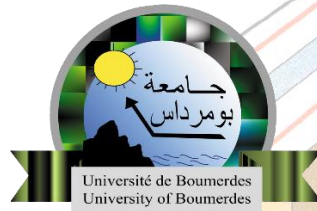


*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGUERRA BOUMERDES**



**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**  
**Département Génie Mécanique**

**Mémoire de fin d'étude**

**En vue de l'obtention du Diplôme de master en**  
**Génie Mécanique**

**Option**

**Construction Mécanique**

**Thème**

**Modélisation et simulation des**  
**conditions de coupe en fraisage**

Réalisé par :

**Allam Imrane**  
**Hebiret Abdelhak**

Dirigé par :

**Mr. F.Semoud**  
**Pr. I.Belaidi**  
**Mr. A.Sahali**

promoteur  
promoteur  
co-promoteur

ANNEE UNIVERSITAIRE  
2016 - 2017

# *Dédicace*

*À la science,*

*À nos parents,*

*À nos familles,*

*À nos amis.*

*A tous nos camarades de groupe CM*

# Remerciements

*Premièrement nous remercions le dieu notre créateur.*

*Je remercie particulièrement mes promoteurs Mr semmoud et Mr belaidi pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Je veux également remercier Mr Sahali pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire. Nos remerciements vont également aux Mrs les membres du jury. Nos remerciements s'adressent également à tous ce qui n'ont aidé et n'ont permis de faire aboutir ce travail,*

*Hebiret abdelhak*

*Je veux remercier tout d'abord, ALLAH le tout puissant.*

*Je remercie en particulier pour notre promoteur Mr. SEMMOUD pour son aide,  
je suis reconnaissant parce qu'il était avec nous depuis début,*

*Je veux aussi à remercier Mr.Sahali pour son aidé et sa patience*

*Nous remercions aussi très vivement tous les enseignants du département de  
Génie Mécanique*

*Je remercier tous qui nous ont aidé par des conseils et critiques*

*Imrane Allam*

# Sommaire

## Chapitre I

I.1 Définition fraisage.....	1
I.2 Présentation d'une fraiseuse.....	1
I.2.1 Les différents mouvements.....	2
I.3 Définition des fraises.....	2
I.4 Les opération de fraisage et ses outils.....	3
I.5.1 L'état de surface et influence des paramètres .....	5
I.5.1.1 Influence de l'avance.....	5
I.5.1.2 influence des paramètres d'usinage sur l'état de surface.....	7
I.5.2 Les efforts de coupe .....	9
I.5.2.1 Pression Spécifique De Coupe .....	9
I.5.3 La Puissance de coupe En Fraisage .....	12

## Chapitre II :Formulation mathématique des contraintes et les fonctions objectives en fraisage

II.1 Les paramètres de coupe en fraisage : .....	13
II.1.1 Les paramètres de coupe : .....	14
II.1.2 Réglage des conditions de coupe .....	14
II.1.3 Le fraisage en bout .....	15
II.2 Formulation des fonctions objectives .....	16
II.2.1 Formulation du temps de production.....	17
II.2.2 Formulation du coût de production .....	19
II.3 Expressions des contraintes de production .....	19
II.3.1 Limitations liées à la machine-outil .....	20
II.3.2 Limitation liée à l'outil.....	22
II.3.3 Limitation liées à la pièce usinée .....	24
II.4 Influence des conditions de coupe .....	24
II.4.1 Influence des conditions de coupe sur les efforts de coupe .....	24
II.4.2 Influence des conditions de coupe sur la température d'interface .....	28
Conclusion.....	32

## Chapitre III : Evaluation de la durée de vie de la fraise

III.1 Introduction .....	32
III.2 Principe du dommage d'un outil .....	34

III.3 Application aux outils tayloriens.....	35
III.4 Le cas du fraisage .....	35
III.5 évaluation des épaisseurs moyennes d'ordre r .....	38
III.6 Fraisage en roulant (cas général) .....	39
III.7 Fraisage en roulant : faibles angles de prise.....	41
III.8 Fraisage en bout (cas général) .....	43
III.9 Fraisage en bout( effet du décentrement de la coupe ).....	44
III.10 Fraisage en bout( faible angles de prise).....	45
III.11 Conclusion.....	46

## **Chapitre IV : Méthode d'optimisation multi-objective**

IV.1 Introduction sur l'optimisation multiobjectif et dominance.....	49
IV.1.1 Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation ? .....	49
IV.1.2 Vocabulaire et définitions.....	50
IV.1.3 La classification des problèmes d'optimisation.....	51
IV.1.4 L'optimisation multiobjectif.....	52
IV.1.5 La dominance.....	53
1.6 Illustration de l'intérêt de l'optimisation multiobjectif.....	65
1.7 Les relations dérivées de la dominance.....	67
IV.1.8 La surface de compromis .....	76
IV.1.9 La convexité.....	77
IV.1.10 La représentation de la surface de compromis.....	79
IV.1.11 Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif .....	79

## **Chapitre V : Application**

V.1 Implémentation du NSGA II .....	83
V.I.1 Paramètres (opération génétique) du NSGA II.....	83
V.1.2 Fonctions implémentées.....	84
V.I.3 L'implémentation de NSGA II dans la toolbox.....	83
V.2 Données de l'application.....	89
V.2.1 Données relatives à l'opération de fraisage .....	89
V.2.3 Résultats synthétiques .....	90
V.2.4 Représentation 3D.....	90

## **chapitre VI : Conception du support de Rugosimetre**

VI.1.Mécanisme .....	95
VI.1.2Generalisé sur liaison.....	95
VI.1.3 Liaisons élémentaires.....	95
VI.1.4Generalisé sur liaison.....	95
VI.2 Schéma cinématique du support de rugosimètre.....	104
VI.2.1 Définition .....	104
VI.2.2principe de construction d'un shéma cinématique.....	104
VI.2.3 Dessin d'ensemble .....	105
VI.3 La conception assistée par ordinateur ( CAO ) .....	106
VI.3.1. Aperçu sur solidworks .....	106
VI.4 CAO des éléments du support.....	108
VI.4.1 Réalisation de la régosimètre et son support .....	108
VI.5 la Fabrication Assistée par Ordinateur ( FAO) .....	109
VI.5.1étape mise en œuvre du logiciel.....	110
VI.2 Conclusion.....	116
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>118</b>

## Liste des figures

Figur I .1 : Machine de fraisage	1
FigureI.2 : relation entre $f$ et $r_{\xi}$	5
FigureI.3 : influence de l'avance et géométrie de pointe	6
FigureI.4 arête rapportée	7
Figure1.5 : influence de la vitesse de coupe	7
FigureI.6 : influence de l'usure de l'outil	8
FigureI.7 : les efforts de coupe pour le fraisage en bout	9
Figure II.2 Paramètres d'usinage	14
Figure II.3 Les paramètres de fraisage	15
Figure II.4 : limitation liée à la machine-outil	21
Figure II.5 : Présentation les composantes des efforts de coupe	25
Figure II.6 : Evolution des efforts de coupe en fonction de vitesse de coupe	26
Figure II.7 : Évolution des efforts en fonction la profondeur de passe	27
FigureII.8 Évolution les efforts de coupe en fonction l'avance	28
Figure II.9 : Évolution de température d'interface en fonction les conditions de coupe	29
FigureIII..3: l'effet de décentrement	45
Figure IV.1 Les différents espaces de recherche	48
Figure IV.2 : Les différents minima	49
Figure.IV.3 : L'optimalité locale au sens de Pareto	51
Figure IV.4 : Le théorème du contact	52
Figure IV.5 Les niveaux de préférence dans la relation de dominance	53
Figure.IV.6 Représentation des solutions dans le plan $f_1, f_2$	53
Figure IV.7 Les solutions et leurs rangs de Pareto	57
Figure IV.3. Déformation d'une poutre subissant une contrainte	58
Figure IV.9 Une barre pleine de section carrée	58
Figure IV.10 L'ensemble des valeurs des objectifs pour une barre pleine de section carrée	59
Figure IV.11 Une barre creuse de section carrée	61
Figure IV.12 L'ensemble des valeurs des objectifs pour une barre creuse de section carrée	62
Figure IV.13 Les solutions non dominées pour le dimensionnement d'une barre creuse de section carrée	62
Figure IV.14 Le problème test trigonométrique	62
Figure IV.15 L'évolution des valeurs des fonctions objectif sur la surface de compromis	65
Figure IV.16 L'allure du cône en fonction de $\square$ .	68
Figure IV.17 La projection du cône multidimensionnel	69
Figure IV.18 Deux exemples d'application de la relation de cône-dominance	70
Figure IV.19 La relation de cône-dominance	70
Figure IV-20 Représentation de la surface de compromis	74
Figure.IV-21 Formes les plus courantes de surfaces de compromis dans le cas de deux objectifs	75
Figure IV.22 Représentation du point idéal et du point "nadir"	76
Figure IV.23 Exemples d'ensemble convexe et d'ensemble non convexe	76
Figure ;IV.24 La représentation de la surface de compromis	77
Figure V.1 représentation 3D 1	87
Figure V.2 représentation 3D 2	87
Figure representation 3D 3	89
FigureVI.1 Shéma de défirrent degré de liberté	91
FigureVI.2 : le systèm de rugosimètre	92
FigureVI.2 dessin d'ensemble du support	100
FigureVI.4 Schéma cinématique du support en 3d et 2d	101
Figure VI.5 : solidworks	103

## Liste des tableaux

Tableau I.1 :	Les opérations de fraisage avec ses fraises	4
Tableau I.2 :	La valeur de C dépend des caractéristiques mécaniques et structurales des matériaux usinés	11
Tableau III.1 :	Les valeurs de $r$	39
Tableau III.2 :	Fraisage en bout – valeurs de $r$	42
Tableau IV.1 :	Ensemble des solutions d'un problème à deux objectifs	42
Tableau IV.2 :	Classement des solutions	54
Tableau IV.3 :	Classement des solutions de rang 2	55
Tableau V.1 :	Paramètres de fraisage	86
Tableau V.2 :	Les paramètres de l'algorithme NSGA II	87
Tableau V.3 :	Des résultats synthétiques	87
Tableau VI.1 :	Table de liaison	91
Tableau VI.2 :	Les différents éléments du support avec ses liaisons en cas générale	98

## Nomenclature

$R_t$  : rugosité moyenne.

$f$  : avance.

$r_\xi$  : rayon du bec.

$f_z$  : avance par dent

D : diamètre de la fraise

$\varphi$  : angle d'arc de coupe

$\alpha_p$  : Engagement (La profondeur de passe ).

$e$  : Excentration.

$h_\theta$  : Épaisseur de coupe en fonction  $\theta$

$K_s$ : Pression spécifique en N/mm<sup>2</sup>.

Z : nombre de dents.

L : largeur de coupe en mm

D : diamètre de fraise en mm

$V_c$  : La vitesse de coupe

$V_f$  : La vitesse d'avance

$T_u$  : Temps total d'usinage

$t_l$  : Temps fixé (étude, réglage, matière d'œuvre....)

$t_m$  : Temps technologique de coupe

$t_r$  : Temps de changement d'outil

T : Durée de vie de l'outil

$L_c$  : Largeur de la pièce

$n$  : fréquence de rotation de la fraise en tr/min

P : Puissance nécessaire a la coupe en W

N : Vitesse de rotation (tr/mn)

$F_{cs}$ : L'effort spécifique de coupe.

$h_m$ : L'épaisseur moyenne de copeau et égal

$l$  : largeur de coupe

$Z_n$  : nombre de dents en prise

$F_c$  : L'effort tangentiel de coupe

$F_f$ : L'effort axial

$F_a$  : L'effort radial

$F_t$  : L'effort total

$\theta$  : la température d'un élément de matière.

$\rho$  : la masse volumique d'un matière.

$c$  : la capacité thermique massique.

$\Phi$  : la fraction de chaleur

$K_{ct}$  : la conductivité thermique

$\varphi$  : l'angle de frottement au niveau la surface de contact copeau / outil

$\gamma_{fe}$  : l'angle de coupe latérale en travail

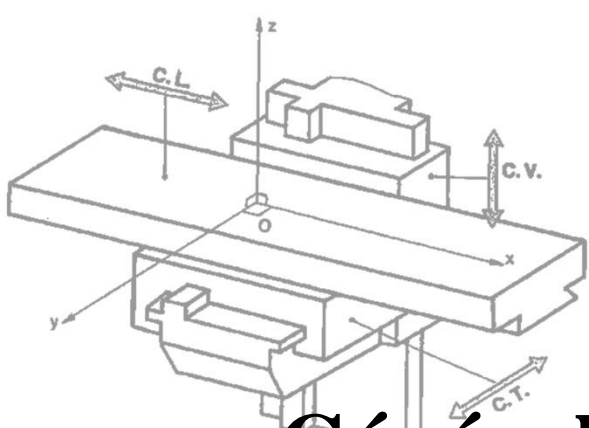
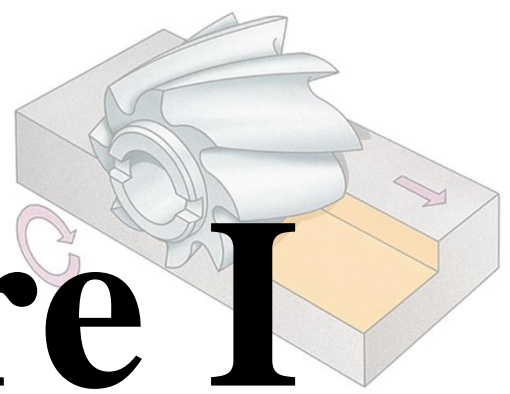
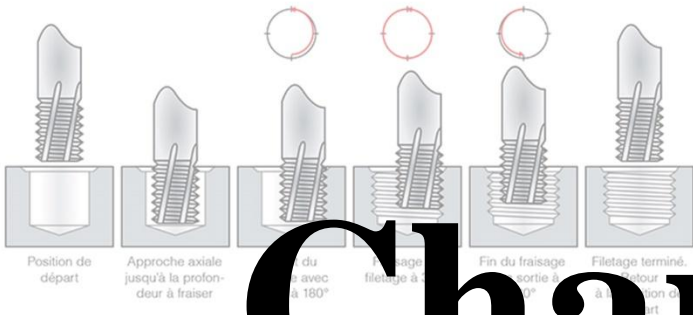
$h$  : l'épaisseur de copeau.

Y : la longueur de contact entre le copeau et l'outil.

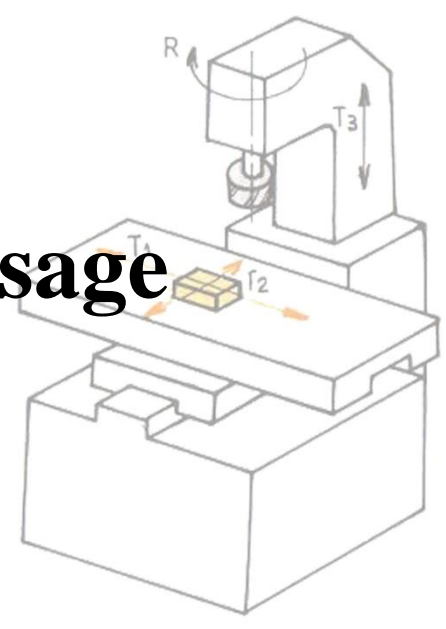
$\lambda$  : l'angle d'inclinaison de l'arête de l'outil.



# Chapitre I



## Généralité sur le fraisage



## Chapitre I

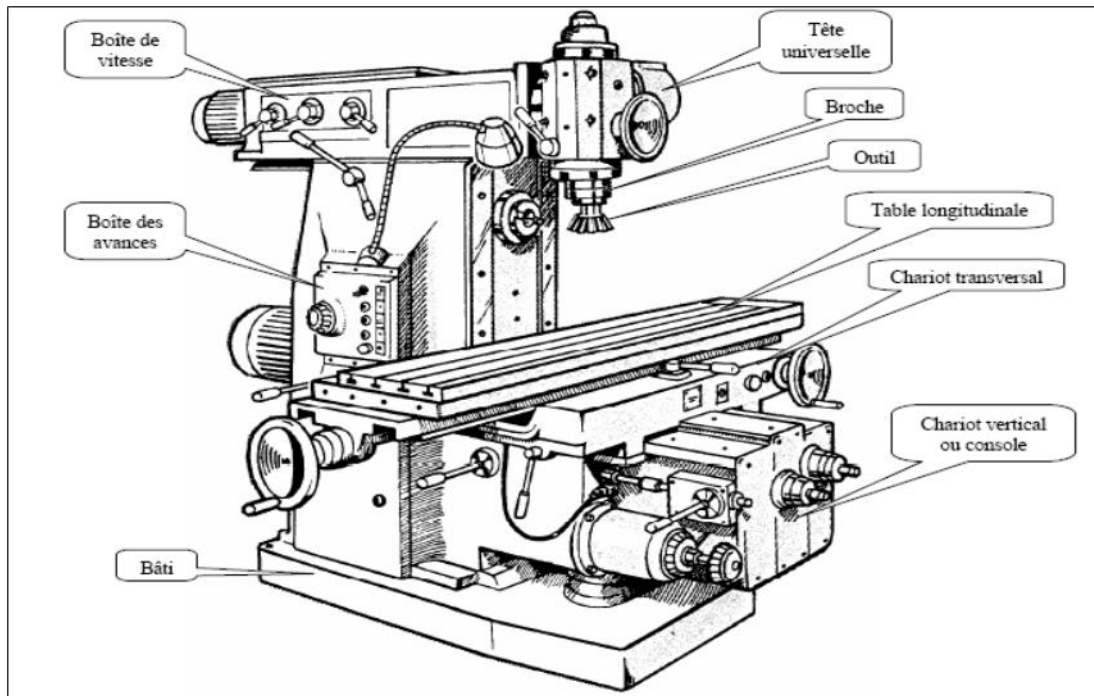
I.1 Définition fraisage.....	1
I.2 Présentation d'une fraiseuse.....	1
I.2.1 Les différents mouvements.....	2
I.3 Définition des fraises.....	2
I.4 Les opération de fraisage et ses outils.....	3
I.5.1 L'état de surface et influence des paramètres.....	5
I.5.1.1 Influence de l'avance.....	5
I.5.1.2 influence des paramètres d'usinage sur l'état de surface.....	7
I.5.2 Les efforts de coupe.....	9
I.5.2.1 Pression Spécifique De Coupe.....	9
I.5.3 La Puissance de coupe En Fraisage.....	12

## I.1 Définition fraisage

Le fraisage est un procédé d'usinage dont le rôle primordial est l'obtention de surfaces planes de forme concave ou convexe, l'outil utilisé pour effectuer ce travail est la fraise.

En tournant, la fraise enlève des copeaux. L'enlèvement des copeaux s'effectue grâce à la combinaison du mouvement de rotation de la fraise et le mouvement d'avance de la table à partir d'une épaisseur de copeau.

## I.2 Présentation d'une fraiseuse



**Figur I .1** : Machine de fraisage

1. Un bâti en fonte sert d'assise à la machine et supportant les différents organes.
2. Une poupée fixe analogue à celle d'un tout qui transmet le mouvement à la fraise.
3. L'arbre porte-fraise en acier spécial recevant son mouvement de la broche.
4. Le support horizontal en poutre en fonte de longueur réglable suivant les montages de fraises et pièces.
5. Le support d'arbre : destiné à soutenir l'extrémité libre de l'arbre porte-fraises (non représenté).
6. Une console reliée au bâti par ses glissières et portant les différents chariots porte-pièces.
7. Le chariot transversal placé sur les glissières transversales de la console.
8. La table rectangulaire se déplace longitudinalement sur les glissières du chariot transversal.
9. Les moteurs électriques.
10. La boîte des vitesses.
11. La boîte des avances.

## I.2.1 Les différents mouvements

### - Mouvement de rotation de la fraise

À partir de mouvement de rotation de l'arbre porte-fraise .Cette rotation est produite par un moteur électrique.

### - Mouvement d'avance

Ce mouvement est communiqué à la table.

- Manuellement par la vis de la table actionnée par la fraiseuse qui agit sur le volant.
- Automatiquement par la vis de la table qui est commandée par la boîte des avances.

L'avance par dent détermine l'épaisseur du copeau.

### - Mouvement de pénétration

Il est obtenu par le déplacement vertical de la console sur une fraiseuse horizontale ou par un déplacement latéral de la table sur une fraiseuse verticale. C'est ce mouvement de positionnement qui permet de régler la profondeur de passe.

## I.3 Définition des fraiseuses

- **Fraiseuse horizontale**

La fraiseuse horizontale utilise des fraises montées sur un arbre porte-fraise horizontal.

- **Fraiseuse horizontale transformable**

La fraiseuse horizontale peut se transformer occasionnellement en fraiseuse verticale grâce à l'utilisation d'une tête verticale rapportée.

- **Fraiseuse universelle**

La broche ou arbre porte-fraise peut occuper toutes les inclinaisons possibles par rapport à la table porte-pièce de la machine.





- **Fraiseuse vertical**

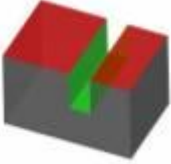

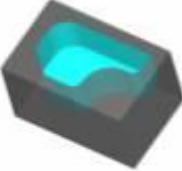

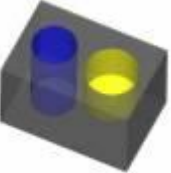

La broche est perpendiculaire à la surface de la table. Il en existe de différents types :

- à tête porte-broche fixe.
- à tête porte-broche inclinable dans le plan vertical parallèle à l'axe de la table.

## I.4 Les opération de fraisage et ses outils

- **Le surfaçage**  
Réalisation d'une surface plane à l'aide de fraises de face ou de profil.
- **Le rainurage**  
Consiste à réaliser une rainure à l'aide de fraises de profils adaptés au genre de rainures à exécuter.
- **Le détournage de profils**  
C'est une opération qui consiste à finir le profil d'une pièce à l'aide d'une fraise généralement cylindrique à une taille.
- **Le profilage**  
Lorsque les profils fraisés résultent directement de formes de la fraise et non des mouvements de la pièce.

Dessin	Opération	
	<p><b>Surfaçage</b> Le surfaçage c'est l'usinage d'un plan par une fraise. (surface rouge)</p>	<p><b>Fraise à surfacer</b></p> 
	<p><b>Plans épaulés</b> C'est l'association de 2 plans perpendiculaires (surfaces vertes)</p>	<p><b>Fraise de tailles</b></p> 

	<p><b>Rainure</b> C'est l'association de 3 plans. Le fond est perpendiculaire au deux autres plans. (surfaces vertes)</p>	<p><b>Fraise 2 tailles</b> <b>Fraise 3 tailles</b></p> 
	<p><b>Poche</b> La poche est délimitée par des surfaces verticales quelconque (cylindre et plan). C'est une forme creuse dans la pièce. (surface cyan)</p>	<p><b>Fraise 2 tailles</b></p> 
	<p><b>Perçage</b> Ce sont des trous. Ils sont débouchant (surface bleu) ou borgnes (surface jaune).</p>	<p><b>Foret</b> <b>Alésoir</b> <b>Fraise 2 tailles (pour le plastique)</b></p> 

**Table I.1** : les opérations de fraisage avec ses fraises

## I.5.1 L'état de surface et influence des paramètres [ 1 ]

### I.5.1.1 Influence de l'avance

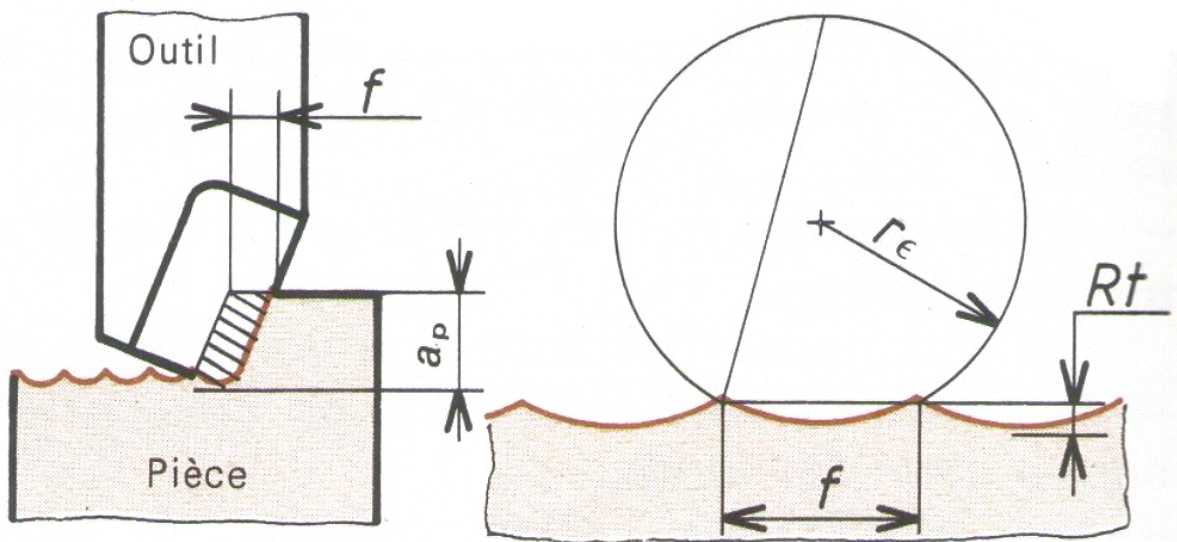
Relation entre la rugosité, l'avance  $f$  et le rayon du bec  $r_\xi$  (figI.2)

$$R_t = \frac{f^2}{r_\xi}$$

$R_t$  : rugosité moyenne.

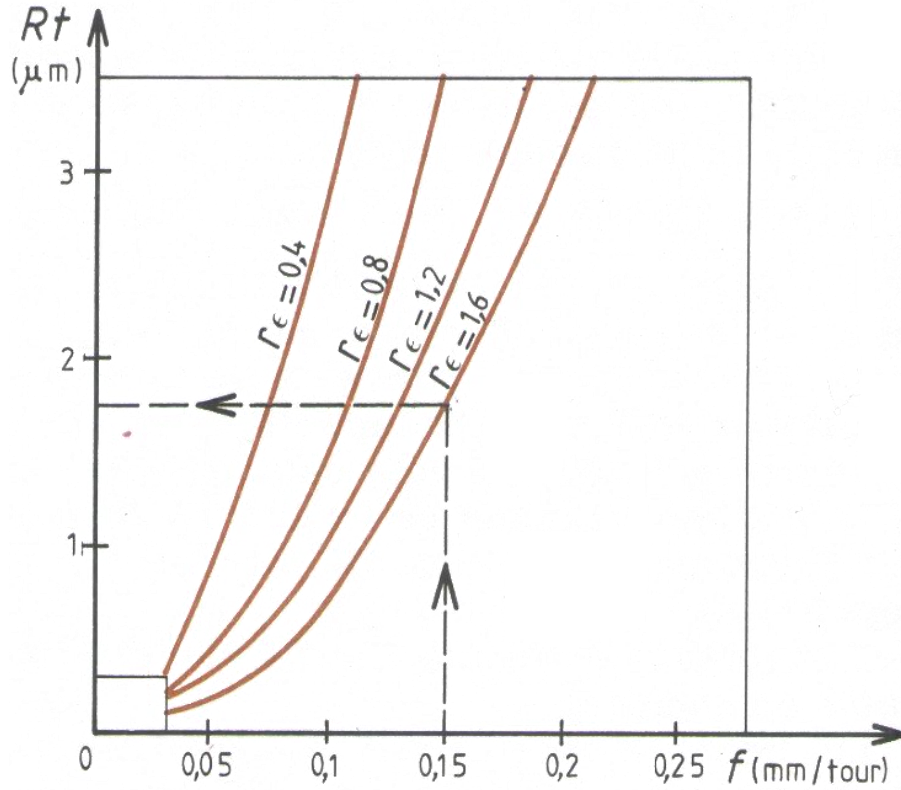
$f$  : avance.

$r_\xi$  : rayon du bec.



FigureI.2 : relation entre  $f$  et  $r_\xi$

Lors d'une opération d'usinage à l'outil coupant, celui-ci trace sur la surface de la pièce un sillon de pas équivalent à celui de l'avance et de profondeur variant avec la géométrie de pointe ( figI.3).



figureI.3 : influence de l'avance et géométrie de pointe

## I.5.1.2 influence des paramètres d'usinage sur l'état de surface

### I.5.1.2.1 Influence de la vitesse de coupe

A cause du phénomène d'arête rapportée. La vitesse de coupe a une influence importante sur la rugosité. L'arête rapportée est un petit dépôt de matière à l'extrémité de la face de coupe de l'outil (dépôt formé par micro-soudage sous l'action de frottement élevé). (figI.4)

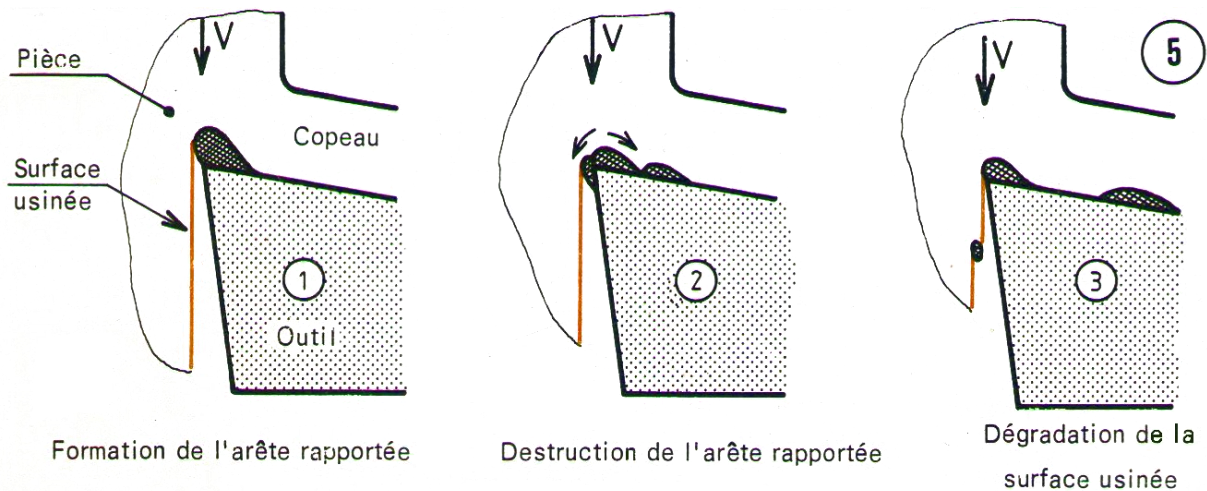


Figure I.4 : arête rapportée

Elle se détruit et se reforme périodiquement, provoquant ainsi des variations de l'effort de coupe et des angularités sur la surface usinée. Une augmentation de la vitesse de coupe, par élévation de la température détruit l'arête rapportée (fig. I.5).

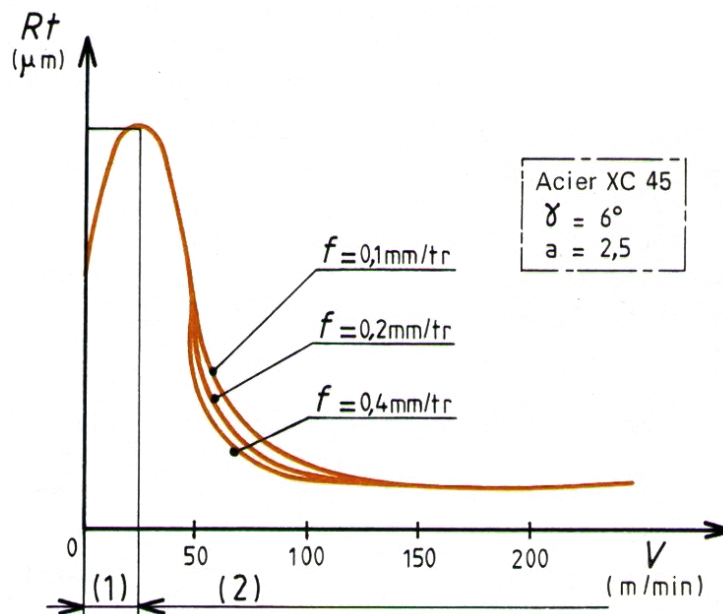


Figure I.5 : influence de la vitesse de coupe

### I.5.1.2.2

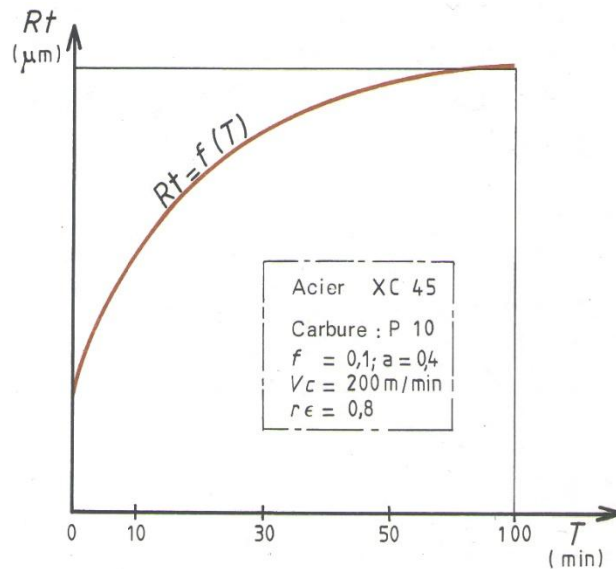


Figure I.6 : influence de l'usure de l'outil

### I.5.1.2.4 Influence de la lubrification

La lubrification de l'arête de coupe permet d'améliorer l'état de surface, surtout à faible vitesse de coupe, en évitant la formation d'une arête rapportée.

### I.5.1.2.5 Evaluation de la rugosité

$$\text{Fraisage : } R_t = f_z^2 / 8 \left( \frac{D}{2} \pm \frac{f_z \cdot Z}{\pi} \right)$$

(+) pour fraisage en opposition.

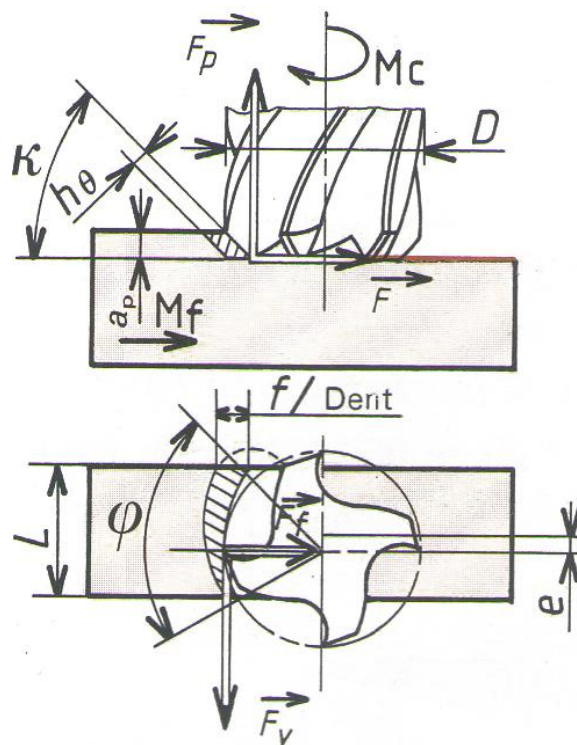
(-) pour fraisage en avalant.

## I.5.2 Les efforts de coupe

L'enlèvement de matière à l'outil coupant provoque sur l'outil un effort  $F$  qui est composé en :

- Un Effort principal de coup  $F_v$
- Un effort d'avance  $F_f$
- Un effort de refoulement  $F_p$

La figure I.7 montre les efforts de fraisage en bout :



**Figure I.7 :** les efforts de coupe pour le fraisage en bout

$a_p$  : Engagement.

$e$  : Excentration.

$L$  Avance par dent.

$h_\theta$  : Épaisseur de coupe en fonction  $\theta$ .

### I.5.2.1 Pression Spécifique De Coupe

A chaque matériau et type de fraisage donnés une valeur expérimentale de pression spécifique de coupe est donnée par :

$$K_s = \frac{F_v}{A} [\text{N/mm}^2]$$

Cette valeur est dépend de différents facteur d'influence.  
D'après le module A.S.M.E l'expression complète de  $K_s$

$$K_s = C * K_1 * K_2$$

C : dépend de matériau (tableau fig1)  
K1 et k2 étant fonction des angles de coupe

$$K_1 = h_n \cdot h = f * \sin K_r \quad \text{et} \quad K_2 = 1 + (m * \theta)$$

Donc :

$$K_s = C * (\sin K_r * \frac{360 * f * L}{\pi * \varphi * D})^n * (1 + m \theta)$$

Avec :

- m: acier 0.008 et pour les métaux non ferreux 0.01
- n : pour acier (- 0.2) et pour fonte (- 0.3) et métaux non ferreux (- 0.5)
- L : longueur de coupe
- F : avance par dent
- D : diamètre de la fraise
- $\varphi$  : angle d'arc de coupe

VALEURS INDICATIVES DE « C »				
Matière à usiner		R(N/mm <sup>2</sup> )	C(N/mm <sup>2</sup> )	Nuances NF
Ac. à usinabilité améliorée	Au Mn + S	350-300 600-800	1050 1300	13 MF 4 35 MF 6
Aciers au carbone	C ≤ 0.25 %	450 - 600	1850	XC 25
	C ≤ 0.45 %	600 - 750	2150	XC 42
	C ≤ 0.65 %	750 - 950	2600	XC 65
	C ≤ 0.90 %	950 - 1150	2800	XC 80
Acier alliés ≤ 5%	Au Cr + Mo	600 - 750	1650	18 CD 4
	U Ni + Cr	750 - 950	2300	35 CD 4
		950 - 1150	2900	40 NCD 7
Laitons	Zn + Al	400 - 800	640	U.Z. 19 A6
Bronzes	Cupro - Nickel	400-700	1120	N.U. 40 E7
Alliages d'aluminium	Si + Mg	≤ 300	460	A-S10G
Matière à usiner		Dureté Brinell HB	C(N/mm <sup>2</sup> )	Nuances NF
Fontes Grises	Ferritique	≤ 150	800	Ft 20
	Ferr. Perlitique	190 à 220	1250	Ft 30
	Perlitique	220 à 260	1420	Ft 45
Fontes G. S.	Ferritique	125 à 200	950	FGS 370 - 17
	Perlitique	200 à 300	1400	FGS 600 - 3
Fontes MN	A cœur	120 à 160	1350	MN 35 - 10
	Perlitique	200 à 260	1400	MP 60 - 3

Table I.2 : La valeur de C dépend des caractéristiques mécaniques et structurales des matériaux usinés

### I.5.3 La Puissance de coupe En Fraisage

D'après cette relation on peut calculer la valeur de l'effort de coupe :

$$P_c = F_v * V_c \quad [\text{KW}]$$

Ce dernier est équivalent avec la relation suivante :

$$P_c = K_s * \frac{a * f * V_c * z * L}{192.27 * 10^3 * D}$$

Avec :

$K_s$  : Pression spécifique en N/mm<sup>2</sup>.

$Z$  : nombre de dents.

$L$  : largeur de coupe en mm

$D$  : diamètre de fraise en mm

$V_c$  : Puissance nécessaire en KW.

# Chapitre II

**Formulation mathématique des  
contraintes et les fonctions  
objectives en fraisage**



## **Chapitre II :Formulation mathématique des contraintes et les fonctions objectives en fraisage**

II.1 Les paramètres de coupe en fraisage : .....	13
II.1.1 Les paramètres de coupe : .....	14
II.1.2 Réglage des conditions de coupe .....	14
II.1.3 Le fraisage en bout .....	15
II.2 Formulation des fonctions objectives .....	16
II.2.1 Formulation du temps de production.....	17
II.2.2 Formulation du coût de production .....	19
II.3 Expressions des contraintes de production .....	19
II.3.1 Limitations liées à la machine-outil .....	20
II.3.2 Limitation liée à l'outil.....	22
II.3.3 Limitation liées à la pièce usinée .....	24
II.4 Influence des conditions de coupe .....	24
II.4.1 Influence des conditions de coupe sur les efforts de coupe .....	24
II.4.2 Influence des conditions de coupe sur la température d'interface .....	28
Conclusion.....	32

## II.1 Les paramètres de coupe en fraisage [ 2 ] :

Lors d'un usinage par enlèvement de la matière, on se retrouve, dans la majorité de cas, dans la configuration suivante :

- Une lame d'outil pénètre dans la matière et enlève un copeau.
- L'outil suit une trajectoire par rapport à la pièce à usiner. Ces mouvements sont assurés par les éléments constitutifs de la machine-outil.

Pour obtenir un travail satisfaisant (bon état de la surface usinée, rapidité de l'usinage, usure modérée de l'outil,...), on doit régler les paramètres de la coupe.

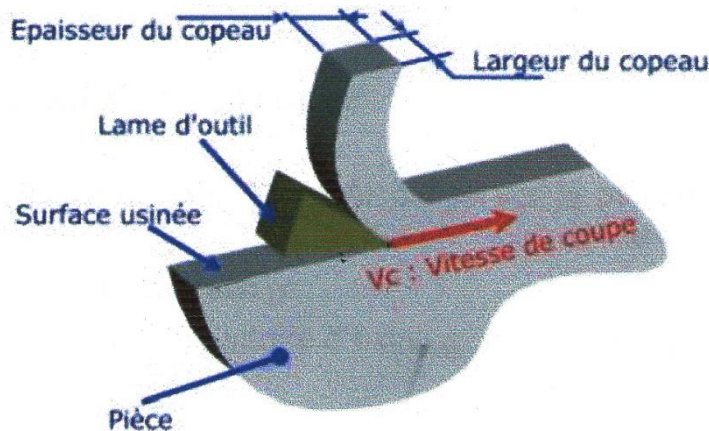


Figure II.1 Configuration d'un usinage par enlèvement de la matière

Il y a plusieurs critères qui permettent de définir les paramètres de la coupe, notamment :

Pour le type de machine (tournage, fraisage, perçage)

- La puissance de la machine
- La matière usinée (acier, aluminium ..... etc)
- La matière de l'outil (ARS, carbure)
- Le type de l'opération (perçage, chariotage, surfaçage)

L'objectif final est d'obtenir une pièce usinée dans de bonnes conditions, Pour cela il faut déterminer certains paramètres spécifiques :

- La vitesse de coupe :  $V_c$
- La vitesse d'avance :  $V_f$
- La profondeur de passe :  $a$

## II.1.1 Les paramètres de coupe :

### II.1.1.1 La vitesse de coupe : $V_c$ [m/min]

La vitesse de coupe correspond au déplacement de l'arête de coupe par rapport à la pièce.

### II.1.1.2 La vitesse d'avance : $V_f$ [mm/min]

Elle correspond à la vitesse de déplacement de l'outil sur la trajectoire d'usinage. C'est cette trajectoire qu'il faut suivre afin que l'outil usine la forme souhaitée.

### II.1.1.3 La profondeur de passe : $a$ [mm]

La profondeur de passe est nécessaire afin de déterminer la quantité de matière qui va être séparée de la pièce sous forme de copeau. la combinaison de  $V_f$  et  $a$  permet de déterminer le volume du copeau.

## II.1.2 Réglage des conditions de coupe

Pour régler les conditions de coupe sur la machine. On n'agit que sur 3 paramètres :

$N$  : la vitesse de rotation de l'outil en fraisage

$V_f$  : la vitesse d'avance suivant la trajectoire d'usinage, on détermine d'abord  $f_z$

$a$  : la profondeur de passe

Les constructeurs d'outil préconisent certaines conditions optimales expérimentées de  $V_c$ ,  $V_f$  et  $N$ . dans leurs laboratoires

On dispose de tableau de caractéristiques de coupe. Il permet de définir  $V_c$ ,  $f_z$  et  $a$  en fonction du type de la machine, de l'outil, de la matière.

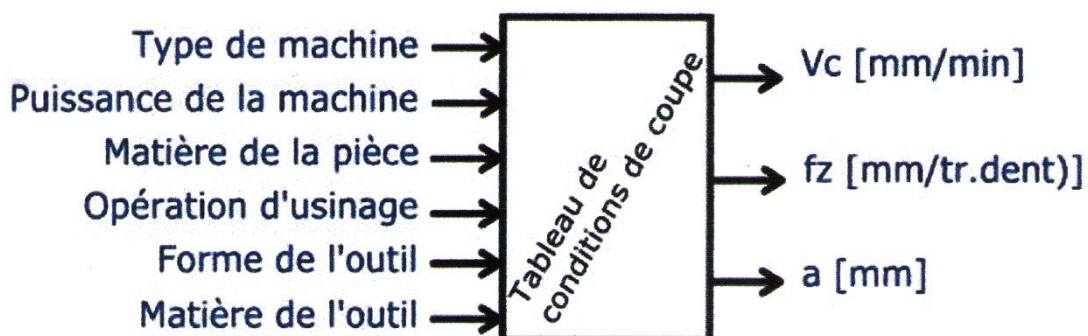


Figure II.2 Paramètres d'usinage

### II.1.3 Le fraisage en bout

L'axe de la fraise est placé perpendiculairement à la surface à usiner. La fraise coupe avec son diamètre, mais aussi avec partie frontale. Les copeaux sont de mêmes épaisseurs, ainsi la charge de la machine est plus régulière.

La capacité de coupe est supérieure à celle réalisée par le fraisage en roulant. La qualité de l'état de surface est meilleure.

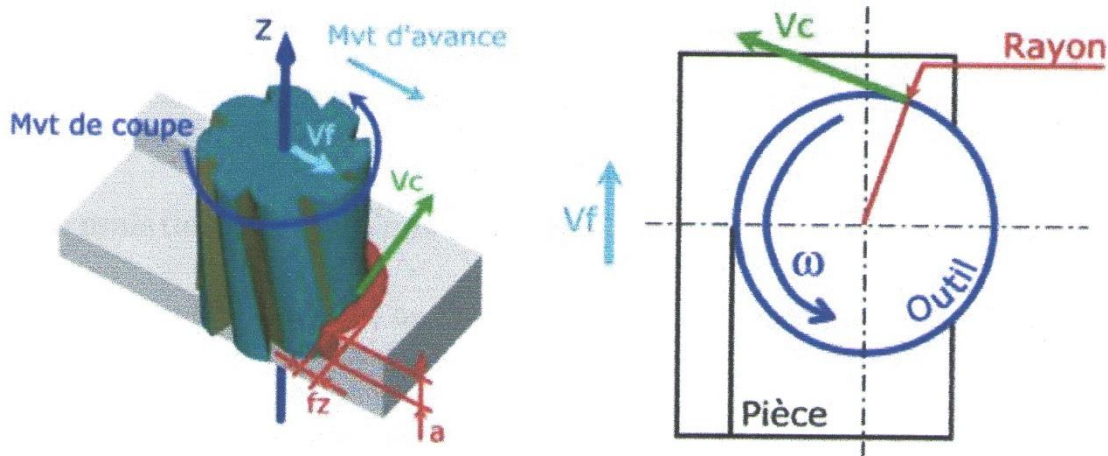


Figure II.3 Les paramètres de fraisage

#### II.1.3.1 La vitesse de coupe

On cherche à déterminer la relation entre la vitesse de coupe,  $V_c$ , et le taux de rotation,  $\omega$ , de la fraise.

La relation entre  $\omega$  et  $V_c$  en utilisant les unités internationales est donnée par :

$$V_c = R \omega \quad \omega = \frac{V_c}{R} \quad V_c \text{ en m/s, } R \text{ en m et } \omega \text{ en rd/s}$$

Cependant, en usinage, on utilise les unités suivantes :

- $V_c$  en m/min et N en tr/min.
- D en mm (on utilise le diamètre au lieu du rayon)
- On utilise un taux de rotation, N, exprimé en tour par minute au lieu de,  $\omega$ , en rd/s

La formule devient : 
$$N = \frac{1000 V_c}{\pi D}$$

D correspond au diamètre de la fraise.

### II.1.3.2 La vitesse d'avance :

En fraissage , la relation entre la vitesse d'avance et le taux de rotation :

$$V_f = z * f_z * N$$

Z est le nombre de dents de la fraise,  $V_f$  en mm/min,  $f_z$  en mm/(tr.dent) et N en tr/min  
 $f_z$  Correspond à la capacité de coupe de l'arête tranchante (la dent) pour une rotation de 1 tour de l'outil. En d'autre terme,  $f_z$  correspond à la distance que la dent va parcourir à chaque tour de la fraise.

Sur une fraise il peut y avoir plusieurs dents, donc plusieurs arêtes de coupe. On prend donc en compte ce nombre : z.

### II.1.3.3 La profondeur de passe ( $a_p$ )

Elle est quelque fois suggérée dans les tables des fabricants d'outils de coupe et elle dépend du type d'état de surface que l'on veut obtenir (ébauche, finition).  
Pour ce qui concerne les fraises équipées de plaquettes en métal dur rapportées, cette profondeur est limitée en fonction de la forme et de la taille de la plaquette. Cette valeur maximale est indiquée dans les tableaux des fournisseurs.

## II.2 Formulation des fonctions objectives

Pour les opérations d'usinage ou l'aspect précision dimensionnelle et état du surface ne sont pas les conditions principales, le choix des conditions de coup ( $V_c$ , f, a) peuvent êtres optimisées pour la recherche, soit :

- une production maximale indépendante du coût.
- un coût minimal indépendamment du temps.
- un profil maximal en tenant compte de temps et des coûts.

Cette recherche fait appel à des modèles mathématiques introduisant les lois d'usure des outils (loi de Taylor simplifiée) en fonction du temps de coupe. L'optimisation de ces modèles permet, pour une opération d'usinage déterminée, selon l'objectif recherché de minimiser, soit :

- le temps (production max)
- le coût (coût minimal)
- le coût et le temps (profil max)

## II.2.1 Formulation du temps de production

Le temps total exigé pour la réalisation d'une pièce est égale à la somme des temps partiels suivants :

- Temps fixé de l'étude et de réglage....etc.
- Temps de changement de l'outil
- Temps technologique de coupe.

L'expression générale du temps d'usinage s'exprime par cette relation [2]:

$$T_u = t_l + t_m + t_r \left( \frac{t_m}{T} \right) \quad (1)$$

Avec :

$T_u$  : Temps total d'usinage

$t_l$  : Temps fixé (étude, réglage, matière d'œuvre....)

$t_m$  : Temps technologique de coupe

$t_r$  : Temps de changement d'outil

T : Durée de vie de l'outil

$t_r$  est réparti sur le nombre de pièce usinées avec le même outil, si T est la durée de vie de l'outil, est  $t_m$  le temps de coup par pièces alors le nombre de pièces usinées par l'outil sera donc  $(T/t_m)$ .

Plus généralement, on montre expérimentalement que pour un matériau usinés, la relation qui lie la vitesse de coupe  $V_c$ , l'avance  $f$  et la profondeur de passe  $a$  est de type (loi généralisée de Taylor) :

$$V_c = T^n * k * f^p * a^q \quad (2)$$

La durée de vie de l'outil dépend des conditions de coup, et d'après la relation de Taylor on tire T :

$$T = V_c^{\frac{1}{n}} * k^{\frac{-1}{n}} * f^{\frac{-p}{n}} * a^{\frac{-q}{n}} \quad (3)$$

Les valeurs des exposant n, p, q de la loi généralisée de Taylor dépend essentiellement matériau de l'outil, le coefficient k étant fonction du matériau usiné, de l'outil utilisé et du critère d'usure adopté.

D'autre par on à le temps technologique est on fonction de  $L_c$ , et  $V_f$ , donc :

$$t_m = \frac{L_c}{V_f} \quad (4)$$

Avec :

$L_c$  : Largeur de la pièce

$V_f$  : Vitesse d'avance en mm/min, et égale à

$$V_f = f * z * n \quad (5)$$

Avec :

$f$  : l'avance

$z$  : nombre de dents de la fraise

$n$  : fréquence de rotation de la fraise en tr/min

Donc on peut écrire le temps technologique comme suivant :

$$t_m = \frac{L_c}{f * z_n * n} \quad (6)$$

En remplaçant  $T$  et  $t_m$  par leurs expressions respectivement (3) et (6) dans l'équation (1) on obtient la formule du temps de production sous la forme suivante :

$$t_m = \frac{L_c}{f * z_n * n} + t_l + t_r \left( \frac{\frac{L_c}{f * z_n * n}}{\frac{-1}{k n} * \frac{1}{V_c n} * \frac{-p}{f n} * \frac{-q}{a n}} \right) \quad (7)$$

$$T_u = \frac{L_c}{f * z_n * n} + t_l + t_r \left( \frac{L_c}{\frac{-1}{k n} * \frac{1}{V_c n} * \frac{-p}{f n} * \frac{-q}{a n} * z_n * n} \right) \quad (8)$$

D'où l'expression générale du temps de production :

$$T_u = L_c * f^{-1} * z_n^{-1} * n^{-1} + \left( L_c * k^{\frac{1}{n}} * V_c^{\frac{1}{n}} * f^{\frac{p-n}{n}} * a^{\frac{q}{n}} * z_n^{-1} * n^{-1} \right) t_r + t_l \quad (9)$$

## II.2.2 Formulation du coût de production

Les éléments qui interviennent dans la détermination du coût de fabrication d'une pièce, se décomposent en :

- ✓ Fraise fixe
- ✓ Fraise machine
- ✓ Frais outil coupant

L'expression général des coûts de productions est donné par :

$$C_u = C_o t_l + C_a + C_o t_m + C_l \left( \frac{t_m}{T} \right) \quad (10)$$

Avec

$C_o$  : Coût machine

$C_a$  : Coût auxiliaire de lancement de la série.

$C_l$  : Coût d'une arête de coupe.

En remplaçant T et  $t_m$  par leurs expressions respectivement (3) et (6)

Dans l'équation (II.8) on obtient la formule du coût de production suivant :

$$C_u = C_o t_l + C_a + C_o \left( \frac{L_c}{f * z_n * n} \right) + C_l \left( \frac{\frac{L_c}{f * z_n * n}}{\frac{-1}{k \bar{n}} * \frac{1}{V_c \bar{n}} * \frac{-p}{f \bar{n}} * \frac{-q}{a \bar{n}}} \right) \quad (11)$$

$$C_u = C_o t_l + C_a + C_o \left( \frac{L_c}{f * z_n * n} \right) + C_l \left( \frac{L_c}{\frac{-1}{k \bar{n}} * \frac{1}{V_c \bar{n}} * \frac{-p}{f \bar{n}} * \frac{-q}{a \bar{n}} * z_n * n} \right) \quad (12)$$

D'où l'expression générale de coût de production :

$$C_u = C_o * L_c * f^{-1} * z_n^{-1} * n^{-1} + C_l * L_c * k^{\frac{-1}{n}} * V_c^{\frac{-1}{n}} * f^{\frac{p-n}{n}} * a^{\frac{q}{n}} * z_n^{-1} * n^{-1} + C_o t_l + C_a \quad (13)$$

## II.3 Expressions des contraintes de production

Les limitations ou contraintes de productions, exprimées sous formes d'inéquations sont liées à la pièce, à l'outil et à la machine, à savoir :

## II.3.1 Limitations liées à la machine-outil

### II.3.1.1 Limitation de puissance de coupe

Dans tous les cas la puissance ( $p$ ) absorbée par la coupe doit être inférieure à la puissance utile ( $P_u$ ) sur la broche, soit donc :

$$P_c \leq P_u$$

En fraisage la puissance nécessaire à la coupe est directement proportionnelle au débit de copeau, on peut écrire la puissance nécessaire à la coupe de façon suivant :

$$P_c = \frac{\pi}{60} * D * h_m * l * F_{cs} * z * N \leq P_u$$

Avec :

$P$  : Puissance nécessaire à la coupe en W

$N$  : Vitesse de rotation (tr/mn)

$F_{cs}$ : L'effort spécifique de coupe.

$h_m$ : L'épaisseur moyenne de copeau et égal à

$$h_m = \frac{f_z}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{H^2}{D^2}} \right] \sin \varphi$$

$l$  : largeur de coupe et égal à

$$l = \frac{a}{\sin \varphi}$$

$z$  : nombre de dents en prise est égal à et  $Z_n$  nombre de dent de la fraise

$$z = \frac{Z_n}{\pi} \arcsin \frac{H}{D}$$

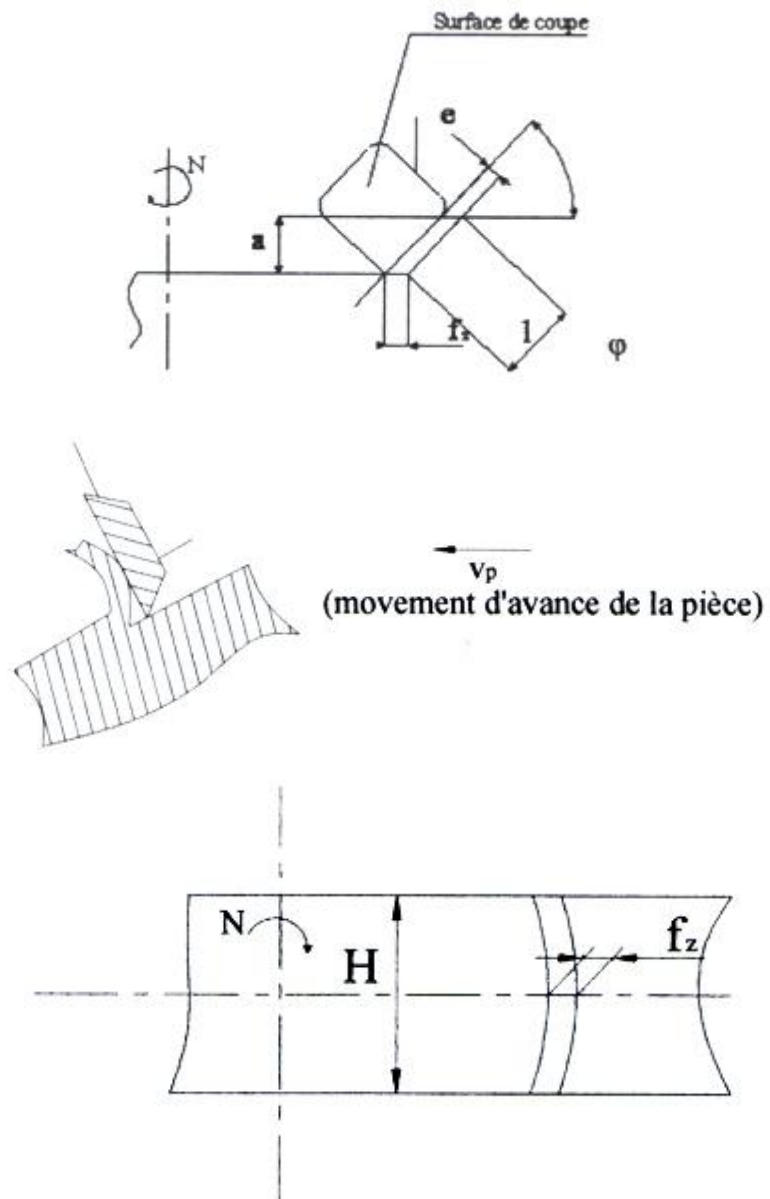


Figure II.4 : limitation liée à la machine-outil

### II.3.1.2 Limitation d'efforts – couple admissible sur la broche

Le couple appliqué à la broche de la machine ne doit pas dépasser une valeur limite  $C_{max}$ , donc on peut écrire :

$$C = F_C * \frac{D}{2} * z \leq C_{max}$$

Où  $n$  et  $F_C$  représentent respectivement le nombre de dents en prise et l'effort de coupe moyen par dent :

$$F_C = h_m * l * F_{CS}$$

Donc on a :

$$C = \frac{D}{2} * h_m * l * z * F_{CS} \leq C_{max}$$

L'effort spécifique de coupe  $F_{CS}$  dépend du matériau usiné, de l'épaisseur moyen du copeau, et de l'angle de coup de l'outil

## II.3.2 Limitation liée à l'outil

### II.3.2.1 Limitation d'endurance de l'outil

#### II.3.2.1.1 Forme d'usure

L'usure de l'outil se manifeste essentiellement sous deux aspects :

- L'usure frontale ou usure en dépouille se caractérise par l'apparition d'une bande brillante le long de la face en dépouille principale due en particulier au frottement de la pièce sur cette face.  
Cette usure est d'une grande importance, car elle influe sur les dimensions de la pièce à cause du recul de l'arête qu'elle provoque et sur l'état de surface de la pièce à cause du frottement.  
L'usure frontale est caractérisée par le symbole  $VB_B$ .
- L'usure de la face de coupe est caractérisée par l'usure en cratère. Ce type d'usure est essentiellement dû au frottement du copeau sur la face de coupe. Elle se manifeste par l'apparition d'une « cuvette » sur la face de coupe. L'usure en cratère se trouve plus spécialement sur l'outil en carbure. Cette usure revêt une grande importance car elle modifie l'angle de coupe. Elle est caractérisée par KT profondeur de cratère, KB largeur de cratère, KM distance du centre du cratère.

### II.3.2.1.2 Lois d'usure

Compte tenu de la complexité du phénomène, il n'existe pas de loi mathématique simple permettant de calculer la durée de vie de l'outil.

La durée de vie d'un outil est caractérisée par le temps mis pour atteindre la valeur limite du critère d'usure considéré dans des conditions de coupe données.

Généralement on choisit comme critère d'usure l'un des trois critères suivants :

- **Défaillance brutale** due à la déformation plastique de l'arête. Ce critère n'est employé que pour les outils en acier rapide ou les outils en céramique.

- **Usure frontale** employée pour tous les outils, caractérisées soit par l'usure frontale moyenne soit par l'usure frontale maximale. Dans ce cas la norme français ND E 66-505 définit comme valeur pour l'usure frontale moyenne  $VB_B = 0.3$  mm et pour l'usure frontale maximale  $VB_{Bmax} = 0.6$  mm.

- **Usure en cratère** employée seulement pour les outils en carbure métallique, caractérisé par la profondeur du cratère. La norme française NF E 66-505 donne comme valeur de profondeur du cratère  $KT = 0.06 + 0.3 * f$

En fait la durée de vie de l'outil est en fonction des différents paramètres soit :

- Les conditions de coupe
- Le matériau et la géométrie de l'outil
- Le matériau et l'état physique de la pièce
- La lubrification

Généralement seules les conditions de coupe sont prises en considération et on établit des lois d'usure pour des outils parfaitement définis pour un matériau usiné donné et dans des conditions de lubrification déterminées.

On arrive donc à des lois d'usure de la forme :  $T = f(V_c, f, a_p)$

La loi d'usure peut être représentée par le modèle de Taylor :

$$V_c = k * T^n * f^p * a^q$$

$$T = k^{\frac{-1}{n}} * V_c^{\frac{-1}{n}} * f^{\frac{-p}{n}} * a^{\frac{-q}{n}}$$

Le coefficient k étant en fonction du matériau usiné, de l'outil utilisé et du critère d'usure adopté. Les valeurs des exposants  $n, p, q$  de la loi généralisée de Taylor : Ils caractérisent la loi d'usure d'un outil par un matériau usiné.

### II.3.2.2 Diagramme de brise-copeaux

Il permet de préciser le domaine d'utilisation de l'outil, ou de la plaquette. En effet, lors de l'opération de coupe, il faut fractionner le copeau car les copeaux longs sont dangereux pour l'opérateur et difficiles à évacuer. Par ailleurs, même si le copeau est fragmenté, il se peut qu'il ne soit pas retenu. Dans tous les cas, on suivra la règle suivante :

**Copeau convenable :** est tout copeau fragmenté facile à évacuer ne présente pas de danger pour l'opérateur, obtenu dans des conditions de coupe optimales.

**Copeau non conforme :** tout copeau qui file, long, quelle que soit la forme quelconque. Chaque outil utilisé en production doit avoir un diagramme d'utilisation ; celui-ci est valable pour une plage de vitesses de coupe donnée. Les valeurs adoptées pour l'avance  $f$  et la pénétration  $a$  doivent être les coordonnées d'un point situé à l'intérieur du domaine indiqué sur le diagramme de brise-copeaux de l'outil utilisé.

### II.3.3 Limitation liées à la pièce usinée

#### II.3.3.1 Effort de coupe admissible

L'effort de coupe peut entraîner une déformation trop importante à la pièce usinée d'où une mauvaise précision dimensionnelle et apparition du broutement. La valeur de l'effort de coupe admissible est donc en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la pièce usinée. En fraisage, on admet généralement que la flèche ne doit pas dépasser une valeur maximale  $Z_{max}$ .

$$Z = \frac{F_c * L^3}{48 * E * I} \leq Z_{max} \quad \text{avec } I = 0.05 D^4$$

$$Z = \frac{k_f * a * f^{0.7} * L^3}{2,4 * E * D^4} \leq Z_{max}$$

## II.4 Influence des conditions de coupe

### II.4.1 Influence des conditions de coupe sur les efforts de coupe

L'étude de l'évolution des forces de coupe basée sur des essais expérimentaux, a permis la mise en évidence de l'influence des conditions de coupe (vitesse de coupe, avance et profondeur de passe) sur les composantes de l'effort de coupe.

On définit l'effort de coupe par les trois composantes suivantes :

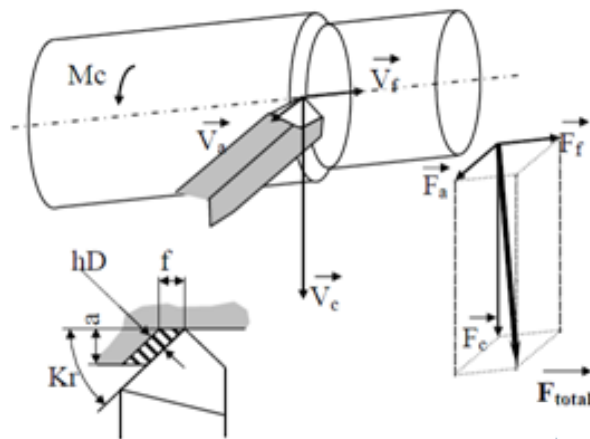
$F_c$  : L'effort tangentiel de coupe

$F_f$  : L'effort axial

$F_a$  : L'effort radial

$F_t$  : L'effort total

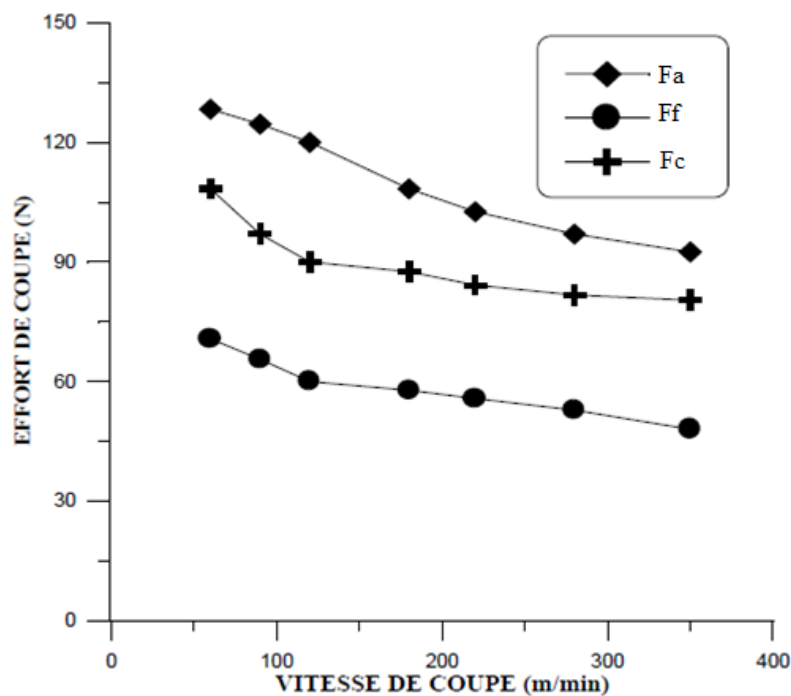
$$F_t = \sqrt{F_c^2 + F_f^2 + F_a^2}$$



**Figure II.5 :** Présentation les composantes des efforts de coupe

### II.4.1.1 Influence de la vitesse de coupe $V_c$

Les résultats présentés sur la figure (II.6) illustrent l'évolution des efforts de coupe en fonction la vitesse de coupe  $V_c$ , cette figure a montré qu'une augmentation de la vitesse conduit à une diminution des composantes de l'effort de coupe. La haute température dans la zone de coupe qui rend le métal travaillé plus plastique et par conséquent l'effort nécessaire pour la coupe diminue. Il est à noter aussi que les vitesses employées ne favorisent pas l'apparition de l'arête rapportée. En examinant l'allure des courbes, on remarque que les efforts diminuent jusqu'à 180 m/min, au-delà de cette limite, ils se stabilisent légèrement.



**Figure II.6 :** Evolution des efforts de coupe en fonction de vitesse de coupe.

Cette diminution des efforts est d'autant plus marquée par les faibles vitesses de coupe. En effet, une élévation de la vitesse de 60 à 180 m/min, conduit à une diminution des trois composantes de l'effort ( $F_a$ ,  $F_f$ ,  $F_c$ ) respectivement de (18,4% ,22,3%, 23,7%). Alors qu'une augmentation de la vitesse de 180 à 280 m/min, conduit à une diminution de (11,6% ; 9,47% ; 7,18%). Les résultats montrent aussi que l'effort radial ( $F_a$ ) est prépondérant par rapport aux deux autres efforts ( $F_c$  et  $F_f$ ).

### III.4.1.2 Influence de la profondeur de passe $a$

La figure (II.7) présente l'évolution des efforts de coupe en fonction de la profondeur de passe. Les résultats montrent une nette augmentation des efforts de coupe avec l'augmentation de la profondeur de passe et cela à cause de l'augmentation de l'épaisseur (section) du copeau et par conséquent l'augmentation du volume du métal déformé, cette augmentation est presque linéaire. Aux petites valeurs de la profondeur de passe, l'effort radial est prépondérant. Au-delà de la valeur de  $a = 0,4$  mm pour ( $F_c$ ) et 0,6 mm pour ( $F_f$ ), L'effort tangentiel et axial dépassent l'effort radial. Cela peut être expliqué par le travail de l'outil en tournage par son rayon du bec aux petites profondeurs de passe.

Avec l'augmentation de  $a$ , la coupe se fait en dehors de la limite du rayon de bec et la pièce présente une résistance à la pénétration de l'outil dans le sens de l'effort tangentiel et en particulier axial, car la longueur de l'arête tranchante en contact avec la pièce augmente. Autrement dit l'outil ne travaille plus par son rayon seulement.

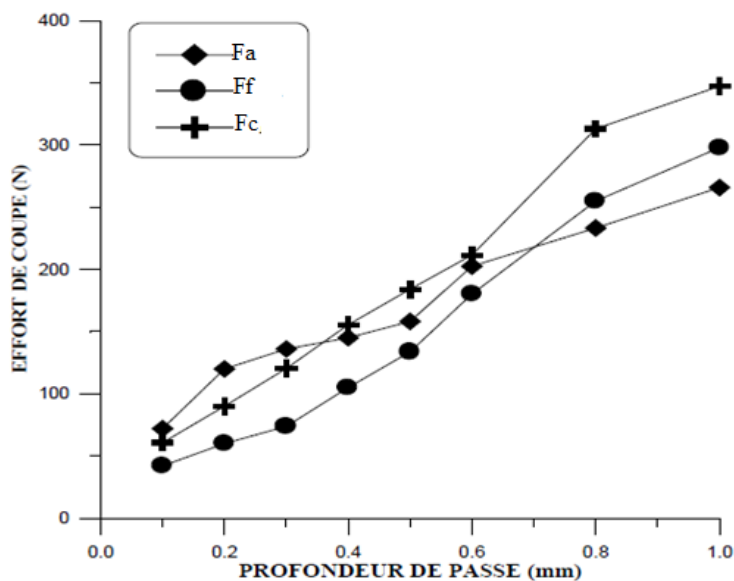


Figure II.7 : Évolution des efforts en fonction la profondeur de passe.

### III.4.1.3 Influence l'avance par tour $f$

Les courbes de la figure (II.8) montrent une augmentation des efforts avec l'augmentation de l'avance, puisque cette dernière accroît la section du copeau cisailée, d'où le métal résiste plus à la rupture et nécessite un effort plus grand pour l'enlèvement du copeau. On remarque que l'effort radial est prépondérant suivi par l'effort tangentiel et en dernier lieu par l'effort axial et cela pour toutes les avances testées.

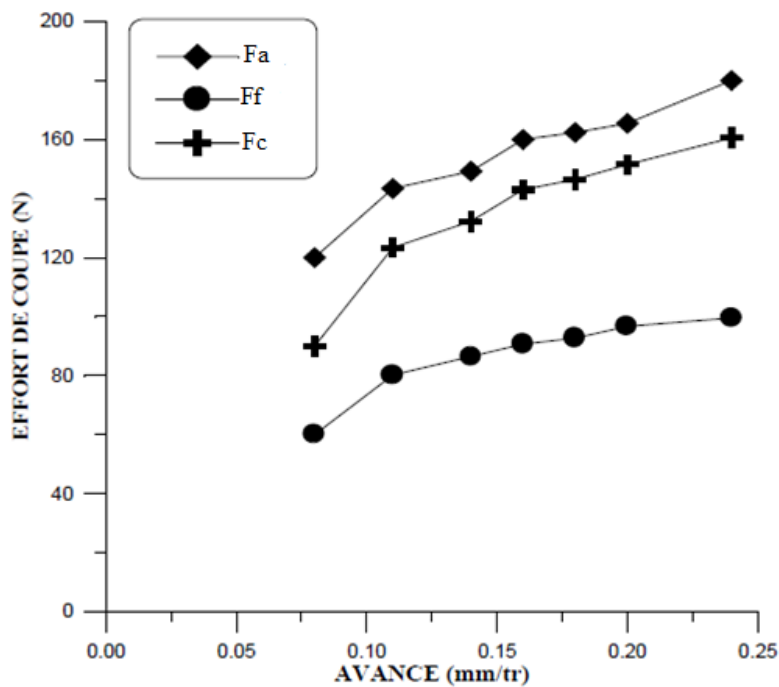


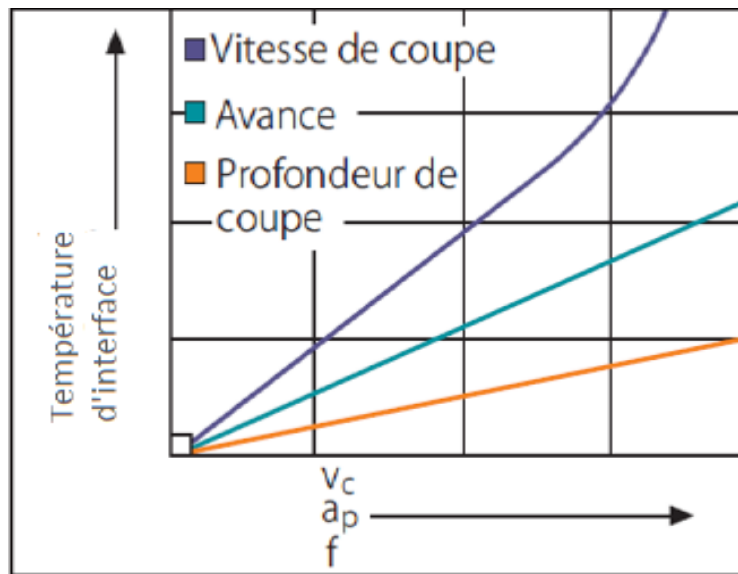
Figure II.8 : Évolution les efforts de coupe en fonction l'avance

### II.4.2 Influence des conditions de coupe sur la température d'interface

La thermique joue un rôle prépondérant dans les différents procédés d'usinage. En tournage on rappelle que la température à l'interface outil copeau provient de deux sources de chaleur distinctes.

- 1- L'échauffement dû à la déformation plastique dans la zone primaire de cisaillement.
- 2- L'augmentation de température due au frottement entre le copeau et la face de coupe de l'outil.

L'étude expérimentale a permis de constater que cette température augmente avec les conditions de coupe ( $V_c$ ,  $f$ ,  $a$ ) (Figure 2-9).



**Figure II.9 :** Évolution de température d'interface en fonction les conditions de coupe

### II.3.1.4 La température d'interface

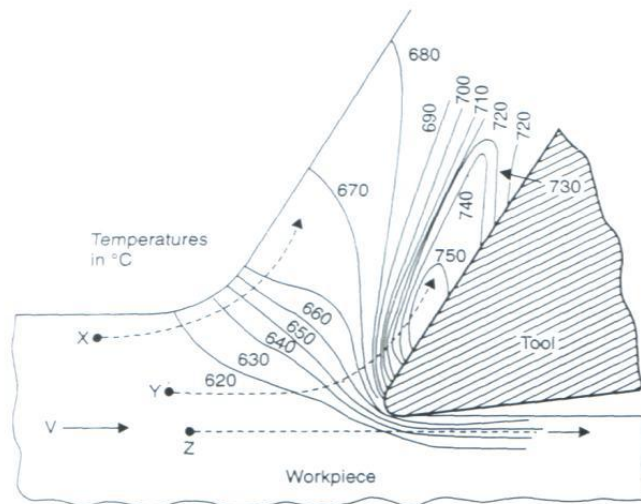
L'objectif est de mesurer des températures à la surface de copeau en formation pour la connaissance de ressource de chaleur et comment l'influent sur les paramètres d'usinage et la relation par l'optimisation des conditions de coupe

- **Procédé de mesure utile**

Le relevée de température a été effectué à l'aide de caméra thermique instrument par montage expérimentale (par technique d'infrarouge)

- **Distribution de température**

A partir la mesure de température au niveau de coupe, nous peuvent prendre cette figure (ci-dessous):



**Figure II.10** Distribution de température sur pièce outil.

On remarque que la température augmentée en la zone de cisaillement primaire et la zone de cisaillement secondaire donc les zones les plus important en tournage c'est cette la dernière.

- **Température primaire et secondaire de cisaillement**

Solen le modèle de Merchant on peut écrit la formule de température dans la zone de cisaillement primaire [3]. Comme suit :

$$\theta_p = \theta_0 + (1 - \Phi) \frac{W_1}{\rho * c}$$

$\theta$  : la température d'un élément de matière.

$\rho$  : la masse volumique d'un matière.

$c$  : la capacité thermique massique.

$\Phi$  : la fraction de chaleur.

$$\Phi = \frac{K_{ct}}{\rho c * V_c * \tan \varphi} \left[ 1 - e^{\left( -\frac{\rho c * V_c * \tan \varphi}{K_{ct}} \right)} \right]$$

$K_{ct}$  : la conductivité thermique

$\varphi$  : l'angle de frottement au niveau la surface de contact copeau / outil, puisque :

$$\tan \varphi = \frac{f * \cos \gamma_{fe}}{h - f * \sin \gamma_{fe}}$$

$\gamma_{fe}$  : l'angle de coupe latérale en travail

$h$  : l'épaisseur de copeau.

$$h = f * \left[ \frac{\cos \gamma_{fe}}{\tan \gamma_{fe}} + \sin \gamma_{fe} \right]$$

$W_1$  : l'énergie fournie par unité de volume.

On peut écrit la formule de température d'interface outil-copeau comme suit :

$$\theta_c = \theta_p + 0.67 * \Delta \theta_M$$

Sachant que : 
$$\Delta \theta_M = \frac{F_t}{W} \sqrt{\frac{3 * V_c * a}{2 * K * \rho * c * Y * h}}$$

$Y$  : la longueur de contact entre le copeau et l'outil.

$$Y = \xi * a * \frac{\sin(\varphi + \lambda - \gamma)}{\sin \varphi * \cos \lambda}$$

$\lambda$  : l'angle d'inclinaison de l'arête de l'outil.

Pour la contrainte uniforme :  $\xi = 1$

---

## II.5 Conclusion

Dans cette partie, il est présenté les différentes contraintes liées au système outil, pièce et machine.

On a établi les deux fonctions objectives, qui sont le temps de production et les coûts de production, ce qui nous a permis de cerner certaines contraintes liées au fraisage et la modélisation des paramètres qui nous permettra de simuler et optimiser pour atteindre l'objectif.





## Chapitre III : Evaluation de la durée de vie de la fraise

III.1 Introduction .....	34
III.2 Principe du dommage d'un outil .....	34
III.3 Application aux outils tayloriens .....	35
III.4 Le cas du fraisage .....	36
III.5 évaluation des épaisseurs moyennes d'ordre r .....	38
III.6 Fraisage en roulant (cas général) .....	39
III.7 Fraisage en roulant : faibles angles de prise .....	41
III.8 Fraisage en bout (cas général) .....	43
III.9 Fraisage en bout( effet du décentrement de la coupe ) .....	44
III.10 Fraisage en bout( faible angles de prise) .....	45
III.11 Conclusion .....	46

### III.1 Introduction

D'après certains essais expérimentaux qui sont basés sur la détermination informatique des conditions de coupe. notamment celles des substances visant d'une recherche effectuée au laboratoire de Méthodes de Fabrication de l'université de Liège dans le cadre d'un programme plus vaste visant à réaliser un meilleur compromis économique entre l'accroissement du débit de coupe et la limitation de l'usure des outils, tout en tenant compte de la puissance de la machine-outil.

Il va de soi qu'une telle analyse nécessite une connaissance suffisamment précise des lois qui régissent l'usure des outils. Dans le cas du tournage, le problème est assez bien cerné, du moins pour le chariotage, et on admet généralement une loi de Taylor généralisée ou intervient, avec des exposants appropriés, la vitesse, l'épaisseur et la largeur de coupe. Le choix rationnel des conditions de coupe peut alors se faire aisément sur base de tables d'exposants de Taylor que l'on se procure sans difficulté.

Dans le cas d'un chariotage n tournage qui est simple à approcher permet de cerner au mieux les paramètres d'usure

### III.2 Principe du dommage d'un outil

Les essais classiques de durée de vie des outils consistent à effectuer un chariotage au tour et à mesurer l'évolution d'un paramètre d'usure de l'outil, par exemple l'usure en dépouille  $V_B$ . par convention, l'outil est hors service lorsque cette usure atteint une certaine valeur de référence  $V_{Bmax}$ . Le temps de chariotage après lequel cette usure a été atteinte est appelé durée de vie  $T$  de l'outil. On sait depuis les travaux de Taylor que cette durée de vie est liée à la vitesse de coupe  $V$  par la relation [3]

$$C^* = V * T^n \quad (1)$$

Où  $C^*$  est une constante dépendant de la géométrie de coupeau. On peut admettre une relation de la forme

$$C^* = \frac{C}{h^p * b^q} \quad (2)$$

ou  $h$  est l'épaisseur de coupe et  $b$ , la largeur de coupe soit, en chariotage,

$$h = f \sin \kappa_r, \quad b = \frac{a}{\sin \kappa_r}$$

et  $C$  constante dépendant de la matériau a usinée

En désignant par  $f$  l'avance par tour, par  $a$ , l'engagement et par  $\kappa_r$  l'angle de direction de l'arête de coupe.

Mais le chariotage est un usinage très particulier, où les trois paramètres  $b$ ,  $h$  et  $V$  sont constants tout au long de l'opération, ce qui est loin d'être le cas dans bien des usinages courants. Ainsi, lors du dressage au tour réalisé à fréquence de rotation constante, la vitesse varie constamment avec le diamètre en fraisage, c'est l'épaisseur de coupe qui change d'un endroit à l'autre. Pour toutes ces opérations, il est nécessaire de faire appel à un modèle fondé sur le principe du dommage cumulatif que l'on peut exprimer comme suit : si, pendant une durée élémentaire  $dt$ , l'outil est utilisé dans conditions  $(b, h, V)$  qui, en chariotage, mèneraient à une durée de vie  $T$ , il consomme pendant cet intervalle de temps une portion  $\frac{dt}{T}$  de sa durée de vie. On dit encore qu'il subit un dommage élémentaire

$$dD = \frac{dt}{T} \quad (3)$$

Ce dommage se cumule, c'est-à-dire qu'après un temps  $\tau$  pendant lequel  $b$ ,  $h$  et  $v$  auront varié, le dommage total sera

$$D = \int_0^{\tau} \frac{dt}{T} \quad (4)$$

L'outil sera hors service lorsque ce dommage cumulé vaudra l'unité.

L'étude expérimentale a été réalisée par le laboratoire MF de l'Université de Liège

### III.3 Application aux outils tayloriens

L'utilisation des outils tayloriens, justiciables, à des conditions de coupe constantes, de lois (1) et (2). La durée de vie vérifiée par la relation

$$\frac{1}{T} = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * h^{\frac{p}{n}} * b^{\frac{q}{n}}$$

Ce qui implique

$$dD = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * h^{\frac{p}{n}} * b^{\frac{q}{n}} dt$$

Pour trouver le dommage cumulé dans le temps, le dommage cumulé devient

$$D = C^{-\frac{1}{n}} \int_0^{\tau} V^{\frac{1}{n}} * h^{\frac{p}{n}} * b^{\frac{q}{n}} dt \quad (5)$$

### III.4 Le cas du fraisage

Lors du fraisage en régime, la vitesse périphérique de la fraise  $V$  et la largeur de coupe sont constantes. Par contre, l'épaisseur de coupe  $h$  varie constamment. Notons  $]-\varphi_1, \varphi_2[$  l'angle de prise de la fraise dans la pièce. On peut écrire

$$\begin{cases} h(\vartheta) \neq 0 \text{ dans } ]-\varphi_1, \varphi_2[ \\ h(\vartheta) = 0 \text{ hors de cet intervalle} \end{cases} \quad (6)$$

La position angulaire  $\vartheta$  d'une dent est du reste liée au temps par la relation

$$d\vartheta = 2 * \pi * N * dt \quad (7)$$

ou  $N$  est la fréquence de rotation de la fraise. Le dommage après un tour sera donc

$$\mathcal{D}_{1 \text{ tour}} = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{q}{n}} * \frac{1}{2 * \pi * N} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^{\frac{p}{n}}(\vartheta) d\vartheta \quad (8)$$

Comme ce tour s'effectue en un temps  $\frac{1}{N}$ , le taux moyen d'accroissement du dommage sera

$$\mathcal{D}_{\text{moy}} = N \mathcal{D}_{1 \text{ tour}} = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{q}{n}} * \frac{1}{2 * \pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^{\frac{p}{n}}(\vartheta) d\vartheta \quad (9)$$

On peut alors définir la durée de vie moyenne  $T_{\text{moy}}$  par la condition de mise hors service

$$\mathcal{D} = \dot{\mathcal{D}}_{\text{moy}} T_{\text{moy}} = 1$$

Soit

$$T_{\text{moy}} = \frac{1}{\dot{\mathcal{D}}_{\text{moy}}} \quad (10)$$

Explicitement, cela donne

$$\frac{1}{T_{\text{moy}}} = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{q}{n}} * \frac{1}{2 * \pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^{\frac{p}{n}}(\vartheta) d\vartheta \quad (11)$$

Utilisant deux nouvelles grandeurs  $h_{\frac{p}{n}}$  et  $T_S$ . Deux grandeurs nouvelles. La première est l'épaisseur moyenne d'ordre  $\frac{p}{n}$ ,  $h_{\frac{p}{n}}$  devient,

$$h_{\frac{p}{n}} = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^n(\varphi) d\varphi \right]^{\frac{p}{n}} \quad (12)$$

Où  $\varphi_s$  est l'angle de prise de la fraise, à savoir,

$$\varphi_s = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (13)$$

Cette définition permet d'écrire

$$\frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^{\frac{p}{n}}(\vartheta) d\vartheta = \frac{\varphi_s}{2 * \pi} * h_{\frac{p}{n}}^{\frac{p}{n}}$$

$$\frac{1}{T_{moy}} = C^{-\frac{1}{n}} * V^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{q}{n}} * \frac{\varphi_s}{2 * \pi} * h_{\frac{p}{n}}^{\frac{p}{n}} \quad (14)$$

La deuxième grandeur auxiliaire est durée de vie en prise  $T_s$  définie par

$$T_s = T_{moy} \frac{\varphi_s}{2 * \pi} \quad (15)$$

Qui n'est autre que la portion de la durée de vie moyenne pendant laquelle les dents travaillent, la relation (14) se ramène à une loi de Taylor de forme classique, à savoir

$$V * T_s^n * h_{\frac{p}{n}}^p * b^q = C \quad (16)$$

En somme, la loi de Taylor continue de s'appliquer en fraisage, à condition de considérer d'une part, la durée de vie en prise et d'autre part, l'épaisseur moyenne d'ordre  $\frac{p}{n}$

Certains chercheurs déjà ont étudié l'utilisation de la durée de vie en prise (proposée par Colding). L'ordre de l'épaisseur moyenne est explicité dans ce qui va suite.

### III.5 évaluation des épaisseurs moyennes d'ordre r

Nous noterons  $r$  le rapport  $\frac{p}{n}$ . Des travaux ont défini que,  $r$  varie généralement entre 0 et 2. L'établissement d'une stratégie de calcul des moyennes  $h$  est facilité par la connaissance de trois de leurs propriétés que nous citons sans démonstration.

a) La moyenne  $h_r$  croit avec  $r$ . en d'autres termes, si

$$0 < r_1 < r_2, \quad \text{on a } h_{r_1} < h_{r_2}$$

b) Lorsque  $r$  tend vers 0,  $h_r$  tend vers une limite  $h_0$  qui n'est autre que la moyenne logarithmique :

$$h_0 = e^{\left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \ln h^{\frac{p}{n}}(\vartheta) d\vartheta \right]} \quad (17)$$

c) Lorsque  $r$  tend vers l'infini,  $h_r$  tend vers une valeur  $h_\infty$  qui s'identifie au maximum de  $h$  dans l'intervalle de prise :

$$h_\infty = \max h(\vartheta) \quad \left[ -\varphi_1, \varphi_2 \right] \quad (18)$$

Cela étant, on peut imaginer plusieurs voies pour l'évaluation de  $h$  :

1. Méthode exacte : par intégration numérique. Ce sera la voie naturelle dans un programme sur ordinateur.
2. Méthode d'interpolation ; à partir d'une table préétablie de  $h_r$  pour diverses valeurs de  $r$ , on interpole sur  $r$ .
3. Méthode de surestimation : en remplaçant  $r$  par une valeur supérieure, on obtient une surestimation de  $h_r$ , ce qui va dans le sens de la sécurité pour la durée de vie. Or, nous verrons que les valeurs particulières  $h_1$  et  $h_2$  s'évaluent assez facilement. On notera qu'une approximation du même type est généralement consentie de manière tacite dans le calcul de la puissance de coupe. En effet, partant de la loi de Kienzle donnant l'effort de coupe sous la forme

$$F_c = k_c * b * h^{1-z}$$

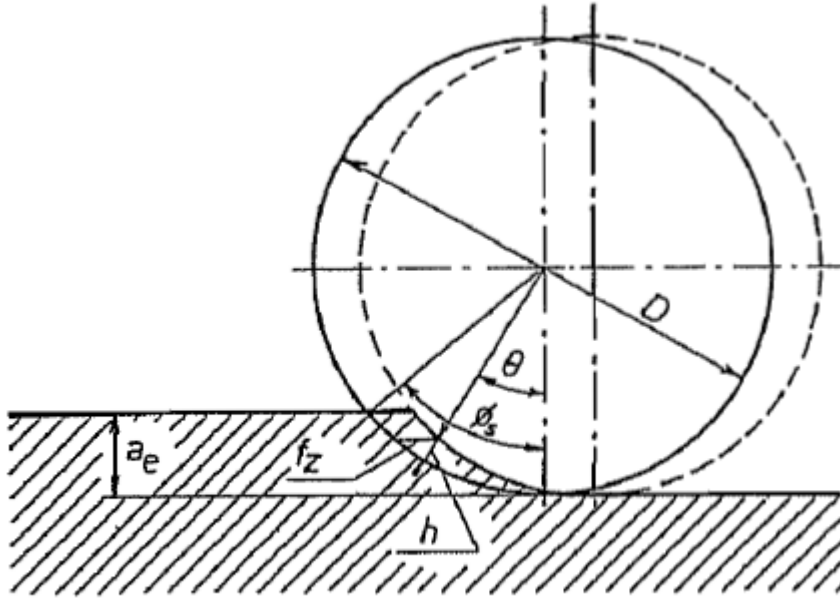
La puissance moyenne de coupe est exactement, pour  $Z$  dents

$$\begin{aligned} P &= Z * k_c * v * b * \frac{1}{2*\pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} h^{1-Z}(\varphi) d\vartheta \\ &= Z * \frac{\varphi_s}{2*\pi} * k_c * v * b * h_{1-Z}^{1-Z} \end{aligned}$$

Et il est d'usage de remplacer dans cette expression  $h_{1-z}$  par  $h_1$ .  
Cette approximation a pour effet de surestimer légèrement la puissance.

### III.6 Fraisage en roulant (cas général)

Les formules explicites de durée de vie pour le fraisage en roulant. La figure III.1 montre que si  $f_z$  est l'avance par dent,



FigurIII.1 fraisage en roulant

$$h(\vartheta) = f_z \sin \vartheta \quad (19)$$

Moyennant l'approximation classique consistant à négliger la vitesse d'avance devant la vitesse de coupe. L'arc de prise s'étend de  $\varphi_1 = 0$  à  $\varphi_2 = \varphi_s$  et on a toujours

$$0 < \varphi_s \leq \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

L'épaisseur moyenne  $h_r$  est donc donnée par :

$$h_r = I_r(\varphi_s) * f_z \quad (21)$$

Avec

$$I_r(\varphi_s) = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_s} \sin^r \vartheta d\vartheta \right]^{\frac{1}{r}} \quad (22)$$

La table 1 donne un certain nombre de valeurs de cette fonction. Pour un calcul par surestimation, on peut partir des valeurs simples suivantes :

$\varphi/\text{deg}$	r										
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0.0641	0.0700	0.0751	0.0796	0.0835	0.0870	0.0902	0.0931	0.0958	0.0982	0.1005
20	0.1276	0.1392	0.1493	0.1580	0.1658	0.1728	0.1790	0.1847	0.1899	0.1947	0.1991
30	0.1897	0.2068	0.2215	0.2344	0.2457	0.2559	0.2650	0.2733	0.2808	0.2877	0.2941
40	0.2499	0.2720	0.2911	0.3076	0.3221	0.3351	0.3468	0.3573	0.3669	0.3757	0.3839
50	0.3075	0.3341	0.3569	0.3766	0.3940	0.4093	0.4231	0.4356	0.4469	0.4572	0.4668
60	0.3620	0.3924	0.4183	0.4406	0.4602	0.4775	0.4929	0.5068	0.5194	0.5310	0.5415
70	0.4126	0.4461	0.4745	0.4998	0.5199	0.5386	0.5552	0.5701	0.5835	0.5958	0.6070
80	0.4588	0.4946	0.5346	0.5502	0.5724	0.5918	0.6091	0.6245	0.6383	0.6509	0.6624
90	0.5000	0.5372	0.5682	0.5944	0.6169	0.6366	0.6540	0.6694	0.6832	0.6957	0.7071

Table III.1 : les valeurs de r

$$I_1(\varphi_s) = \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_s} \sin^r \vartheta \, d\vartheta = \frac{1 - \cos \varphi_s}{\varphi_s} \quad (23)$$

et

$$I_2(\varphi_s) = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_s} \sin \vartheta \, d\vartheta \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\varphi_s}{2\varphi_s} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Du reste, l'angle  $p$  se calcule (fig. 1) par la relation

$$\cos \varphi_s = 1 - \frac{2a_e}{D} \quad (25)$$

Ou  $a_e$  est l'engagement radial et  $D$ , le diamètre de la fraise.

### III.7 Fraisage en roulant : faibles angles de prise

Il est fréquent dans ce mode de fraisage que l'engagement radial soit une faible portion du diamètre, ce qui permet d'apporter quelques simplifications. La formule (25) peut alors être approchée par

$$1 - \frac{\varphi_s^2}{2} \equiv 1 - \frac{2a_e}{D}$$

Ce qui donne

$$\varphi_s \equiv 2 \sqrt{\frac{a_e}{D}} \quad (26)$$

On peut en outre confondre  $\sin \vartheta$  et  $\vartheta$  tout au long de l'angle de prise, ce qui permet d'écrire

$$I_2(\varphi_s) = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_s} \vartheta^r d\vartheta \right]^{\frac{1}{r}} = \frac{\varphi_s}{(r+1)^{\frac{1}{r}}} = \frac{2}{(r+1)^{1/r}} \sqrt{\frac{a_e}{D}} \quad (27)$$

De plus, la durée de vie moyenne en prise admet l'expression approchée

$$T_s = T_{moy} \frac{\varphi_s}{2\pi} \equiv T_{moy} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a_e}{D}} \quad (28)$$

Ces résultats, et le fait que  $b$  n'est autre que l'engagement axial  $a_p$ , permettent de transformer la loi de Taylor (16) en

$$v T_{moy}^n a_p^q \left( \frac{a_e}{D} \right)^{\frac{n+p}{2}} \equiv C \frac{\pi^n}{2^p} \left[ 1 + \frac{p}{n} \right]^n = C^{**} \quad (29)$$

Le premier membre de cette expression contient, outre les facteurs classiques  $V$ ,  $T$ ,  $a_p$ ,  $f_z$  le groupement  $\frac{a_e}{D}$  à la puissance  $\frac{n+p}{2}$ .

### III.8 Fraisage en bout (cas général)

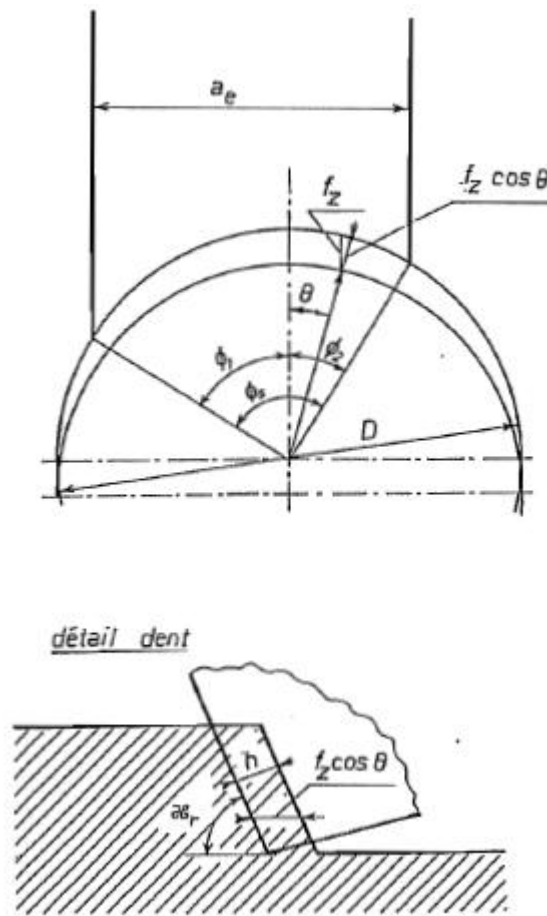


Figure III.2 fraisage en bout

La figure 2 illustre le fait que, pour un fraisage en bout,

$$h(\vartheta) = f_z \sin \kappa_r \cos \vartheta \quad (30)$$

où  $f_z$  est l'avance par dent et  $\kappa_r$ , l'angle de direction de l'arête principale de coupe. L'arc de prise se situe entre les angles  $(-\varphi_1)$  et  $\varphi_2$ , avec

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

L'expression générale de l'épaisseur moyenne d'ordre  $t$  est donc

$$h_t = J_t(-\varphi_1, \varphi_2) f_z \sin \kappa_r \tag{32}$$

avec

$$J_t = (-\varphi_1, \varphi_2) = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^t \vartheta d\vartheta \right]^{\frac{1}{t}} \tag{33}$$

La tabulation directe de cette fonction nécessiterait une table à trois entrées. Pour éviter une telle accumulation de résultats, on peut procéder comme suit :

notant que 
$$J_t^t(-\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\varphi_s} \left( \int_{-\varphi_1}^0 + \int_0^{\varphi_2} \right) \cos^t \vartheta d\vartheta$$

$$= \left[ \frac{\varphi_1}{\varphi_s} * \left( \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_1} \right) + \frac{\varphi_2}{\varphi_s} * \left( \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi_1} \right) \right] \cos^t \vartheta d\vartheta$$

On constate qu'à partir de la connaissance de la seule fonction

$$J_t(0, \varphi) = \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_0^{\varphi} \cos^t \vartheta d\vartheta \right]^{\frac{1}{t}} \tag{34}$$

Dont un certain nombre de valeurs sont données dans la table 2, il est possible de calculer  $J_t(-\varphi_1, \varphi_2)$  par

$\varphi$ /deg	r										
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949	0.9949
20	0.9796	0.9797	0.9797	0.9797	0.9798	0.9798	0.9798	0.9799	0.9799	0.9799	0.9800
30	0.9541	0.9542	0.9544	0.9546	0.9548	0.9549	0.9551	0.9553	0.9554	0.9556	0.9558
40	0.9180	0.9185	0.9191	0.9196	0.9202	0.9207	0.9213	0.9218	0.9223	0.9229	0.9234
50	0.8708	0.8723	0.8737	0.8751	0.8765	0.8778	0.8792	0.8805	0.8818	0.8831	0.8844
60	0.8118	0.8149	0.8180	0.8211	0.8241	0.8270	0.8299	0.8327	0.8354	0.8381	0.8407
70	0.7387	0.7452	0.7515	0.7576	0.7635	0.7691	0.7746	0.7799	0.7850	0.7900	0.7947
80	0.6464	0.6595	0.6719	0.6837	0.6948	0.7053	0.7152	0.7245	0.7332	0.7414	0.7492
90	0.555	0.5373	0.5682	0.5944	0.6169	0.6366	0.6540	0.6694	0.6832	0.6957	0.70711

TableauIII.2 : fraisage en bout – valeurs de r

$$J_t(-\varphi_1, \varphi_2) = \left[ \frac{\varphi_1}{\varphi_2} J_t^t(0, \varphi_1) + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} J_t^t(0, \varphi_2) \right]^{\frac{1}{t}} \quad (35)$$

Si l'on se contente de surestimations, on pourra utiliser les résultats suivants :

$$J_1(-\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^t \vartheta d\vartheta = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\varphi_s} \quad (36)$$

Et

$$\begin{aligned} J_2(-\varphi_1, \varphi_2) &= \left[ \frac{1}{\varphi_s} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2}{2\varphi_s} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (37)$$

### III.9 Fraisage en bout( effet du décentrement de la coupe )

On vérifie aisément à l'aide de la figure 2 que l'engagement radial  $a_g$  est lié aux angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  par la relation

$$\frac{a_g}{D} = \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \quad (38)$$

Pour une même valeur de  $a_g < D$ , il est possible de réaliser le travail d'une manière centrée, c'est-à-dire avec  $\varphi_1 = \varphi_2$  ou décentrée, avec, pour fixer les idées,  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Quelle est l'influence de ce choix du mode de travail sur la durée de vie ?

La formule (11) montre que l'inverse de la durée de vie ( $\frac{1}{T_{moy}}$ ) est proportionnel à l'intégrale

$$L = \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^n \vartheta d\vartheta \quad (39)$$

Augmenter le décentrement,  $\varphi_2$  tout en maintenant  $\frac{a_g}{D}$  constant. Pour respecter cette condition, il faudra qu'à une variation  $\delta\varphi_2$  de  $\varphi_2$  corresponde une variation  $\delta\varphi_1$  de  $\varphi_1$  telle que

$$\delta \left( \frac{2a_g}{D} \right) = \cos \varphi_1 \delta\varphi_1 + \cos \varphi_2 \delta\varphi_2 = 0$$

Ce qui suppose

$$\delta\varphi_1 = -\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \delta\varphi_2 \quad (40)$$

La variation première de  $L$  est alors

$$\begin{aligned}\delta L &= \cos^{\frac{p}{n}} \varphi_2 \delta \varphi_2 + \cos^{\frac{p}{n}} \varphi_1 \delta \varphi_1 \\ &= \left( \cos^{\frac{p}{n}} \varphi_2 \delta \varphi_2 \right)^{\frac{p-1}{n}} \varphi_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2\end{aligned}$$

Soit, en fin de compte,

$$\delta L = \cos^{\frac{p}{n}} \varphi_2 \left[ 1 - \left( \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \right)^{1 - \frac{p}{n}} \right] \delta \varphi_2 \quad (41)$$

Pour  $\varphi_2 > \varphi_1$ , on a évidemment  $\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} < 1$ . Il résulte que si  $\frac{p}{n}$  est inférieur à l'unité,  $\delta L > 0$  et la durée de vie diminue ; à l'inverse, si  $\frac{p}{n}$  est supérieur à l'unité :  $\delta L < 0$  et la durée de vie augmente.

Nous obtenons donc la conclusion suivante : De décentrement diminue la durée de vie si  $\frac{p}{n} < 1$  et l'augmente si  $\frac{p}{n} > 1$ . Pour  $p = n$ , la fraise est indifférente au décentrement.

### III.10 Fraisage en bout( faible angles de prise)

Le cas des faibles angles de prise, bien que moins fréquent qu'en fraisage en roulant, est assez instructif. Notons  $\varphi_m$  l'angle situé au milieu de l'arc de prise :

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad (42)$$

Pour un angle de prise  $\varphi_s$  relativement petit, on peut écrire sans grande erreur

$$\cos^t \vartheta \equiv \cos^t \varphi_m - t(\vartheta - \varphi_m) \sin \varphi_m \cos^{t-1} \varphi_m$$

Ce qui donne, après intégration

$$J_t(-\varphi_1, \varphi_2) \equiv \cos \varphi_m \quad (43)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{2a_e}{D} &= \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \\ &= \sin \left( \frac{\varphi_s}{2} - \varphi_m \right) + \sin \left( \varphi_m + \frac{\varphi_s}{2} \right) \\ &\equiv 2 \sin \frac{\varphi_s}{2} \cos \varphi_m\end{aligned} \quad (44)$$

Il en découle

$$T_S = T_{moy} \frac{\varphi_s}{2\pi} \equiv \frac{T_{moy}}{\cos \varphi_m} * \frac{a_e}{\pi D} \quad (45)$$

Ces approximations permettent de donner à la loi de Taylor (16) la forme approchée

$$V T_{moy}^n b^q (f_z \sin \kappa_r)^p \left(\frac{a_e}{D}\right)^n \cos^{p-n} \varphi_m \equiv C \pi^n = C^{***} \quad (46)$$

On remarquera que l'angle  $\varphi_m$  mesure le décentrement du travail. Un décentrement croissant correspond à une décroissance de  $\cos \varphi_m$ , ce qui a pour effet d'augmenter la durée de vie si  $p > n$  et de la diminuer dans le cas contraire. Ceci est en parfait accord avec les conclusions de la section 9. Mais ici, nous possédons une relation explicite, qui peut s'écrire

$$\frac{T}{T_0} = \cos^{(p/n)-1} \varphi_m \quad (47)$$

En appelant  $T$  la durée de vie moyenne obtenue et  $T_0$  celle qui correspondrait à un décentrement nul. Comme l'illustre la figure 3, l'effet du décentrement peut être assez marqué.

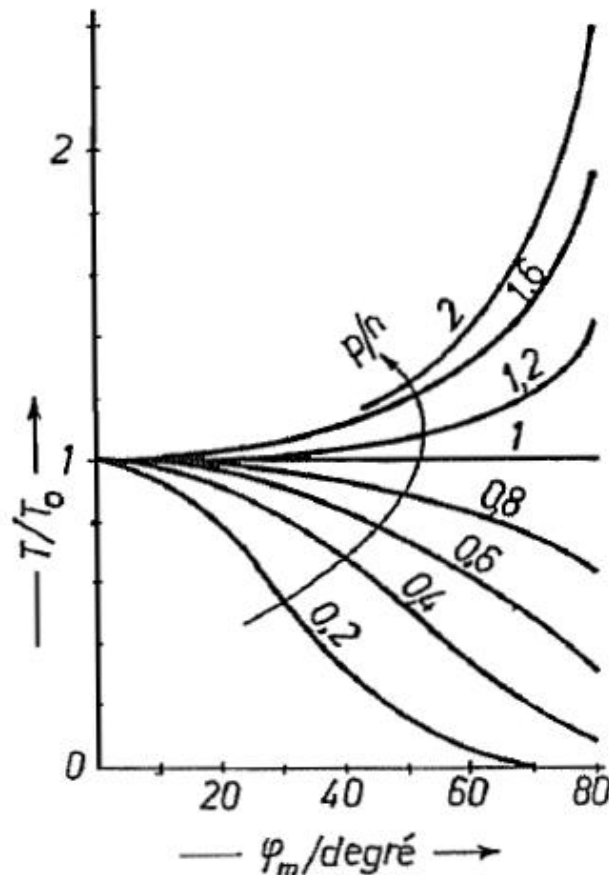
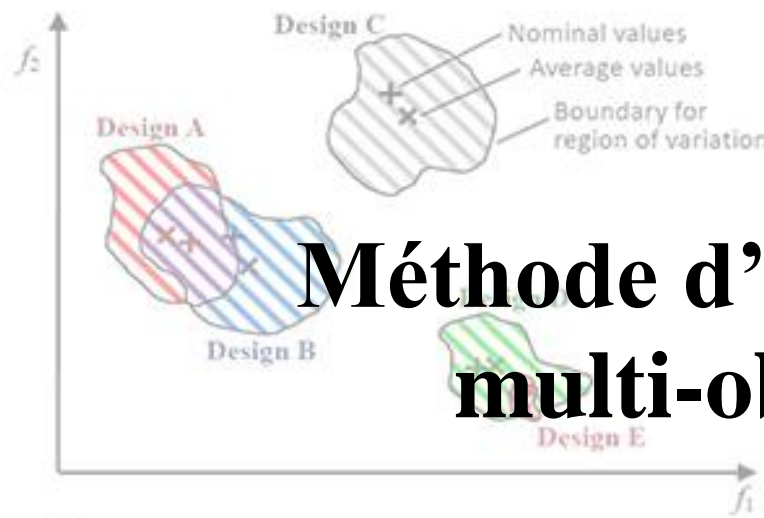
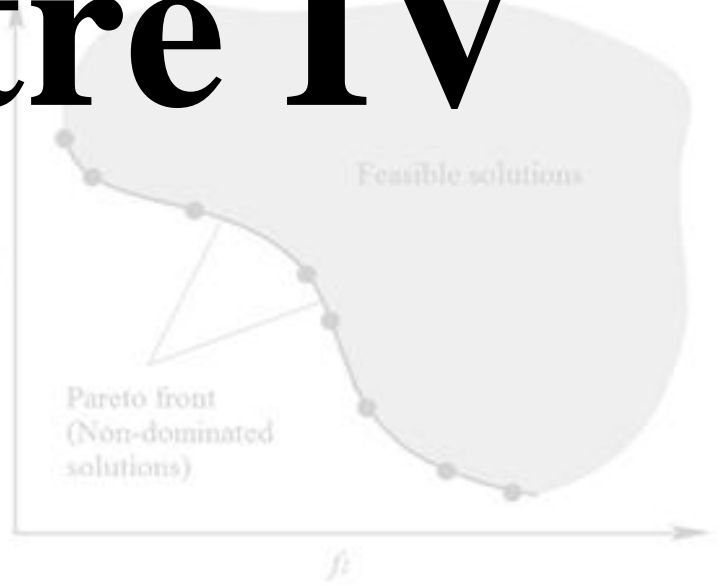
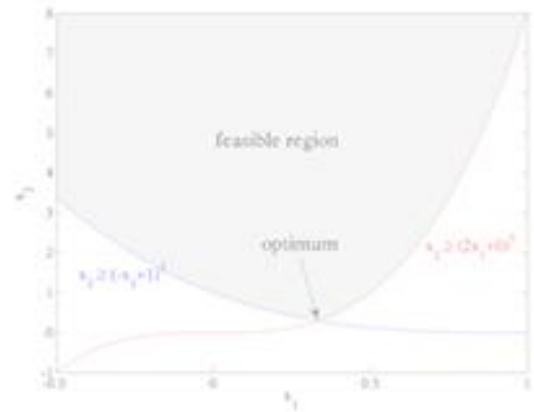


Figure III.3: l'effet de décentrement

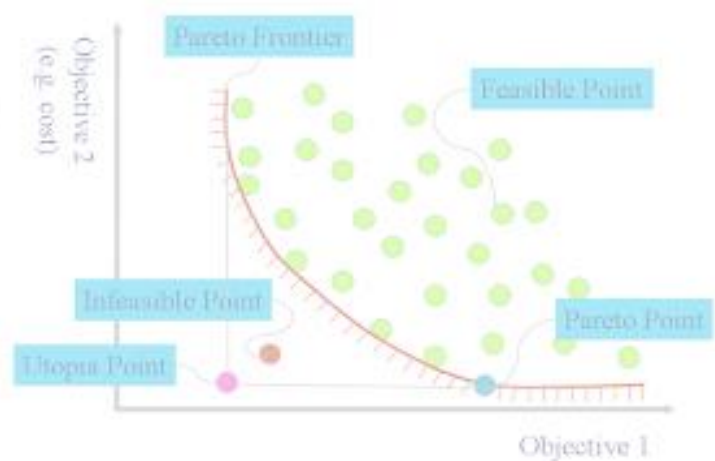
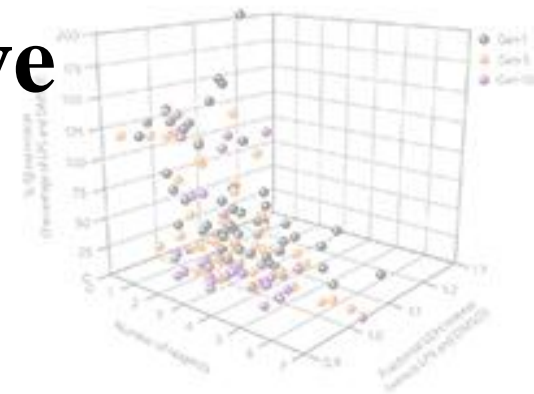
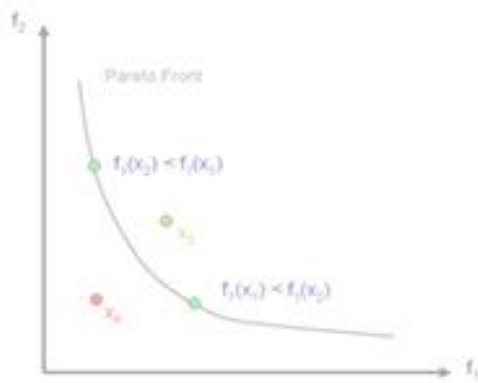
### III.11 Conclusion

Le principe du dommage cumulatif permet de construire un modèle de la durée de vie des fraises prenant en compte l'influence des divers facteurs géométriques de la coupe. Les lois de Taylor obtenues pour les faibles angles de prise se rapprochent de celles que l'on trouve dans la littérature, mais possèdent moins d'exposant indépendants. L'effet du décentrement de la coupe est également présent dans notre modèle et comme nous l'avons vu, il peut être aussi bien favorable que défavorable, selon la valeur du rapport  $\frac{P}{n}$ . L'opinion commune selon laquelle le décentrement serait toujours défavorable parce qu'il conduit à un plus long chemin de la fraise dans la pièce

# Chapitre IV



## Méthode d'optimisation multi-objective



## Chapitre IV : Méthode d'optimisation multi-objective

IV.1 Introduction sur l'optimisation multiobjectif et dominance.....	47
IV.1.1 Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation ? .....	49
IV.1.2 Vocabulaire et définitions.....	50
IV.1.3 La classification des problèmes d'optimisation.....	51
IV.1.4 L'optimisation multiobjectif.....	52
IV.1.5 La dominance.....	65
1.6 Illustration de l'intérêt de l'optimisation multiobjectif.....	67
1.7 Les relations dérivées de la dominance.....	76
IV.1.8 La surface de compromis.....	77
IV.1.9 La convexité.....	79
IV.1.10 La représentation de la surface de compromis.....	79
IV.1.11 Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif .....	79

## IV.1 Introduction sur l'optimisation multiobjectif et dominance [ 4 ]

### IV.1.1 Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation ?

Un problème d'optimisation se définit comme la recherche du minimum ou du maximum (de l'optimum donc) d'une fonction donnée. On peut aussi trouver des problèmes d'optimisation pour lesquels les variables de la fonction à optimiser sont contraintes d'évoluer dans une certaine partie de l'espace de recherche. Dans ce cas, on a une forme particulière de ce que l'on appelle un problème d'optimisation sous contraintes.

Ce besoin d'optimisation vient de la nécessité de l'ingénieur de fournir à l'utilisateur un système qui répond au mieux au cahier des charges. Ce système devra être calibré de manière à :

- Occuper le volume minimum nécessaire à son bon fonctionnement (coût des matières premières),
- Consommer le minimum d'énergie (coût de fonctionnement),
- Répondre à la demande de l'utilisateur (cahier des charges).

Mathématiquement parlant, un problème d'optimisation se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{minimiser} & f(\vec{x}) & \text{(fonction à optimiser)} \\ \text{avec} & \vec{g}(\vec{x}) \leq \mathbf{0} & \text{(m contraintes d'inégalité)} \\ \text{et} & \vec{h}(\vec{x}) = \mathbf{0} & \text{(p contraintes d'égalité)} \end{array} \right.$$

On a  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{g} \in \mathbb{R}^m$  et  $\vec{h}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$ .

Ici , les vecteurs  $\vec{g}(\vec{x})$  et  $\vec{h}(\vec{x})$  représentent respectivement  $m$  contraintes d'inégalité et  $p$  contraintes d'égalité .

Cet ensemble de contraintes délimite un espace restreint de recherche de la solution optimale.

En général, on trouve deux types de contraintes d'inégalité :

- Des contraintes du type  $B_{i_{inf}} \leq x_i \leq B_{i_{sup}}$  : les valeurs de  $\vec{x}$  qui vérifient ces contraintes définissent l' "espace de recherche". Cet espace est représenté à la figure 4.1-a ( $n = 2$ ).
- Des contraintes du type  $c(\vec{x}) \leq \mathbf{0}$  ou  $c(\vec{x}) \geq \mathbf{0}$  : les valeurs de  $\vec{x}$  qui vérifient ces contraintes définissent l' "espace des valeurs réalisables". Cet espace est représenté à figure 1.1-b ( $n = 2$ ).

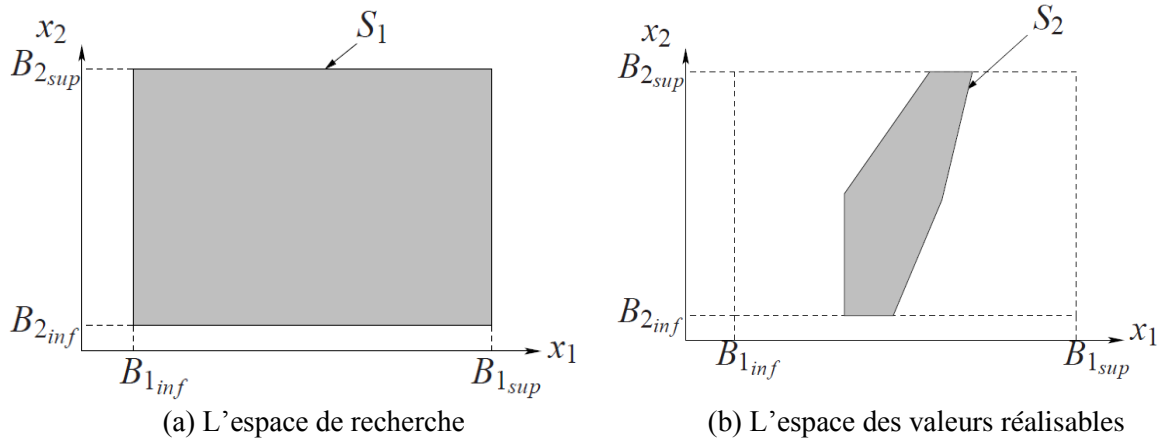


Fig IV.1 : Les différents espaces de recherche.

## IV.1.2 Vocabulaire et définitions

### Fonction objectif :

C'est le nom donné à la fonction  $f$  (on l'appelle encore **fonction de coût** ou **critère d'optimisation**). C'est cette fonction que l'algorithme d'optimisation va devoir "Optimiser" (Trouver un optimum).

Sauf mention explicite contraire, on supposera dans la suite que la fonction objective est à minimiser.

### Variables de décision :

Elles sont regroupées dans le vecteur  $\vec{x}$ . C'est en faisant varier ce vecteur que l'on recherche un optimum de la fonction  $f$ .

### Minimum global :

Un "point"  $\vec{x}^*$  est un minimum global de la fonction  $f$  si on a :  $f(\vec{x}^*) < f(\vec{x})$  quel que soit  $\vec{x}$  tel que  $\vec{x}^* \neq \vec{x}$ . Cette définition correspond au point  $M_3$  de la figure 1.2.

### Minimum local fort :

Un "point"  $\vec{x}^*$  est un minimum local fort de la fonction  $f$  si on a :  $f(\vec{x}^*) < f(\vec{x})$  quel que soit  $\vec{x} \in V(\vec{x}^*)$  et  $\vec{x}^* \neq \vec{x}$ , où  $V(\vec{x}^*)$  définit un "voisinage" de  $\vec{x}^*$ . Cette définition correspond aux points  $M_2$  et  $M_4$  de la figure IV.2

**Minimum local faible :**

Un "point"  $\bar{x}^*$  est un minimum local faible de la fonction  $f$  si on a :  
 $f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x})$  quel que soit  $\bar{x} \in V(\bar{x}^*)$  et  $\bar{x}^* \neq \bar{x}$ , où  $V(\bar{x}^*)$  définit un "voisinage" de  $\bar{x}^*$ . Cette définition correspond au point  $M_1$  de la figure IV.2.

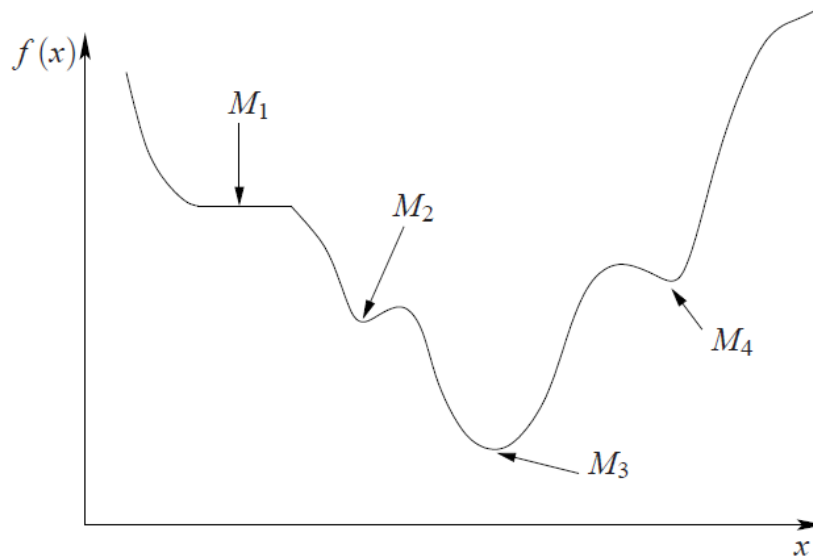


Fig IV.2 : Les différents minima.

### IV.1.3 La classification des problèmes d'optimisation

On peut classer les différents problèmes d'optimisation de leurs caractéristiques :

1. Nombre de variables de décision :
  - Une  $\Rightarrow$  monovariable.
  - Plusieurs  $\Rightarrow$  multivariable.
2. Type de la variable de décision :
  - Nombre réel continu  $\Rightarrow$  continu.
  - Nombre entier  $\Rightarrow$  entier ou discret.
  - Permutation sur un ensemble fini de nombres  $\Rightarrow$  combinatoire.
3. Type de la fonction objectif :
  - Fonction linéaire des variables de décision  $\Rightarrow$  linéaire
  - Fonction quadratique des variables de décision  $\Rightarrow$  quadratique
  - Fonction non linéaire des variables de décision  $\Rightarrow$  non linéaire.
4. Formulation du problème :
  - Avec des contraintes  $\Rightarrow$  contraint.
  - Sans contraintes  $\Rightarrow$  non contraint.

A partir un exemple d'utilisé dans la littérature et prenant comme exemple le rechargement de combustible, le problème d'optimisation des plans de rechargement de stock, on constate que :

- Le problème est
  - non linéaire  $\Rightarrow$  on n'a pas de représentation explicite du problème. On est obligé d'utiliser un code de calcul numérique pour calculer le plus précisément possible les différentes valeurs à optimiser ;
  - contraint  $\Rightarrow$  les éléments de combustible ne peuvent pas être placés n'importe où;
  - multivariable  $\Rightarrow$  un plan de rechargement est composé de plusieurs éléments de combustible dont les caractéristiques sont différentes ;
  - combinatoire  $\Rightarrow$  pour passé à un autre plan de rechargement, on permute des éléments de combustible d'un plan de rechargement.

#### IV.1.4 L'optimisation multiobjectif

Lorsque l'on modélise un problème, on cherche souvent à satisfaire plusieurs objectifs. Par exemple, on veut un système performant et on veut aussi que ce système consomme peu. Dans ce cas, on parle de problème d'optimisation multiobjectif (ou problème d'optimisation multicritère). Celui-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiser} & f(\bar{x}) \\
 \text{avec} & \vec{g}(\bar{x}) \leq 0 \\
 \text{et} & \vec{h}(\bar{x}) = 0 \\
 \text{où } \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{f} \in \mathbb{R}^k, \vec{g} \in \mathbb{R}^m \text{ et } \vec{h}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^p.
 \end{array}$$

Dans notre cas, on n'a plus un seul objectif à atteindre, mais  $k$  (le vecteur  $\vec{f}$  regroupe  $k$  fonctions objectif qui est deux).

Le but que l'on se fixe dans la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif est de minimiser "au mieux" les différents objectifs dans certaines problèmes d'optimisation multicritère, on rencontre souvent des objectifs contradictoires.

Deux objectifs sont contradictoires lorsque la diminution d'un objectif entraîne une augmentation de l'autre objectif.

## IV.1.5 La dominance

### IV.1.5.1 Introduction et définitions

Lors de la résolution de problème d'optimisation multiobjectif, il est obtenu une multitude de solutions. Seul un nombre restreint de ces solutions sera considéré pour qu'une solution soit intéressante, il faut qu'il existe une relation de **dominance** entre la solution considérée et les autres solutions, dans le sens des définitions qui suivent :

#### Définition : la relation de dominance

On dit que le vecteur  $\vec{x}_1$  domine le vecteur  $\vec{x}_2$  si :

- $\vec{x}_1$  est au moins aussi bon que  $\vec{x}_2$  dans tous les objectifs, et,
- $\vec{x}_1$  est strictement meilleur que  $\vec{x}_2$  dans au moins un objectif.

Les solutions qui dominent les autres mais ne se dominent pas entre elles sont appelées **solutions optimales au sens de Pareto** (ou **solutions non dominées**). On définit comme suit l'optimalité locale et l'optimalité globale au sens de Pareto.

#### Définition : optimalité locale au sens de Pareto

Un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  est optimal localement au sens de Pareto s'il existe un réel  $\delta > 0$  tel qu'il n'y ait pas de vecteur  $\vec{x}'$  qui domine le vecteur  $\vec{x}$  avec  $\vec{x}' \in \mathbb{R}^n \cap B(\vec{x}, \delta)$  où  $B(\vec{x}, \delta)$  représente une boule de centre  $\vec{x}$  et de rayon  $\delta$ .

Un vecteur  $\vec{x}$  est donc optimal localement au sens de Pareto s'il est optimal au sens de Pareto sur une restriction de l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ . Cette définition est illustrée par la figure IV.4.

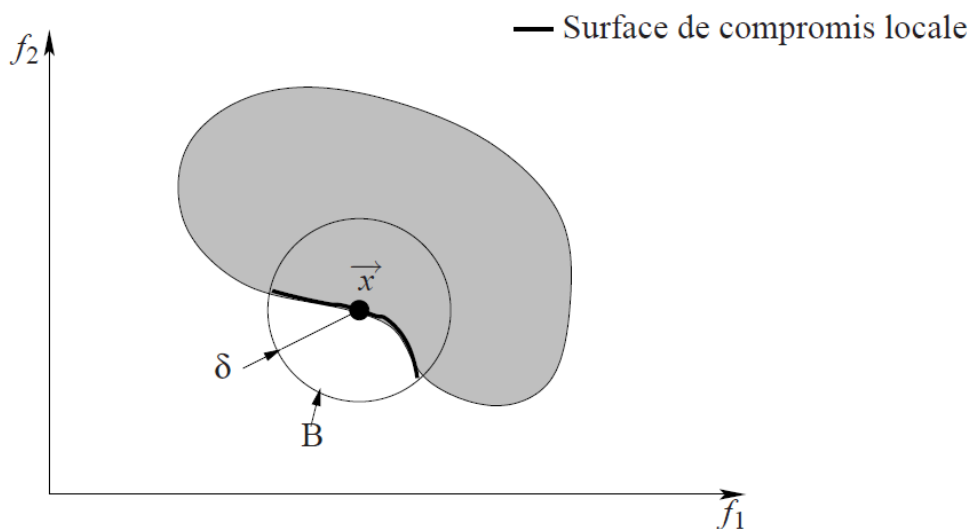


Fig.IV.3 : L'optimalité locale au sens de Pareto

**Définition : optimalité globale au sens de Pareto**

Un vecteur  $\bar{x}$  est optimal globalement au sens de Pareto (ou optimal au sens de Pareto) s'il n'existe pas de vecteur  $\bar{x}'$  tel que  $\bar{x}'$  domine le vecteur  $\bar{x}$ .

La différence entre cette définition et celle de l'optimalité locale tient dans le fait que l'on ne considère plus une restriction de l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ .

Une version "graphique" de la précédente définition utilise le théorème du contact.

**Définition : cône négatif**

Un cône négatif est défini dans  $\mathbb{R}^k$  de la manière suivante :

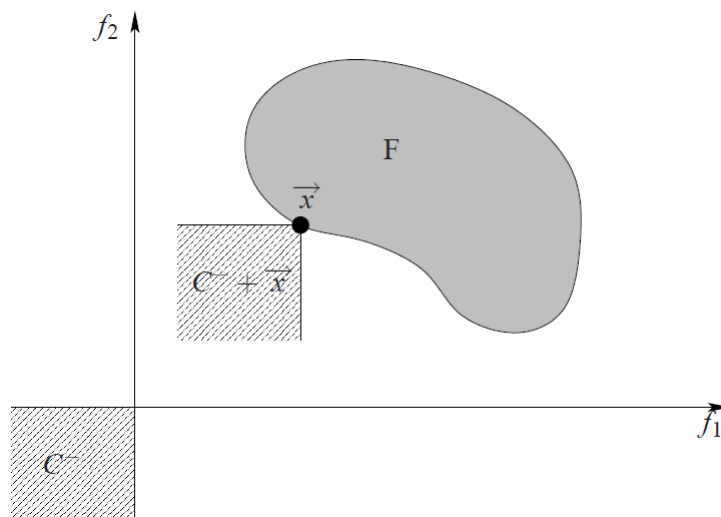
$$C^- = \{ \bar{x} \mid \vec{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{f}(\bar{x}) \leq 0 \}$$

**Définition : le théorème du contact**

Un vecteur  $\bar{x}$  est optimal au sens de Pareto pour un problème d'optimisation multiobjectif donné si

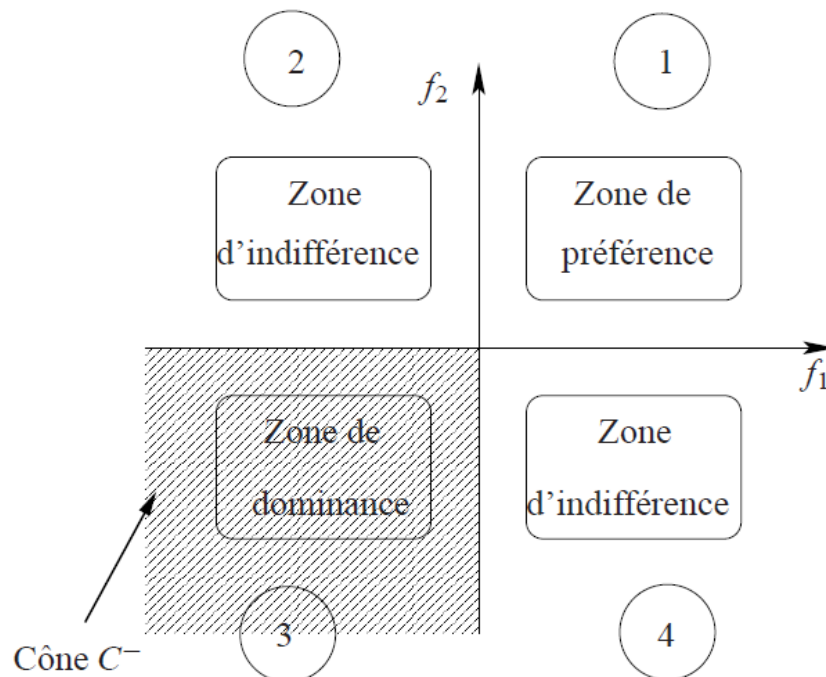
$$(C^- + \bar{x}) \cap F = \{ \bar{x} \}$$

où  $F$  désigne l'espace des solutions réalisables.



**Fig IV.4 :** Le théorème du contact.

Lorsque l'on applique la définition de la dominance, on peut définir quatre régions auxquelles on peut attribuer des niveaux de préférence. Ces régions sont représentées à la figure IV.6. Cette figure reprend le découpage défini par le cône négatif à dessus.



**Fig IV.5** Les niveaux de préférence dans la relation de dominance

Par exemple, si ce graphique est centré sur une solution  $A$  et que l'on compare cette solution avec une solution  $B$ , on aura les possibilités suivantes :

- si la solution  $B$  se trouve dans le quadrant 1, alors la solution  $A$  est préférée à la solution  $B$  ;
- si la solution  $B$  se trouve dans le quadrant 3, alors la solution  $A$  est dominée par la solution  $B$  ;
- si la solution  $B$  se trouve dans l'un des quadrants 2 ou 4, alors, on ne peut pas se prononcer sur la préférence de  $A$  par rapport à  $B$  ou de  $B$  par rapport à  $A$ .

### IV.1.5.2 Exemple

L'exemple a traité par K : DEB et repris par YANN.COLLETTE-PATRICK SIARRY[99]

On considère un problème à deux objectifs : maximiser  $f_1$  et minimiser  $f_2$ .

Pour ce problème, on trouve un ensemble de solutions. Cet ensemble de solutions est représenté dans le tableau IV.1.

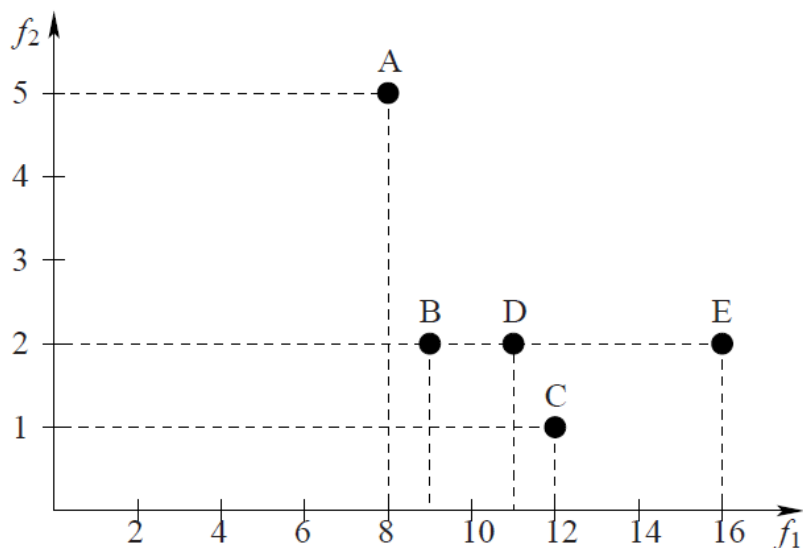
Point	Objectif $f_1$	Objectif $f_2$
A	8	5
B	9	2
C	12	1
D	11	2
E	16	2

**Tab IV.1** Ensemble des solutions d'un problème à deux objectifs

On représente ces points dans le plan  $f_1, f_2$  (voir figure IV.7).

Nous présentons dans le tableau IV.2 les comparaisons entre les différentes solutions. Précisons d'abord les conventions utilisées :

La comparaison de deux solutions, soit  $P$  et  $Q$ , se traduit par un couple, à l'intersection de la ligne  $P$  et de la colonne  $Q$ . Ce couple est constitué de deux symboles, respectivement associés aux objectifs  $f_1$  et  $f_2$  ; chacun de ces symboles peut prendre trois valeurs : +, - ou =,



**Fig.IV.6** Représentation des solutions dans le plan  $f_1, f_2$

Selon que  $P$  est meilleur, moins bon, ou du même niveau que  $Q$  vis-à-vis de l'objectif auquel ce symbole est associé.

On rappelle que l'on cherche à maximiser  $f_1$ , et minimiser  $f_2$ . Donc, un point  $P$  est meilleur qu'un point  $Q$  du point de vue de l'objectif  $f_1$  si  $f_1(P)$  est plus grand que  $f_1(Q)$  ; un point  $P$  est meilleur qu'un point  $Q$  du point de vue de l'objectif  $f_2$  si  $f_2(P)$  est plus petit que  $f_2(Q)$ .

Voici un exemple de traitement sur les points  $A$  et  $B$  du tableau IV.1. Effectuons les comparaisons :

- $A$  est moins bon que  $B$  vis-à-vis de l'objectif  $f_1$ . Donc, on attribue le signe - au premier élément du couple de la case  $[A,B]$ .
- $A$  est moins bon que  $B$  vis-à-vis de l'objectif  $f_2$ . Donc, on attribue le signe - au second élément du couple de la case  $[A,B]$ .

Si l'on se réfère à la définition précédente, on conclut que la solution  $B$  domine la solution  $A$ .

	A	B	C	D	E
A		(-, -)	(-, -)	(-, -)	(-, -)
B	(+, +)		(-, -)	(-, =)	(-, =)
C	(+, +)	(+, +)		(+, +)	(-, +)
D	(+, +)	(+, =)	(-, -)		(-, =)
E	(+, +)	(+, =)	(+, -)	(+, =)	

**Tableau IV.2** Classement des solutions

	A	B	D
A		(-, -)	(-, -)
B	(+, +)		(-, =)
D	(+, +)	(+, =)	

**Tableau IV.3** Classement des solutions de rang 2.

Remarque : D'évidence, les couples situés dans des cases du tableau IV.2 symétriques par rapport à la diagonale principale sont "complémentaires".

Nous allons maintenant chercher à extraire les solutions non dominées.

1. Considérons le point  $A$

- ce point est dominé par les points suivants :  
 $B$  (couple  $(-, -)$  à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $B$ ),  
 $C$  (couple  $(-, -)$  à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $C$ ),  
 $D$  (couple  $(-, -)$  à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $D$ ) et  
 $E$  (couple  $(-, -)$  à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $E$ ).

2. Considérons le point  $B$

- ce point est dominé par les points suivants :  
 $C$  (couple  $(-, -)$  à l'intersection de la ligne  $B$  et de la colonne  $C$ ),  
 $D$  (couple  $(-, =)$  à l'intersection de la ligne  $B$  et de la colonne  $D$ ) et  
 $E$  (couple  $(-, =)$  à l'intersection de la ligne  $B$  et de la colonne  $E$ ),
- il domine le point  $A$  (couple  $(+, +)$  à l'intersection de la ligne  $B$  et de la colonne  $A$ ).

On peut dire que le point  $A$  ne fera pas partie des solutions non dominées de rang 1 car il est possible de trouver un point ( $B$  en l'occurrence) qui est meilleur que le point  $A$  sur tous les objectifs.

3. Considérons le point  $C$
- ce point n'est pas dominé par le point  $E$  (couple  $(+,-)$  à l'intersection de la ligne  $E$  et de la colonne  $C$ ),
- et il ne domine pas, non plus, le point  $E$  (couple  $(-,+)$  à l'intersection de la ligne  $C$  et de la colonne  $E$ ) :
- les points  $C$  et  $E$  sont donc non dominés ;
- il domine les points suivants :  
 $A$  (couple  $(+,+)$  à l'intersection de la ligne  $C$  et de la colonne  $A$ ),  
 $B$  (couple  $(+,+)$  à l'intersection de la ligne  $C$  et de la colonne  $B$ ) et  
 $D$  (couple  $(+,+)$  à l'intersection de la ligne  $C$  et de la colonne  $D$ ).

On peut dire que les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  ne feront pas partie des solutions non dominées de rang 1 car il est possible de trouver un point ( $C$  en l'occurrence) qui soit meilleur que ces deux points sur tous les objectifs.

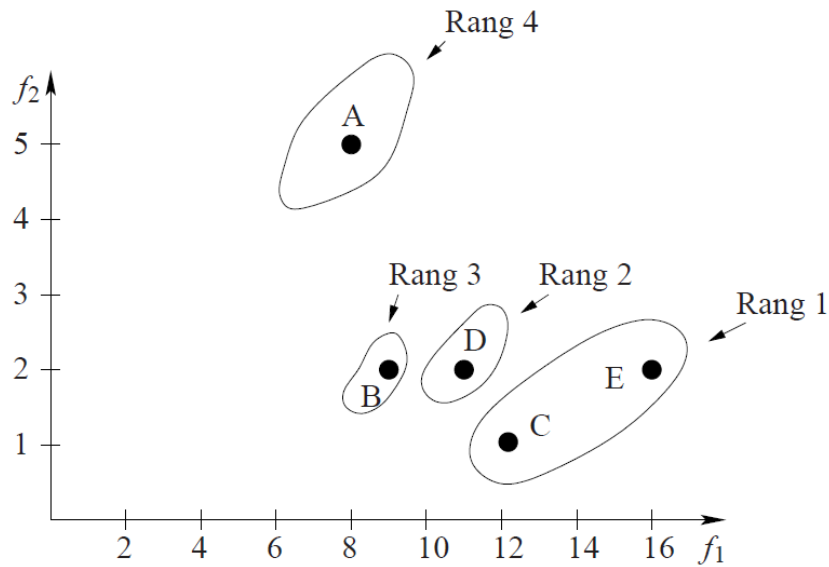
4. Le point  $D$  étant dominé, il n'est pas nécessaire de le comparer aux autres points.
5. Considérons le point  $E$
- ce point n'est pas dominé par le point  $C$  (couple  $(-,+)$  à l'intersection de la ligne  $C$  et de la colonne  $E$ ),  
 et il ne domine pas non plus le point  $C$  (couple  $(+,-)$  à l'intersection de la ligne  $E$  et de la colonne  $C$ ),
  - il domine les points suivants :  
 $A$  (couple  $(+,+)$  à l'intersection de la ligne  $E$  et de la colonne  $A$ ),  
 $B$  (couple  $(+,=)$  à l'intersection de la ligne  $E$  et de la colonne  $B$ ) et  
 $D$  (couple  $(+,=)$  à l'intersection de la ligne  $E$  et de la colonne  $D$ ).

On constate que les points  $E$  et  $C$  sont non dominés. Ils dominent les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  mais ne se dominent pas entre eux.

On va, maintenant, sortir ces deux points ( $E$  et  $C$ ) du tableau : ils forment **l'ensemble des points non dominés**. On peut établir un classement des solutions en fonction du **rang de domination**. Dans notre exemple, on attribue le rang 1 (car on a fini la première comparaison) aux points  $E$  et  $C$ , parce qu'ils dominent tous les autres points mais ne se dominent pas entre eux. Ces points sont donc des solutions **optimales au sens de Pareto** de rang 1.

On recommence à appliquer la règle sur les éléments restants du tableau. Les solutions restantes après suppression des points  $E$  et  $C$  sont représentées dans le tableau IV.3.

Ce processus s'arrête lorsque l'ensemble des points à comparer est vide. La figure IV.8 représente les différents points et leur rang.



**Fig IV.7** Les solutions et leurs rangs de Pareto.

Le pseudo-code de la fonction d'assignation du rang de Pareto est représenté dans l'algorithme IV.1. Dans cet algorithme, la variable  $N$  désigne le nombre de points de l'ensemble sur lequel on effectue les comparaisons.

---

**Algorithm VI.1** Assignation du rang de Pareto.

---

```

RangCourant = 1
m = N
while N ≠ 0 do
  For i = 1 to m do
    If  $X_i$  est Non dominé
      Rang( $X_i, t$ ) = RangCourant
    End For
  For i = 1 to m do
    If Rang( $X_i, t$ ) = RangCourant
      Ranger  $X_i$  dans une population temporaire
      N = N - 1
    End For
  RangCourant = RangCourant + 1
  m = N
End While

```

---

### IV.1.5.3 Exemple d'utilisation des lois

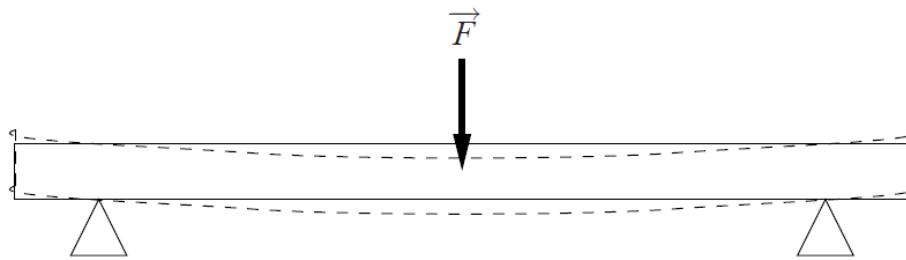
#### IV.1.5.3.1 Une barre pleine de section carrée

##### IV.1.5.3.1.1 La multiplicité des solutions

Lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimale à un problème d'optimisation multiobjectif donné, on s'attend souvent à trouver une solution et une seule. En fait, on rencontre rarement ce cas de figure. La plupart du temps, on trouve une multitude de solutions, du fait que certains des objectifs sont contradictoires.

En effet, si l'on prend l'exemple du dimensionnement d'une poutre devant supporter une charge donnée, on va vouloir obtenir une poutre de section la plus petite possible, produisant la plus petite déformation possible, lorsque la charge repose sur le milieu de la poutre. Dans cet exemple (représenté à la figure IV.3), de manière intuitive, on s'aperçoit que répondre à l'objectif "poutre de petite section" ne va pas du tout dans le sens de répondre à l'objectif "petite déformation"

Dans ce cas ..... fait la charge entre deux appuis, la flèche est maxi au milieu de la



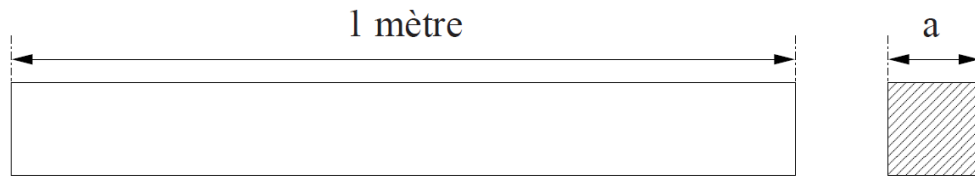
poutre ce qui se revient à choisir le matériaux nécessaire.

**Fig IV.8.** Déformation d'une poutre subissant une contrainte.

Donc, quand on résout un problème d'optimisation multiobjectif, on obtiendra une grande quantité de solutions. Ces solutions, comme on peut s'en douter, ne seront pas **optimales**, au sens où elles ne minimiseront pas tous les objectifs du problème.

Le concept est intéressant et permet de définir les solutions **le compromis**. En effet, les solutions que l'on obtient lorsque l'on a résolu le problème sont des solutions de compromis. Elles minimisent un certain nombre d'objectifs tout en dégradant les performances sur d'autres objectifs. Nous allons maintenant traiter plus en détail notre exemple d'introduction : le dimensionnement d'une barre de longueur donnée (1 m), représentée à la figure IV.9.

On recherche le côté  $a$  de la section carrée, permettant de minimiser le poids de la barre ainsi que sa déformation lorsqu'elle est soumise à une force de 1000 N appliquée en son centre.



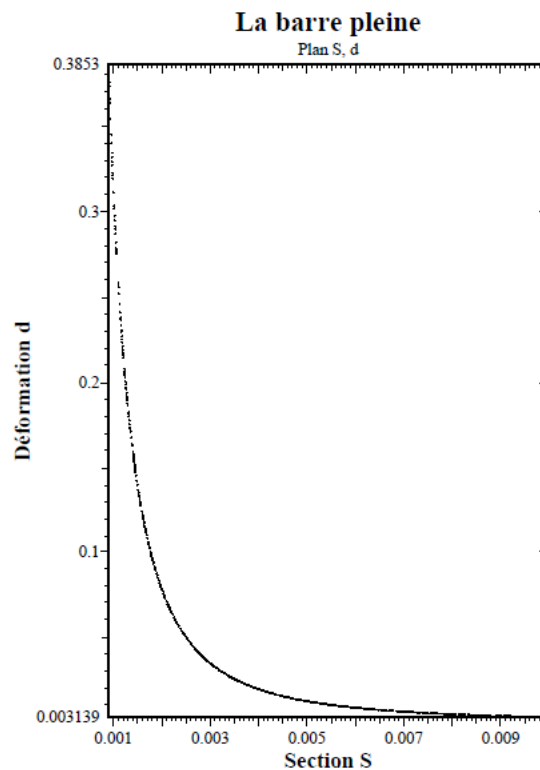
**Fig IV.9** Une barre pleine de section carrée.

Comme minimiser le volume d'une barre de longueur donnée revient à minimiser sa section, nous allons exprimer la section et la déformation maximale en fonction de la longueur du côté  $a$ .

$$\begin{cases} S(a) = a^2 \\ d(a) = 1000 + \frac{1.10^{-3}}{192 + 2.10^5 + \frac{a^4}{12}} \\ a \leq 0.1 \end{cases}$$

La seule contrainte fixée est que le côté de la section ne dépasse pas 10 cm.

Pour visualiser l'allure de l'ensemble des valeurs réalisables, nous allons choisir un certain nombre de valeurs de  $a$ , au hasard, puis nous allons calculer les valeurs des deux objectifs et les tracer dans un plan  $(S, d)$ . Cette allure est représentée à la figure IV.10



**Fig IV.10** L'ensemble des valeurs des objectifs pour une barre pleine de section carrée.

La première chose que nous pouvons constater sur cette figure est que les deux objectifs sont antagonistes. La minimisation des valeurs d'un objectif entraîne la maximisation de l'autre objectif. En revanche, sur cette figure, on peut voir que toutes les solutions sont non dominées. Ceci vient du fait que le problème d'optimisation, tel que nous l'avons écrit, se ramène à une simple courbe paramétrique.

Le second point que nous pouvons souligner est l'intérêt de l'optimisation multiobjectif par rapport à l'optimisation monoobjectif. en effet, si nous avons effectué une optimisation monoobjectif sur ce problème de dimensionnement, nous aurions cherché soit à optimiser le volume de la barre, soit à optimiser la déformation de cette même barre. Dans les deux cas, nous aurions obtenu une valeur absurde :

- une longueur de côté nulle pour la section de la barre (le volume est ainsi minimisé à outrance)
- une longueur de côté démesurée par rapport à la longueur de la barre, dans le cas de l'optimisation de la déformation de la barre. en effet, plus la section est importante, moins la barre se déforme.

Ce problème de dimensionnement montre que, dans certains cas, un problème d'optimisation ne peut pas se ramener à un seul objectif.

### 1.5.3.2 Une barre creuse de section carrée

Pour mettre en évidence un autre aspect important de l'optimisation multiobjectif, nous allons maintenant légèrement modifier le problème en ajoutant un nouveau paramètre. Nous considérons une barre creuse et de section carrée. La dimension intérieure est désignée par la variable  $b$ . Les différentes variables représentatives sont indiquées à la figure IV.11.

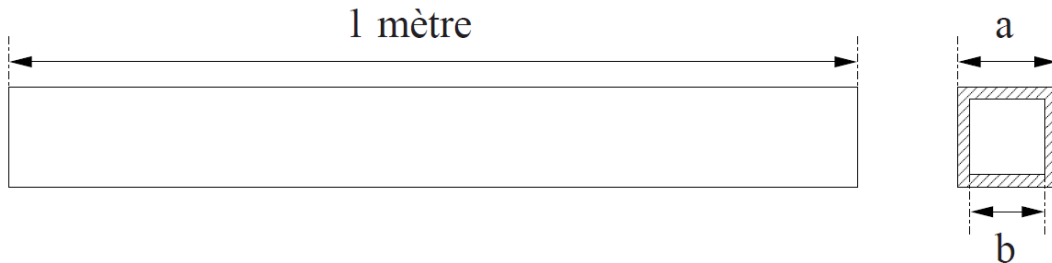
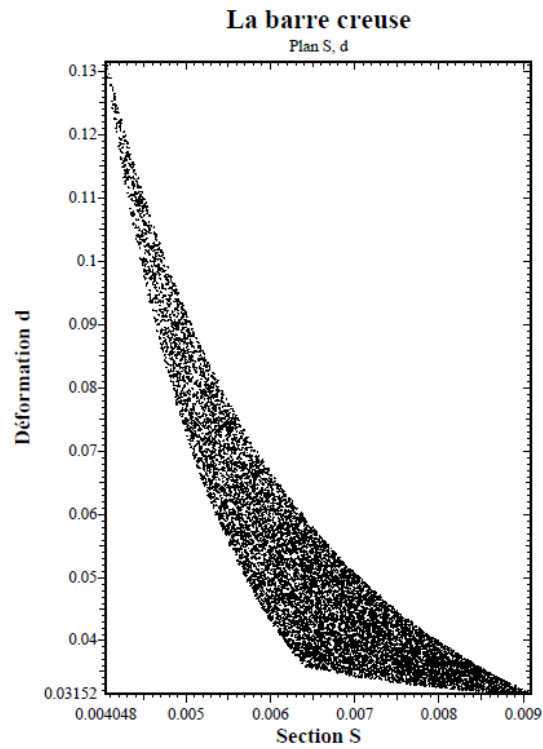


Fig IV.11 Une barre creuse de section carrée.

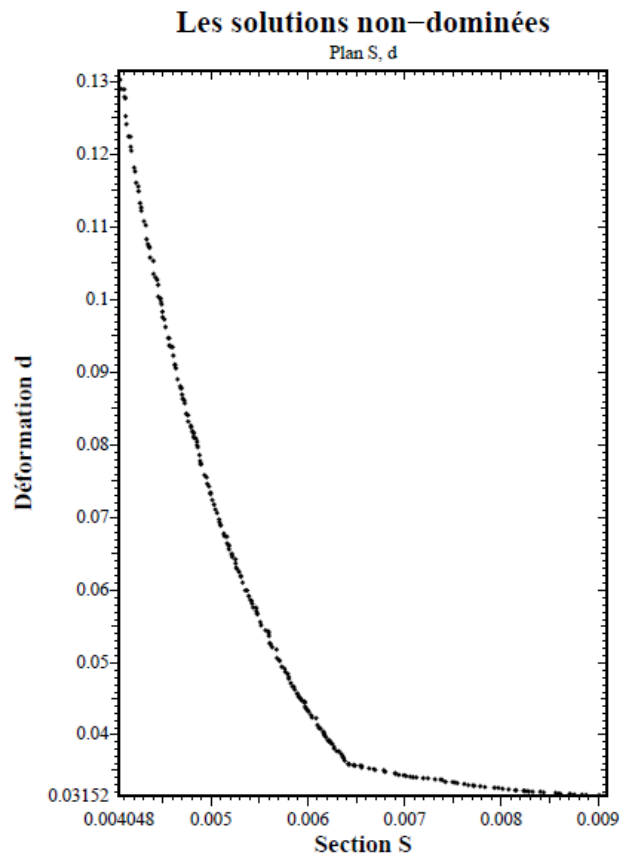
$$\begin{cases} S(a, b) = a^2 - b^2 \\ d(a, b) = 1000 + \frac{1 \cdot 10^{-3}}{192 + 2 \cdot 10^5 + \frac{a^4 - b^4}{12}} \\ a \leq 0.1 \\ b + 0.04 \leq a \end{cases}$$

Pour visualiser l'allure de l'ensemble des solutions réalisables, nous allons choisir un certain nombre de valeurs du couple  $(a, b)$ , au hasard pour  $a, b \in [0, 0.1]$ , puis nous allons calculer les valeurs des deux objectifs et les tracer dans un plan  $(S, d)$ . Cette allure est représentée à la figure IV.12.

Pour cet exemple, on peut maintenant remarquer que la situation est plus compliquée. Les différentes solutions ne forment plus une simple courbe, nous avons désormais un véritable ensemble de solutions. La différence avec l'exemple précédent est que, maintenant, toutes les solutions de cet ensemble ne se valent pas. Un groupe de solutions domine les autres. Pour extraire ces solutions, nous allons appliquer la relation de dominance et éliminer les points dominés. On obtient alors l'ensemble représenté à la figure IV.13.



**Fig IV.12** L'ensemble des valeurs des objectifs pour une barre creuse de section carrée.



**Fig IV.13** Les solutions non dominées pour le dimensionnement d'une barre creuse de section carrée.

On peut remarquer que, après filtrage des solutions dominées, seule une frontière de l'ensemble de départ subsiste. il s'agit de la surface de compromis et c'est sur cette surface de compromis que l'on trouve les "meilleures" solutions, celles que l'on ne pourra pas améliorer sur les deux objectifs.

### IV.1.6 Illustration de l'intérêt de l'optimisation multiobjectif

On peut comprendre l'intérêt d'effectuer une optimisation multiobjectif par rapport à une optimisation monoobjectif en visualisant l'amélioration relative d'un objectif par rapport à un autre sur un problème test simple.

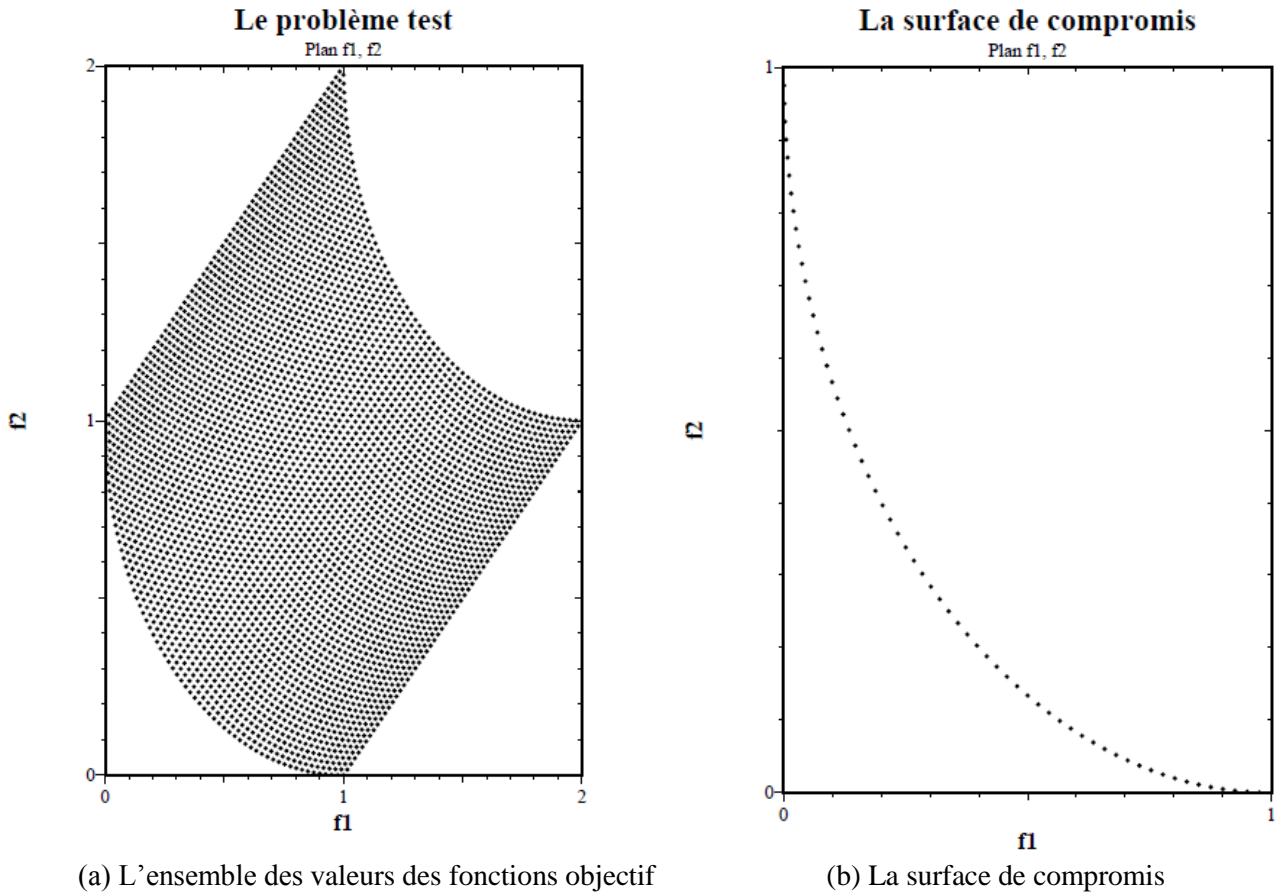
Ce problème est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad f_1(\theta, x) = 1 - \cos(\theta) + x \\ \text{Minimiser} \quad f_2(\theta, x) = 1 - \sin(\theta) + x \\ \text{Avec} \quad \quad \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{Et} \quad \quad \quad \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

La surface de compromis est obtenue en remplaçant la variable  $x$  par la valeur 0. On a alors l'expression de la surface de compromis :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\theta) = 1 - \cos(\theta) \\ f_2(\theta) = 1 - \sin(\theta) \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

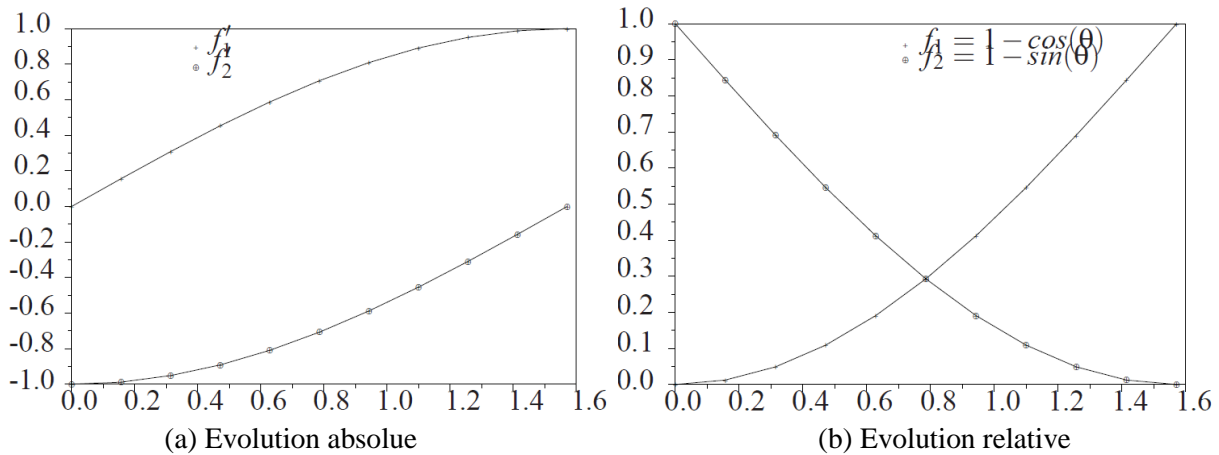
L'ensemble des valeurs des fonctions objectives, ainsi que la surface de compromis, sont représentés à la figure IV.14.



**Fig IV.14** Le problème test trigonométrique

Pour cette surface de compromis, nous allons maintenant tracer l'amélioration relative que l'on peut obtenir sur chaque objectif en fonction de sa position sur la surface de compromis. Pour cela, on divise la surface de compromis en dix morceaux (l'angle varie de 0 à 90° par pas de 9°). L'écart relatif est mesuré par rapport à l'excursion totale de la fonction objectif (cette excursion vaut 1 pour les deux fonctions objectif).

$\theta$	$f_1\theta$	$f_2\theta$
0	0	1
9	0.0123	0.843
18	0.0489	0.691
27	0.109	0.546
36	0.191	0.412
45	0.293	0.293
54	0.412	0.191
63	0.546	0.109
72	0.691	0.0489
81	0.843	0.0123
90	1	0



**Fig IV.15** L'évolution des valeurs des fonctions objectif sur la surface de compromis.

Comme on peut le voir à la figure IV.15-a, suivant la position du point sur la surface de compromis, on peut espérer une bonne réduction du niveau d'une fonction objectif sans avoir d'augmentation très importante du niveau de l'autre fonction objectif. C'est le cas, par exemple, de la fonction objectif  $f_1$  pour des valeurs de  $\theta$  proches de 0. Pour cette position, si l'on augmente la valeur de  $\theta$  de 0.2 radian (on passe ainsi de 0 radian à 0.2 radian), la valeur de la fonction objectif  $f_1$  passe de 1 à 0.843 alors que la fonction objectif  $f_2$  passe elle de 0 à 0,0123.

Le gain que l'on peut espérer en un point précis peut être représenté par la dérivée de la fonction objectif par rapport à la variable  $\theta$  en ce point. Une dérivée positive signifie une amélioration de la fonction objectif alors qu'une dérivée négative signifie une détérioration de la valeur de la fonction objectif.

Ce comportement typique de l'optimisation multiobjectif reflète assez bien le but poursuivi par cette discipline : minimiser un groupe de fonctions objectif sans trop dégrader les valeurs des optima obtenus par rapport à ceux obtenus lors d'une optimisation monoobjectif effectuée objectif par objectif.

## IV.1.7 Les relations dérivées de la dominance

### IV.1.7.1 Introduction

La relation de dominance n'offre pas de degrés de liberté dans sa définition. Par exemple, il n'est pas possible d'inclure dans la définition de la relation de dominance une préférence d'un objectif par rapport à un autre. C'est pour contrecarrer ce manque de flexibilité que des relations dérivées de la relation de dominance ont été développées. Les solutions que

Permettent de trouver ces relations dérivées de la dominance sont toutes optimales au sens de Pareto. La grande différence que l'on rencontre avec ces relations est que l'ensemble des solutions que l'on obtient avec ces relations est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions obtenues avec la relation de dominance de Pareto.

Dans cette section, l'ensemble  $S^k$  désigne l'ensemble des solutions réalisables d'un problème d'optimisation à  $k$  fonctions objectif.

### IV.1.7.2 Optimalité lexicographique

Cette définition de l'optimalité permet d'inclure une préférence entre objectifs [Ehrgott97].

#### Définition : optimalité au sens lexicographique

Une solution  $\overline{x^*} \in S^k$  est optimale au sens lexicographique si  $\overline{x^*} \leq_{lex} \overline{x}, \forall \overline{x} \in S^k - \{\overline{x^*}\}$ .

Si  $\overline{x}, \overline{y}$  on dit que  $\overline{x} \leq_{lex} \overline{y}$  s'il existe une valeur d'index  $q^*$  telle que  $x_q = y_q$  pour  $q = 1, \dots, (q^* - 1)$  et  $x_{q^*} < y_{q^*}$ . les relations entre  $x_q$  et  $y_q$  pour  $q \geq q^*$  ne sont pas prises en compte car nous nous arrêtons à l'indice  $q^*$  (c'est le premier indice pour lequel  $x_q < y_q$ ).

Cette définition implique que l'utilisateur ait rangé par ordre d'importance les différents objectifs. La comparaison entre les deux solutions se fera dans l'ordre de classement des objectifs.

Illustrons l'utilisation de cette relation en prenant un exemple.

Soient deux points A et B :

$$A = (1,2,3,4,5,6)$$

$$B = (1,2,3,9,4,9)$$

Pour ces deux points, on a  $A \leq_{lex} B$  car, jusqu'à la troisième position, on a  $A_i = B_i$ ,  $i = 1,2,3$  et, pour la quatrième position, on a  $4 < 9$ . On conclut donc que la solution A domine lexicographiquement la solution B.

### IV.1.7.3 Optimalité extrême

Comme pour la relation d'optimalité lexicographique, cette relation permet d'établir une préférence entre critères. Cette préférence est établie en utilisant des poids. Plus un objectif sera important, plus son poids sera élevé.

#### Définition : optimalité extrême

Une solution  $\overline{x^*} \in S^k$  est extrême-optimale si, étant donné un vecteur de poids  $\overline{y} \in \mathbb{R}^k$  tel que  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\overline{x^*}$  est une solution optimale du problème de minimisation monocritère ayant pour fonction objectif:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \overline{x}_i \quad (1.1)$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \overline{x}_i^* \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \overline{x}_i, \forall \overline{x} \in S^k - \{\overline{x^*}\} \quad (1.2)$$

considère l'objectif 6 comme objectif de référence. On considère aussi que les objectifs 1,3 et 5 sont 20% plus importants que l'objectif de référence et que les objectifs 2 et 4 sont équivalents à l'objectif de référence. On calcule maintenant les poids de chaque objectif :

$$\begin{aligned}w_1 &= w_3 = w_5 = 1.2 w_6 \\w_2 &= w_4 = w_6 \\ \sum_{i=1}^6 w_i &= 1\end{aligned}$$

La résolution de ces équations nous donne :

$\sum_{i=1}^6 w_i \cdot A_i = 3.45$  et  $\sum_{i=1}^6 w_i \cdot B_i = 5.39$  donc, le point A extrême-domine le point B.

#### IV.1.7.4 Optimalité maximale

Cette relation, contrairement aux précédentes, ne permet pas d'introduire une préférence entre objectifs.

##### Définition : optimalité maximale

Une solution  $\bar{x}^* \in S^k$  est max-optimale si la valeur du pire objectif est aussi petite que possible :

$$\begin{aligned} \max_{q \in \{1, \dots, k\}} x_q^* &\leq \max x_q & (1.3) \\ & \left| \begin{array}{l} q \in \{1, \dots, k\} \\ \bar{x} \in S^k - \{\bar{x}^*\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Illustrons cette relation en prenant l'exemple précédent. On peut dire que la solution A max-domine la solution B car :

$$\max A = 6 < \max B = 9$$

#### IV.1.7.5 La cône optimalité

Une autre relation de classement existe, il s'agit de la relation de cône-dominance. Cette relation possède l'avantage, par rapport à la relation de Pareto, d'être "réglable".

**Définition : un cône**

Un cône de pente  $\lambda$  est défini de la manière suivante :

- Si  $0 < \lambda < 1$  (voir figure IV.16-a) :

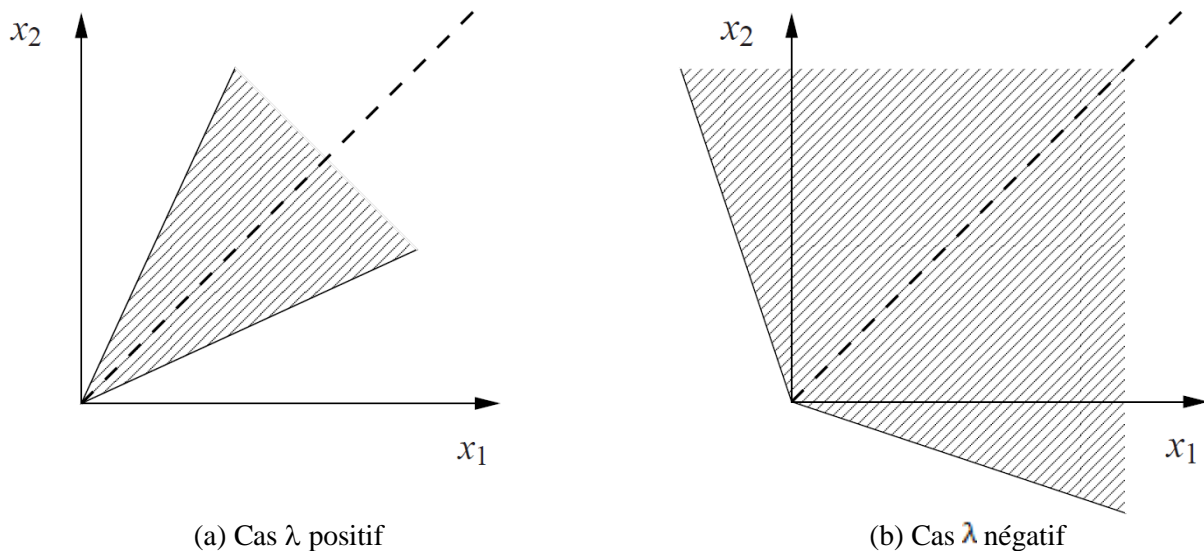
$$C_{\lambda}(x_1, x_2) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda \cdot x_1 \leq x_2 \leq \frac{1}{\lambda} \cdot x_1 \right\} \quad (1.4)$$

- Si  $\lambda < 0$  (voir figure 1.16-b) :

$$C_{\lambda}(x_1, x_2) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \cdot x_1 \leq x_2 \text{ et } \lambda \cdot x_2 \leq x_1 \} \quad (1.5)$$

- Si  $\lambda = 0$

$$C_0(x_1, x_2) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \}$$



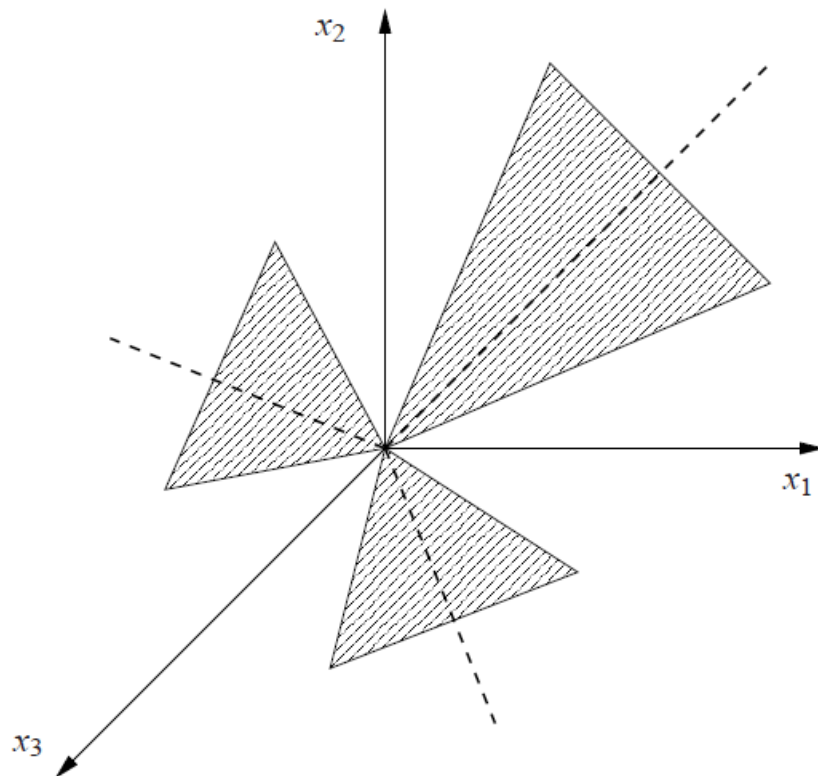
**FIG IV.16** L'allure du cône en fonction de  $\lambda$ .

Cette relation peut être étendue au cas multidimensionnel. On trouvera dans [Deb 01d'après YANN.COLLETTE-PATRICK SIARRY ] une relation différente permettant aussi de régler la forme du cône de domination.

**Définition : le cône multidimensionnel**

Un cône de pente  $\lambda$  est défini de la manière suivante :

$$C_{\lambda} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, j > i, x_i, x_j \in C_{\lambda}(x_i, x_j) \} \quad (1.6)$$



La projection du cône multidimensionnel sur des plans est représentée à la figure IV.17.

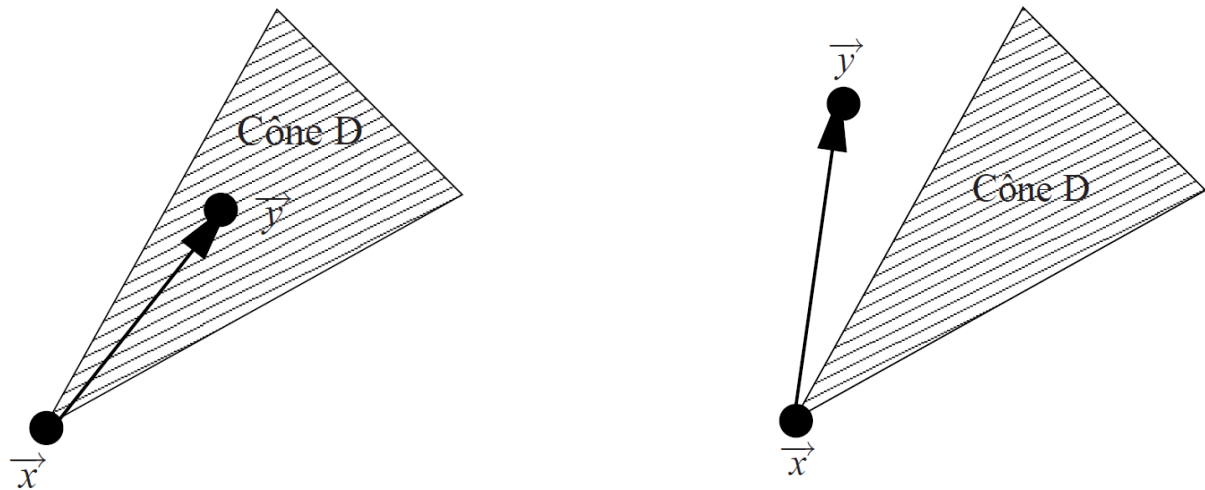
**Fig IV.17** La projection du cône multidimensionnel.

#### Définition : la cône-dominance

Soit un cône  $C_\lambda$ . Un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  cône-domine un vecteur  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (cette relation est notée  $\vec{x} \leq_{C_\lambda} \vec{y}$ ) si  $\vec{y} - \vec{x} \in C_\lambda$  et  $\vec{x} \neq \vec{y}$  (ou encore  $\vec{x} - \vec{y} \in C_\lambda - \{0\}$ ).

La relation de cône-dominance est représentée à la figure IV.19. Nous avons aussi représenté deux exemples d'application de cette relation à la figure IV.18.

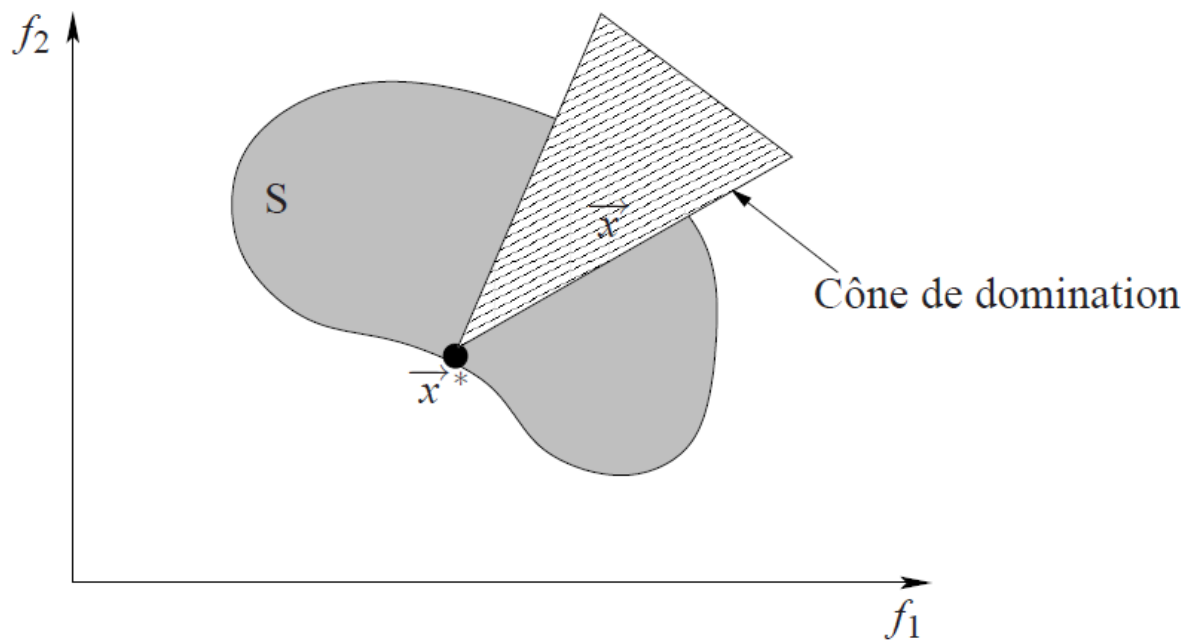
Sur ces deux figures, nous avons représenté le "cône de domination". il s'agit de la zone dans laquelle le point d'origine (le vecteur  $\vec{x}^*$  dans la définition de la cône-dominance) domine tous les points appartenant à cette zone (les vecteurs  $\vec{x}$  dans la définition de la cône-dominance).



(a) Le vecteur  $x$  domine le vecteur  $y$  au sens du cône  $D$

(b) Le vecteur  $x$  ne domine pas le vecteur  $y$  au sens du cône  $D$

**Fig IV.18** Deux exemples d'application de la relation de cône-dominance.



**Fig IV.19** La relation de cône-dominance.

La relation de cône-dominance est équivalente à la relation de dominance que nous avons vue dans la section précédente lorsque  $\lambda = 0$ .

### IV.1.7.6 La $\alpha$ -dominance

#### Définition : $\alpha$ -dominance

Une solution  $\vec{x}^* \in S^k$   $\alpha$ -domine une solution  $\vec{x} \in S^k$  s'il existe un ensemble de combinaisons de  $k + 1 - \alpha$  critères (on note  $I_{(k+1-\alpha)}$  l'ensemble des index correspondant à l'ensemble des combinaisons de ces critères) tel que :

1.  $\vec{x}_j^* \leq \vec{x}_j$  pour tout  $j \in I_{(k+1-\alpha)}$ , et
2.  $\vec{x}_j^* < \vec{x}_j$  pour au moins un  $j \in I_{(k+1-\alpha)}$

Pour illustrer cette définition, prenons un exemple. Considérons une famille de trois critères ( $C_1, C_2$  et  $C_3$ ), deux solutions  $\vec{X}_A$  et  $\vec{X}_B$  et cherchons à établir la 2-dominance.

Pour la 2-dominance, on doit tester la relation de dominance entre les vecteurs sur toutes les  $\vec{X}_A$  et  $\vec{X}_B$  combinaisons de  $3+1-2 = 2$  critères. Ces familles sont les suivantes :

- $F_1 = \{C_1, C_2\} \Rightarrow I'_1 = \{1, 2\}$
- $F_2 = \{C_1, C_3\} \Rightarrow I'_2 = \{1, 3\}$
- $F_3 = \{C_2, C_3\} \Rightarrow I'_3 = \{2, 3\}$

Donc,  $I_2 = \{I'_1, I'_2, I'_3\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Considérons maintenant deux points  $A$  et  $B$ .

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A$	1	2	3
$B$	1	1	2

Le point  $A$  2-domine le point  $B$  car il domine le point  $B$  sur chaque famille de critères :

- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 1 et 2,
- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 1 et 3,
- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 2 et 3.

Donc,  $A$  2-domine  $B$  car  $A$  domine  $B$  si l'on considère les combinaisons de critères  $\{C_1, C_2\}, \{C_1, C_3\}$  et  $\{C_2, C_3\}$ .

### IV.1.7.7 La dominance au sens de Geoffrion

Geoffrion [...] a développé une dernière forme de dominance importante dans le monde de l'optimisation multiobjectif. Les solutions optimales obtenues par ce type de dominance sont appelées les solutions Pareto optimales propres.

#### Définition : la dominance au sens de Geoffrion

Une solution  $x^* \in S$  est appelée solution Pareto optimale propre si :

- elle est Pareto optimale,
- il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\forall i$  et  $\forall x \in S$  vérifiant  $f_i(x) < f_i(x^*)$ , il existe un index  $j$  tel que  $f_j(x^*) < f_j(x)$  et :

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M$$

Cette relation n'est quasiment jamais utilisée telle quelle. en général, on utilise plutôt un résultat qui découle de cette définition. en effet, l'interprétation de ce théorème faite dans [Ehrgott 00 pour YANN.COLLETTE-PATRICK SIARRY ] est la suivante :

“Les solutions Pareto optimales propres ont des compromis bornés suivant leurs objectifs.”

Un théorème relatif à la méthode de pondération des fonctions objectif utilisant ce résultat est le suivant :

#### Théorème :

Soit la méthode d'agrégation des fonctions objectives suivantes :

$$f_{\text{eq}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot f_i(\vec{x})$$

Supposons

$$\forall_i = 1, \dots, N, \omega_i > 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^N \omega_i = 1.$$

Si  $x^*$  est une solution optimale obtenue en utilisant la méthode d'agrégation ci-dessus, alors cette solution est aussi Pareto optimale propre.

La méthode de pondération des fonctions objectif, avec des poids qui respectent les relations ci-dessus, permet d'obtenir des solutions avec des compromis bornés.

### IV.1.7.8 Conclusion

Ces différents types de relations de dominance permettent d'avoir suffisamment de degrés de liberté pour choisir une relation qui reproduise au mieux le comportement d'un ingénieur ou d'un décideur. Par exemple, la relation de dominance lexicographique permet de reproduire le comportement d'un décideur qui choisirait une solution parmi  $N$  solutions en considérant des critères rangés par ordre d'importance. En effet, celui-ci, quand il compare deux solutions, compare les valeurs des objectifs, jusqu'à ce qu'un objectif permette de déterminer une préférence entre les deux solutions considérées. Une fois que la préférence entre les deux solutions est déterminée, on ne considère plus les objectifs restants. La comparaison s'arrête là.

La dominance est donc un outil, parmi d'autres, permettant de reproduire une démarche de recherche d'optimum. Elle n'est pas la seule, bien sûr, mais elle est un élément important pour la résolution d'un problème.

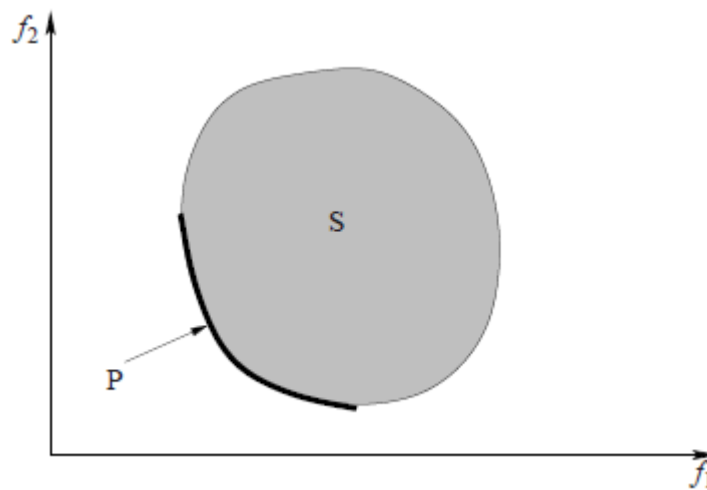
### IV.1.8 La surface de compromis

Le petit nombre de solutions de rang 1 que l'on a sélectionnées en utilisant la règle de classement basée sur la définition de la dominance forme ce que l'on appelle la **surface de compromis** (ou **front de Pareto**).

Imaginons que nous ayons un problème à deux objectifs (minimiser  $f_1$  et minimiser  $f_2$  sous les contraintes  $\vec{g}(\vec{x}) \leq 0$  et  $\vec{h}(\vec{x}) = 0$ ) :

- On appelle  $S$  l'ensemble des valeurs du couple  $(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$  quand  $\vec{x}$  respecte les contraintes  $\vec{g}(\vec{x})$  et  $\vec{h}(\vec{x})$ .
- On appelle  $P$  la surface de compromis.

On représente  $S$  et  $P$  sur la figure IV.20.



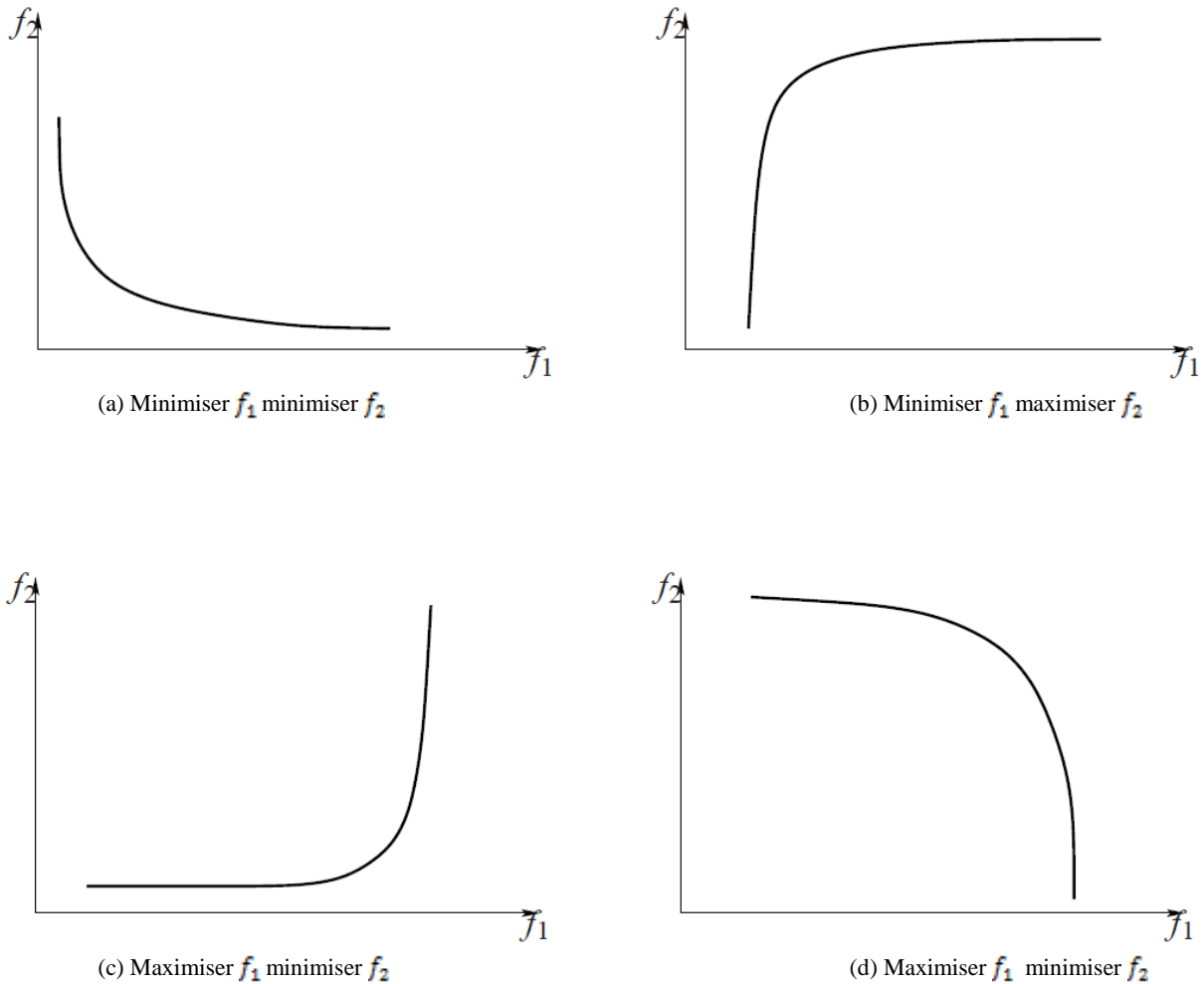
**Fig IV-20** Représentation de la surface de compromis.

Une propriété est remarquable : en fonction du type de problème que l'on cherche à résoudre, on obtient une forme de surface de compromis. Les formes les plus courantes de surfaces de compromis sont réunies à la figure IV.21. Ces formes de surfaces de compromis sont typiques d'un problème d'optimisation multiobjectif sur un ensemble de solutions convexe (pour une définition de la convexité, voir section IV.10). C'est ce type d'ensemble que l'on rencontre la plupart du temps.

On observe deux points caractéristiques associés à une surface de compromis :

**Point idéal :**

Les coordonnées de ce point sont obtenues en optimisant chaque fonction objective séparément.



**Fig.IV-21** Formes les plus courantes de surfaces de compromis dans le cas de deux objectifs.

#### Point "nadir" :

Les coordonnées de ce point correspondent aux pires valeurs obtenues par chaque fonction objective lorsque l'on restreint l'espace des solutions à la surface de compromis.

Le point idéal est utilisé dans beaucoup de méthodes d'optimisation comme point de référence. Le point nadir, lui, sert à restreindre l'espace de recherche ; il est utilisé dans certaines méthodes d'optimisation interactives.

Ces deux définitions sont illustrées à la figure IV.22.

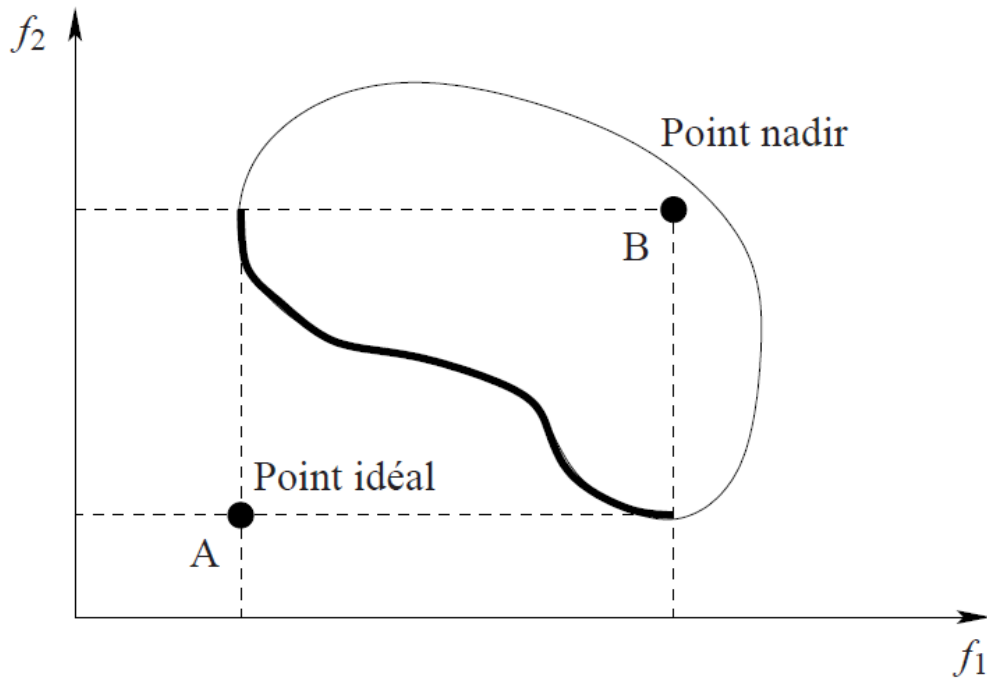
### IV.1.9 La convexité

Comme nous le verrons plus loin, certaines méthodes d'optimisation multiobjectif nécessitent de respecter certaines hypothèses. Le plus souvent, la méthode réclame de travailler sur un espace  $S$  des valeurs de  $\vec{f}$  qui soit convexe.

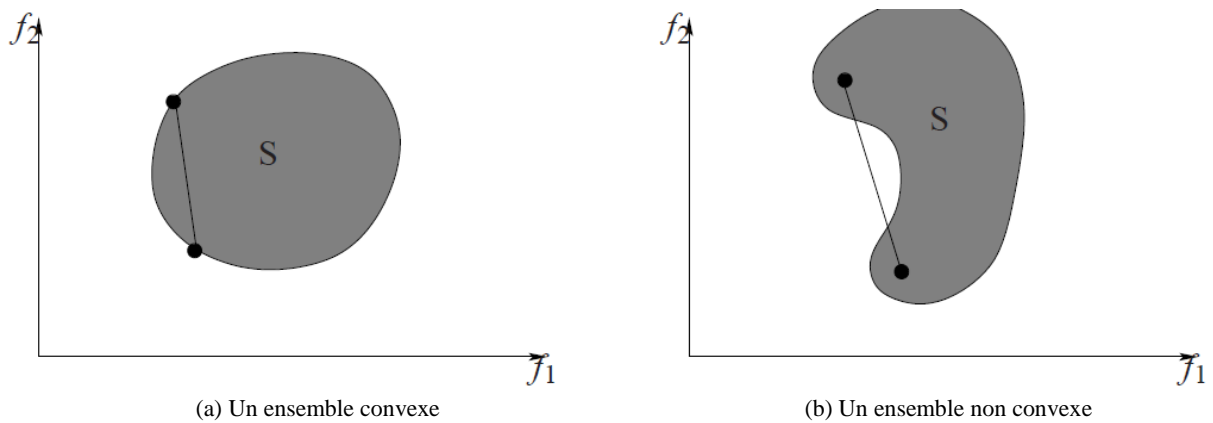
**Définition : la convexité**

Un ensemble  $S$  est convexe si, étant donnés deux points distincts quelconques de cet ensemble, le segment qui relie ces deux points est contenu dans l'ensemble  $S$ .

Un exemple d'ensemble convexe et un exemple d'ensemble non convexe sont représentés à la figure IV.23.



**Fig IV.22** Représentation du point idéal et du point "nadir".



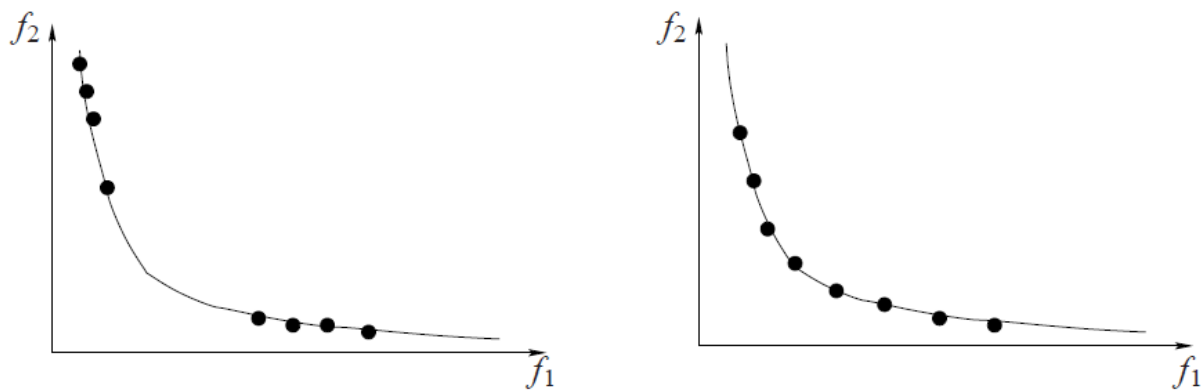
**Fig IV.23** Exemples d'ensemble convexe et d'ensemble non convexe.

### IV.1.10 La représentation de la surface de compromis

Toutes les représentations de la surface de compromis, pour un même problème, ne sont pas équivalentes. En effet, la représentation idéale de la surface de compromis devra être constituée de points solution de notre problème répartis de manière uniforme sur la surface de compromis (voir figure 4.24).

Dans le premier cas, les points représentant la surface de compromis ne sont pas répartis de manière uniforme. L'utilisateur n'aura alors pas en sa possession un ensemble de solutions très utile. En effet, s'il décide que la solution qu'il avait choisie ne lui convient pas, le choix d'une autre solution risque de faire varier brusquement tous ses objectifs, et cette nouvelle solution ne lui conviendra pas non plus. Il est alors probable que la solution offrant le "meilleur" compromis se trouve dans une zone qui ne soit pas représentée par des points solution.

La détermination d'une bonne représentation de la surface de compromis sera un critère de choix d'une méthode d'optimisation multiobjectif.



(a) Une mauvaise représentation de la surface de compromis

(b) Une bonne représentation de la surface de compromis

**Fig ;IV.24** La représentation de la surface de compromis.

### IV.1.11 Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif

Il existe un nombre important de méthodes et nous avons classé celles-ci en cinq groupes :

- les méthodes scalaires,
- les méthodes interactives,
- les méthodes floues,
- les méthodes exploitant une métaheuristique,
- les méthodes d'aide à la décision.

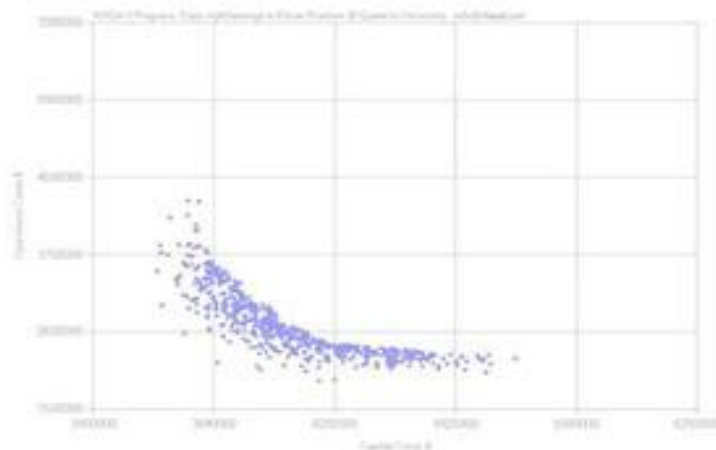
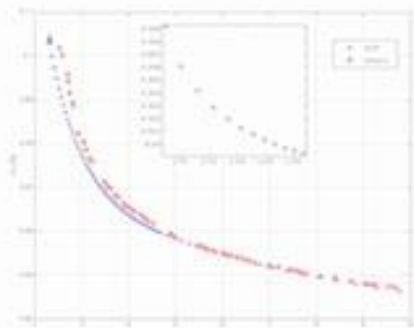
Les méthodes de ces cinq groupes peuvent aussi être rangées en trois familles de méthodes d'optimisation multiobjectif :

- Les méthodes à préférence *a priori* :  
 Dans ces méthodes, l'utilisateur définit le compromis qu'il désire réaliser (il fait part de ses préférences) avant de lancer la méthode d'optimisation.  
 On retrouve dans cette famille la plupart des méthodes par agrégation (où les fonctions objectif sont fusionnées en une seule).

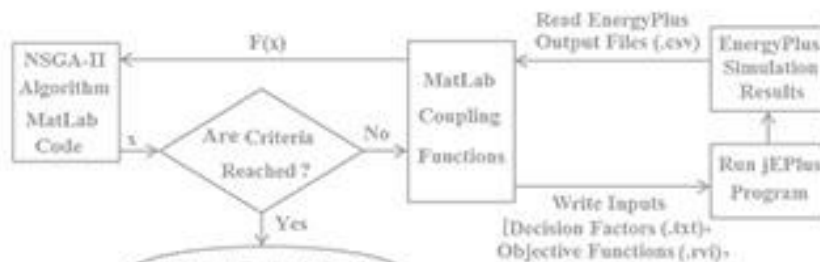
- Les méthodes à préférence *progressive* :  
Dans ces méthodes, l'utilisateur affine son choix de compromis au fur et à mesure du déroulement de l'optimisation.  
On retrouve dans cette famille les méthodes interactives.
  
- Les méthodes à préférence *a posteriori* :  
Dans ces méthodes, l'utilisateur choisit une solution de compromis en examinant toutes les solutions extraites par la méthode d'optimisation.  
Les méthodes de cette famille fournissent, à la fin de l'optimisation, une surface de compromis.

Il existe des méthodes d'optimisation multiobjectif qui n'entrent pas exclusivement dans une famille. Par exemple, on peut utiliser une méthode à préférence *a priori* en lui fournissant des préférences choisies au hasard. Le résultat sera alors un grand nombre de solutions qui seront présentées à l'utilisateur pour qu'il décide de la solution de compromis. Cette combinaison forme alors une méthode à préférence *a posteriori*.

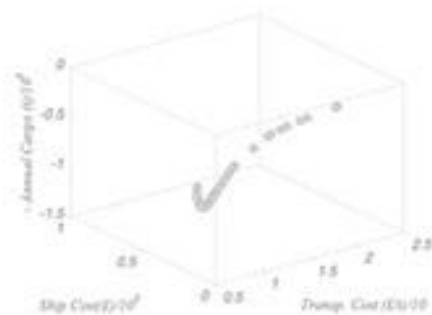
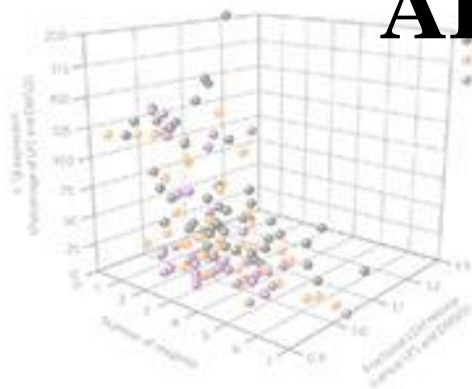
Cette classification permet donc seulement de se faire une idée sur la démarche que l'on devra suivre pour obtenir notre résultat.



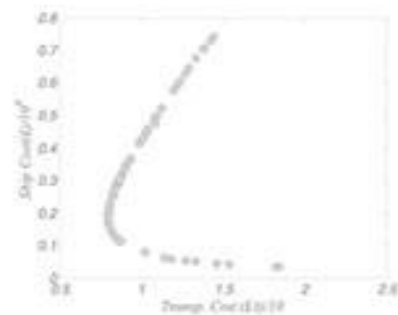
# Chapitre V



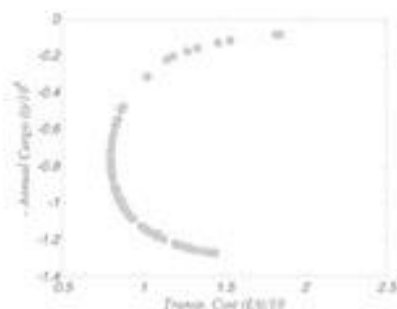
## APPLICATION



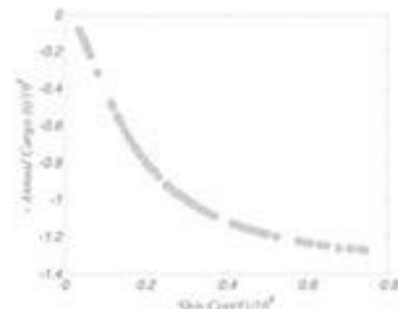
(a) Pareto front obtained by the weighted sum approach.



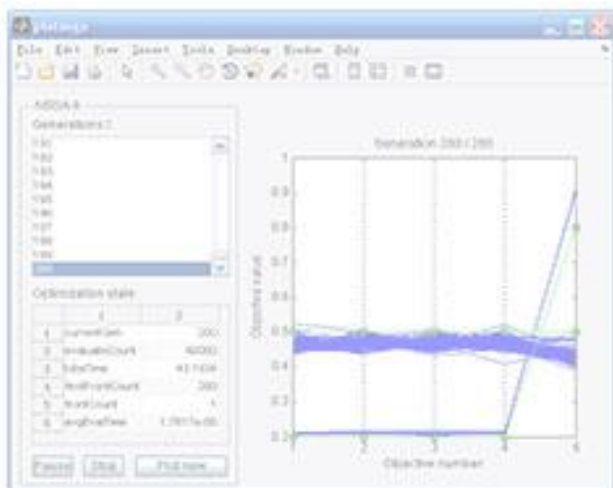
(b) x-y view of the Pareto front.



(c) x-z view of the Pareto front.



(d) y-z view of the Pareto front.





## Chapitre V : Application

V.1 Implémentation du NSGA II .....	83
V.I.1 Paramètres (opération génétique) du NSGA II.....	83
V.1.2 Fonctions implémentées.....	84
V.I.3 L'implémentation de NSGA II dans la toolbox.....	83
V.2 Données de l'application.....	89
V.2.1 Données relatives à l'opération de fraisage .....	89
V.2.3 Résultats synthétiques .....	90
V.2.4 Représentation 3D.....	90

## V.1 Implémentation du NSGA II [ 4 ]

Dans ce chapitre, nous proposons une approche basée sur les algorithmes génétiques pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif des conditions de coupe en fraisage tel que formulé précédemment.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la définition des fonctions objectives à minimiser et les contraintes de production.

Le reste du chapitre est consacré à la définition des paramètres de l'algorithme génétique tels que le codage des individus, les opérateurs génétiques et les résultats obtenus après application de NSGA II ( Non dominated Sorting Genetic Algorithm).

### V.1.1 Paramètres (opération génétique) du NSGA II

Pour l'application de NSGA II à un problème réel, on doit définir les éléments suivants :

#### V.1.1.1 le codage

Un individu est une chaîne de longueur / codant une solution potentielle au problème à résoudre. Dans notre cas, il s'agit de coder la vitesse de coupe  $V_c$  et l'avance par tour  $f$  et le profondeur de passe  $a$ .

Rappelons que la résolution du problème d'optimisation multi-objectif des conditions de coupe en fraisage consiste à déterminer une valeur  $I$  ( $V_c$  optimale,  $f$  optimale,  $a$  profondeur de passe) minimisant le temps de production et le coût de production simultanément, tout en respectant les contraintes de production, avec  $i$  varié de 1 à 3. Rappelons par ailleurs que le vecteur  $I$  est un vecteur de type réel. ce codage respecte l'espace de recherche des deux fonctions objectif

#### V.1.1.2 sélection

Le type de sélection utiliser dans le NSGA II est la sélection par tournoi avec la distance de crowding, elle est définie comme suit.

Soit une population  $P$  et deux solutions  $z_m^i \in f_m$  et  $z_n^i \in f_n$ ,  $(f_m ; f_n) \in P$

La solution  $z_m^i$  remportera le tournoi si :

- 1)  $m < n$
- 2)  $m = n$  et  $d_1 > d_2$

$d_1, d_2$  : Si la distance de crowding

$(f_m; f_n)$  : Si les fronts de Pareto pour les solutions  $m$  et  $n$

#### V.1.1.3 Croisement

Dans notre application, nous avons utilisé un codage réel, ce qui oblige l'obtention d'un croisement réel. Ce dernier est facile et simple tel que ce croisement est de type 'line recombinaisons', défini par la formule suivante :

$$\text{var}_i^0 = \text{var}_i^{p1} \times a_i + \text{var}_i^{p2} \times (1 - a_i) \text{ Avec } i \in (1, 2, \dots, N \text{ var})$$

$$a_i \in [-d, 1 + d] \quad (d=0.25)$$

$a$  est un facteur choisi uniformément au hasard sur un intervalle  $[-d, 1 + d]$ .

### V.1.1.4 Mutation

L'opérateur de mutation ne crée pas de nouveaux individus mais il évite la création des populations incapables d'évoluer. le taux de mutation est généralement inférieur à 0.1.

Pour la définition des étapes et du taux de mutation en utilisant l'approche suivante 'real valued mutation', ce type de mutation ajoute aléatoirement des valeurs aux variables avec une basse probabilité. en 1994 Mahlenbein propose un opérateur de l'algorithme génétique exprimée par :

$$\text{var}_i^{\text{Mut}} = \text{var}_i + s_i * r_i * a_i \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$s_i \{-1, +1\}$  Uniforme au hasard  
 $r_i = r \cdot \text{dom} \min e_i$ ,  $r$  : mutation range (standard : 10%)  
 $a_i = 2^{-u \cdot k}$ ,  $u \in [0, 1]$  uniforme au hasard.  
 $k$  est la précision de mutation, avec  $k \in \{4, 5, \dots, 20\}$   
 Range de mutation  $r$  :  $r \in [10^{-6}, 0.1]$

### V.1.2 Fonctions implémentées

L'approche implémentée dans Matlab est basée sur les relations exprimant les fonctions objectif >> inhérentes aux :

- Temps de production, exprimée par la relation :

$$T_u = L_c \cdot f^{-1} \cdot z_n^{-1} \cdot n^{-1} + \left( L_c \cdot k^{\frac{1}{n}} \cdot V_c^{-\frac{1}{n}} \cdot f^{\frac{p-n}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} \cdot z_n^{-1} \cdot n^{-1} \right) t_r + t_1 \quad (1)$$

- Coût de production, exprimée par la relation :

$$C_u = C_o \cdot f^{-1} \cdot z_n^{-1} \cdot n^{-1} + C_1 \cdot L_c \cdot k^{\frac{1}{n}} \cdot V_c^{-\frac{1}{n}} \cdot f^{\frac{p-n}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} \cdot z_n^{-1} \cdot n^{-1} + C_o t_1 + C_a \quad (2)$$

En outre, les limitations de production dont nous avons tenu compte sont reprises ci-dessous

- Limitation liée à l'avance (gamme des avances disponibles sur la machine) :

$$f_{\min} \leq f \leq f_{\max} \quad (3)$$

- Limitation liée à la vitesse de coupe (gamme des vitesses disponibles sur la machine) :

$$V_{c \min} \leq V_c \leq V_{c \max} \quad (4)$$

- Limitation liée a la puissance maximale admise par la machine-outil :

$$g_1(V_c, f, a) = 0.109V_c^{0.714} \cdot f^{0.917} \cdot a^{1.10} \leq P_{MAX} \quad (5)$$

- Limitation liée a l'effort de coupe :

$$g_2(V_c, f, a) = 6.56 \cdot 10^3 V_c^{-0.286} \cdot f^{0.917} \cdot a^{1.10} \leq F_{MAX} \quad (6)$$

- Limitation liée a l'état de surface :

$$g_3(f) = 2.5f^3 \leq R_{MAX} \quad (7)$$

- Limitation liée a la température

$$g_4(V_c, f, a) = 74.96V_c^{0.4} \cdot f^{0.2} \cdot a^{0.105} - 17.8 \leq \theta_{max} \quad (8)$$

- Limitation liée a la durée de vie

$$g_5(V_c, f, a) = 1.82 \cdot 10^{12} V_c^{1.46} \cdot f^{-0.379} \cdot a^{-0.459} \leq T_{max} \quad (9)$$

### V.1.3 L'implémentation de NSGA II dans la toolbox

Le NSGA II est implémenté dans la Toolbox comme suit :

- Les fonctions objectives

1. ObjVal (;,1) =  $0.021 \cdot x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} + 7.664 \cdot 10^{-2.46} \cdot x_2^{-0.34} \cdot x_3^{0.460} + 0.05$
2. Objval (;,2) =  $5.46 \cdot 10^3 \cdot x_1^{-1} \cdot x_2^{-11} \cdot x_1^{-2.46} \cdot x_2^{-0.304} \cdot x_3^{0.406} + 0.193$

- Contraintes de limitation de production

$G1 = 0.109 \cdot x_1^{0.714} \cdot x_2^{0.917} \cdot x_3^{1.10}$  (Limitations sur la puissance maximale admise par la machine-outil)

$G2 = 6.56 \cdot 10^3 \cdot x_1^{-0.286} \cdot x_2^{0.917} \cdot x_3^{1.10}$  (Limitations sur l'effort de coupe)

$G3 = 2.5 \cdot x_2^2$  (Limitations sur l'état de surface).

$G4 = 74.96 \cdot x_1^{0.4} \cdot x_2^{1.004} \cdot x_3^{0.24} - 17.8$  (Limitation sur la température)

$G5 = 1.82 \cdot 10^{12} \cdot x_1^{1.46} \cdot x_2^{-0.379} \cdot x_3^{-0.459}$  (limitation sur durée de vie)

- Paramètre génétique :

- Sélection : pour la sélection ; le NSGA II utilise cette fonction :

Function [SelCh, SUBRORSel, Sellx] = selection (SEL\_F, Chrom, FitnV, GGAP, SUBPOP, SelOpt);

- **Input parameters:**

SEL_F	- Name of the selection function
Chrom	- Matrix containing the individuals (parents) of the current population. Each row corresponds to one individual.
FitnV	- Column vector containing the fitness values of the individuals in the population
GGAP	- (optional) Rate of individuals to be selected if omitted 1.0 is assumed
SUBPOP	- (optional) Vector/ scalar containing number of individuals per subpopulation – number of subpopulations if omitted or NaN, 1 subpopulation is assumed
SelOpt	- (optional) Vector containing selection parameters SelOpt (1...); used in ‘sellocal’

- **Output parameters:**

SelCh	- matrix containing the selected individuals.
SUBPOPSel	- Vector containing number of individuals selected per subpopulation
SelIx	- (optional) column vector containing the indices of the selected individuals?

Et cette fonction appelle la fonction suivant :

Fonction NewChromIx = selsus ( FitnV, Bwas, Dummy ) ;

➤ Croisement ; pour le croisement, le NSGA II utilise cette fonction de haut niveau

Fonction NewChrom = recomb ( REC\_F, Chrom, RecOpt, VLUB, SUBPOP ) ;

- **Input parameters:**

REC_F	- String containing the name of the recombination or recombination function
Chrom	- Matrix containing the probability of recombination occurring between pairs of individuals. If omitted or NaN, 1 is assumed.
VLUB	- (optional) matrix containing lower and upper bounds of all variables, only for ‘reclinx’ needed
SUPBOB	- (optional) Vector/scalar containing number of individuals per subpopulation/number of subpopulations if omitted or NaN, 1 subpopulation is assumed

- **Output parameter:**

NewChrom - Matrix containing the chromosomes of the population after recombination in the same format as OldChrom.

Et cette fonction appelle la fonction suivant :

Fonction NewChrom = recdis ( OldChrom, RecRate ) ;

➤ Mutation : pour la mutation le NSGA II utilise cette fonction de haut niveau.

Fonction [NewChrom, SUBPOP] = mutate ( MUT\_F, Chrom, MutOpt, VLUB, SUBPOP ) ;

- **Input parameter:**

MUT_F	- String containing the name of the mutation function
Chrom	- Matrix containing the chromosomes of the old population. Each row corresponds to one individual.
MutOpt	- (optional) vector/matrix containing mutation rate, mutation range and mutation ptecision Multiple sets of options are supported, 1 row per subpopulation if omitted or NaN, MutOpt = NaN is assumed MutOpt(1): MutR – number containgin the mutation rate – probability for mutation of a variable ( real, interger and binary mutation) Mutopt(2):MutRange - (optional) number for shrinking the mutation range in the range [0, 1],possibility to shrink the range of the mutation depending on, for instance actual generation. ( real mutation ) MutOpt(3):MutPreci – (optional) number for precision of mutation steps, ( mutbm* - real mutation) MutNumOff – (optional) number of mutants per offspring (mutes* - real mutation)
VLUB	- Matrix containing the boundaries of each variable ( real values)
SUBPOP	- (optional) Vector/scalar containing of indiduals per subpopulation/number of subpopulations If omitted or NaN, 1 subpopulation is assumed

- **Output parameter:**

NewChrom	- Matrix containing the chromosomes of the population after mutation in the same format as chrom.
SUBPOP	- (optional) Vector/scalar containing number of individuals per subpopulation/number of subpopulations

Et cette fonction appellee la fonction suivant :

Function NewChrom = mutreal (Chrom, VLUB, MutOpt) ;

➤ La visualization : ce fait par deux fonction qui sont :

- PLOT properties of MultiObjectives functions :

Function Out = plotmop ( ChromAll, ObjVALL, RankVALL, MopOpt, LegLabels)

- RESult PLOTing of GEA Toolbox optimization:

Function resplot (FigName, PlotOpt, Chrom, VLUB, IndBest, ObjV, ObjVBest, ObjVAll,SUBPOPAll, PosSubPopAll);

➤ Les fonctions auxiliaires : les fonctions auxiliaires qui le NSGA II utilisent sont :

- Check the boundaries of variables and set to boundaries when outside

Function NewChrom = Chkbound (Chrom, ChkOpt, VLUB, BoundOut)

- Creat/alters GEAOPTions structure for parameter SETting of GEA Toolbox  
Function `geaopt = geaoptset ( varargin)`
  - Migration : le NSGA II utilize cette fonction pour la migration  
Function `[Chrom, ObjV] = migrate (Chrom, SUBPOP, MighOpt, ObjV, Rank) ;`
  - BINary DECODing to binary, interger or real numbers  
Function `Phen = bindecod (Chrom, FieldD, Coding)`
  - Competition : pour la competition on trouve ce fonctions
- COMPute Local model things of toolbox  
Function `[OP1, OP2, OP3, OP4, OP5] = comploc (WhatTask, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10);`
- COMPute Diverse things of GEA Toolbox  
Function `[OP1, OP2, OP3, OP4, OP5] = compdiv (WhatTask, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10);`
- COMPute PLOT things of GEA Toolbox  
Function `[OP1, OP2, OP3, OP4, OP5] = compplot (WhatTask, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10);`
  - La fonction de haut niveau de RE-INSertion :  
Function `[Chromn ObjVCh] = reins (Chrom, SelCh, SUBPOPCH, SUBPOPSel, InsOpt, ObjVCh, ObjVSel, RankCh, RankSel, Sellex, Selfun);`
  - REINSertion of offspring in REGional population model replacing parents:  
Function `[Chromn ObjVCh] = reins (Chrom, SelCh, SUBPOPCH, SUBPOPSel, InsOpt, ObjVCh, ObjVSel, RankCh, RankSel, Dummy);`
  - RANK-based fitness assignment, single and multi objective, linear and nonlinear:  
Function `[fitnV, RankV] = ranking(ObjV, RankOpt, SUBPOP, Goals, Chrom, ShareOpt);`
  - INITIALize and Real value Population:  
Function `Chrom = initrp (Nind, VLUB);`
  - ToolBoX function to define parameters for optimization of real variables  
Function `GEAOPT = tbx3output`
  - TERMINATion function `[DoTerm, WhatTerm] = terminat ( TERMMETHOD, TermOpt, ActGen, ActTime, GlobalOpt, BestObjV, ObjV, Chrom, VLUB);`

## V.2 Données de l'application

### V.2.1 Données relatives à l'opération de fraisage

Avec  $K=4 \cdot 10^{-9}$  et  $n=0.684$  et  $p=0.259$ ,  $q=0.314$

Pour outil : A.R.S

La pièce usinée : alliage d'aluminium

Opération de fraisage en bout ( finition)

Les paramètres et les valeurs numériques du problème d'optimisation multi-objectifs posé sont donnés ci-dessous :

Paramètres	$L_c$ (mm)	$D$ (mm)	$V_{c\ min}$ (m/min)	$V_{c\ max}$ (m/min)
Valeurs	170.66	100	250	400
Paramètres	$f_{min}$ (mm/tr)	$f_{max}$ (mm/tr)	$R_{MAX}$ ( $\mu\text{m}$ )	$P_{MAX}$ (kW)
Valeurs	0.16	0.55	2	7.5
paramètres	$F_{MAX}$ (N)	$t_r$ (min)	$t_l$ (min/pièce)	$P_o$ (\$/min)
Valeurs	5000	0.20	0.05	0.26
Paramètres	$P_l$	$P_s$	$\alpha_{MIN}$	$\alpha_{MAX}$
Valeurs	14.17	0.18	0.5	3.85

**Tableau V.1** : paramètres de fraisage

### V.2.2 Données relatives à l'AG NSGA II ( paramètres fixés ou choisis

Les paramètres initiaux relatifs à l'NSGA II sont présentés dans le tableau suivant :

Nom de paramètre	Valeur
Taille de la population	100 individus
Sous population	5
Nombre de générations	30 générations
Nombre de fonctions objectif	2
Nombre de fonctions contraintes	5
Nombre de variable	3 variables
Longueur de chromosome	2 gènes
Type de croisement	Croisement réel
Probabilité de croisement	0.80
Probabilité de mutation	0.1
Type de codage	Codage réel

**Tableau V.2** : les paramètres de l'algorithme NSGA II

### V.2.3 Résultats synthétiques

a	$V_c$	f	$T_u$	$P_u$
0.544	400	0.54085	0.050097	1.08
2.522	400	0.31664	0.050166	1.48
3.806	370.26	0.15	0.050378	1.42

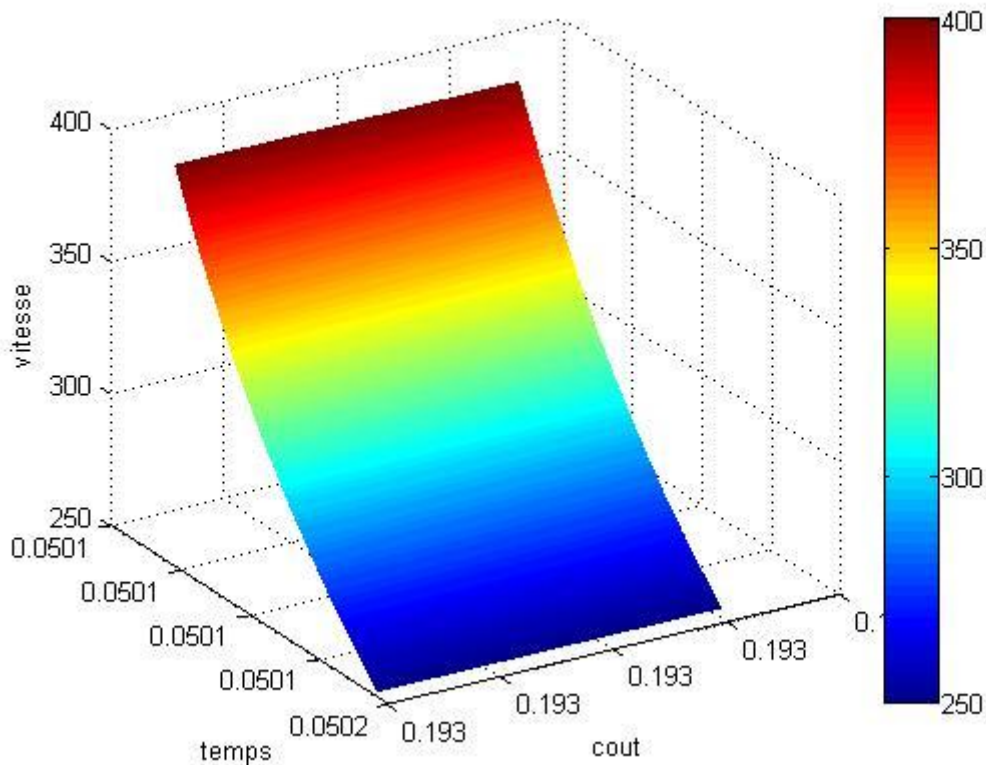
**Tableau V.3** des résultats synthétiques

Plusieurs essais ont été effectués avec des populations de 100 individus évaluant pendant 30 générations. Notons tout d'abord que Lors de tous les essais. Nous obtiendrons des valeurs optimales pour les  $V_c, f, a$  et, représentent les meilleurs chromosomes rencontrés dans des population optimales

### V.2.4 Représentation 3D

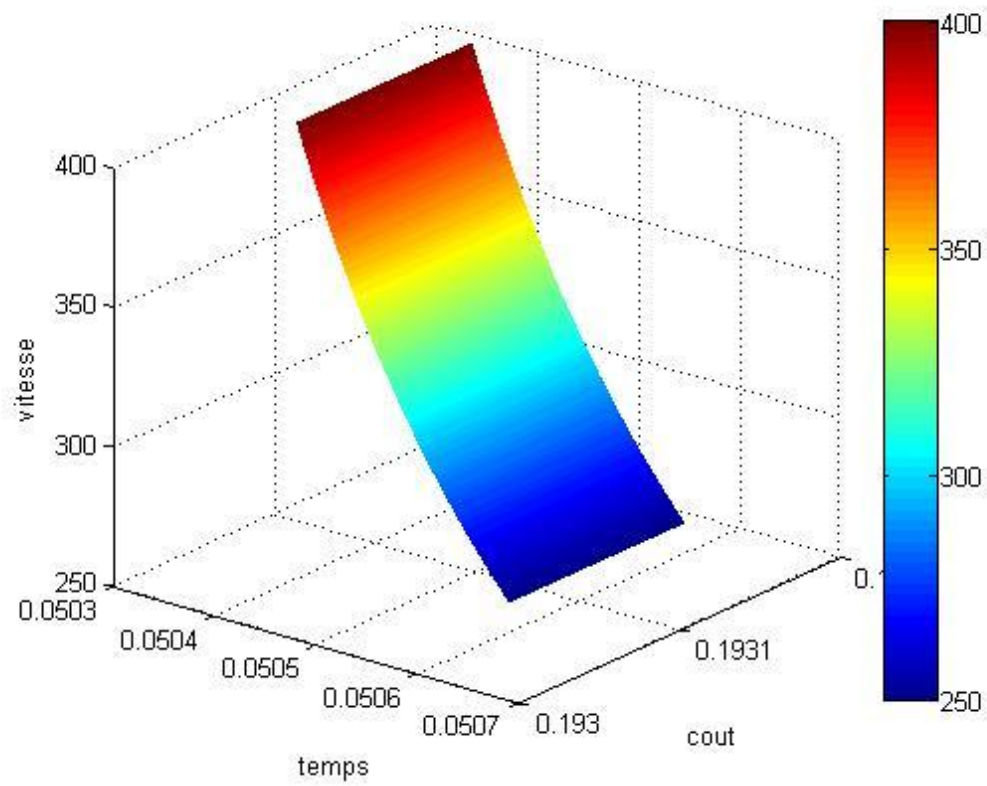
Représentation 3D de la variation entre les différents valeurs de vitesse de coupe par rapport le cout et le temps avec des valeurs fixées de  $f$  et  $a$

1- Pour  $a = 0.544$  et  $f = 0.54085$



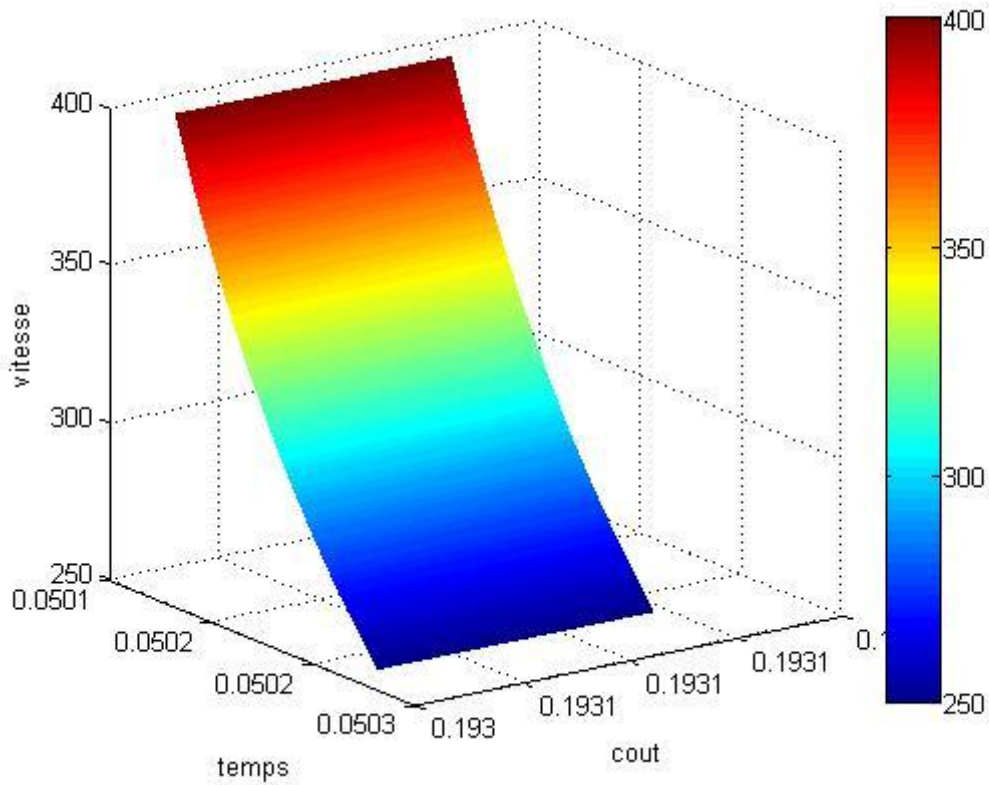
**Fig V.1** représentation 3D 1

2- Pour  $\alpha = 2.522$  et  $f = 0.31664$



**Fig V.2** représentation 3D 2

3- Pour  $\alpha = 3.806$  et  $f = 0.15$



**Figure V.3** représentation 3D 3

On a d'après les trois derniers cas une solution dominé pour chaque cas qui représenté l'espace de recherche avec le variable  $V_c$  et les valeurs optimales de Fet a qui sont fixées

On remarque que la totalité des individus se regroupe à une vitesse égale 400m/min

# Chapitre VI

## CONCEPTION DU SUPPORT DE RUGOSIMETRE



## **chapitre VI : Conception du support de Rugosimetre**

VI.1.Mécanisme .....	95
VI.1.2Generalisé sur liaison.....	95
VI.1.3 Liaisons élémentaires.....	95
VI.1.4Generalisé sur liaison.....	95
VI.2 Schéma cinématique du support de rugosimètre.....	104
VI.2.1 Définition .....	104
VI.2.2principe de construction d'un schéma cinématique.....	104
VI.2.3 Dessin d'ensemble .....	105
VI.3 La conception assistée par ordinateur ( CAO ) .....	106
VI.3.1. Aperçu sur solidworks .....	106
VI.4 CAO des éléments du support.....	108
VI.4.1 Réalisation de la régosimètre et son support .....	108
VI.5 la Fabrication Assistée par Ordinateur ( FAO) .....	109
VI.5.1étape mise en œuvre du logiciel.....	110
VI.2 Conclusion.....	116

## VI.1.Mécanisme

### VI.1.2Generalisé sur liaison

#### VI.1.2.1 Définition

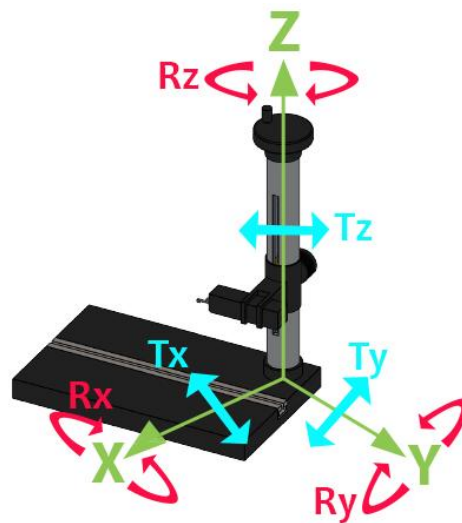
Une liaison est une relation de contact entre deux pièces

#### VI.1.2.2 degrés de liberté

On appelle degré de liberté la liberté de mouvement en rotation ou en translation d'un solide par rapport à l'autre solide.

Nombre maxi de degrés de liberté : 6

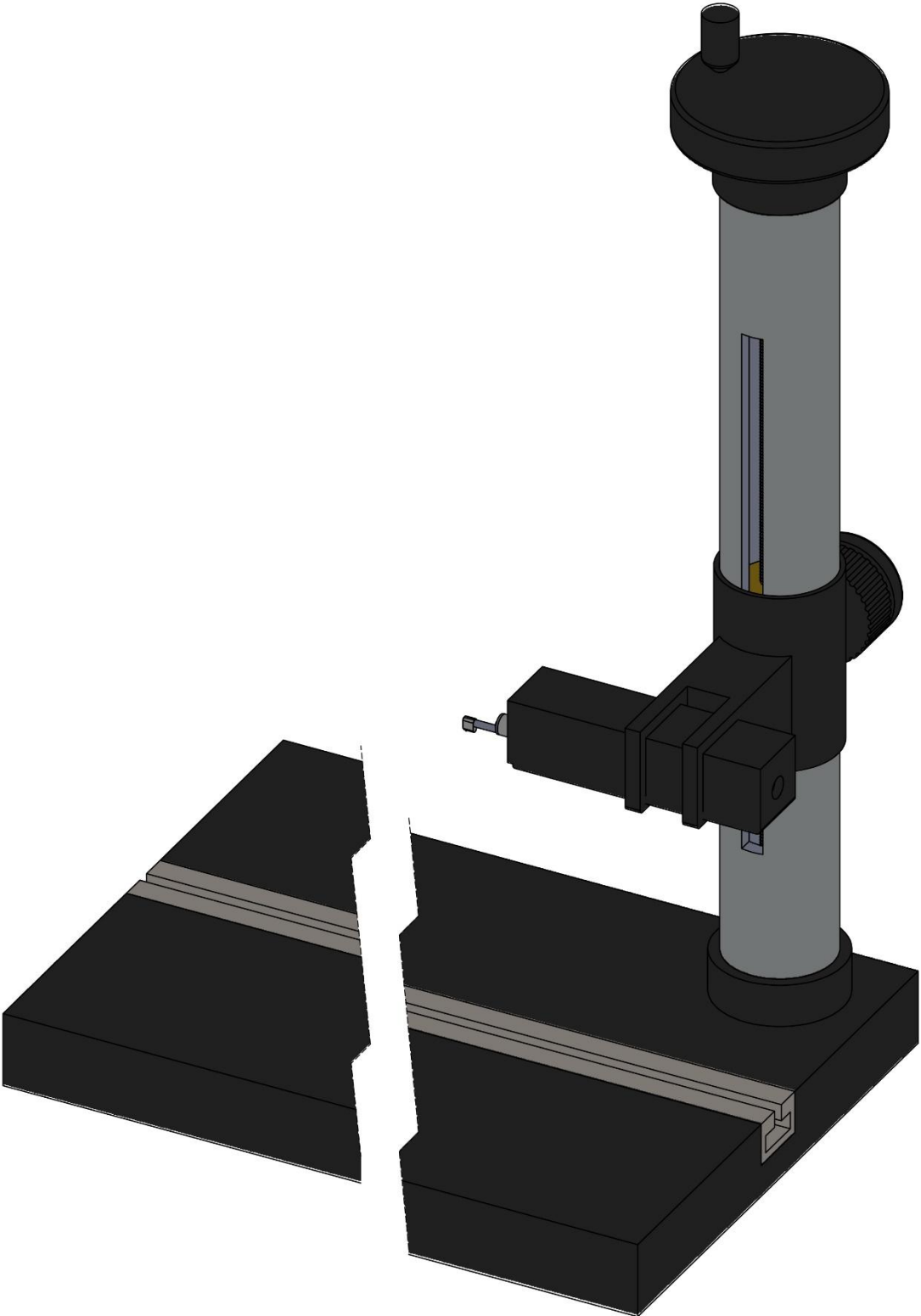
Un solide libre dans l'espace admet 6 mouvements élémentaires possibles. [ 6 ]



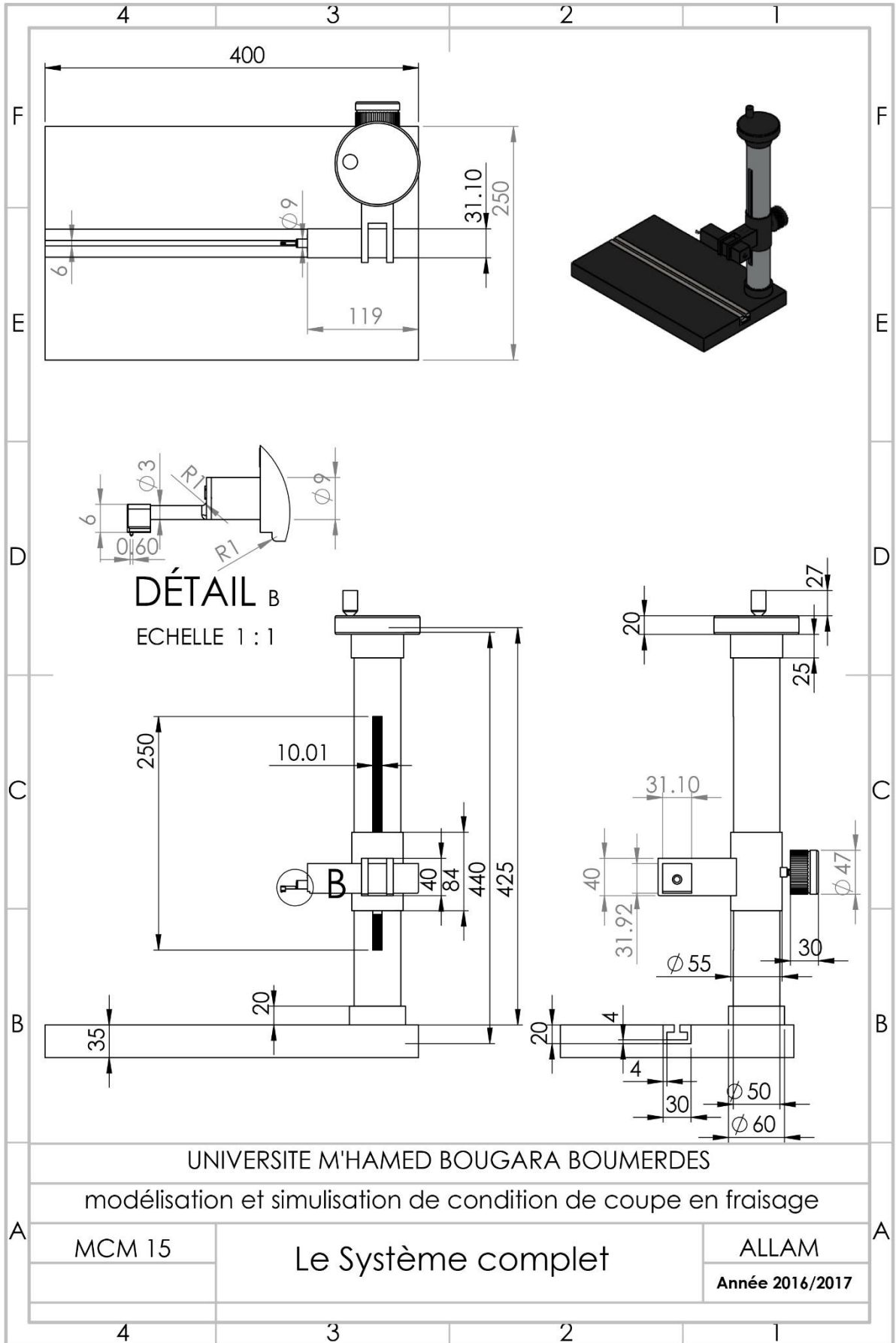
**FigVI.1** Schéma de différent degré de liberté

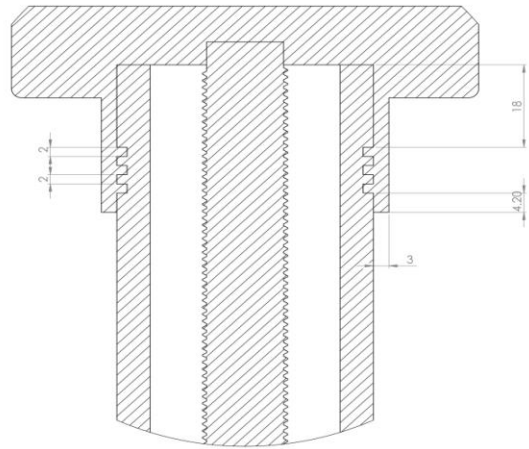
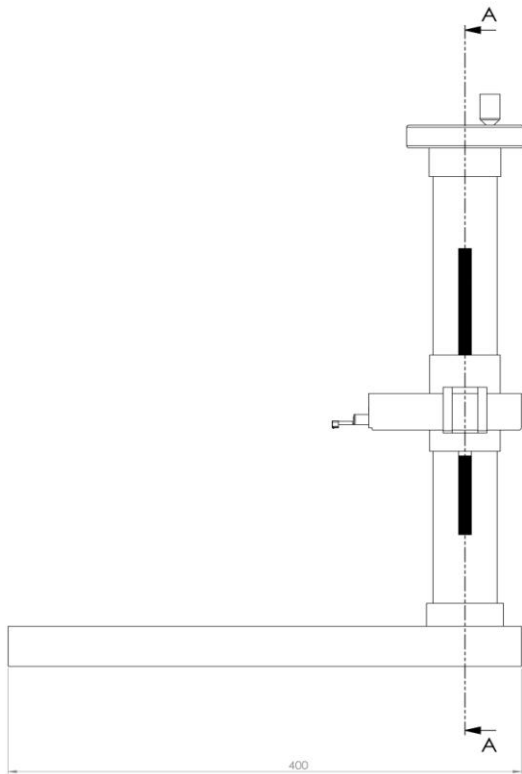
3 Translations	3 Rotations
$T_x$	$R_x$
$T_y$	$R_y$
$T_z$	$R_z$

**Table.VI1** : table de liaison

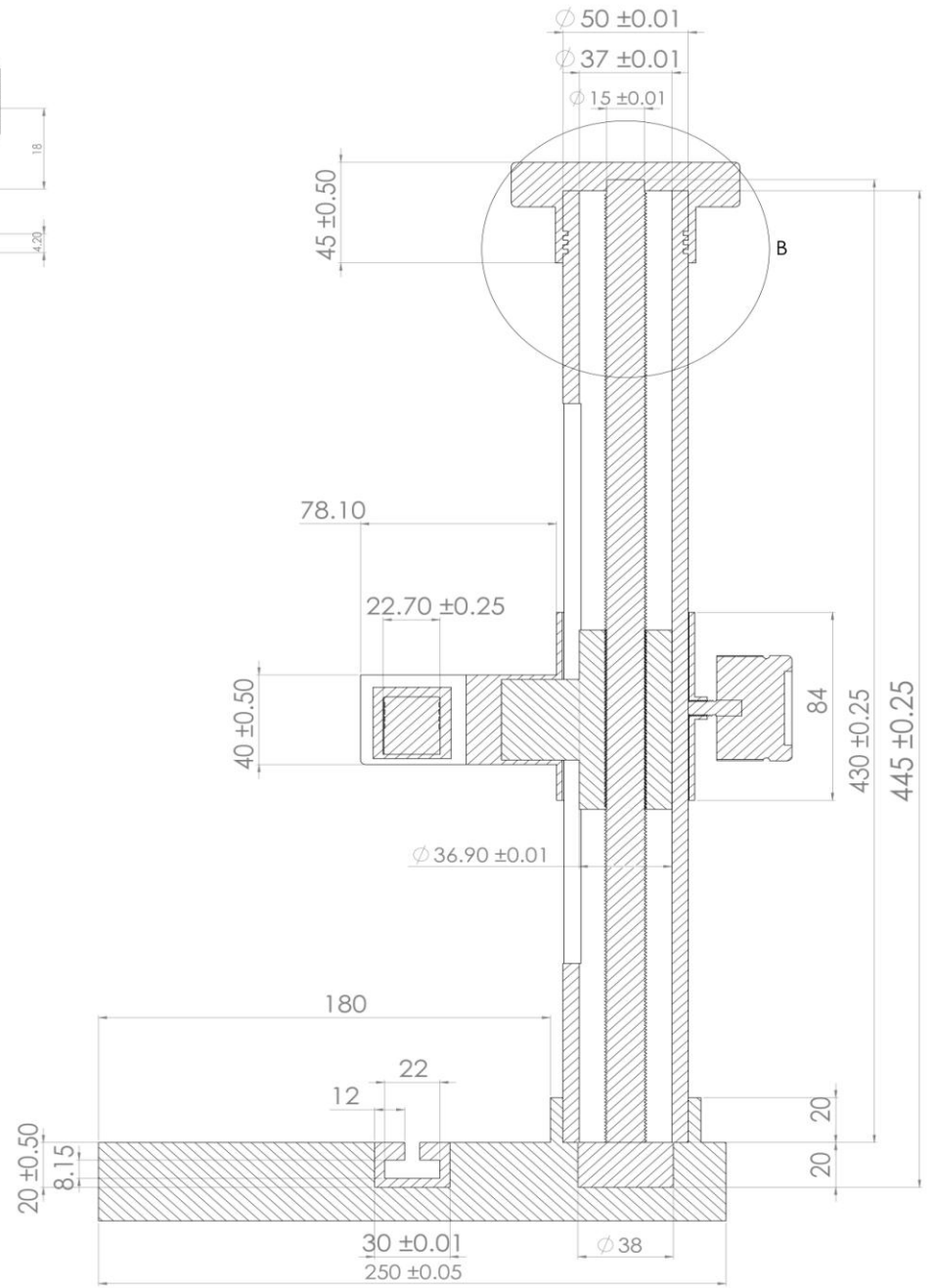


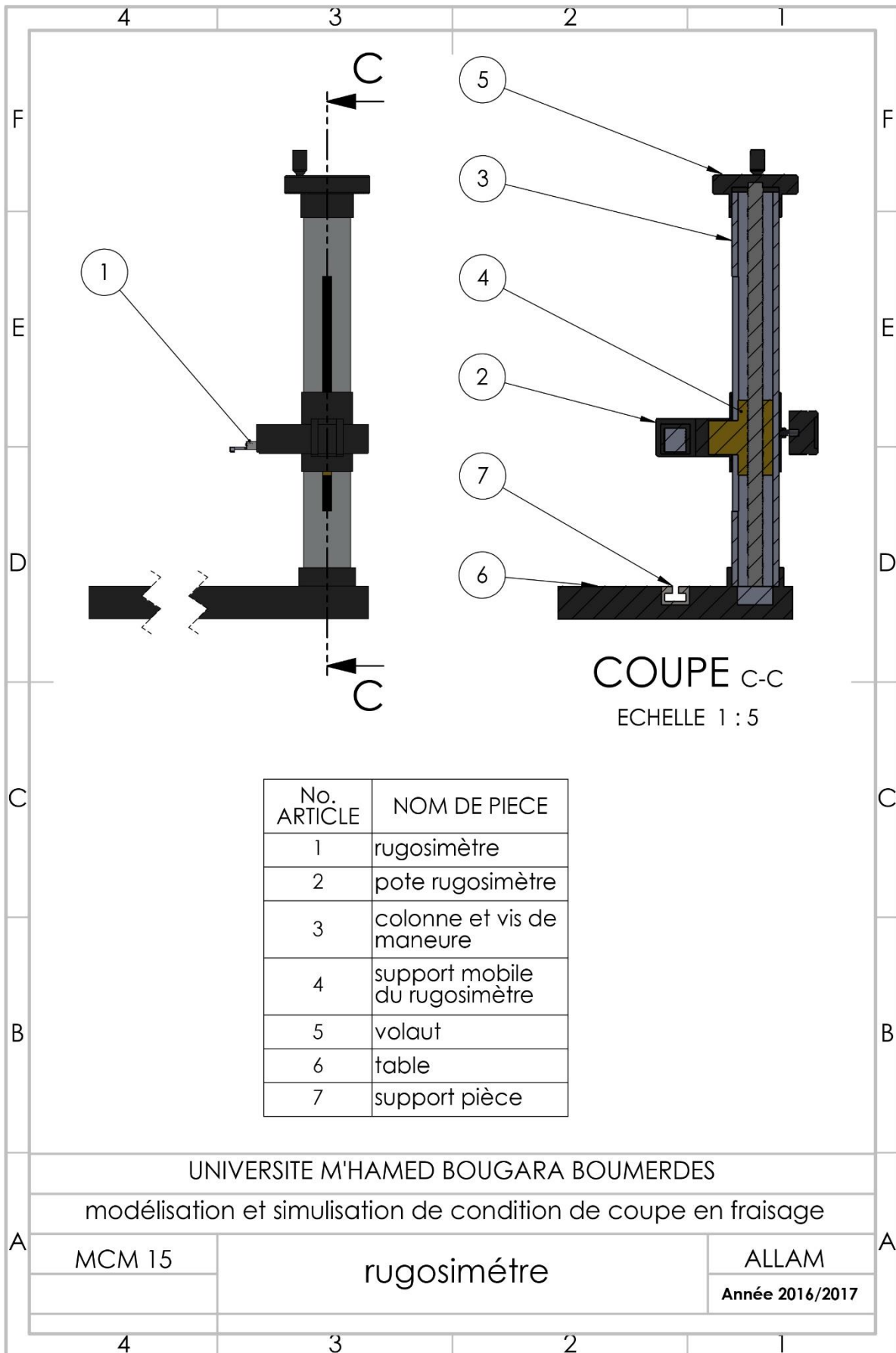
FigVI.2 : support regusimètre

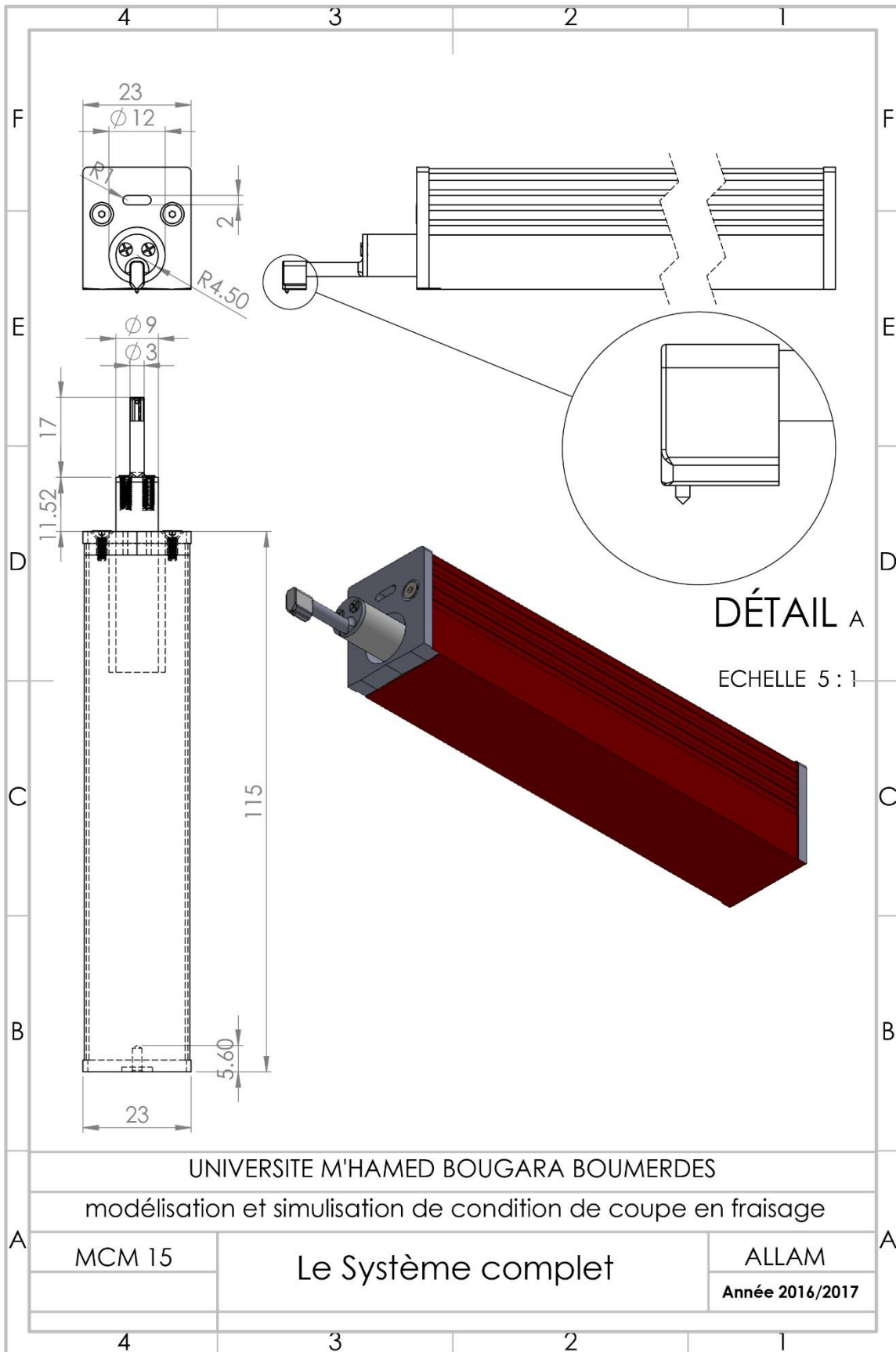




DÉTAIL B  
ECHELLE 2:1

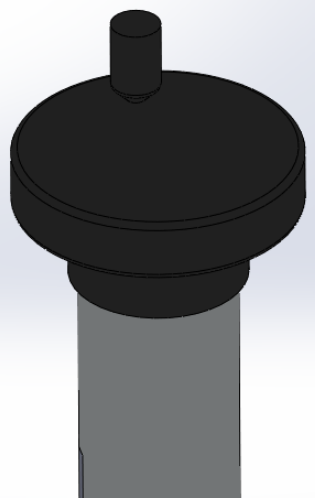
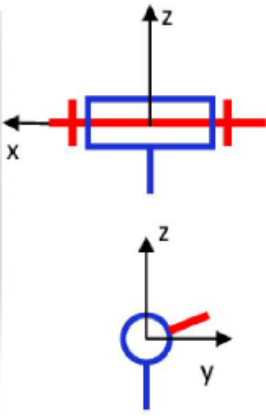
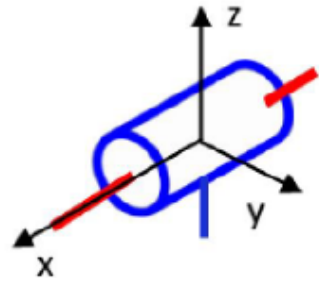
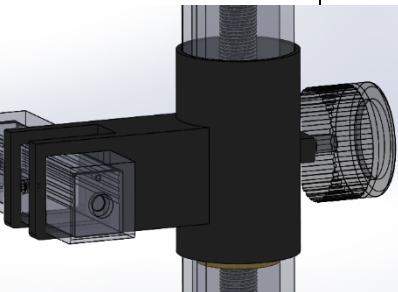
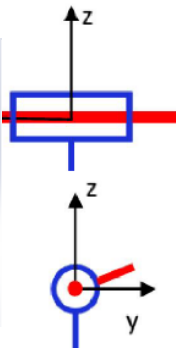
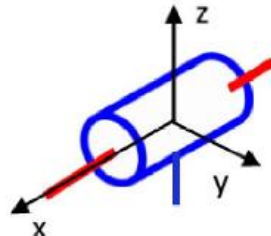






### VI.1.2.3 Liaisons élémentaires

A chaque contact autorisant ou non des déplacements entre deux pièces notés (1) et (2) est associé une liaison élémentaire

Nom de la liaison	Pièces	Symbole													
		Représentation Plan	Perspective												
Pivot (1ddl)			 <table border="1" data-bbox="1114 1030 1321 1187"> <tr> <td></td> <td>R</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>		R	T	X	1	0	Y	0	0	Z	0	0
	R	T													
X	1	0													
Y	0	0													
Z	0	0													
Pivot Glissant (2ddl)			 <table border="1" data-bbox="1114 1624 1321 1780"> <tr> <td></td> <td>R</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>		R	T	X	1	1	Y	0	0	Z	0	0
	R	T													
X	1	1													
Y	0	0													
Z	0	0													

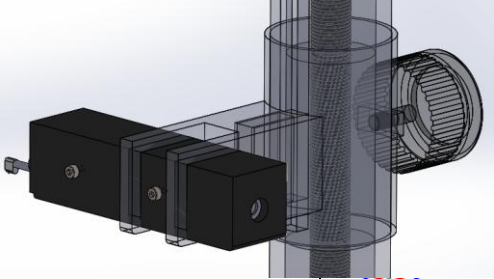
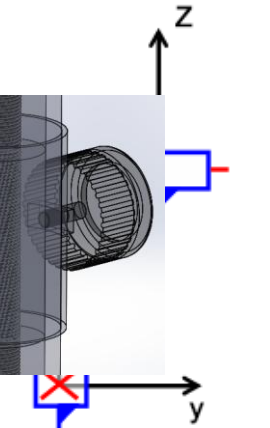
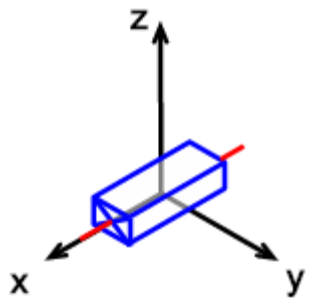
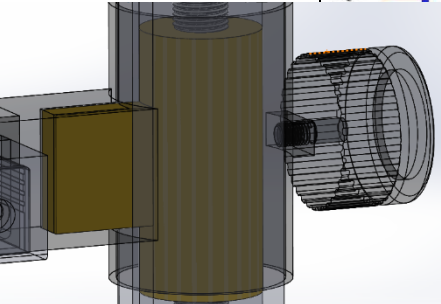
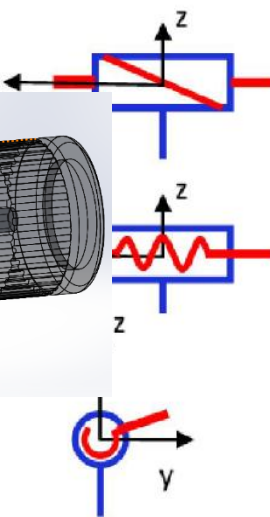
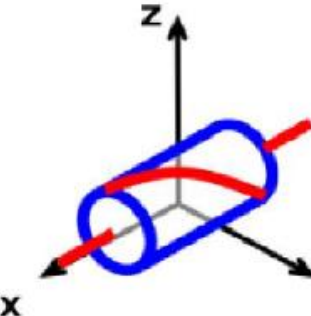
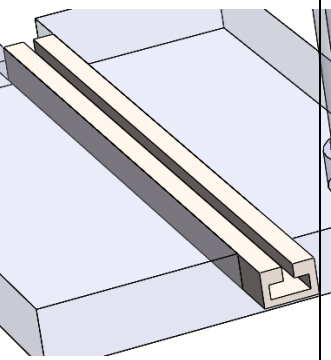
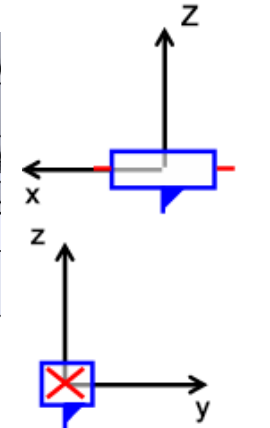
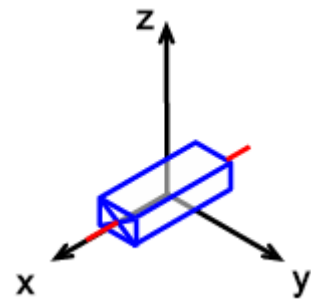
<p>Glissière (1ddl)</p>			 <table border="1" data-bbox="1114 616 1324 772"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>X</th> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	X	0	1	Y	0	0	Z	0	0
	R	T													
X	0	1													
Y	0	0													
Z	0	0													
<p>Liaison Hélicoïdale (1ddl)</p>			 <table border="1" data-bbox="1114 1198 1324 1355"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>X</th> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	X	1	1	Y	0	0	Z	0	0
	R	T													
X	1	1													
Y	0	0													
Z	0	0													
<p>Liaison Glissière (1ddl)</p>			 <table border="1" data-bbox="1114 1780 1324 1937"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>X</th> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	X	0	1	Y	0	0	Z	0	0
	R	T													
X	0	1													
Y	0	0													
Z	0	0													

Tableau VI.2 les différents éléments du support avec ses liaisons en cas générale

Mais en notre travail ne considérons que les éléments qui ont un grand efficacité , pour faire un schématisation qui peut montrer la possibilité de mouvement relatifs entre les solides cinématiquement liés de ce support .

#### **VI.1.2.4 Caractéristiques des liaisons**

Une liaison mécanique peut être :

- complète ou partielle.
- directe ou indirecte.
- démontable ou indémontable.
- rigide ou Elastique.
- par Adhérence ou par Obstacle.

### **VI.2 Schéma cinématique du support de rugosimètre**

#### **VI.2.1 Définition**

Un schéma cinématique permet de représenter un mécanisme de façon simple et rapide dans le but

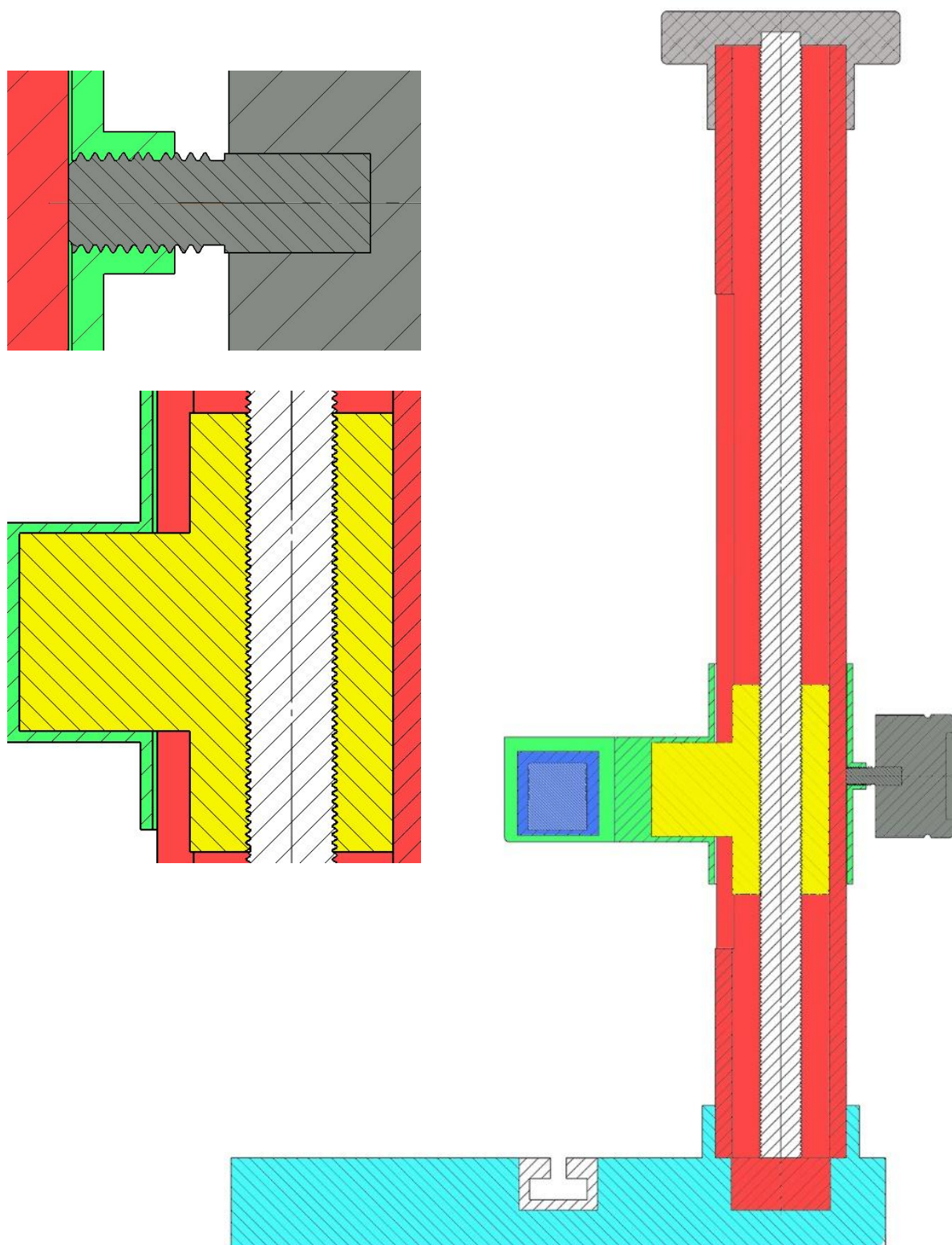
- De comprendre ou expliquer son fonctionnement
- Avoir un modèle pour faire des calculs de mécanique: mouvement vitesse, forces...

#### **VI.2.2 Principe de construction d'un schéma cinématique**

**Étape 1** : repérer les groupes cinématiques

Les pièces sont regroupées par classes d'équivalence cinématiques (ensemble de pièces en liaison encastrement entre elles et ont le même mouvement).

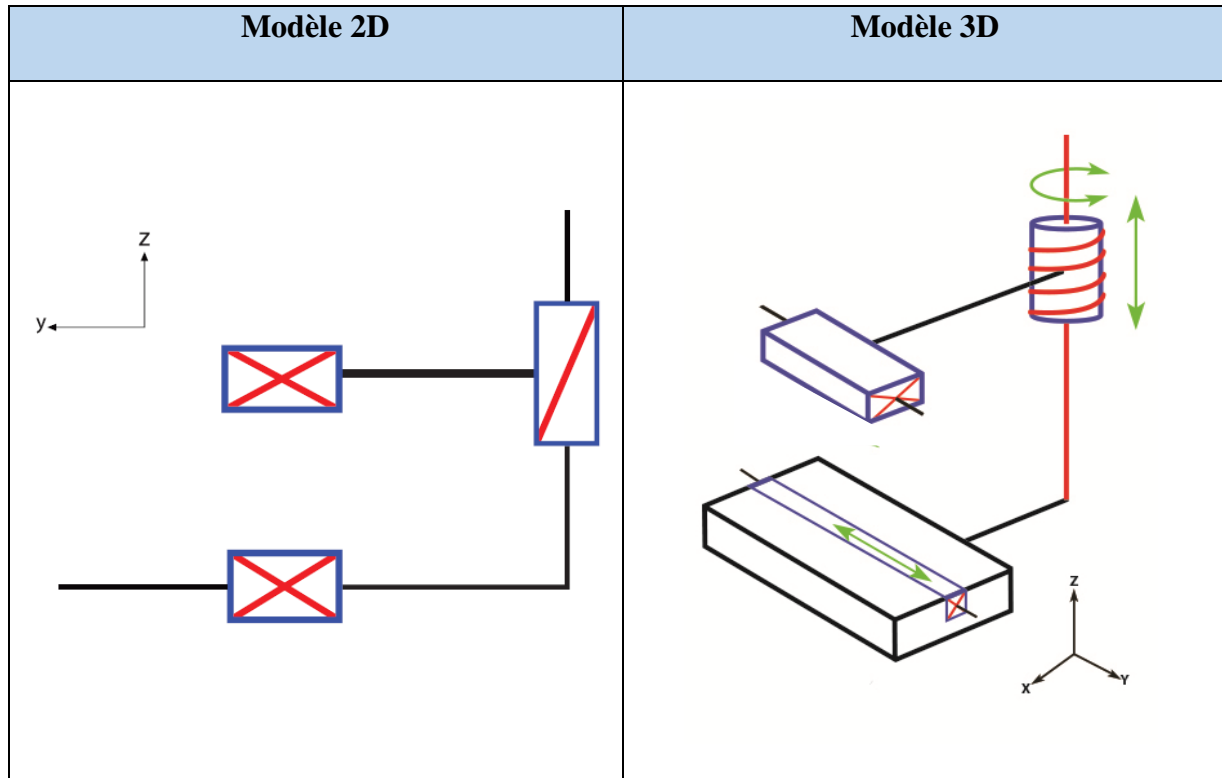
VI.2.3 Dessin d'ensemble



FigVI.3 dessin d'ensemble du support

**Étape 2** : construire le schéma cinématique

## Schéma cinématique

**Figure VI.4** Schéma cinématique du support en 3d et 2d

Ces deux schématisations montrent que notre support a deux degré de liberté grâce à une liaison hélicoïdale et une liaison glissière

**VI.3 La conception assistée par ordinateur ( CAO )**

Les logiciels de CAO regroupent des outils et des programmes informatiques, qui permettent d'assister l'ingénieur dans la conception d'un produit, et parmi les logiciels de CAO, on trouve : Inventor, Catia, SolidWorks, SolidConcept ...etc.

**VI.3.1 Aperçu sur SolidWorks**

SolidWorks est un logiciel de conception mécanique 3D, il offre des fonctionnalités très avancées dans le domaine de la modélisation des pièces, la définition des formes complexes, la création et la gestion du gros assemblage et la mise en plan.

Grâce à des modules complémentaires, ce logiciel peut nous permettre, d'effectuer des calculs d'analyse, ou d'usinage très avancés et difficiles à réaliser manuellement.

Parmi ces outils on peut citer :

### VI.3.1.1 Représentation schématique

#### a) Camworks

CAMWORKS est un complément qui s'intègre complètement à Solidworks.

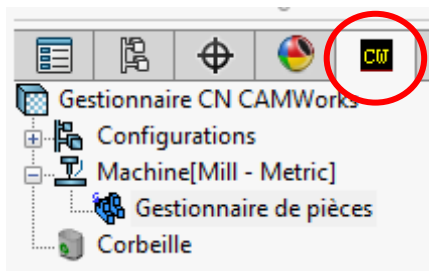
Il permet la réalisation et la transmission des programmes de Fabrication en Commande Numérique (FAO).

Il fonctionne par « RECONNAISSANCE DE FORMES » grâce à une banque de donnée qu'il est facile de compléter.

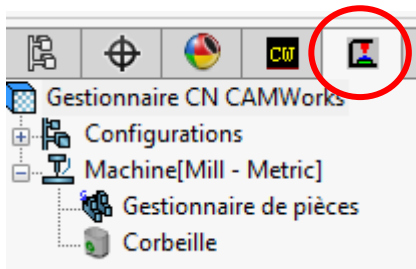
Une banque de donnée « OUTILS » et « MACHINES », elles aussi personnalisables permettent la préparation complète de la fabrication.

Un didacticiel permet d'appréhender :

- La mise en œuvre de l'arbre des formes :



- La mise en œuvre de l'arbre d'opérations :



## VI.4 CAO des éléments du support

Nous avons utilisé le logiciel de CAO SolidWorks pour la conception de tous les éléments de la rugosimètre + support , calculés au chapitre précédent, ainsi que leur assemblage et la mise en plan.

### VI.4.1 Réalisation de la régosimétre et son support

On peut facilement réaliser une roue dentée par CAO.

En utilisant les valeurs calculées d'une roue, on peut faire sa conception en utilisant des fonctions de génération de volume tels que : « *base/bossage extrudé* » ou bien « *enlèvement de matière* ».

Cependant les éléments mécaniques d'usage fréquents tels que clavettes, roulements, roues dentées .... sont intégrés au logiciel sous forme de bibliothèque des pièces.

Il suffit de choisir le type et les dimensions d'une roue dentée et de l'insérer dans l'assemblage.

Nous avons utilisé la méthode d'insertion d'éléments de la bibliothèque, qui correspondant aux valeurs que nous avons déterminées par le calcul.

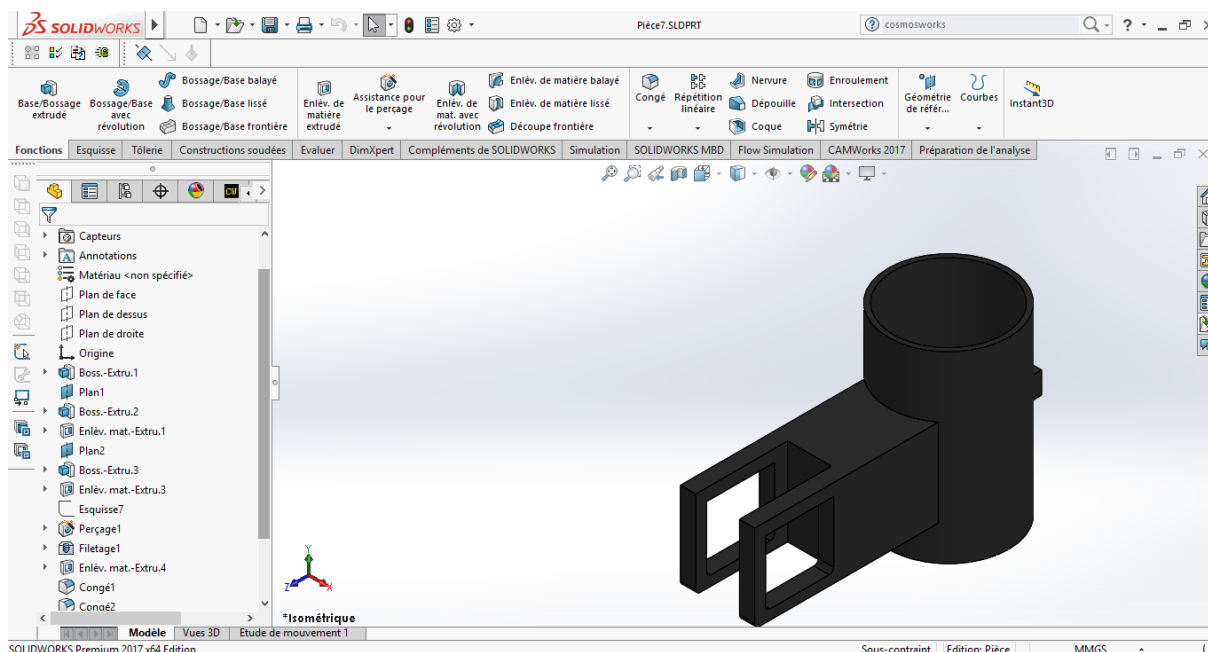
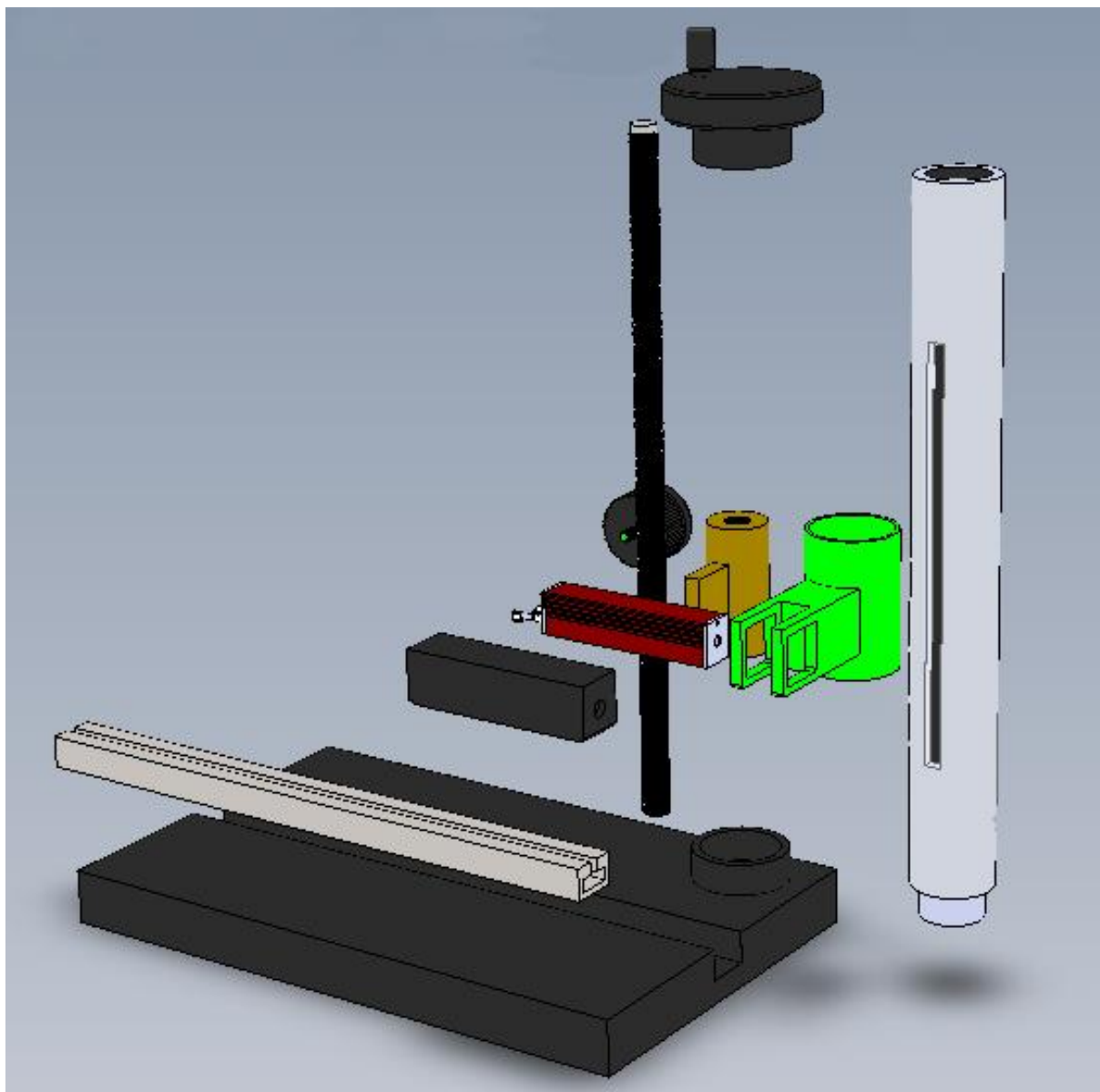


Fig VI.5 : solidworks

Ainsi pour Les assemblages sont obtenus par la juxtaposition de pièces. La mise en position de pièces est définie par un ensemble de contraintes d'assemblage associant, deux entités respectives par une relation géométrique (coïncidence, tangence, coaxialité...). Dans une certaine mesure, ces associations de contraintes s'apparentent aux liaisons mécaniques entre les pièces.

Le mécanisme monté, s'il possède encore des mobilités, peut être manipulé virtuellement. On peut alors aisément procéder à des réglages à l'aide des différents outils

disponibles (déplacement composants, détection de collision ou d'interférence, mesure des jeux, etc.)



### VI.5 la Fabrication Assistée par Ordinateur ( FAO)

La fabrication assistée par ordinateur (FAO) s'impose de plus en plus dans le milieu industriel. Le principe est la génération d'un code par un logiciel, utilisé par une machine à commande numérique (MOCN) pour exécuter les opérations de fabrication.

Nous consacrons ce chapitre à CAMWorks. C'est un complément de SolidWorks qui nous permet de générer un programme ISO, à l'aide d'un post-processeur.

Il nous permet aussi de simuler la fabrication sur MOCN d'une pièce conçue par SolidWorks au préalable.

Nous utiliserons CAMWorks pour la simulation de l'usinage de la table de rugosimètre d'entrée du réducteur manuel.

Nous avons choisi cette pièce parce qu'elle contient plusieurs formes intéressantes sur le plan de FAO : engrenage, forme cylindrique, forme carrée

### VI.5.1 étape mise en œuvre du logiciel

Une pièce est un solide qui a été créé avec SolidWorks ou importée dans SolidWorks depuis un autre système CAO via un fichier IGES, Parasolid, SAT, etc

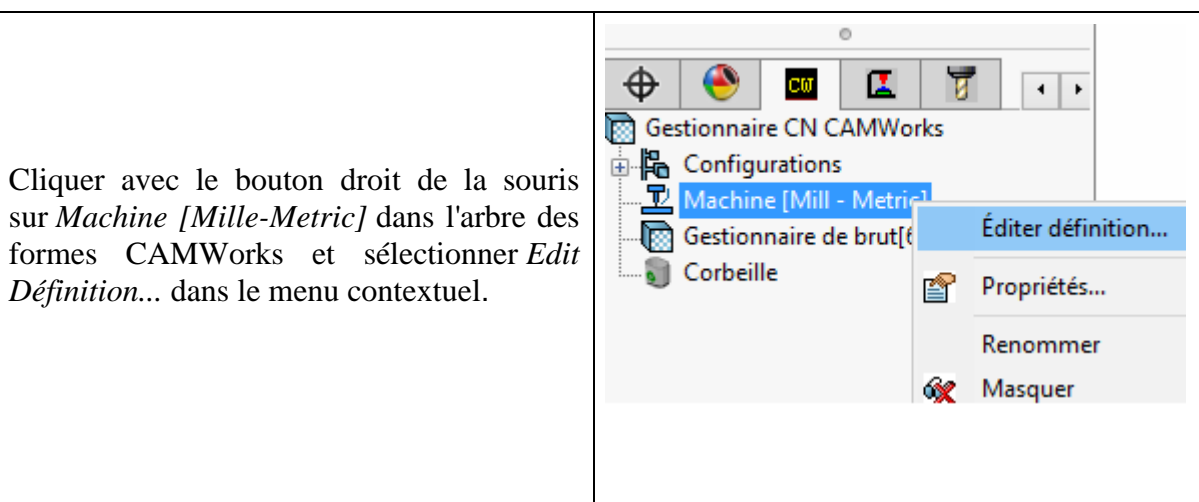
#### a) choisir le mode de travail

CAMWorks est un complément qui s'intègre dans SolidWorks et travaille dans son environnement.

L'utilisation de CAMWorks se fait en mode pièce (élément modélisé : pièce) et en mode assemblage (éléments modélisés : pièce, élément de mise en position, élément de maintien en position).

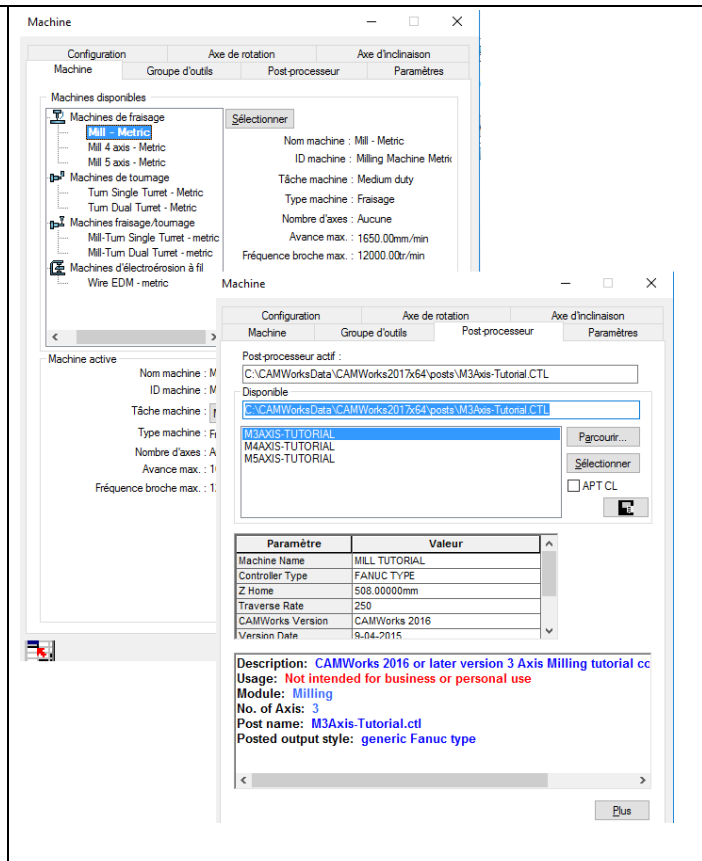
#### b) Définir la machine et directeur de CN

La définition de la machine spécifie le type d'usinage qui doit être réalisé pour le modèle (par ex. fraisage ou tournage) et le contrôleur associé de la machine-outil (post-processeur) pour la création appropriée du programme CN



L'onglet *Machine* de la boîte de dialogue *Machine* permet de sélectionner la machine-outil à utiliser pour usiner une pièce. La liste qui apparaît dépend des machines qui ont été établies dans TechDB ( banque de donnée ).

Cliquer sur l'onglet *Post-Processor*. L'onglet Contrôleur vous permet de sélectionner le post-processeur dans une liste de contrôleurs disponibles. La liste qui s'affiche dépend des post-processeurs installés dans votre système



### c) Définir le brut

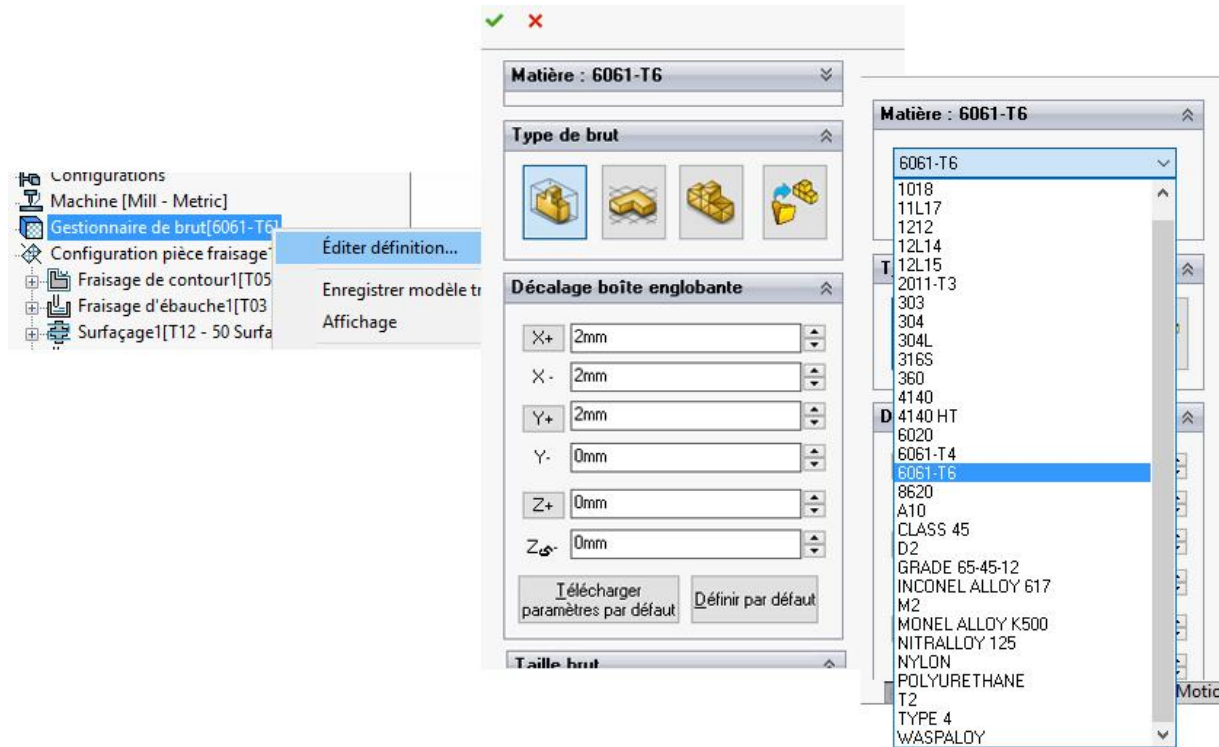
Le brut est défini par deux attributs:

#### - Dimension et forme

Le brut par défaut est le plus petit rectangle (boîte englobante) dans lequel la pièce peut s'encaster. En règle générale, on n'utilise pas la dimension du stock et on doit changer la définition du brut en décalant la boîte englobante ou en étirant une esquisse.

#### - Type de matière

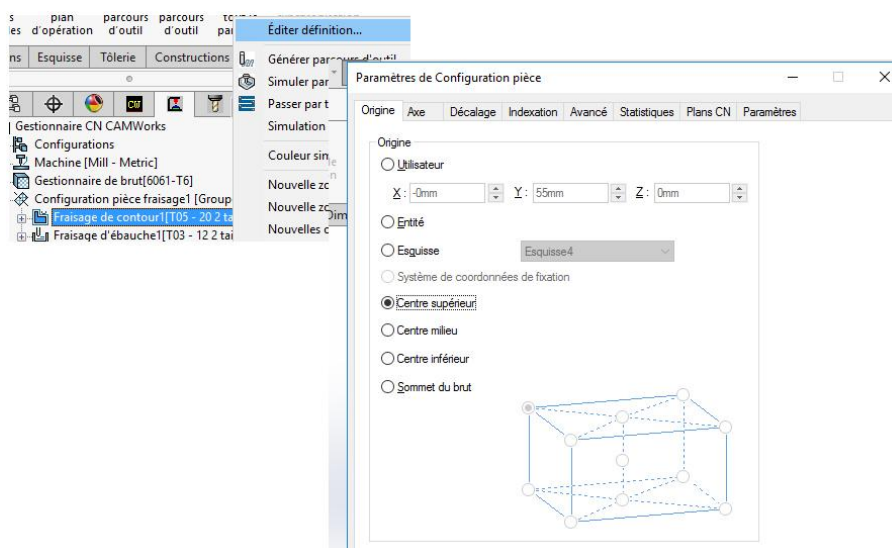
Des modifications peuvent être apportées au brut à n'importe quel moment ; cependant, pour définir un brut différent après avoir défini les formes usinables, on doit sélectionner *Reconstruire* pour que CAMWorks actualise ces informations pour faire référence aux formes du brut.



1. Cliquer avec le bouton droit de la souris sur *Gestionnaire de brut*.
2. Sélectionner *Edit Definition ...* dans le menu contextuel.
3. Cliquer sur le bouton *Material...* . La boîte de dialogue s'affiche.
4. Sélectionner un type de matière dans la liste déroulante.

#### d) définir les origines

La boîte de dialogue *Operation Setup Paramètres* s'affiche lorsque on clique avec le bouton droit de la souris sur *Turn Setup* dans l'arbre d'opération et on sélectionne *Edit*



*Definition...* dans le menu contextuel.

- Système de coordonnées de fixation

En mode Assemblage, cette option permet de définir le système de coordonnées de fixation. Ceci concerne la position de l'origine programme. Bien que la sortie de code G puisse être basée sur ce point, elle est censée être utilisée comme point de référence. La définition de la position va au-delà de la définition de l'emplacement. Elle permet également de définir les directions X, Y et Z positives à utiliser pour tous les mouvements de la machine.

Le système de coordonnées de fixation est défini à partir d'une entité de système de coordonnées SolidWorks

### e) définir les formes usinable ‘ entités d’usinage ‘

L'usinage ne peut être effectué que pour des formes usinables. CAMWorks fournit trois méthodes pour définir des formes usinables pour le fraisage 2D et 3D.

## 1. Reconnaissance Automatique de Formes (RAF)

*reconnaissance automatique de formes* analyse la forme de la pièce et essaie de définir les formes usinables les plus communes telles que les poches, les trous, les centrages/chanfreins et les bossages. La commande Extraire formes usinables lance la RAF. Selon la complexité de la pièce, la RAF peut permettre d'économiser beaucoup de temps dans la définition des formes prismatiques 2D.

## 2. Formes 2D et 2,5D créées interactivement

La RAF ne peut reconnaître chaque forme sur des pièces complexes et ne reconnaît pas certains types de formes. Pour usiner ces zones, vous devez définir des formes de façon interactive en utilisant la commande Insérer forme 2,5D.

### 3. Formes 3D créées interactivement

nous définissons des formes 3D de façon interactive selon les faces spécifiques à usiner et les faces à éviter

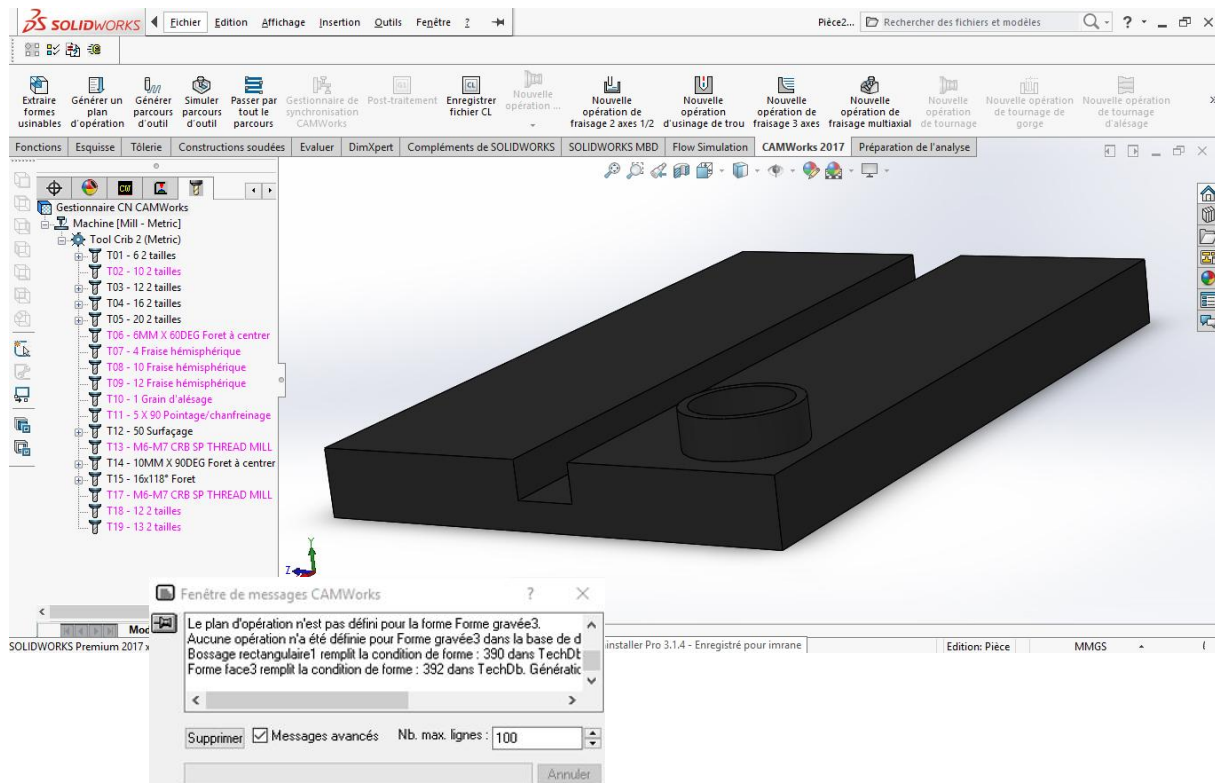
#### f) définir, générer les opérations

Une opération est définie comme un type de cycle d'usinage tel que l'ébauche. Après avoir créé les formes d'usinage, les opérations peuvent être générées pour usiner les formes de la pièce. Comprendre les opérations

La Base de données technologique (TechDB) définit quelles opérations sont nécessaires pour chaque forme d'usinage et les paramètres pour chaque opération. Dès que l'opération est définie, les parcours d'outil peuvent être générés pour usiner la forme. Les méthodes pour éliminer le matériel s'appellent cycles de coupe. Lorsque ces cycles de coupe sont lancés, l'opération contient l'information d'usinage nécessaire pour générer les parcours d'outil pour couper la pièce.

#### Commande *Generate Operation plan*

Pour augmenter la productivité, CAMWorks fournit une méthode automatique pour générer des opérations ainsi qu'une méthode manuelle pour insérer des opérations. La commande Générer plan d'opération est utilisée pour générer automatiquement un plan d'opération pour usiner chaque forme usinable



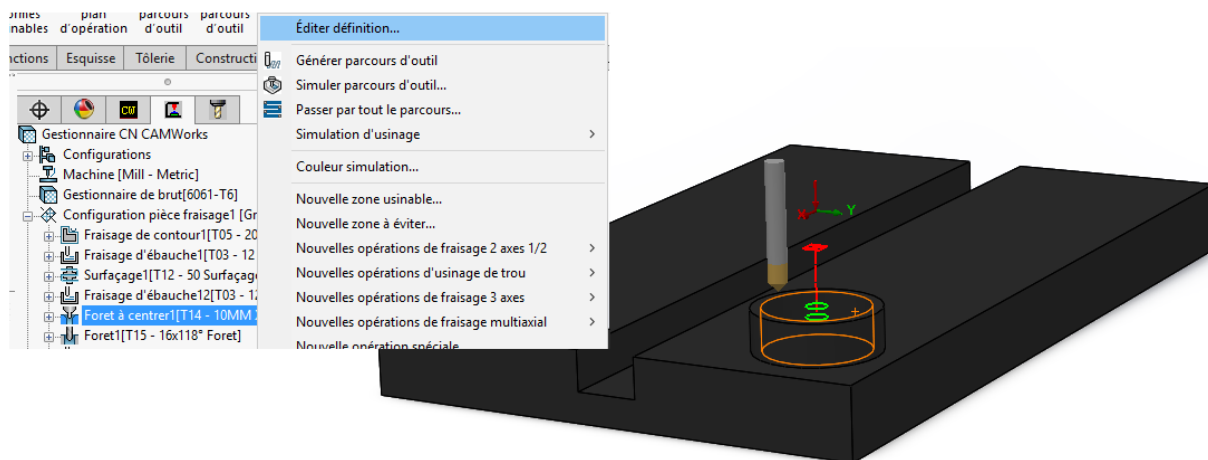
### g) choix des outils et des paramètres de coupe

Les opérations générées par la commande *Generate Operation plan* sont basées sur des informations enregistrées dans la Base de données technologique. Les paramètres pour chaque opération affectent la création du parcours d'outil et la sortie du code CN. Ces paramètres incluent le contrôle pour le diamètre de l'outil, les directions de coupe, les valeurs avance/vitesse, etc. Comme avec la plupart des fonctions CAMWorks, les paramètres sont établis automatiquement. Toutefois, ces paramètres sont prévus comme point de départ et ces configurations peuvent être modifiées.

Pour éditer les paramètres d'opération avant la création du parcours d'outil, utiliser la commande *Edit Definition* de table de support rugosimètre dans le menu contextuel Opération.

Pour changer les paramètres d'usinage pour une opération 2D ou 3D :

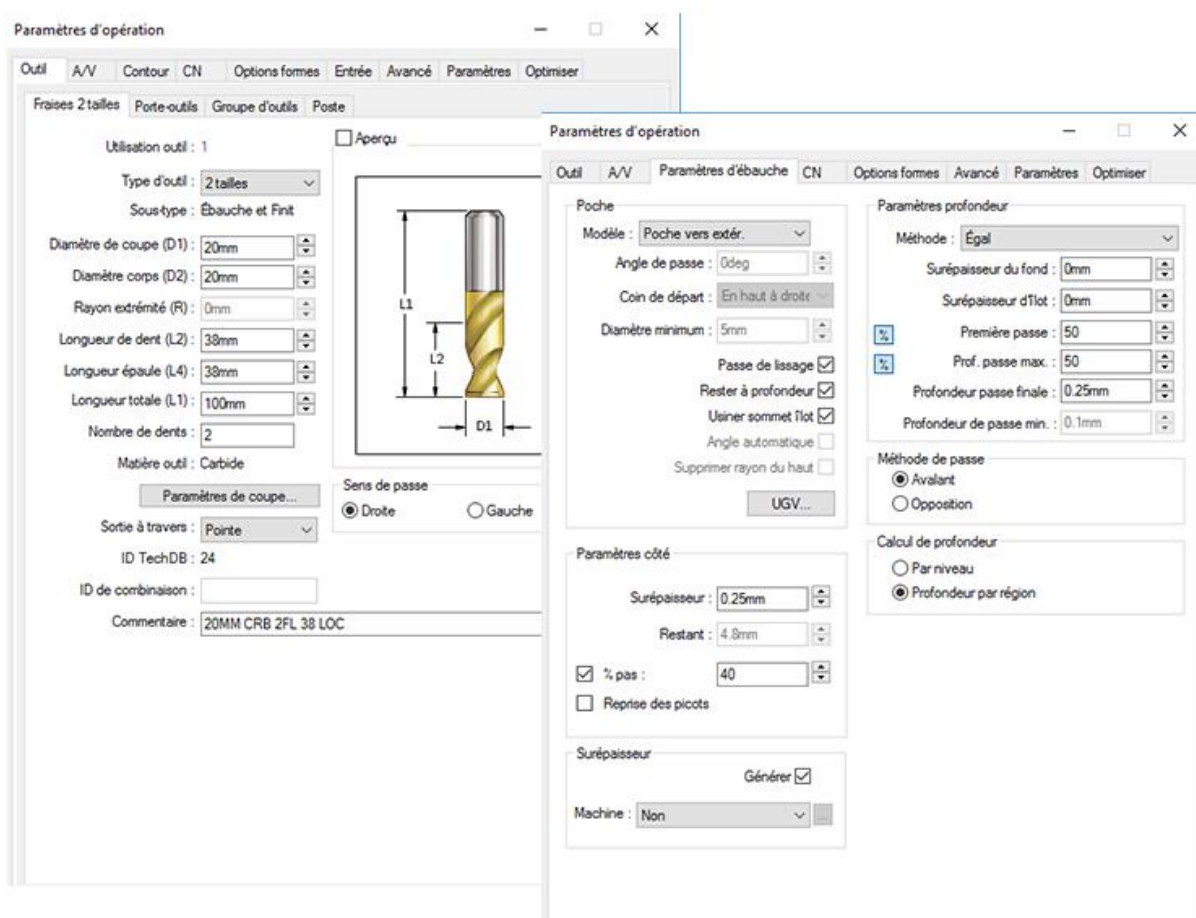
1. Cliquer sur une opération dans l'arbre d'opération.



2. Sélectionner *Edit Definition...*

La boîte de dialogue *Operation Paramètres* contient les zones qui regroupent les paramètres pouvant être changés avant de générer les parcours d'outil et d'exécuter le processus

### 3.Changer les paramètres



L'onglet *Roughing* de la boîte de dialogue *Operation Paramètres* contient les paramètres qui influencent le mode de finition de la pièce

L'onglet *Tool* de la boîte de dialogue *Operation Paramètres* contient plusieurs pages d'informations sur l'usinage :

Outil de calibrage, Outil de centrage, Outil de rayonnée concave, Outil de centrage/chanfreinage, Outil de queue d'aronde, Outil de perçage, Outil rainure en T, Outil de

fraisage, Outil de fraisage défini par l'utilisateur Alésoir, Taraud, Outil de filetage par fraisage Porte-fraise, Tourelle.

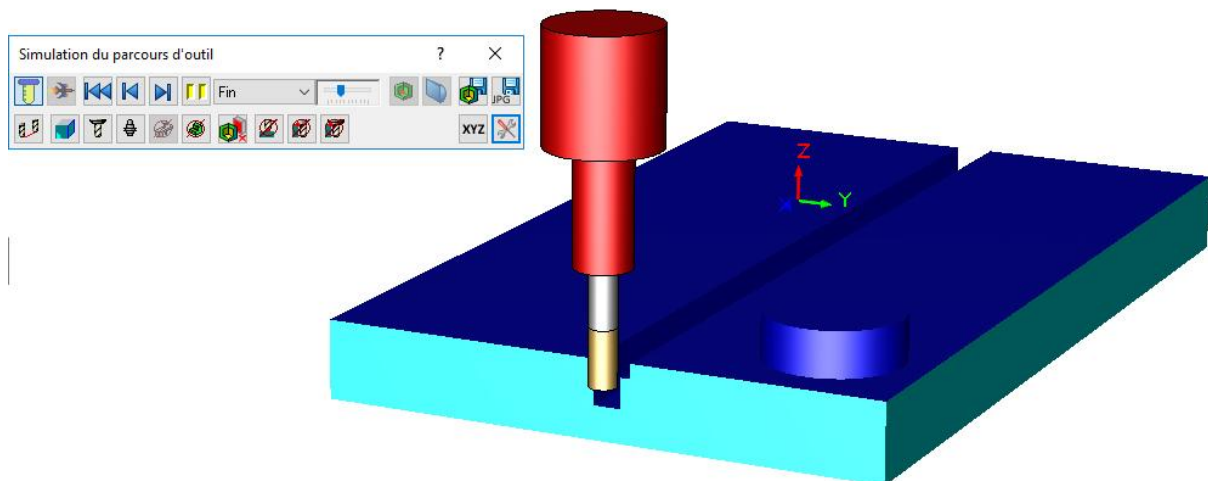
### h) Générer le parcours d'outil « simulation »

La commande *Toolpath Simulation* fournit une représentation graphique de la matière éliminée pour les opérations de vérification d'usinage. En démarrant ces aides de simulation, la confirmation des parcours d'outil créés est faite.

4. Cliquer sur l'icône *Simulate Toolpath* ( )

La boîte de dialogue apparaît

5. Cliquer sur l'icône *Run*



## VI.2 Conclusion

Le calcul des pièces a été fait par la méthode classique. Les résultats ont été introduits dans le logiciel de CAO (solidworks).

L'analyse et la vérification des contraintes dans les pièces ont donné des valeurs très proches de celles calculées par la méthode manuelle classique.

La fabrication assistée par ordinateur (FAO), introduite pour la première fois au niveau de notre département, a été utilisée, beaucoup plus, à titre de présentation.

L'étude complète d'une telle machine dépasse le cadre d'un mémoire de fin d'études. Nous espérons que d'autres étudiants continueront dans ce domaine pour arriver à généraliser l'utilisation de ces nouveaux outils dans le domaine de la construction mécanique.

## Conclusion générale

Dans le plus part des opérations d'usinage en fraisage l'obtention des dimensions finale de la pièce on doit souvent effectuer par plusieurs passes de coupe, où les paramètres d'usinage peuvent être déterminé en fonction de l'expérience de l'opérateur de la machine ou suivant le guide de coupe fournier par le fabricant de l'équipement.

Le développement de modèles mathématique pour les opérations multi-passe de fraisage est devenu un outil utile pour déterminer les conditions de coupe optimal. Ce travail concerne l'utilisation de la programmation non linéaire pour l'optimisation multi-objectif des conditions de coupe en fraisage. Pour atteindre ces objectifs nous avons utilisé deux critères différents : minimisation du temps production et du coût de production. Pour la résolution du problème nous avons élaboré un programme en langage MATLAB, permettent de trouver les conditions de coupe optimales pour le cas d'un fraisage : Optimisation multi-objectif.

## ***Résumé***

L'une des tendances actuelles de la production mécanique est de chercher à obtenir une pièce de qualité requise avec un coût minimum dans des délais les plus courts possible. L'utilisation des techniques d'optimisation est d'un grand intérêt pour ce type de problème.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthode d'optimisation multi-objectif des conditions d'usinage utilisant comme critères d'optimisation la minimisation du coût et du temps de production pour le processus de fraisage. Les deux méthodes proposées basées respectivement sur le processus de la programmation dynamique et un critère combiné pour des opérations d'ébauche et une de finition.

***Mots clés :*** Optimisation, Conditions de coupe, Revum, durée de vie.

### ***Abstract:***

One of the current trends of mechanical production is to seek to obtain a piece of quality required with a minimum cost in the shortest possible time. The use of optimization techniques is of great interest for this type of problem.

In this paper, we presented a multi-objective optimization method for machining conditions using optimization criteria to minimize cost and production time for the milling process. The two proposed methods based respectively on the process of dynamic programming and a combined criterion for roughing and finishing operations

***Keys words:*** Optimization, Cutting conditions, Revum, lifetime.

## ***Bibliographe***

### **Livre**

- [ 1 ]Précis méthode d'usinage ( livre)
- [ 3 ] Revuem livre – 1993
- [ 4 ]Yann collette – optimisation multiobjectif livre –
- [ 5 ]Guide de dessinateur industriel – chevalier livre –

### **thèse**

- [ 2 ] L'application de l'algorithme NSGAI sous matlab pour l'optimisation multi objective des paramètres de fraisage ( Hadj Brahim Smail- Boudaa Boudjema)

## ***Logiciels***

SOLIDWORKS 2017  
MATLAB R2014a