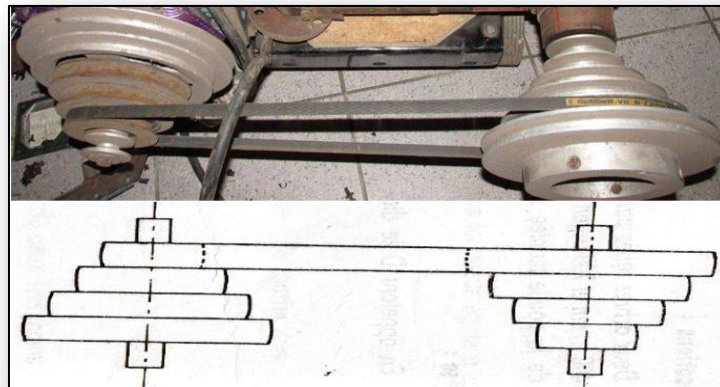


Fig.3.7

3.1.4. Equilibrages de poulies

Lorsqu'un mouvement de rotation doit être transmis avec une très importante modification de vitesse, par exemple une vitesse 6 fois plus faible que celle de l'arbre moteur, l'utilisation d'une seule courroie conduit à un encombrement souvent inacceptable. Dans ce cas, on peut alors utiliser un équipage de poulie (Fig.3.8).

La poulie 1 est motrice ; la poulie 4 est réceptrice. La modification de vitesse s'effectue en deux phases.

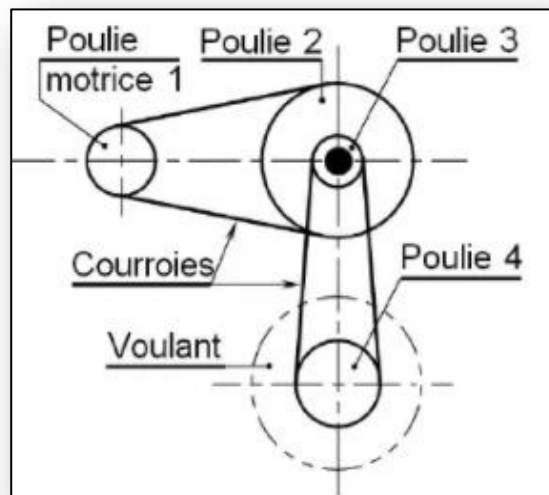


Fig.3.8

EXERCICES

Exercice 1:

Deux arbres reliés par un mécanisme à poulies et courroie tournent respectivement aux vitesses de 400 tr/mn et 700 tr/mn. Le premier est muni d'une poulie de diamètre 140 mm.

Quel est le diamètre de la poulie montée sur le second ?

Réponse:

En appelant D le diamètre cherché, la relation entre les vitesses et diamètres s'écrit :

$$\frac{400}{700} = \frac{D}{140} \Rightarrow D = \frac{140 \times 400}{700}$$
$$\Rightarrow \boxed{D = 800 \text{ mm}}$$

Exercice 2:

L'arbre moteur d'un mécanisme à poulie et courroie tourne à la vitesse de 300 tr/mn. Il est muni d'une poulie de diamètre 180 mm. L'autre poulie a un diamètre de 400 mm.

Quelle est sa vitesse de rotation ?

Réponse:

En appelant N la vitesse cherchée, on a :

$$\frac{N}{300} = \frac{180}{400} \Rightarrow N = \frac{300 \times 180}{400}$$
$$\Rightarrow \boxed{N = 135 \text{ tr/mn}}$$

Exercice 3:

Un arbre est entraîné par une poulie à la vitesse N de 800 tr/mn. La vitesse linéaire de la courroie est de 12.56 m/s.

Quel est le diamètre de la poulie ?

Réponse:

La vitesse circonférentielle de la poulie est égale à la vitesse linéaire de la courroie ; soit : 12.56 m/s .

Ou $12.56 \times 60 = 753.6 \text{ m/mn}$.

En appelant D le diamètre cherché, on a donc :

$$\pi DN = 753.6 \text{ m/mn}$$

$$3.14 \times 800D = 753.6 \text{ m/mn}$$

$$D = \frac{753.6}{3.14 \times 800} \Rightarrow D = 300 \text{ mm}$$

Exercice 4:

Un couple de poulies étagées comporte trois étages. Le diamètre des petites poulies mesure 80 mm. Le plus petit rapport des vitesses susceptible d'être obtenu est 1/3.

Calculer les diamètres des autres poulies.

Réponse:

Le plus petit rapport des vitesses de rotation est obtenu lorsque la courroie est placée sur la plus petite poulie réceptrice et la plus grande poulie motrice située vis-à-vis. Dans ces conditions, si D est le diamètre de cette dernière, on a :

$$\frac{1}{3} = \frac{80}{D}$$

$$D = 3 \times 80 \Rightarrow D = 240 \text{ mm}$$

Les diamètres des poulies extrêmes différent de :

$$240 - 80 = 160 \text{ mm}$$

La différence entre le diamètre des poulies médianes et celui de chaque poulie voisine est donc de 80 mm.

En définitive, les diamètres consécutifs de chaque poulie étagée sont :

80 mm, 160 mm, 240 mm.

Exercice 5:

Une poulie motrice de diamètre 100 mm tourne à une vitesse de 1500 tr/mn, pour faire tourner un arbre récepteur à une vitesse de 250 tr/mn au moyen d'une courroie (Fig.3.9).

Quel est le diamètre D à adopter à la poulie réceptrice?

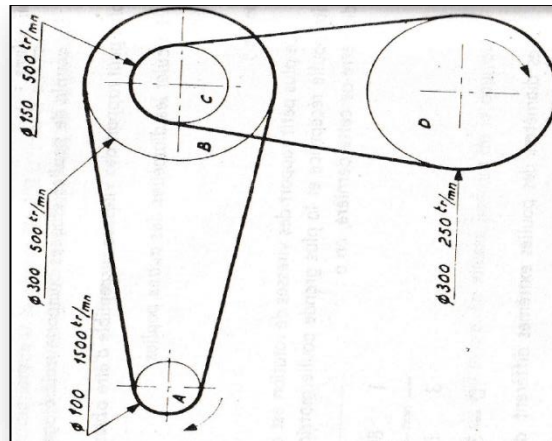


Fig.3.9

Réponse:

$$\frac{1500}{250} = \frac{D}{100} \Rightarrow D = 600 \text{ mm} = 0.6 \text{ m}$$

et l'on trouve la liaison directe est donc encombrante.

Exercice 6:

Quelles sont les vitesses de rotation des poulies B, C, D de l'équipage ci-dessous ?

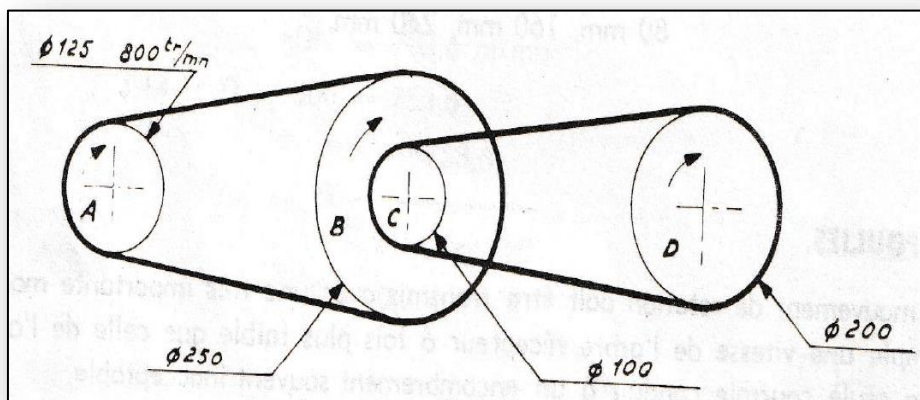


Fig.3.10

Réponse:

En appelant N_1 la vitesse de rotation de la poulie B, on a :

$$\frac{N_1}{800} = \frac{125}{250} \Rightarrow \frac{N_1}{800} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_1 = 400 \text{ tr/mn}$$

La vitesse de rotation de la poulie C est également 400tr/mn.

La vitesse de rotation N_2 de la poulie D est telle que :

$$\frac{N_2}{400} = \frac{100}{200} \Rightarrow \frac{N_2}{400} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_2 = 200 \text{ tr/mn}$$

Exercice 7:

Quels sont les diamètres des poulies B et D de l'équipage ci-dessous ?

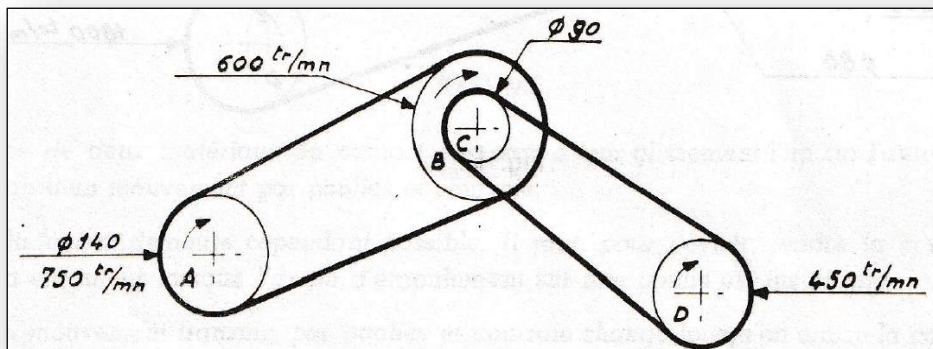


Fig.3.11

Réponse:

En appelant D_1 le diamètre de la poulie B, on a :

$$\frac{D_1}{140} = \frac{750}{600} \Rightarrow D_1 = \frac{140 \times 750}{600}$$

$$\Rightarrow D_1 = 175 \text{ mm}$$

Le diamètre D_2 de la poulie D est également 400 tr/mn.

La vitesse de rotation N_2 de la poulie D est tel que :

$$\frac{D_2}{90} = \frac{600}{450} \Rightarrow D_2 = \frac{600 \times 90}{450}$$

$$\Rightarrow D_2 = 120 \text{ mm}$$

Exercice 8:

Dans l'équipage de la figure 12, ci-dessous :

- quelle est la vitesse de rotation de la poulie à deux étages ?
- quel est le diamètre de la poulie D ?
- quelles sont les vitesses linéaires des courroies en mètres par seconde ?

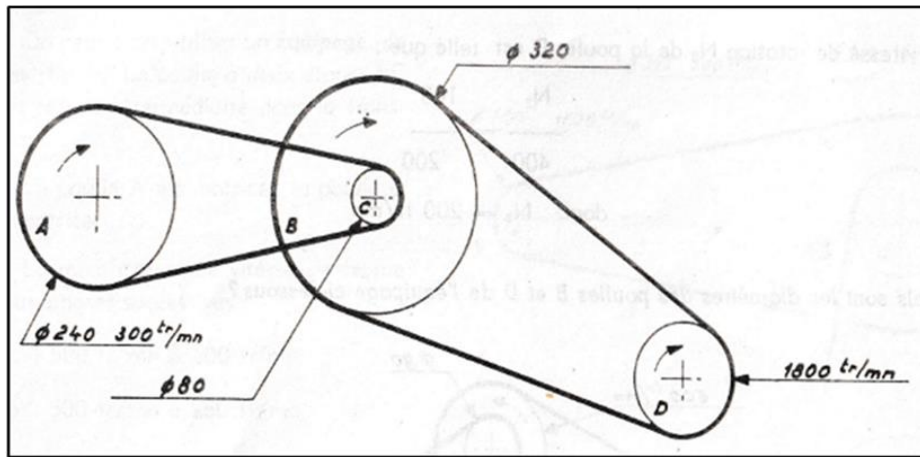


Fig.3.12

Réponse:

Soit N la vitesse de rotation de la poulie à deux étages.

On a :

$$\frac{N}{300} = \frac{240}{80} \Rightarrow \frac{N}{300} = 3$$

$$\Rightarrow N = 900 \text{ tr/mn}$$

Le diamètre D cherché est tel que :

$$\frac{D}{320} = \frac{900}{18000} \Rightarrow \frac{D}{320} = \frac{1}{62}$$

$$\Rightarrow D = 160 \text{ mm}$$

Soit V_1 la vitesse linéaire de la courroie des poulies A et C.

On a :

$$V_1 = \frac{3.14 \times 0.24 \times 300}{60} \Rightarrow V_1 = 3.768 \text{ m/s}$$

La vitesse linéaire V_2 de la seconde courroie est :

$$V_2 = \frac{3.14 \times 0.16 \times 18000}{60} \Rightarrow V_1 = 15.072 \text{ m/s}$$

3.2. Transmission par roues de friction

On peut transmettre le mouvement de rotation d'un arbre moteur à un arbre récepteur parallèle au moyen de cylindres tangents calés sur chacun d'eux (Fig.3.13). Ce sont des roues de friction.

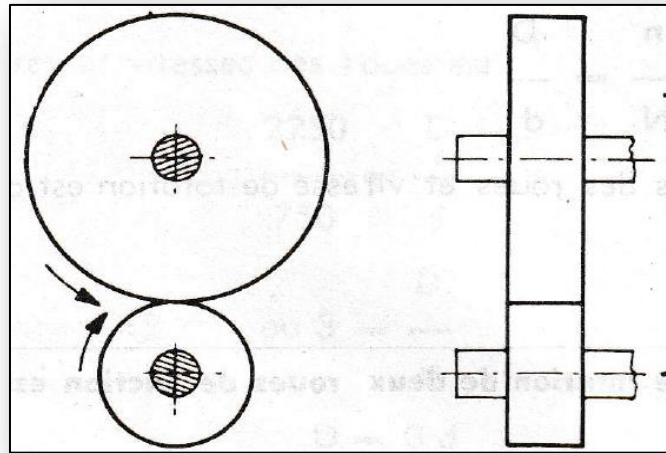


Fig.3.13

L'entraînement de la roue réceptrice s'effectue par adhérence sur la roue motrice, à la génératrice de contact. Les sens de rotation sont inversés.

Ce mode de transmission convient lorsque les arbres sont rapprochés.

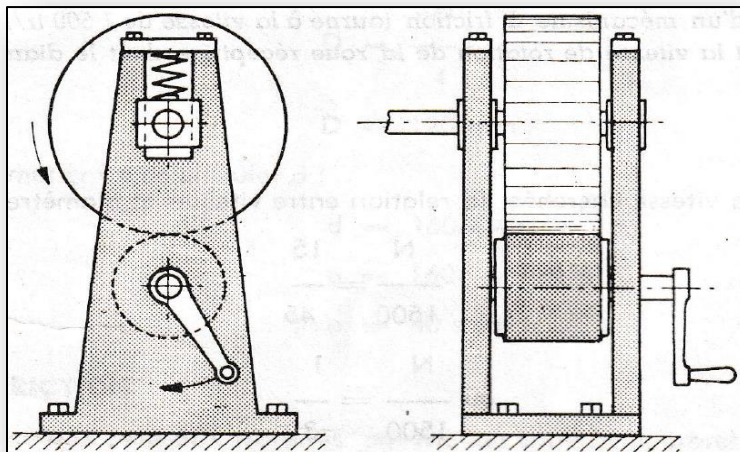


Fig.3.14

Le fait que la zone de contact est très petite crée cependant une difficulté pour éviter le glissement. Pratiquement, il est nécessaire d'appliquer les roues l'une sur

l'autre au moyen d'un dispositif à ressort (Fig.3.14). De plus, une roue est souvent revêtue d'une garniture afin de diminuer encore les risques de glissement.

3.2.1. Calcul de la vitesse de rotation

S'il ne se produit aucun glissement, les deux roues du mécanisme ont même vitesse circonférentielle.

Dans la Fig.3.15 :

Pour la roue A, cette vitesse est : $V_1 = \pi dn$.

Pour la roue B, cette vitesse est : $V_2 = \pi DN$.

On a : $\pi dn = \pi DN$

Ou : $dn = DN$

Ou encore : $\frac{n}{N} = \frac{D}{d}$

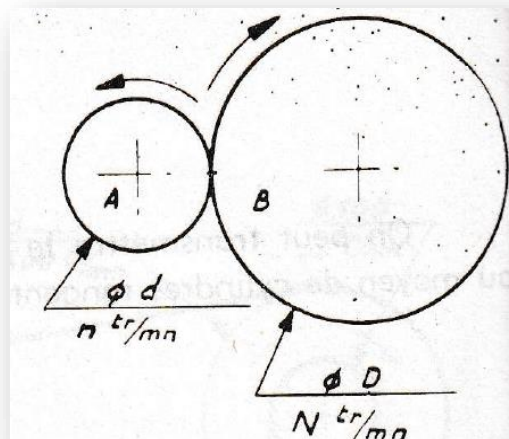


Fig.3.15

La relation entre diamètre des roues et vitesse de rotation est donc identique à celle du mécanisme à poulies et courroie :

Le rapport des vitesses de rotation de deux roues de friction est égal au rapport inverse de leurs diamètres.

$$\frac{n}{N} = \frac{D}{d}$$

3.2.2. Cônes et galets de friction

Un mouvement de rotation peut être transmis par friction entre deux arbres concourants au moyen de cône (Fig.3.16), ou d'un galet appliqué sur un plateau (Fig.3.17). Dans ce dernier cas, la zone de contact est très petite.

Le rapport des vitesses est égal au rapport inverse des diamètres des cercles en contact, comme pour les roues cylindrique de friction.

Pour les cônes, on peut choisir par exemple les diamètres des bases d et D (Fig.3.16) ou les diamètres moyens.

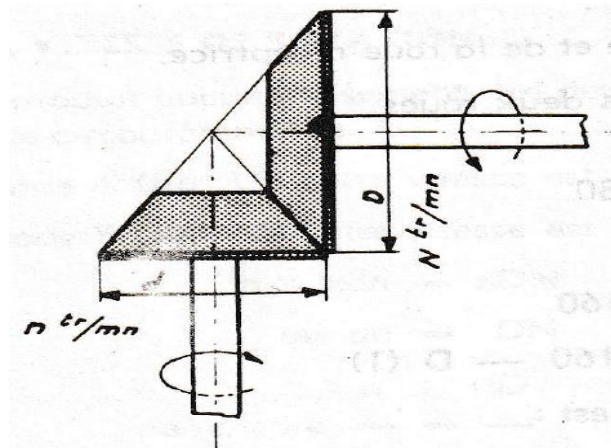


Fig.3.16

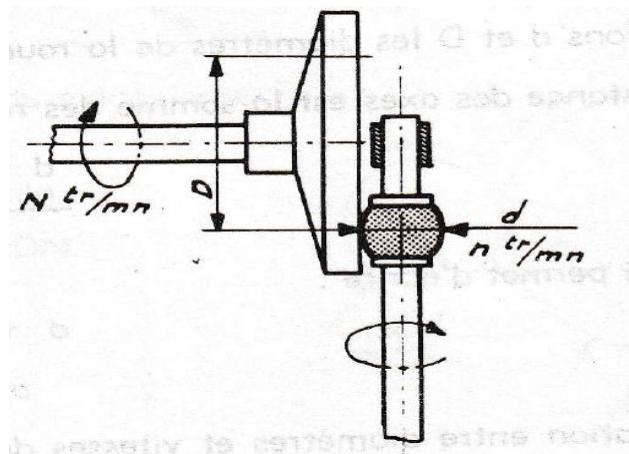


Fig.3.17

Dans le système à galet, le contact s'effectue sur un seul cercle de chaque élément. Il faut donc prendre les diamètres d et D indiqués sur la figure 3.17.

3.2.3. Avantages et inconvénients des transmissions par friction

Avantages : Les transmissions par roues de frictions sont silencieuses et peu coûteuses. Elles conviennent particulièrement aux grandes vitesses de rotation, lorsque les efforts appliqués sont faibles. Si ces efforts deviennent accidentellement trop importants, le glissement évite automatiquement la détérioration du mécanisme.

Inconvénients : Le glissement est pratiquement inévitable. On ne peut donc utiliser ces mécanismes si l'on désire une rigoureuse régularité du mouvement transmis et lorsque les efforts appliqués sont importants. De plus, l'application des roues l'une sur l'autre provoque une usure assez sensible des garnitures et des paliers.

EXERCICES

Exercice 1:

La roue motrice d'un mécanisme à friction tourne à la vitesse de 1500 tr/mn. Son diamètre mesure 15 mm.

Quelle est la vitesse de rotation de la roue réceptrice dont le diamètre mesure 45 mm ?

Réponse:

En appelant N la vitesse cherchée, la relation entre vitesses et diamètres s'écrit :

$$\frac{N}{1500} = \frac{15}{45} \text{ ou } \frac{N}{1500} = \frac{1}{3} \Rightarrow N = 500 \text{ tr/mn}$$

Exercice 2:

On veut établir une transmission par roues de friction entre deux arbres parallèles dont les axes sont distants de 80 mm. Les vitesses de rotation de l'arbre récepteur doivent être respectivement 2250 tr/mn et 750 tr/mn.

Quels sont les diamètres des roues à caler sur ces arbres?

Réponse:

Appelons d et D les diamètres de la roue motrice et de la roue réceptrice. La distance des axes est la somme des rayons des deux roues :

$$\frac{d+D}{2} = 80, \text{ ce qui permet d'écrire : } d+D=160, \text{ d'où : } d=160-D \quad (1)$$

La relation entre diamètre et vitesses des roues est :

$$\frac{2250}{750} = \frac{D}{d} \text{ ou } 3 = \frac{D}{d}, \text{ d'où } D=3d \quad (2)$$

En remplaçant (1) dans (2) on trouve :

$$D=3 \times (160-D) \Rightarrow D=120 \text{ mm}$$

La relation (1) permet enfin de calculer d :

$$d=160-D=160-120=40 \text{ mm donc : } d=40 \text{ mm}$$

3.3. Transmission par engrenages

Les engrenages sont des composants mécaniques essentiels. Ils font partie des systèmes de transmission de mouvement et de puissance les plus utilisés, les plus résistants et les plus durables.

Un engrenage de qualité doit assurer un bon rendement et une transmission exempte d'à-coups et de vibrations; Ce qui se traduit par trois exigences fondamentales:

- ✓ rapport constant du bras de levier,
- ✓ contact continu entre deux dents,
- ✓ absence de glissement.

Ils sont normalisés. Les engrenages fabriqués avec la norme internationale ISO présentent l'avantage d'être facilement interchangeables. Ils permettent des possibilités de fabrication plus économiques (conception type, méthodes de calcul normalisées, taillage et contrôle automatisés, équipements standards). Lorsqu'il s'agit d'engrenages pour de très grandes séries (automobiles...) les constructeurs s'écartent de ces standards afin d'optimiser les coûts.

Toutefois, en raison de la forme spéciale du profil des dents, les problèmes de fabrication sont ardues. Lorsqu'une haute précision n'est pas requise, on peut se contenter d'engrenages moulés (fontes d'acier, d'aluminium, de bronze, matières plastiques).

Dans les autres cas, les engrenages sont taillés au moyen de fraises animées de mouvements non linéaires, puis rectifiés à la meule ou à la main et, éventuellement, rodés. Souvent, les dents sont l'objet de traitements de surface qui leur confèrent une grande dureté superficielle.

L'évolution des machines-outils a permis de concevoir des engrenages de forme extrêmement complexe, Cela répond à des impératifs très particuliers, tels que les ponts arrière de voitures ou les transmissions reliant des axes de direction des véhicules routiers.

3.1. Classification des engrenages

Ensemble de deux roues munies de dents assurant un entraînement dit positif (sans glissement possible) entre deux axes peu éloignés l'un de l'autre (Fig.3.18).

On appelle :

Roue : la roue de l'engrenage qui a le plus grand nombre de dent,

Pignon : la roue de l'engrenage qui a le plus petit nombre de dents.

Les dents de la roue motrice pénètrent dans les intervalles de l'autre et transmettent le mouvement par poussée.

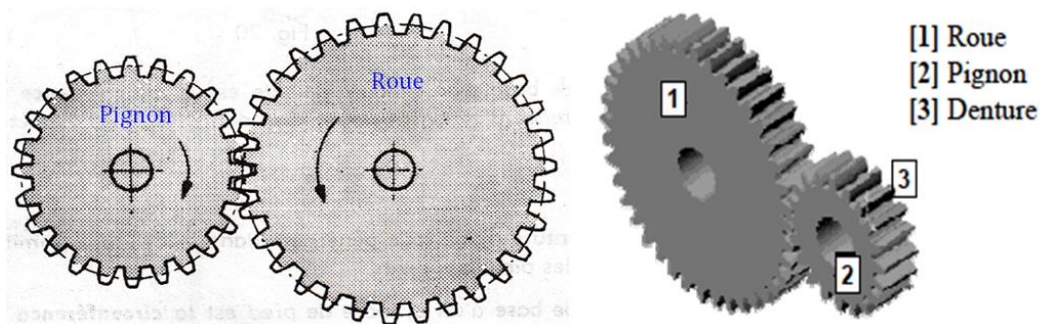
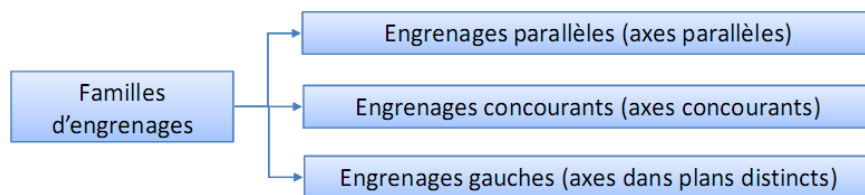


Fig.3.18 Eléments d'engrenage

Les engrenages peuvent se répartir en trois familles selon la position et l'orientation relative de leurs axes :



Dans chacune de ces familles on retrouve différents types d'engrenages; Ces types sont présentés dans les diapositives qui suivent :

3.1.1 Engrenages droits à denture droite

- ✓ Les arbres sont parallèles et les dents des deux engrenages sont également parallèles à l'axe de rotation des arbres;
- ✓ Ce sont les plus simples et les plus économiques.

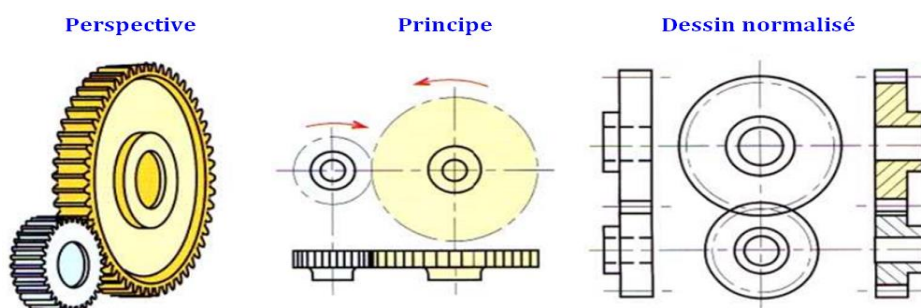


Fig.3.19 Engrenages droits à denture droite.

3.1.2. Engrenages droits à denture hélicoïdale

- ✓ Les dents des deux engrenages sont inclinés par rapport à l'axe de rotation des arbres;
- ✓ À taille égale, ils sont plus silencieux et plus performants que les précédents pour transmettre de la puissance et du couple;
- ✓ L'inclinaison des dentures engendre des efforts axiaux.

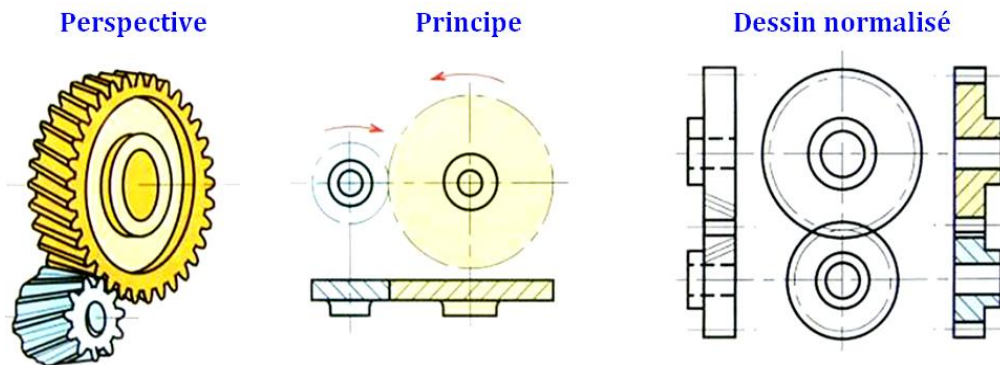


Fig.3.20 Engrenages droits à denture hélicoïdale.

3.1.3. Engrenages coniques

- ✓ Les dents sont taillées dans des surfaces coniques;
- ✓ Ils sont utilisés pour transmettre le mouvement entre des arbres concourants, perpendiculaires ou non;
- ✓ La denture peut être droite mais aussi hélicoïdale ou spirale.

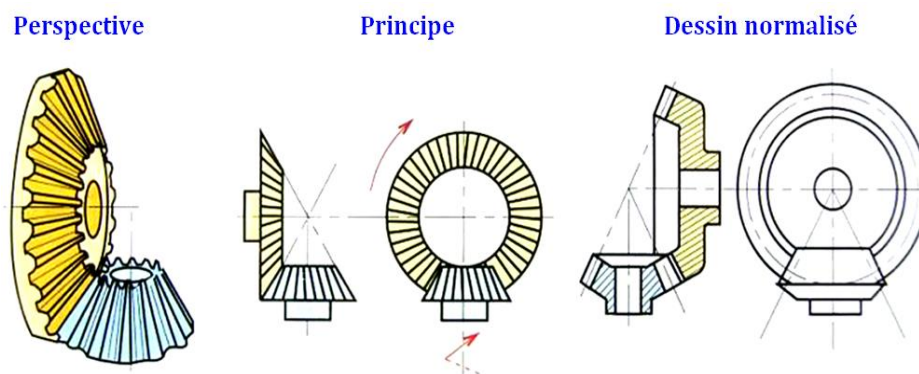


Fig.3.21 Engrenages coniques.

3.1.4. Engrenages roue et vis sans fin

- ✓ L'une des roues ressemble à une vis et l'autre à une roue hélicoïdale;

- ✓ Le sens de rotation de la roue dépend de celui de la vis mais aussi de l'inclinaison de la denture, filet à gauche ou à droite;
- ✓ L'irréversibilité est possible.

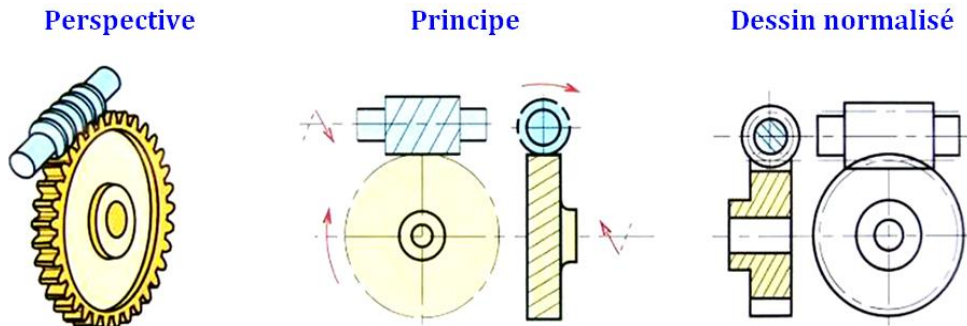


Fig.3.22 Engrenages roue et vis sans fin.

3.2. Engrenages droits à denture droite

3.2.1. Types et nomenclature

La couronne est également appelée engrenage à denture interne.

3.2.2. Définitions

La géométrie des engrenages est entièrement décrite par un ensemble de paramètres qui sont également utilisés pour leur normalisation.

Cercle primitif : Cercle sur lequel se trouvent les points de contact des engrenages.

Cercle de base : Cercle tangent à la droite normale aux points de contact sur les dents (appelé droite de pression).

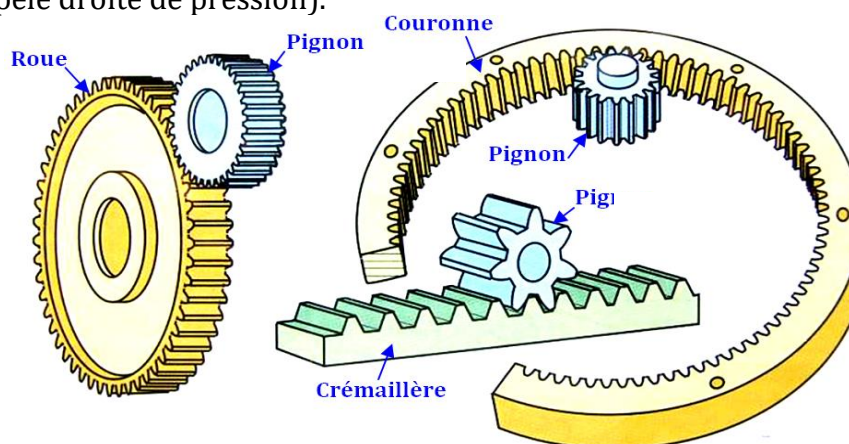


Fig.3.23 La couronne.

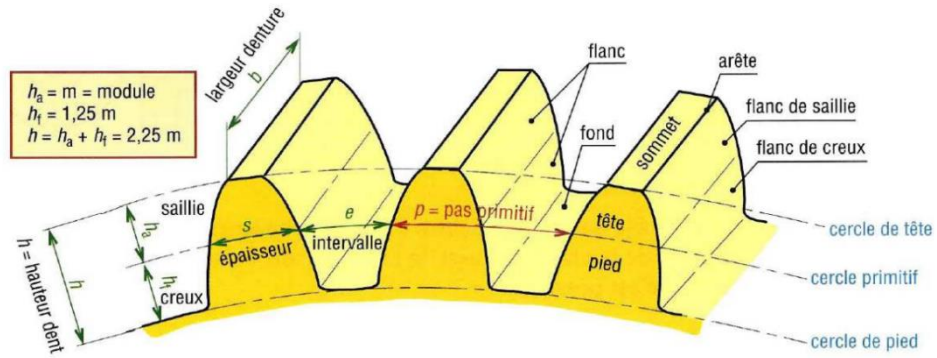


Fig.3.24 Dimensions et paramètres de la normalisation des dents.

Angle de pression α : angle de la droite de pression qui caractérise aussi la forme des dents. Il peut cependant varier (15° à 30°), ce qui permet de définir des dentures spécifiques pour certaines applications.

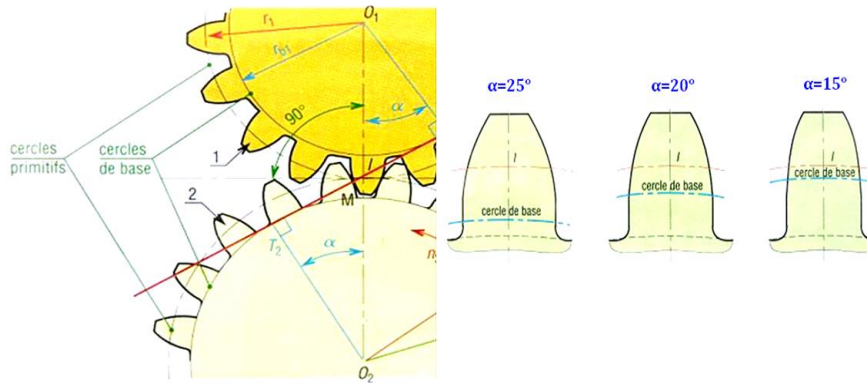


Fig.3.25 Angle de pression α .

Cercle de tête : Cercle correspondant au diamètre maximal de l'engrenage.

Cercle de pied : Cercle correspondant au diamètre minimal de l'engrenage.

Ces deux derniers cercles ne sont toutefois pas utilisés dans les calculs d'engrenages.

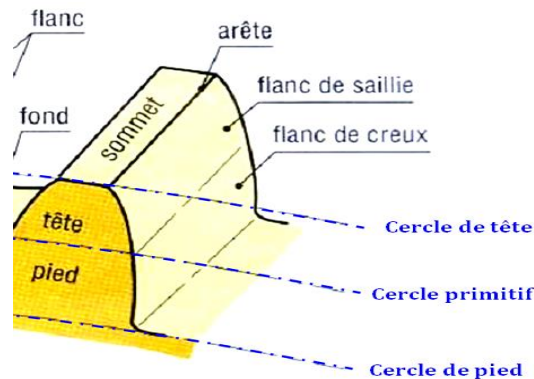


Fig.3.26 Différents cercle d'engrange.

Le cercle primitif sert de référence pour la définition des dimensions de la dent et d'autres paramètres (Fig.3.24):

- ✓ **Saillie h_a** : Différence entre les rayons du cercle de tête et du cercle primitif.
- ✓ **Creux h_f** : Différence entre les rayons du cercle primitif et du cercle de pied.
- ✓ **Hauteur h** : Différence entre les rayons du cercle de tête et de pied. C'est aussi la somme de la saillie h_a et du creux h_f .

Les paramètres suivants sont fréquemment utilisés dans diverses formules décrivant la géométrie des engrenages:

- ✓ **Pas primitif p** : Longueur d'arc entre deux dents successives mesurée sur le cercle primitif.
- ✓ **Module m** : Quotient du pas exprimé en mm par le nombre π . L'épaisseur de la dent et sa résistance dépendent du module.

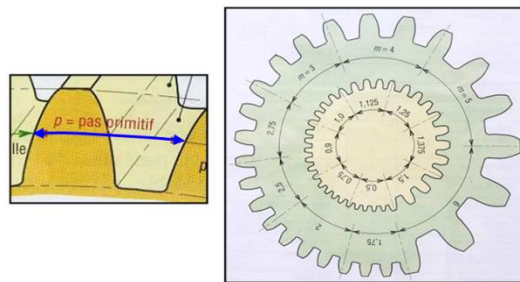


Fig.3.27 Pas primitif et module m .

$$m = \frac{p}{\pi} (mm)$$

En plus des paramètres présentés précédemment, il faut aussi définir les variables suivantes :

- ✓ Vitesse angulaire (ω).
- ✓ Nombre de tours/minute (n).
- ✓ Nombre de dents (Z).
- ✓ Rayon primitif (r).
- ✓ Diamètre primitif (d).
- ✓ Entraxe (a).

Note : A chaque variable peut être associé un indice permettant de distinguer les deux engrenages.

- ✓ Pignon (menant) 1.
- ✓ Roue (menée) 2.

3.2.3. Formules de base

- Formules relatives à un engrenage seul :

$$m = \frac{p}{\pi} = h_a(mm), \text{ module}$$

$$d = m \times Z(mm), \text{ diamètre primitif}$$

$$p = \frac{\pi \times d}{Z} = \frac{\pi(m \times Z)}{Z} = \pi \times m(mm), \text{ pas primitif}$$

h_a : saillie (mm), $\pi \times d$: circonférence primitive, Z : nombre de dents.

- Formules relatives au fonctionnement d'une paire d'engrenages :

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}(mm)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

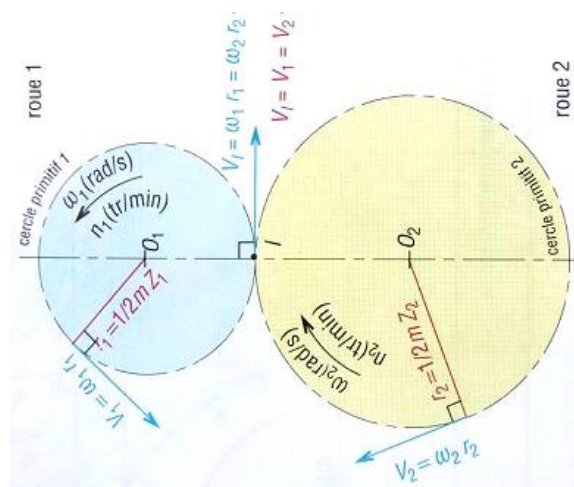
ω : vitesse angulaire (rad/s).

n : vitesse de rotation (tr/mn).

T : couple transmis.

Fondement de la formule:

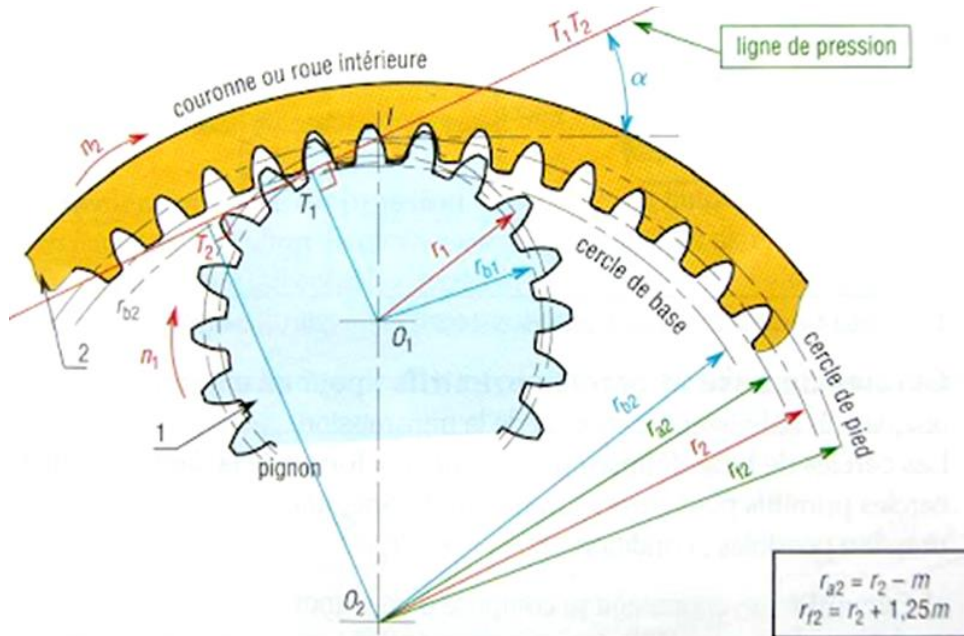
$$P = T \times \omega$$



3.2.4. Cas des roues intérieures

Les formules précédentes s'appliquent à l'exception de l'entraxe a.

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2} \text{ (mm)}$$

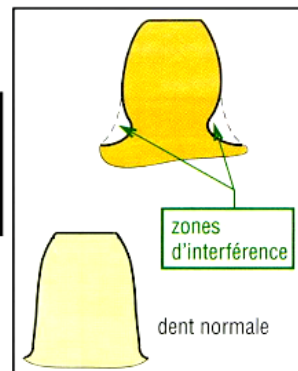


3.2.5. Phénomène d'interférence

Selon le nombre de dents des engrenages, il peut y avoir des problèmes d'interférence au niveau du pied des dents.

- ✓ Pour éviter ce type de problèmes, il faut respecter le tableau suivant :
- ✓ Module m: Quotient du pas exprimé en mm par le nombre π .
- ✓ L'épaisseur de la dent et sa résistance dépendent du module.

Nombre de dents évitant l'interférence ($\alpha = 20^\circ$)					
Z_1	13	14	15	16	17
$Z_{2 \max}$	16	26	45	101	1309



3.3. Engrenages droits à denture hélicoïdale

3.3.1 Généralités

- Ils transmettent le mouvement entre deux arbres parallèles;
- L'angle d'inclinaison de la denture ou angle d'hélice β , est le même pour les deux roues mais en sens inverse.

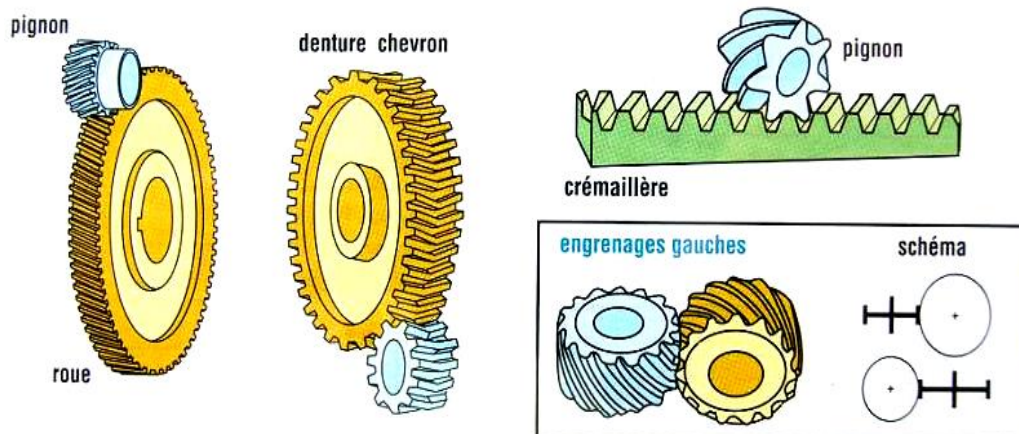


Fig.3.28 Engrenages droits à denture hélicoïdale.

3.3.2. Comparaison avec engrenages à denture droite

Avantages :

- ✓ Transmission plus souple, plus progressive et moins bruyante (plus l'angle d'hélice β est élevé, plus c'est vrai).
- ✓ 2,3 ou 4 couples de dents toujours en prise; transmission d'efforts importants à vitesses élevées.
- ✓ Réalisation facile d'un entraxe imposé en faisant varier l'angle d'hélice β .

Inconvénients :

- ✓ Force axiale générée par l'angle d'hélice et rendement un peu moins bon.
- ✓ Utilisation comme engrenage mobile (baladeur) impossible; les engrenages doivent toujours rester en prise.

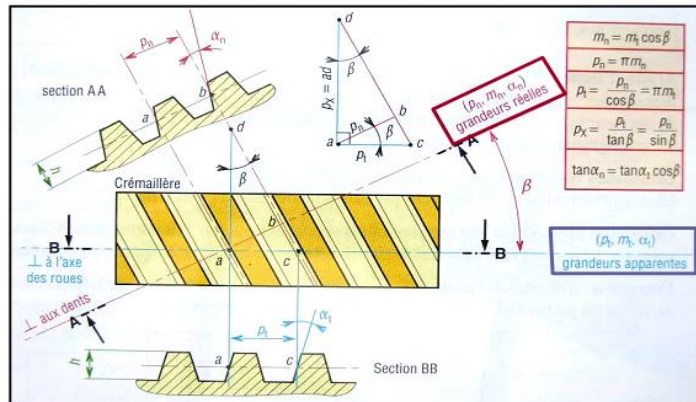
3.3.3. Angle d'hélice β

- L'angle d'hélice β mesure l'inclinaison de la denture par rapport à l'axe de la roue (valeurs usuelles entre 15° et 30°).
- Entraxe a :

$$a = \frac{m_n \cdot (Z_1 + Z_2)}{2 \cos \beta} \quad (mm)$$

$$a = \frac{m_t \cdot (Z_1 + Z_2)}{2} \quad (mm)$$

Z : nombre de dents
 m_n : module réel (mm)
 m_t : module apparent (mm)
 β : angle d'hélice



3.4. Engrenages coniques ou à axes concourants

3.4.1. Généralités

- Permet de transmettre le mouvement entre deux arbres dont les axes sont concourants.
- Les surfaces primitives ne sont plus des cylindres mais des cônes qui sont tangents sur une ligne de contact MM' et avec un sommet commun correspondant au point S.

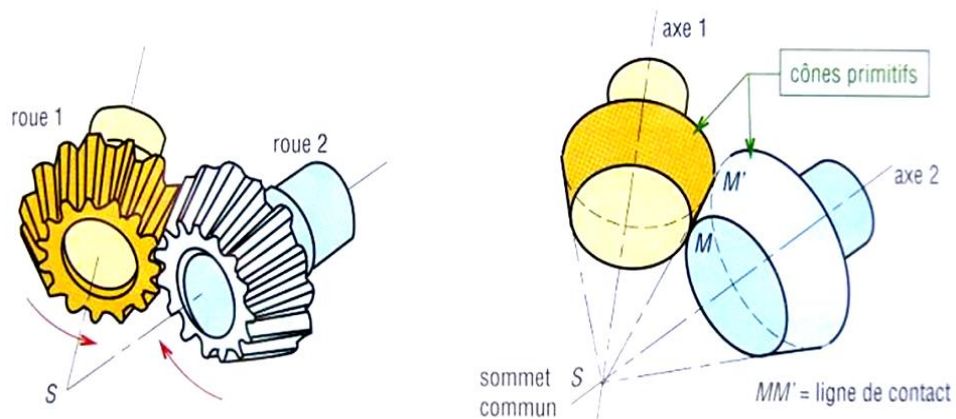
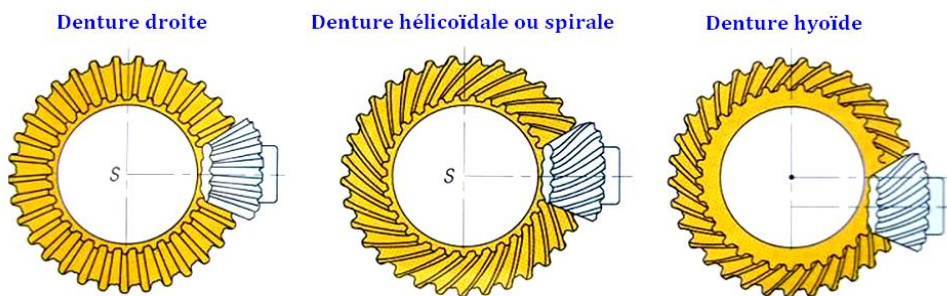


Fig.3.29 Engrenages coniques.

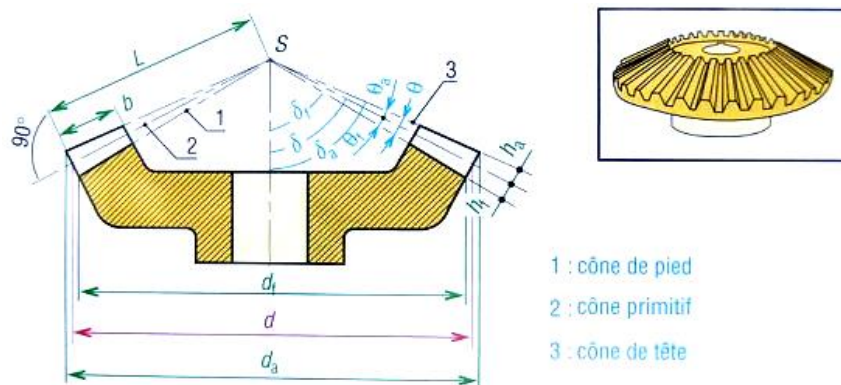
3.4.2. Principaux types

- A denture droite : idem aux engrenages cylindriques.
- A denture hélicoïdale ou spirale : plus progressif et moins de bruit, angle typique de 35° .
- Engrenages hypoides : variante complexe des précédents, axes des roues orthogonaux mais non concourants, frottement élevé.



3.4.3. Principaux paramètres

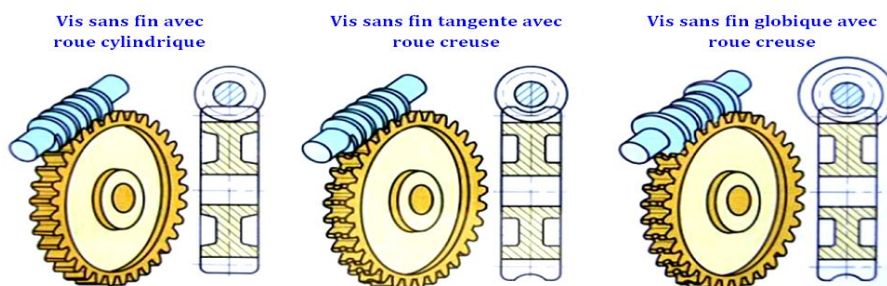
- Les équations vues pour les engrenages cylindriques droits s'appliquent de la même manière.
- On parle ici de cônes plutôt que de cylindres ou de cercles et quelques angles supplémentaires sont définis pour caractériser la relation entre les axes des deux roues.



3.5. Engrenages roues et vis sans fin

3.5.1. Généralités

- La transmission s'effectue entre deux arbres orthogonaux.
- Ils permettent de grands rapports de réduction (jusqu'à 1/200) et offrent des possibilités d'irréversibilité.
- Ils donnent l'engrènement le plus doux et silencieux mais le frottement important entraîne un rendement médiocre.



3.6. Trains d'engrenages

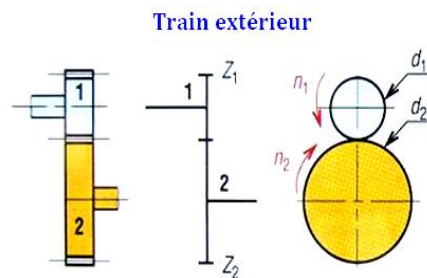
3.6.1. Schématisations

Représentation normalisée des engrenages usuels.

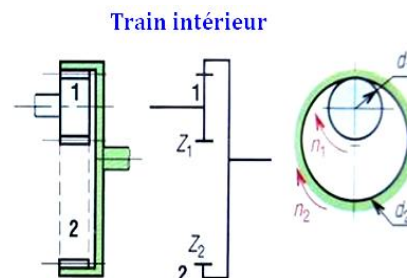
Schémas cinématiques (normalisation)			
roue extérieure	roue intérieure	roue conique	roue et crémaillère
engrenages droits	engrenages coniques	engrenages coniques	roue et vis sans fin

3.6.2. Trains à un engrenage

- Les formules de réduction vues précédemment s'appliquent.
- Un signe négatif indique un changement de sens de rotation entre l'entrée et la sortie.
- L'indice 1 correspond à l'engrenage d'entrée (pignon)



$$R_{2/1} \frac{n_2}{n_1} = - \frac{Z_1}{Z_2} = - \frac{d_1}{d_2}$$



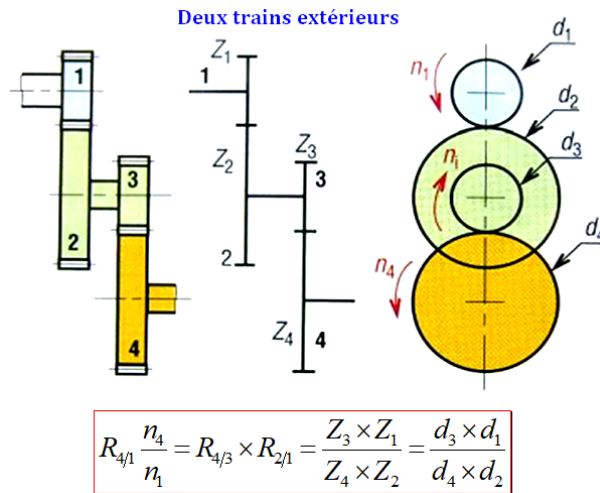
$$R_{2/1} \frac{n_2}{n_1} = - \frac{Z_1}{Z_2} = - \frac{d_1}{d_2}$$

3.6.3. Trains à deux engrenages

Il y a alors deux couples de roues en série.

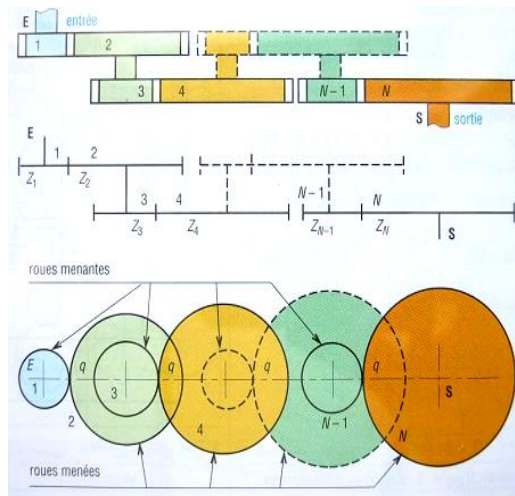
- Le rapport de transmission (réduction) est égal au produit des rapports de transmission de chacun des deux couples de roues. des deux couples de roues.

- L'indice 1 correspond toujours à l'engrenage d'entrée (pignon) tandis que les autres indiquent « le chemin » vers la sortie.



3.6.4. Cas général : trains à N engrenages

On généralise les équations précédentes.



$$R_{S/E} \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y \frac{\text{produit } Z_{\text{roues menantes}}}{\text{produit } Z_{\text{roues menées}}}$$

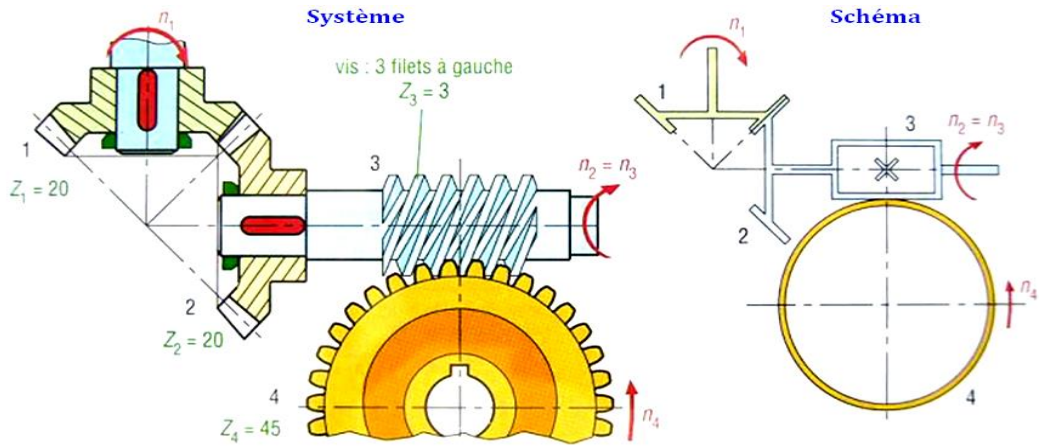
$$R_{S/E} \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y \frac{Z_1 Z_3 \dots Z_{N-1}}{Z_2 Z_4 \dots Z_N}$$

$$R_{S/E} \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y R_{2/1} R_{4/3} \dots R_{N/N-1}$$

Note : le terme $(-1)^y$ tient compte de la présence d'inverseurs avec $y =$ nombre de contacts entre engrenages.

3.6.5. Cas des systèmes avec vis sans fin

- La formule générale précédente demeure applicable en supprimant le terme $(-1)^y$.
- On doit respecter les spécificités indiquées précédemment pour les vis sans fin.



EXERCICES

Exercice 1:

Soit un engrenage droit à denture droite, pas primitif 6,28 mm (2π), angle de pression 20° , nombre de dents de la roue 80, rapport de transmission 0,25.

➤ Déterminer le nombre de dents du pignon, le module et l'entraxe a.

Réponse:

Nombre de dents :

$$R = 0.25 = \frac{Z_{\text{pignon}}}{Z_{\text{roue}}} \Rightarrow Z_{\text{pignon}} = 0.25 \times Z_{\text{roue}} = 0.25 \times 80 \Rightarrow Z_{\text{pignon}} = 20 \text{ dents}$$

Module :

$$p = m \times \pi, \text{ or } : p = 2 \times \pi, \text{ d'où } : m = 2.$$

Entraxe :

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m \times (Z_{\text{roue}} + Z_{\text{pignon}})}{2} = \frac{2 \times (80 + 20)}{2} \Rightarrow a = 100 \text{ mm}$$

Exercice 2:

Soit un engrenage à denture droite, $m=3$, entraxe approximatif 150 mm, $N_2/N_1=0,25$. Déterminer les nombres de dents des deux roues.

Réponse:

$$m = 3, a = 150 \text{ mm et } N_2/N_1 = 0.25$$

$$a = \frac{m \times (Z_1 + Z_2)}{2} = 150 \Rightarrow 3 \times (Z_1 + Z_2) = 300$$

$$\text{on a : } \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = 0.25 \Rightarrow Z_1 = 0.25 \times Z_2 \text{ donc :}$$

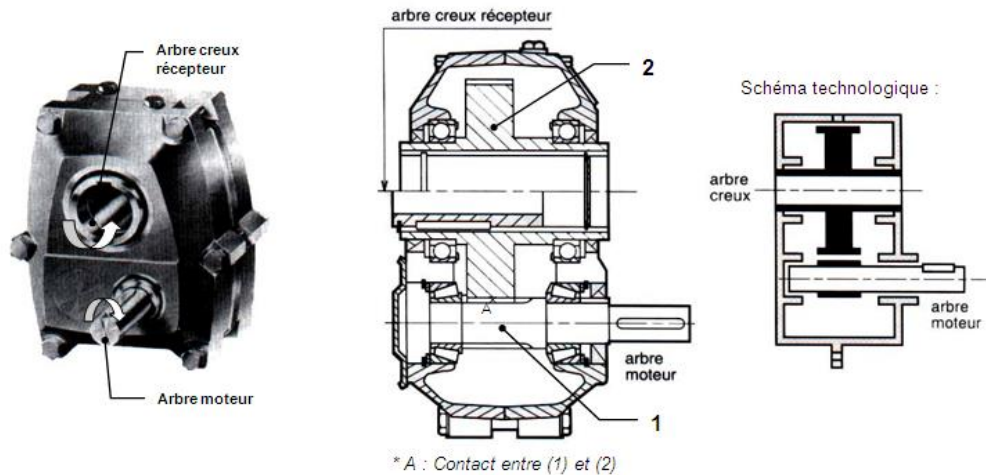
$$3 \times (0.25Z_2 + Z_2) = 300 \Rightarrow Z_2 = 80 \text{ -dents, d'où : } Z_1 = 20 \text{ -dents}$$

Exercice 3:

Soit le mécanisme donné par la figure ci-dessous :

Exercice5:

Soit un réducteur de vitesse à roue dentée à arbre creux, composé d'un engrenage parallèle à denture droite. Le réducteur permet la transmission d'un mouvement de rotation à des vitesses différentes entre l'arbre moteur (plein) et l'arbre récepteur (creux).



On donne :

Pignon moteur (1) : $Z_1 = 20$ dents

Roue réceptrice (2) : $Z_2 = 90$ dents

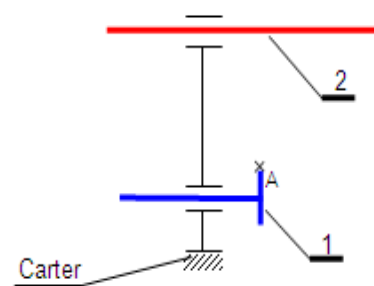
Module : $m = 2$

Vitesse de rotation du moteur : $N_1 = 3000$ tr/min

On demande :

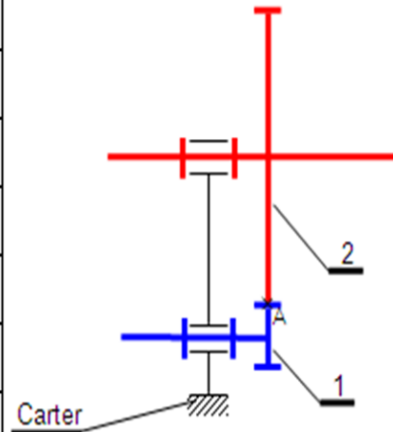
- 1- Compléter le schéma cinématique du réducteur ci-dessous en utilisant deux couleurs différentes (liaisons avec le carter et liaison entre les deux roues dentées)
- 2- Remplir le tableau ci-dessous.

		Calculs	Réponses
Pas	p		
Hauteur de dent	h		
Diamètres primitifs	d1		
	d2		
Diamètres de tête	da1		
	da2		
Entraxe	a		
Raison	$r(2/1)$		
Vitesse de rotation de sortie	N_2		



Réponse :

		Calculs	Réponses
Pas	p	$p = m \cdot \pi = 2 \times \pi$	$2\pi \text{ mm}$
Hauteur de dent	h	$h = ha + hf = 2,25 m = 2,25 \times 2$	4,5 mm
Diamètres primitifs	d1	$d1 = m \cdot z1 = 2 \times 20$	40 mm
	d2	$d1 = m \cdot z2 = 2 \times 90$	180 mm
Diamètres de tête	da1	$da1 = d1 + 2 ha1 = d1 + 2 m = 40 + 2 \times 2$	44 mm
	da2	$da2 = d2 + 2 ha2 = d2 + 2 m = 180 + 2 \times 2$	184 mm
Entraxe	a	$a = (d1+d2)/2 = (180+40)/2$	110 mm
Raison	r(2/1)	$r(2/1) = N2/N1 = z1/z2 = 20/90$	$2/9 = 1/4,5$
Vitesse de rotation de sortie	N2	$N2 = N1 \times r(2/1) = 3000 \times 2/9$	666,67 tr/min



Sommaire

Avant-propos

Table des matières

	Chapitre 1: Généralités et réalisation des liaisons	1
1.1.	Liaisons	2
1.1.2.	Définitions	2
a.	Liaisons parfaites	2
b.	Degré de mobilité d'une liaison	2
1.1.3.	Liaisons élémentaires	3
a.	Liaison ponctuelle	3
b.	Liaison linéaire rectiligne	4
c.	Liaison linéaire annulaire	5
d.	Liaison rotule (Liaison sphérique)	6
e.	Liaison appui plan	7
f.	Liaison pivot glissant	8
g.	Liaison pivot	9
h.	Liaison glissière	10
i.	Liaison hélicoïdale	11
j.	Liaison encastrement	12
1.1.4.	Liaisons composées	13
		15
	Chapitre 2 : Analyse des mécanismes	
2.1.	Définitions	16
2.1.1.	Degré de mobilité d'un mécanisme	16
2.1.2.	Degré d'hyperstatisme d'un mécanisme	16
2.1.3.	Isostatisme ou hyperstatisme	17
2.2.	Etude des chaînes de solides indéformables	18
2.2.1.	Graphe des liaisons	18
2.2.2.	Liaison équivalente	19
a.	Torseur de liaison équivalente à un ensemble de liaisons en parallèle	19
b.	Torseur de la liaison équivalente à un ensemble de liaisons en série	20
2.2.3.	Chaîne continue fermée	20
2.2.4.	Chaîne complexe	21
	Exercices	22
		35
	Chapitre 3 : Organes de transmission du mouvement et de puissance	
3.1.	Transmission par poulie et courroie	36
3.1.1.	Sens de rotation	37

3.1.2.	Calcul de la vitesse de rotation	37
3.1.3.	Poulies étagées	38
3.1.4.	Equilibrages de poulies	39
	Exercices	40
3.2.	Transmission par roues de friction	46
3.2.1.	Calcul de la vitesse de rotation	47
3.2.2.	Cônes et galets de friction	48
3.2.3.	Avantages et inconvénients des transmissions par friction	49
	Exercices	50
3.3.	Transmission par engrenages	51
3.1.	Classification des engrenages	51
3.1.1	Engrenages droits à denture droite	52
3.1.2.	Engrenages droits à denture hélicoïdale	53
3.1.3.	Engrenages coniques	53
3.1.4.	Engrenages roue et vis sans fin	53
3.2.	Engrenages droits à denture droite	54
3.2.1.	Types et nomenclature	54
3.2.2.	Définitions	54
3.2.3.	Formules de base	57
3.2.4.	Cas des roues intérieures	58
3.2.5.	Phénomène d'interférence	58
3.3.	Engrenages droits à denture hélicoïdale	59
3.3.1.	Généralités	59
3.3.2.	Comparaison avec engrenages à denture droite	59
3.3.3.	Angle d'hélice β	59
3.4.	Engrenages coniques ou à axes concourants	60
3.4.1.	Généralités	60
3.4.2.	Principaux types	60
3.4.3.	Principaux paramètres	61
3.5.	Engrenages roues et vis sans fin	61
3.5.1.	Généralités	61
3.4.3.	Formules de base	62
3.5.	Qualité des engrenages	62
3.6.	Trains d'engrenages	63
3.6.1.	Schématisations	63
3.6.2.	Trains à un engrenage	63
3.6.3.	Trains à deux engrenages	63
3.6.4.	Cas général : trains à N engrenages	64
3.6.5.	Cas des systèmes avec vis sans fin	65
	Exercices	66
	Références	70

