

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA
BOUMERDES

FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département de Transport et Equipements des Hydrocarbures

Thèse de Magister

Spécialité : Génie mécanique

Option : Thermo-fluides

THEME

**EXTENSION DU PROBLEME DE GRAETZ AUX FLUIDES
VISCOPLASTIQUES**

Soutenu le / / 2005 devant le jury composé par :

- AMAUCHE Mustapha : Professeur à l'Université de Bejaia. (Président)
- SACI Rachid : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès (Examineur)
- MAMIR Seghir : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès (Examineur)
- KESSAL Mohend : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès (Examineur)
- ZERAIBI Noureddine : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès (Rapporteur)

Présenté par : BOUALIT Abdel Hamid

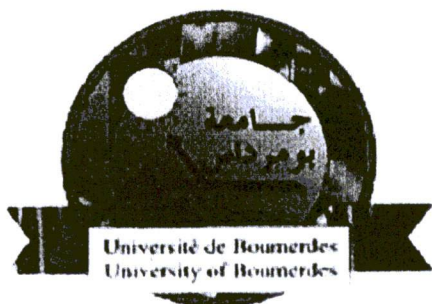
Sous la direction de Monsieur : ZERAIBI Noureddine, Maître de Conférence à l' Université M'hamed BOUGARA de Boumerdès.

Boumerdès 2005

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA
BOUMERDES

FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département de Transport et Equipements des Hydrocarbures

Thèse de Magister

Spécialité : Génie mécanique

Option : Thermo-fluides

THEME

**EXTENSION DU PROBLEME DE GRAETZ AUX FLUIDES
VISCOPLASTIQUES**

Soutenue le / / 2005 devant le jury composé par :

AMAUCHE Mustapha : Professeur à l'Université de Bejaia.	(Président)
SACI Rachid : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès	(Examineur)
MAMIR Seghir : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès	(Examineur)
KESSAL Mohend : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès	(Examineur)
ZERAIBI Noureddine : Maître de Conférence à l'Université de Boumerdès	(Rapporteur)

Présenté par : **BOUALIT Abdel Hamid**

Sous la direction de Monsieur : **ZERAIBI Noureddine**, Maître de Conférence à l' Université M'hamed BOUGARA de Boumerdès.

Boumerdès 2005

ABSTRACT :

The set of thermal transfer laws by convection have always constituted, an indispensable theoretical tool for engineers in the conception and exploitation of thermal equipments, which are intended for heat treatment processes, found in several industrial sectors such as the oil , agro alimentary and pharmaceutical industries.

The transfer laws that have been elaborated by adopting hypothesis of problems linked to Newtonian fluid flows, have proved unable to satisfy the requirements of the industry that most oftently treat non-Newtonians and viscous fluids.

This fact has therefore made it necessary to undertake some research to extend the applications field of these laws. The objective is to study the impact of rheological proprieties on heat transfer by convection.

So our study is concerned with about the forced convection in non - Newtonians fluids. The work consists of the numeric modelling of the plane flows of a non-Newtonian fluids (Plastic of Bingham) under different configurations.

ملخص :

لقد كونت مجموعة قوانين النقل الحراري عن طريق الموائع، الأسس النظرية الحتمية للمهندسين لإنجاز و تعيير الآلات الحرارية التي تتدخل في كثير من التحويلات الحرارية و التي تكون بذاتها مرحلة من مراحل الإنتاج في كثير من القطاعات الصناعية مثل الصناعات البترولية، الغذائية، الصيدلانية.

تلك القوانين التي أصدرت تحت فراضية الطابع النيوتوني للموائع المسؤولة في النقل الحراري، أبدت عجزا في تلبية متطلبات القطاعات الصناعية المتميزة بتخصصها في تحويل الموائع ذات الطابع اللانيوتوني.

هذه الحقيقة أظهرت ضرورة إنجاز بحوثا لغاية توسيع مجال استعمال هذه القوانين. المهمة التي تقتصر في بداية الأمر في تحليل أثر الخصائص الريولوجية على النقل الحراري عن طريق الموائع.

و بذلك فإن دراستنا تتمثل في تحليل النقل الحراري المنسوب إلى الموائع ذات الطابع اللانيوتوني. أين تخصصنا أساسا في دراسة الموائع ذات الطابع البلاستيكي (Plastique de Bingham).

Br	Nombre de Brinkman	
C_I	Coefficient de perte de charge irréversible (locale)	
$\overline{\mathbf{D}}$	Tenseur déformation	
D_{II}	Second invariant du tenseur de déformation	
{F}	Vecteur sollicitation	
H	Hauteur caractéristique du domaine physique	(m)
K	Diffusivité thermique	(m ² /s)
[K]	Matrice rigidité	
L	Longueur caractéristique du domaine physique	(m)
M	Fonction interpolation pour un élément à 4 nœuds	
N	Fonction d'interpolation pour un élément à 9 nœuds	
Nu	Nombre de Nusselt	
P	Pression	(Pa)
Pe	Nombre de Peclet	
Pr	Nombre de Prandtl	
Q	Flux de chaleur	(J/M ²)
Re	Nombre de Reynolds	
S_1	Section d'écoulement établi en amont de l'élargissement	
S_2	Section d'écoulement établi en aval de l'élargissement	
T	Température	(°C)
T_e	Température d'entrée	(°C)
T_p	Température de la paroi	(°C)
ΔT	Ecart de température	(°C)
u	Vitesse longitudinale	(M/s)
{ U_n }	Variables nodales	
u_m	Vitesse longitudinale moyenne	(M/s)
v	Vitesse transversale	(M/s)
X_r	Point de recollement	
Y_e	Contrainte seuil adimensionnelle	
τ	Contrainte de cisaillement	(Pa)
γ	Déformation	
$\dot{\gamma}$	Taux de déformation	(1/s)

μ	Viscosité dynamique	(Pa.s)
ρ	Densité	(Kg/m ³)
η	Viscosité dynamique	(Pa.s)
τ_0	Contrainte seuil	(Pa)
μ_p	Viscosité plastique	(Pa.s)
η_{ap}	Viscosité apparente	(Pa.s)
θ	Température adimensionnelle	
Ψ	Fonction de courant	
ω	Vorticité	
θ_m	Température moyenne adimensionnelle	
Γ	Périmètre du domaine physique	
*	Indique la forme adimensionnelle d'une variable	

SOMMAIRE

Sommaire

Introduction générale :	01
Chapitre I : Etude bibliographique	04
Chapitre II: Classification des fluides	
II.1 Introduction.....	09
II.2 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie.....	09
II.3 Courbe rhéologique ou rhéogramme.....	11
II.4 Classification des fluides.....	12
II.4.1 Introduction.....	12
II.4.2 Classification des fluides.....	12
II.4.2.1 Fluides newtoniens.....	12
II.4.2.2 Fluides non-newtoniens indépendants du temps.....	13
II.4.2.3 Fluides non-newtoniens dépendants du temps.....	16
II.4.2.4 Fluides viscoélastiques.....	17
Chapitre III: Modèle mathématique et méthode numérique	
III.1 Modèle mathématique.....	19
III.1.1 Equations générales.....	19
III.1.2 Conditions aux limites.....	22
III.1.3 Formulation adimensionnelle.....	23
III.2 Méthode numérique.....	25
III.2.1 Introduction.....	25
III.2.2 Approximation d'une fonction exacte.....	25
III.2.2.1 Définition.....	25
III.2.2.2 Approximation nodale d'une fonction exacte.....	26
III.2.2.3 Approximation nodale par élément fini.....	27
III.2.3 Elément et élément de référence quadrilatéraux.....	27
III.2.3.1 Définition.....	27
III.2.3.2 Constructions des fonctions de transformation géométrique et d'interpolation sur un élément de référence	28
III.2.3.3 Positionnement des variables (u,v,p,T) sur un élément.....	32
III.2.4 Formulation intégrale.....	32
III.2.4.1 Collocation par points.....	33
III.2.4.2 Collocation par sous- domaines.....	34
III.2.4.3 Méthode des moindres carrés.....	34
III.2.4.4 Méthode de Galerkin.....	35
III.2.5 Présentation matricielle de la méthode des éléments finis.....	36
III.2.5.1 Forme intégrale élémentaire discrétisée.....	36
III.2.5.2 Forme intégrale élémentaire discrétisée sur un élément de référence.....	38
III.2.6 Intégration de la forme intégrale élémentaire.....	40
III.2.7 Forme intégrale globale discrétisée.....	41
III.2.8 Forme intégrale globale discrétisée pour les équations de mouvement, de continuité et de l'énergie.....	41

III.2.9	Méthode de résolution.....	43
III.2.9.1	Introduction des conditions aux limites.....	44
III.2.9.2	Résolution du système d'équations algébriques.....	44
III.2.9.2.1	Méthode d'élimination de Gauss.....	44
III.2.9.2.2	Méthode de substitution.....	45
III.3	Calcul de la fonction de courant.....	46
III.4	Calcul de nombre de Nusselt.....	47
III.5	Validation du code de calcul.....	48
Chapitre IV: Ecoulement d'un fluide de Bingham entre deux plaques planes chauffées		
IV.1	Introduction.....	51
IV.2	Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux plaques planes.....	51
IV.2.1	Equations gouvernant le problème.....	51
IV.2.2	Conditions aux limites.....	52
IV.3	Résultats et interprétations.....	53
IV.3.1	Régime hydrodynamique.....	53
IV.3.1.1	Influence de la contrainte seuil sur les profils établis de la vitesse.....	53
IV.3.1.2	Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse axiale.....	55
IV.3.1.3	Influence de la contrainte seuil sur le champ de pression.....	57
IV.3.1.4	Influence de l'inertie sur les profils de vitesse axiale.....	59
IV.3.1.5	Influence simultanée de la contrainte seuil et l'inertie sur la longueur d'établissement.....	60
IV.3.2	Régime thermique.....	62
IV.3.2.1	Température imposée à la paroi.....	62
IV.3.2.1.1	Influence de Peclet sur l'intensité de l'échange thermique.....	62
IV.3.2.1.2	Influence de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique.....	63
IV.3.2.1.3	Influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique.....	66
IV.3.2.1.4	Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique.....	68
IV.3.2.2	Flux imposé à la paroi.....	72
IV.3.2.2.1	Influence de Peclet sur l'intensité de l'échange thermique.....	72
IV.3.2.2.2	Influence de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique.....	73
IV.3.2.2.3	Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique.....	75
IV.3.2.2.4	Evolution de la température de la paroi.....	77
IV.4	Conclusion.....	78

Chapitre V: Ecoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque

V.1	Introduction.....	79
V.2	Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque.....	79
V.2.1	Equations gouvernant le problème.....	79
V.2.1	Conditions aux limites.....	80
V.3	Résultats et interprétations.....	82
V.3.1	Régime hydrodynamique.....	82
V.3.1.1	Influence de l'inertie sur le profil axial de vitesse.....	82
V.3.1.2	Influence de la contrainte seuil sur le profil axial de vitesse... ..	84
V.3.1.3	Influence de l'inertie sur la zone tourbillonnaire.....	85
V.3.1.4	Influence de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire	88
V.3.1.5	Champ de pression.....	92
V.3.1.6	Détermination du coefficient de perte de charge local.....	94
V.3.2	Régime thermique.....	99
V.3.2.1	Influence de Prandtl sur le champ thermique.....	100
V.3.2.2	Influence de l'inertie sur le champ thermique.....	102
V.3.2.3	Influence de la contrainte seuil sur le champ thermique.....	103
V.4	Conclusion.....	105
	Conclusion générale	106
	Références bibliographiques	109

INTRODUCTION GENERALE

I- Introduction générale :

L'ensemble des lois de transfert thermique par convection ont constituées depuis toujours, l'outil théorique indispensable aux ingénieurs pour la conception et le dimensionnement des installations thermiques. Ces installations représentent le plus souvent des étapes importantes des processus de production de plusieurs secteurs industriels.

Ces lois de transfert qui ont été élaborées en émettant l'hypothèse de la linéarité de la loi constitutive liés aux fluides newtoniens, se trouvent dans l'incapacité de répondre aux exigences de plusieurs secteurs industriels, qui traitent des fluides non-newtoniens, tels que l'industrie pétrolière, agroalimentaire, pharmaceutique ... etc. Cette réalité a rendu donc nécessaire d'entreprendre des recherches pour étendre et de généraliser le champ d'application des différentes lois de transfert thermiques aux fluides non linéaires, une tâche qui peut être débutée par l'analyse de l'impact du comportement rhéologique sur le transfert thermique par convection.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux écoulements laminaires non-isotherme des fluides à seuil entre deux plaques parallèles et lors du franchissement d'un élargissement brusque.

Nous avons déterminé par voie numérique la structure du champ dynamique de ces écoulements. Nous avons étudié l'évolution des profils des vitesses, des zones de recirculation, des longueurs de recollement et d'établissement ainsi que les pertes de charges singulières pour différents paramètres du problème. Nous avons déterminé aussi des lois de transfert de chaleur dans les configurations sus-citées.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité et de mouvement, auxquelles nous rajoutons l'équation de l'énergie tout en tenant

compte de la dissipation visqueuse. Le comportement rhéologique du fluide suit la loi constitutive de Bingham modifiée par Papanastasiou. Un code numérique basé sur la méthode des éléments finis a été élaboré pour intégrer le système d'équations non-linéaire de ce modèle.

Notre présente étude est structurée en cinq parties qui se résument comme suit:

- Un premier chapitre est consacré au recensement des différentes investigations orientées dans le même axe de recherche, et réalisées sur des fluides newtoniens et non-newtoniens dans diverses configurations géométriques.
- Dans un deuxième chapitre, nous définissons brièvement les différents comportements rhéologiques des fluides non-newtoniens, tout en exposant les lois constitutives les plus répondues.
- Dans un troisième chapitre, nous citons les équations générales qui gouvernent les problèmes physiques que nous analysons, et nous détaillons la méthode numérique utilisée pour l'élaboration de notre code de calcul.
- Nous analysons dans un quatrième chapitre, le développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide à seuil de contrainte entre deux plaques planes. Cette analyse portera sur l'influence des différents paramètres gouvernant le problème sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement.
- Enfin et dans un cinquième chapitre, nous considérons l'écoulement à travers un élargissement brusque de rapport géométrique 1:2. Nous y examinons l'effet exercé par les différents paramètres du problème sur les champs cinématique, dynamique et thermique. Nous nous intéresserons également à l'évolution du coefficient de perte de charge locale avec ces paramètres.

- Nous terminons par une conclusion générale qui rassemble les principaux résultats de notre travail, ainsi que les perspectives qui restent ouvertes dans cet axe de recherche.

CHAPITRE I

Etude Bibliographique

I. Etude bibliographique :

Le transfert thermique par convection forcée lors des écoulements à travers des conduits a suscité l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies, en raison de son importance primordiale dans le développement des procédés technologiques, qui constituent des étapes de production fréquemment rencontrées dans diverses industries.

Les premières études réalisées dans cet axe de recherche, furent celles effectuées par Graetz (1883-1885) où il a considéré le transfert de chaleur par convection forcée, associé à un écoulement laminaire et établi d'un fluide newtonien à travers une conduite circulaire, soumise à un chauffage pariétal par une température imposée. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, Graetz a abouti à une formulation simplifiée de l'équation d'énergie, mais qui ne fut résolue qu'ultérieurement par W.Nusselt. Ce dernier a donc, parvenu à résoudre analytiquement le problème formulé suivant Graetz par une méthode de séparation de variable, et a réalisé par celle-ci, une grande avancée dans le domaine du thermique.

L'analyse de Graetz a été alors, le début d'une longue série d'investigations expérimentales, analytiques et numériques, traitant le problème sous des conditions moins restrictives, des géométries plus complexes et des fluides au comportement rhéologique non-newtonien. L'ensemble de ces études forme un domaine de recherche commun appelé communément « problèmes de Graetz généralisés ».

Pour les fluides newtoniens, Sellars et al [48] et Siegel et al [50] ont considéré le problème de Graetz dans le cas d'un flux uniforme imposé aux parois, tout en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale des fluides. L'effet de cette dernière a été considéré par Hsu [22], où le problème a été résolu analytiquement par la méthode «de séparation des variables». Ou et Cheng [43] ont obtenu une solution pour le problème de Graetz dans le cas d'un flux imposé aux parois en tenant compte de l'effet de la dissipation visqueuse.

L'étude de l'influence exercée par la dissipation visqueuse sur le champ thermique, a montré que l'effet de celle-ci est d'une grande importance au niveau de la zone d'entrée, dans le cas d'un établissement hydrodynamique et thermique simultané [6, 31]. En régime établi, cet effet est également ressenti, car il a été rapporté que la valeur de Nusselt établi, pour le cas d'un refroidissement par une température constante imposée aux parois, est de 9.6 en tenant compte de la dissipation visqueuse [4], alors que cette valeur est de 3.6568 en la négligeant [49]. D'un autre côté, Kays et Grawford [27] ont montré que l'effet de la dissipation visqueuse sur le champ thermique est important lors des écoulements à grande vitesse pour les fluides newtoniens. Tandis que pour les fluides non-newtoniens, Bird et al [8] rapportent de leur côté, que cet effet est également important lors des écoulements à faibles vitesses, en raison des fortes viscosités et des forts gradients de vitesse qui les caractérisent.

Le problème de Graetz étendu au cas des fluides non-newtoniens a connu de sa part, plusieurs investigations. Pour le cas d'un fluide viscoplastique de Bingham, Wissler et Schechter [56], et Blackwell [9] ont étudié le développement d'un régime thermique en considérant une température constante aux parois et en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que la conduction axiale du fluide. Johnston [25] a reconsidéré le problème en tenant compte de la conduction axiale.

Récemment, Min et al ont étudié analytiquement [38] et numériquement [39] le même problème mais dans le cas d'un flux imposé aux parois, en incluant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale. Ils ont montré que cette dernière peut être négligée lorsque la valeur de Peclet est supérieure à 500, et que le seuil de contrainte n'a d'effets considérables sur le transfert thermique qu'en tenant compte de la dissipation visqueuse. G.C. Vradis et al. [54] ont traité le problème de développement simultané des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée pour le même fluide.

La convection forcée lors d'un écoulement laminaire d'un fluide de puissance à travers une conduite cylindrique est étudiée par plusieurs auteurs [11,21,23], en négligeant simultanément la conduction axiale du fluide et la dissipation visqueuse. Avec ces mêmes considérations, Grigull [19] a montré que la valeur de Nusselt établie dans le cas d'un flux imposée aux parois, peut être prédite par la relation
$$Nu_{\infty} = \frac{8(3n+1)(5n+1)}{31n^2+12n+1}$$
 où n est l'indice de consistance d'un fluide de puissance. Cotta et Özisik [13]; Prusa et Manglik [46] ont analysé l'évolution du champ thermique dans la zone d'entrée pour le même problème mais en considérant cette fois-ci une température uniforme imposée aux parois.

Pour cette classe de fluide. L'influence de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique dans la zone d'entrée a été investie par Liou et Wang [33] dans le cas d'un flux imposé aux parois, Berardi et al [7] en considérant un transfert par convection avec un fluide extérieur isotherme, Lawal et Mujumdar [29] ainsi que Dang [14] dans le cas d'une température constante imposée aux parois. Ces investigations ont également tenu compte de la conduction axiale du fluide.

Une étude analytique a été réalisée pour le cas de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley, par J.N.N. Quaresma et E.N. Macêdo [47]. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, ces auteurs ont analysé l'influence de la contrainte seuil et l'indice de consistance sur la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement à travers une conduite cylindrique et entre deux plaques planes semi-infinies. Un travail similaire a été réalisé par ces mêmes auteurs, pour le cas d'un écoulement à travers un espace annulaire formé par deux conduites concentriques [53].

Le recensement des travaux traitant le problème de Graetz dans des configurations géométriques complexes, a été peu fructueux. Les investigations

numériques de Shah et London [49] qui ont considéré le cas d'un fluide newtonien, sont à notre connaissance, parmi les rares études qui ont été réalisées dans cet axe. Cependant, en situation isotherme, plusieurs analyses ont été effectuées sur les deux classes de fluides, newtoniens et non-newtoniens.

L'un des problèmes le plus traité est l'écoulement à travers des élargissements et des contractions brusques. Celui-la a été sujet de plusieurs investigations numériques (Macagno et Hung [34], Habib et Whitelaw [20], Fletcher et al [17]) et expérimentales (Macagno et Hung [34], Back et Roshke [4], Khezzar et al [28], Stieglmeier et al [51]). Ces études ont considéré spécialement le cas des écoulements en régime turbulent des fluides à faible viscosité (air, eau, ...) rencontrés dans plusieurs procédés technologiques relevant des problèmes de ventilation, de combustion et ceux relatifs au domaine aéronautique.

En régime laminaire, McNaughton et Sinclair [37], Tadmor et Gogos [52], Boger [10] rapportent que ce cas caractérise essentiellement les écoulements des fluides à fortes viscosités (verres en fusion, polymères, ...). Dans ce concept, Oliveira et Pinho [41] ont investi numériquement l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien à travers un élargissement de rapport géométrique 1:2.6, et ont proposé une corrélation qui évalue le coefficient de perte de charge locale en fonction du nombre de Reynolds, comme ils ont déterminé le centre, la longueur ainsi que l'intensité de la zone de recirculation. Ces même auteurs ont reconsidéré leur étude pour le cas d'un fluide en loi de puissance [45].

Une modélisation numérique de l'écoulement laminaire de fluides newtoniens et non-newtoniens à travers un canal conique a été présenté par S.H. Garrioch et D.F. James [18], qui ont utilisé une variété d'angles et des faibles nombres de Reynolds. L'étude avait comme objectif, la comparaison entre les caractéristiques de l'écoulement des deux types de fluides. Un travail similaire a été réalisé par Jay et al [24], où ils ont considéré un fluide viscoplastique de Bingham.

Dans ce présent travail, nous traitons un problème de Graetz généralisé qui comprend l'écoulement d'un fluide non-newtonien à seuil de contrainte entre deux plaques planes et à travers un élargissement brusque. Les objectifs de cette études sont :

- ❖ Le développement d'un code de calcul pour la simulation numérique des problèmes considérés, en utilisant la méthode des éléments finis ;
- ❖ L'analyse de l'influence de l'inertie sur la structure hydrodynamique et thermique des écoulements considérés ;
- ❖ L'étude de l'influence exercée par les paramètres rhéologiques du fluide sur les champs dynamique, cinématique et thermique de l'écoulement;
- ❖ l'analyse de l'effet de la dissipation visqueuse sur le champ thermique.

CHAPITRE II

Classification rhéologique des fluides

II.1 Introduction

Mot créé aux états unis en 1929 par Eugène Cook Bingham (1878-1945), la rhéologie est une science qui traite de l'écoulement, des déformations, et plus généralement de la viscosité des matériaux sous l'action de contraintes qui leurs sont appliquées.

Cette discipline qui s'étale sur tout les aspects de la matière, liquides soient-ils ou solides, présente un intérêt particulier par son habilité à l'analyse des problèmes liées aux substances, dont l'aspect présente un état intermédiaire entre un solide parfaitement élastique et un liquide tout à fait visqueux, tels les solides pâteux et les liquides épais.

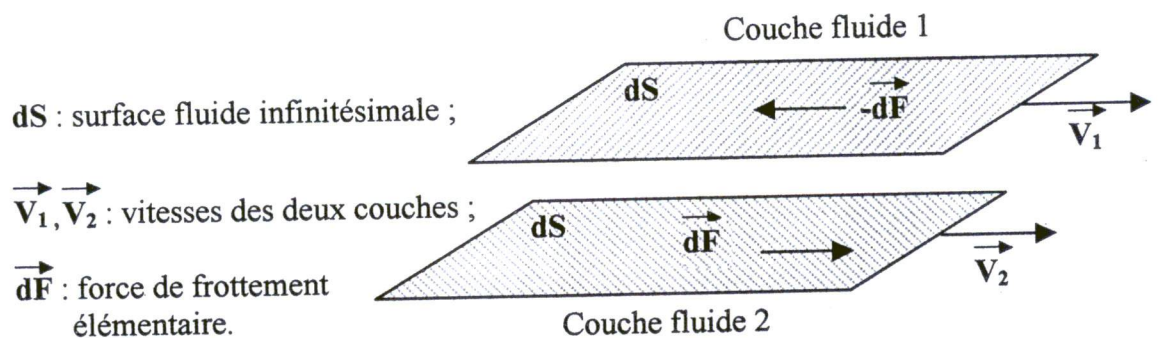
Ce type de substances, qui sont à l'origine de notre étude, forment une large classe de fluides dite « non-newtonien », et dont le comportement rhéologique est très différent de celui d'un liquide parfaitement visqueux (newtonien).

II.2 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie :

La rhéologie fait intervenir plusieurs grandeurs dynamiques et cinématiques, à savoir : la contrainte de cisaillement, la déformation, la vitesse de déformation et la viscosité.

La contrainte de cisaillement :

Considérons deux couches fluides infiniment minces, en contact l'une à l'autre (figure[II-1]). Il en résulte du mouvement de celles-ci, des forces de frottement qui s'exercent tangentiellement à leurs surfaces.



Figure[II-1] :

La contrainte de cisaillement (τ) est donc définie comme étant le rapport entre le module de la force de frottement et l'aire de son application :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \quad [\text{N/m}^2]$$

La déformation :

La déformation (γ) traduit les déplacements relatifs des couches fluides les unes par rapport aux autres, sous l'influence exercée par une contrainte.

Considérons deux points m_1 et m_2 appartenant respectivement à deux couches fluides voisines C_1 et C_2 , d'un écoulement unidimensionnel tel que :

A l'instant $t=t_0$, les coordonnées de ces deux points sont :
 $m_1(x_1, y_1)$ et $m_2(x_1, y_1+dy)$

où dy est l'écart entre deux couches fluides voisines.

A l'instant $t = t_1$: après déplacement, ces deux points occuperont les positions définies par :

$$m_1(x_2, y_2) \text{ et } m_2(x_2+dx, y_2+dy).$$

la déformation de cisaillement est donnée par la relation :

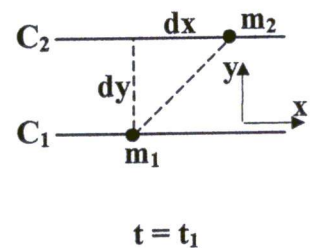
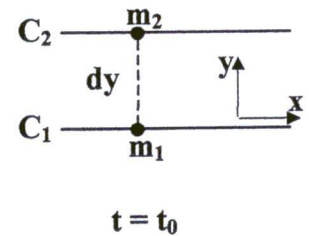
$$\gamma = \frac{dx}{dy}$$

avec dx : la variation de déplacement.

La vitesse de déformation :

La vitesse de déformation ou la vitesse de déformation ou encore le taux de cisaillement, traduit la variation de la déformation au cours du temps. Autrement dit, elle est le rapport entre la déformation et le temps nécessaire à celle-ci pour ce produire.

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{du}{dy}, \quad [1/s]$$



Viscosité dynamique :

La viscosité dynamique est une propriété physique d'un fluide. Elle traduit la capacité d'entraînement exercée par une couche fluide en mouvement sur les autres couches adjacentes. D'après l'hypothèse de Newton, la viscosité dynamique est définie comme le rapport entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de déformation :

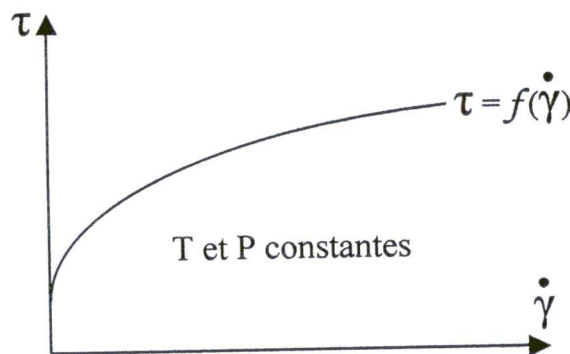
$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

dans le système international la viscosité dynamique s'exprime en poiseuilles où :
1 poiseuille = 1 Pa s = 1 Kg m⁻¹ s⁻¹ .

II.3 Courbe rhéologique ou rhéogramme :

Le rhéogramme est une représentation graphique du comportement mécanique d'un fluide sous l'effet d'un cisaillement.

Obtenue à partir des rhéomètres, cette représentation constitue une base de données nécessaire pour une modélisation mathématique, qui donnera naissance à un modèle rhéologique représentatif du comportement du fluide en question.



Généralement, le rhéogramme représente l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation,

$$\tau = f(\dot{\gamma})$$

mais on peut aussi rencontrer d'autres représentations telles que :

$$- \dot{\gamma} = f(\tau) ;$$

- $\dot{\gamma} = f(t)$: déterminée à partir des expériences dites de fluage où la contrainte de cisaillement est maintenue constante ;
- $\tau = f(t)$: déterminée à partir des expériences dites de relaxation caractérisées par une vitesse de déformation maintenue constante .

II.4 Classification des fluides :

II.4.1 Introduction :

L'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation à pression et température constantes, dans un fluide, est représentée mathématiquement par une relation qui a la forme :

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, t) \dot{\gamma}$$

où « f » est une fonction qui peut dépendre de la déformation, de la vitesse de cisaillement et du temps.

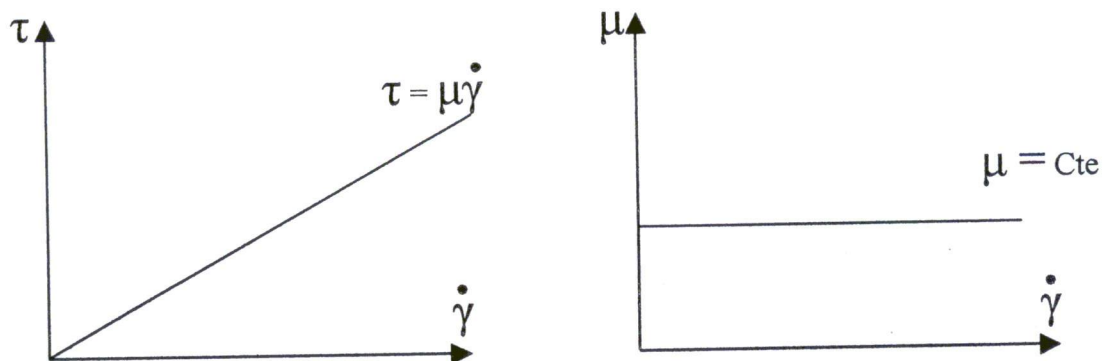
La classification des fluides consiste donc, à regrouper dans la même classe toutes les substances représentées par une fonction « f » qui manifeste la même dépendance des paramètres γ , $\dot{\gamma}$ et t .

II.4.2 Classification des fluides :

II.4.2.1 Fluides newtoniens :

Pour ces fluides, la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la vitesse de déformation. La fonction « f » est une constante qui coïncide avec la viscosité dynamique.

$$f(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = Cte = \mu$$

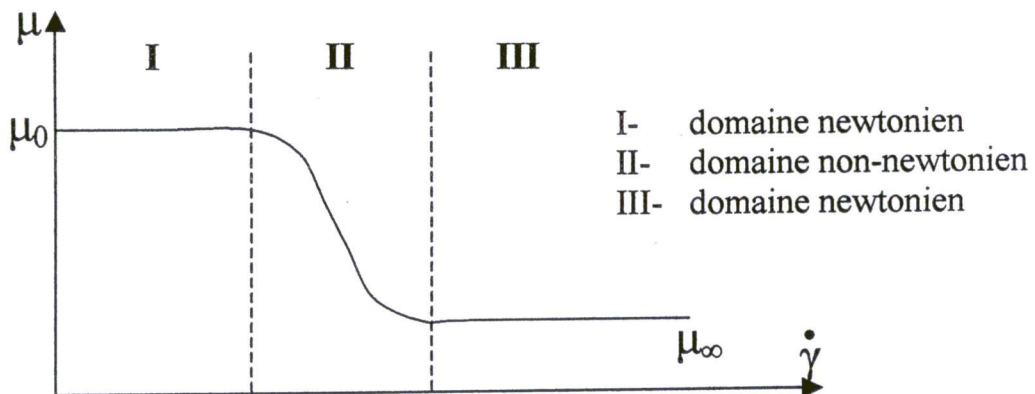


II.4.2.2 Fluides non-newtoniens indépendants du temps :

Pour cette classe de fluides, « f » est une fonction qui dépend uniquement de la vitesse de déformation. L'équation rhéologique se résume donc à la relation :

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

où $f(\dot{\gamma})$ est appelée « viscosité apparente » par analogie avec la viscosité dynamique des fluides newtoniens. L'évolution de cette dernière en fonction de la vitesse de déformation présente une allure universelle figure[II-2].



Figure[II-2] : Allure générale d'une courbe d'écoulement

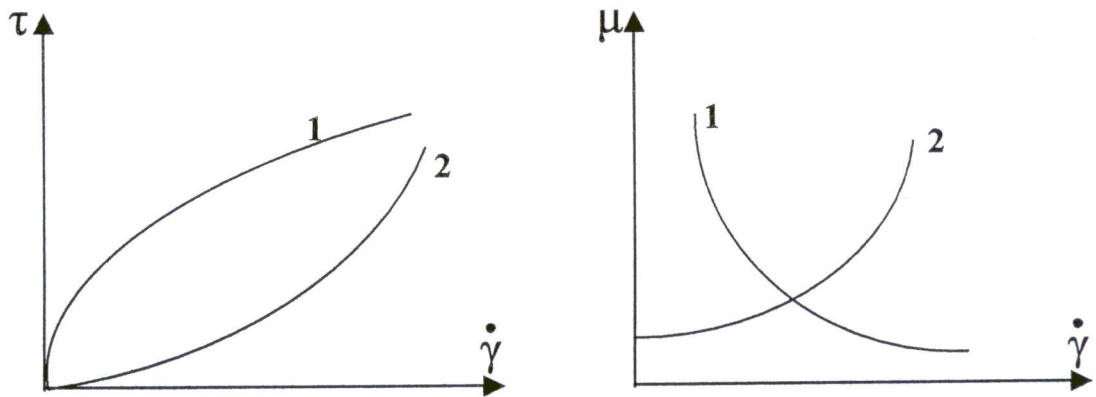
Les fluides non-newtoniens indépendants du temps sont subdivisés en trois groupes, qui sont caractérisés par des comportements rhéologiques distincts :

Fluides rhéofluidifiants :

Appelés également pseudoplastiques, ces fluides sont caractérisés par la diminution de leurs viscosités apparentes avec l'accroissement de la vitesse de déformation. Ce comportement est très répandu et on peut citer en guise d'exemples : les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les colles, les pâtes à papier, les ciments...

Fluides rhéoépaississants :

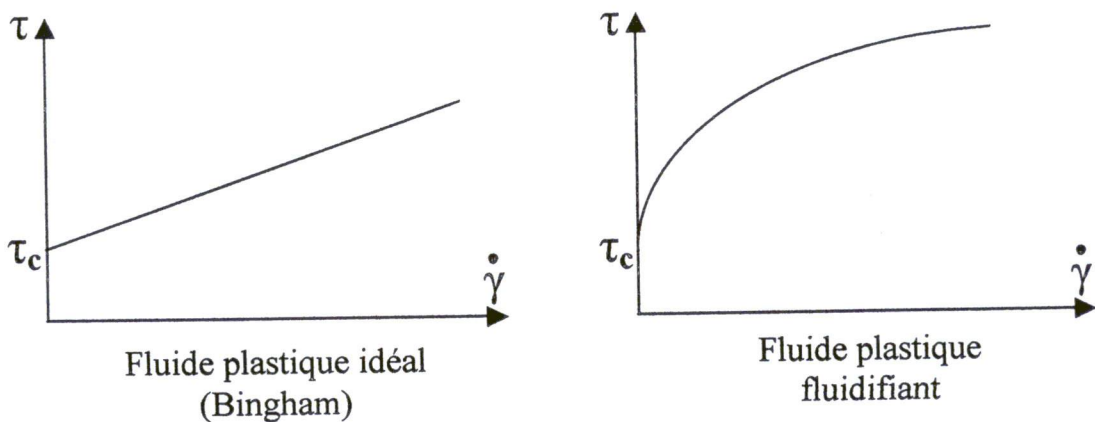
Beaucoup moins fréquent, ces fluides sont caractérisés par une viscosité apparente qui décroît avec l'accroissement de la vitesse de déformation. Tel est le cas des solutions d'amidon, des sables mouillés et compactés, et certains huiles polymériques.



1-Pseudo plastique, 2- Dilatant

Fluides plastiques (fluides à seuil de contrainte):

Ce sont des fluides qui ne s'écoulent que lorsque les contraintes qui leurs sont appliquées dépassent une certaine valeur dite contrainte seuil (τ_c). Au-delà de cette valeur, l'écoulement s'effectue sous l'effet de la contrainte effective ($\tau - \tau_c$).

Fluide plastique idéal
(Bingham)Fluide plastique
fluidifiant

Lors de l'écoulement, les fluides peuvent manifester un comportement newtonien (fluide de Bingham), ou l'un des comportements sus-cités. Mais il est plus fréquent de rencontrer des fluides plastiques fluidifiants tels que les boues, la pâte dentifrice, le sulfate de Zinc ou de Baryum en suspension, la pâte à pain, les matières grasses...

Le tableau [II-1] présente un certain nombre d'équations rhéologiques des fluides au comportement indépendant du temps.

Modèles	Lois Rhéologiques	Paramètres
Ostwald de Weale	$\tau = K \dot{\gamma}^n$	K, n
Ellis	$\tau = \left(\frac{\mu_0}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\alpha-1}} \right) \dot{\gamma}$	$\tau_{1/2}, \mu_0, \alpha$
Prandlt-Eyring	$\tau = \tau_0 + Sh^{-1} \left(t_0 \dot{\gamma} \right)$	τ_0, t_0
Powell-Eyring	$\tau = \mu_1 \dot{\gamma} + \frac{\mu_0}{t_0} Sh^{-1} \left(t_0 \dot{\gamma} \right)$	μ_1, μ_0, t_0
Sisko	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + K \dot{\gamma}^n$	μ_0, K, n
Reiner-Philipoff	$\tau = \left[\mu_0 + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/\tau_s)^2} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \tau_s$
Loi de puissance tronquée de Spriggs	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$ $\tau = \mu_0 \dot{\gamma} \left(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0 \right)^{n-1} \quad \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0$	$\mu_0, \dot{\gamma}_0, n$
Meter	$\tau = \mu_0 \left[\frac{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1} (\mu_\infty/\mu_0)}{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	μ_0, τ_m, α
Hamersma	$\tau = \mu_\infty \dot{\gamma} + \tau_0 [1 - \exp(-a\tau)]$	$\mu_\infty, \tau_0, a = \frac{\mu_\infty/\mu_0}{\tau_0}$

Cross	$\tau = \left[\mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^p} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_{\infty}, \lambda, p$
Quemada	$\tau = \left[\mu_{\infty} \frac{\left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^p \right)^2}{(\mu_{\infty}/\mu_0)^{1/2} + \dot{\gamma}^p} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_{\infty}, \lambda, p$
Krieger-Dougherty	$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^p \right)^{-1}$	$\mu_0, \mu_{\infty}, \lambda, p$
Bingham	$\tau = \tau_s + \mu_p \dot{\gamma}$	τ_s, μ_p
Herschel-Bulkley	$\tau = \tau_s + K \dot{\gamma}^n$	τ_s, K, n
Casson	$\tau^{1/2} = \tau_s^{1/2} + K_c \dot{\gamma}^{1/2}$	τ_s, K_c
Skelland	$\tau = \tau_s + \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + c(\tau - \tau_s)^m}$	τ_s, μ_0, c, m
Robertson-Stiff	$\tau = K \left(\dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} \right)^n$	$\tau_s = K \left(\dot{\gamma}_0 \right)^n, n, K$

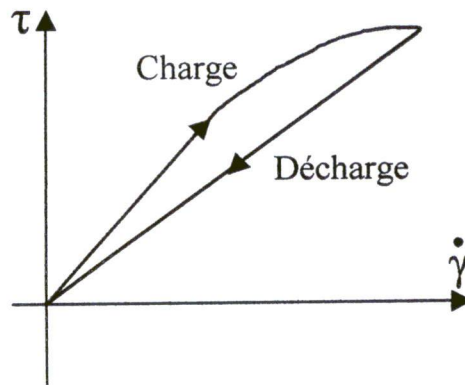
Tableau[II-1] : Lois rhéologiques des fluides indépendants du temps.

II.4.2.3 Fluides non-newtoniens dépendants du temps :

En raison de la modification non-instantanée de la structure microscopique de ces fluides, leurs comportements rhéologiques dépendent du temps en plus des taux de cisaillements. Leurs équations rhéologiques se mettent alors sous la forme :

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t) \dot{\gamma}$$

Ces fluides se comportent comme si les contraintes subies dans un passé relativement récent modifiaient leurs comportements à l'écoulement présent. Les rhéogrammes résultants de l'application d'une vitesse de déformation qui croît et décroît régulièrement (charge-décharge) sur ces derniers, présentent des cycles d'hystérésis.



On distingue pour les fluides non-newtoniens dépendants du temps deux types de fluides qui ont un comportement distinct :

Fluides thixotropes :

un fluide est thixotrope si sa viscosité apparente diminue en fonction du temps lorsqu'il est soumis à un taux de cisaillement constant . Ce comportement doit être réversible.

Fluides rhéopectiques :

un fluide est dit rhéopectique s'il manifeste un comportement inverse que celui d'un fluide thixotrope.

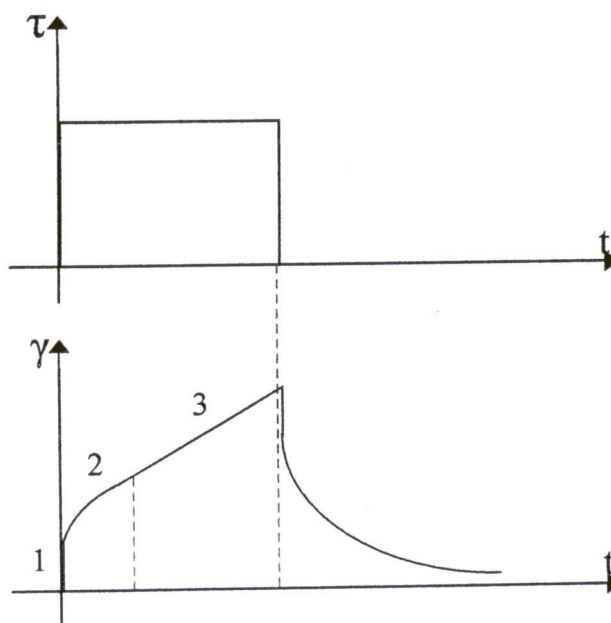
II.4.2.4 Fluides viscoélastiques :

Les fluides viscoélastiques manifestent sous l'effet d'une contrainte, un comportement qui dépend à la fois de la déformation, du taux de cisaillement et du temps. Leurs équations rhéologiques sont de la forme :

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, t) \dot{\gamma}$$

Ces fluides possèdent simultanément des propriétés visqueuses et élastiques. Car soumis à un test de fluage (contrainte de cisaillement constante), ces fluides se déforment en trois temps successifs :

- 1- déformation instantané qui résulte de l'élasticité du fluide ;
- 2- déformation élastique amortie par la viscosité ;
- 3- déformation linéaire purement visqueuse.



CHAPITRE III

Modèle mathématique et méthode numérique

III.1 Modèle mathématique :**III.1.1 Equations générales :**

L'écoulement d'un fluide est représenté par un ensemble d'équations aux dérivées partielles, à savoir les équations de mouvement et de continuité, obtenues respectivement par l'application du principe de conservation de la quantité de mouvement et de la masse sur un élément fluide infinitésimal.

En considérant un écoulement laminaire, stationnaire et bidimensionnel d'un fluide incompressible, ces équations de conservation s'écrivent comme suit :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(III - 1)$$

Equations de mouvement :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \dots(III - 2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots(III - 3)$$

Pour les problèmes non- isothermes, le transfert de chaleur est défini par l'équation d'énergie qui est également un résultat de l'application du principe de conservation de la quantité de chaleur comprise dans l'élément fluide.

En considérant un cas stationnaire et un fluide a propriétés physiques thermo-indépendantes, l'équation de l'énergie aura la forme suivante :

Equation de l'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \dot{\gamma}^2 \quad \dots\dots\dots(III - 4)$$

où $(\eta \dot{\gamma}^2)$ est le terme de la dissipation visqueuse et $\dot{\gamma}^2 = D_{II}$ qui représente le

second invariant du tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$:

$$\left[\overline{\overline{D}} \right] = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$D_{II} = \frac{1}{2} \left[\left(\text{Trace } \overline{\overline{D}} \right)^2 - \text{Trace } \overline{\overline{D}}^2 \right]$$

D'où :

$$D_{II} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \dots\dots\dots(III - 5)$$

$(\eta \dot{\gamma}^2)$, qui est un terme source pour l'équation (III-4), traduit la contribution

de la viscosité et des taux de déformation au réchauffage du fluide lors de son écoulement. Généralement négligé, ce terme s'avère d'une très grande importance en considérant des écoulements à travers des tubes capillaires ou des faibles espaces annulaires (problème de lubrification). Ces deux cas de figures ont été sujet plusieurs investigations numériques et analytiques [5,40,39] .

Equation constitutive :(comportement rhéologique)

Dans ce travail, on considère le cas des fluides obéissant à la loi de comportement de Bingham. Cette loi définit la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse, tout en tenant compte de l'existence d'un seuil de contrainte (τ_o).

On a alors :

$$\begin{cases} \tau - \tau_o = \mu_p \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_o \\ \gamma = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_o \end{cases} \dots\dots\dots(III - 6)$$

où μ_p est la viscosité plastique du fluide .

et :

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'introduire l'effet rhéologique du fluide dans la structure de l'écoulement (équations de mouvement), l'équation constitutive est formulée de sorte à définir l'expression de la viscosité apparente du fluide en fonction du gradient de vitesse. On aura donc :

$$\eta_{ap} = \begin{cases} \mu_p + \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} & \text{si } \tau > \tau_o \quad \dots\dots\dots(III - 7) \\ \infty & \text{si } \tau \leq \tau_o \end{cases}$$

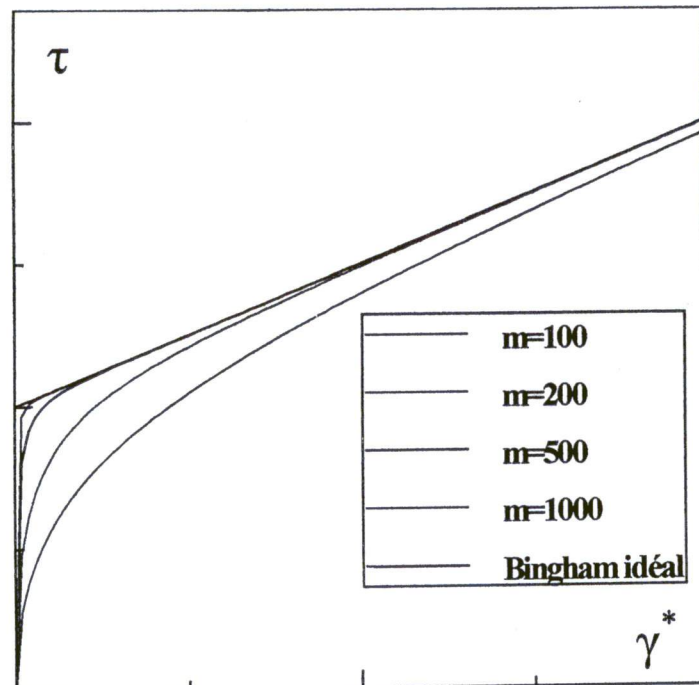
Il est à noter que, pour ce type de fluides , la zone caractérisée par des taux de cisaillement inférieurs à τ_o ne subit aucune déformation ($\gamma=0$) et s'écoule en bloc formant ainsi un écoulement bouchon.

Une autre approche de l'équation constitutive d'un fluide de Bingham a été proposé par Papanastasiou [44]. Cette équation a été jugé par plusieurs auteurs [1,16,...] satisfaisante et représentative d'un fluide de Bingham idéal, en particulier dans la limite des faibles taux de cisaillement de plus sa simplicité sur le point de vue implémentation numérique. Nous adoptons donc, dans ce travail cette approche qui est formulée comme suit :

$$\eta_{ap} = \mu_p + \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} \left(1 - \exp \left(-m \dot{\gamma} \right) \right) \quad \dots\dots\dots(III - 8)$$

où m est une constante dont la valeur dépend de μ_p et τ_o .

Un bon choix de m permettra une meilleure approximation du comportement d'un fluide de Bingham idéal. [Figure III-1]



[Figure III-1] : Courbes de comportement rhéologique pour différentes valeurs de m

III.1.2 Conditions aux limites :

Dans ce travail, on a considéré pour chaque problème étudié des conditions aux limites spécifiques et représentatives de son aspect physique.

Pour l'analyse de l'établissement d'un régime hydrodynamique, on a imposé :

- Une condition de non glissement aux parois solide ;
- Vitesse constante à l'entrée ;
- Profil de vitesse établi à la sortie.

Tandis que pour l'établissement d'un régime thermique, on a considéré :

- Température constante ou flux uniforme à la paroi solide ;
- Température constante à l'entrée ;
- Profil de température établi à la sortie.

III.1.3 Formulation adimensionnelle :

En guise de généralisation, les équations suscitées sont ramenées à une forme adimensionnelle en considérant les échelles de longueur (H), de vitesse U_m (vitesse moyenne débitante à l'entrée) et de température $\Delta T (T_{paroi} - T_{entrée})$ ou bien qH/K .

Les équations gouvernants le problème s'écrivent alors :

Eq. C :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \dots\dots\dots(III - 9)$$

Eqs. M :

$$Re \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\eta_{ap}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\eta_{ap}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \dots(III - 10)$$

$$Re \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\eta_{ap}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(2\eta_{ap}^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \dots(III - 11)$$

Eq. En :

$$Pe \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) + Br \eta_{ap}^* \dot{\gamma}^{*2} \dots\dots\dots(III - 12)$$

Eq. Constitutive :

$$\eta_{ap}^* = 1 + \frac{Ye}{\dot{\gamma}^*} \left(1 - \exp \left(-m \dot{\gamma}^* \right) \right) \dots\dots\dots(III - 13)$$

Où :

$$\dot{\gamma}^* = \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Les variables adimensionnelles associées sont :

$$u^* = \frac{u}{u_m}, \quad v^* = \frac{v}{v_m}, \quad x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}$$

$$P^* = \frac{P}{\mu_p \frac{u_m}{H}} \quad [\text{pression adimensionnelle}]$$

$$Ye = \frac{\tau_o H}{\mu_p u_m} \quad [\text{contrainte seuil adimensionnelle}]$$

$$Pr = \frac{\mu_p}{\rho K} \quad [\text{nombre de Prandtl}]$$

$$Re = \frac{\rho u_m H}{\mu_p} \quad [\text{nombre de Reynolds}]$$

$$Pe = Pr Re = \frac{u_m H}{K} \quad [\text{nombre de Peclet}]$$

Pour le cas de la température, on a considéré deux cas :

- Température constante imposée aux parois :

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_p - T_e}$$

$$Br = \frac{\mu_p u_m^2}{K(T_p - T_e)} \quad [\text{nombre de Brinkman}]$$

- Flux uniforme (q) imposé aux parois :

$$\theta = \frac{T - T_e}{q \frac{H}{K}}$$

$$Br = \frac{\mu_p u_m^2}{q H}$$

III.2 Méthode numérique :

III.2.1 Introduction :

Plusieurs méthodes numériques offrent la possibilité de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles prédéfini. Ces méthodes dont on cite la méthode des différences finies, aux volumes finis, aux éléments finis ... , permettent la transformation du système d'EDP ou de sa forme intégrale en un système d'équations algébriques, dont la résolution aboutit à une reconstruction de la forme de la solution.

Dans notre travail, on a adopté la méthode aux éléments finis qui se résume aux étapes suivantes :

- Subdivision du domaine physique en un nombre d'éléments ;
- La réécriture du système d'EDP sous une forme intégrale par l'introduction de la méthode des résidus pondérés ;
- L'approximation simple des variables inconnues à fin de permettre le passage du système d'EDP mis sous forme intégrale à un système d'équations algébriques ;
- La résolution numérique du système d'équations algébriques.

III.2.2 Approximation d'une fonction exacte :

III.2.2.1 Définition :

Une approximation d'une fonction exacte U_{ex} , consiste à évaluer les paramètres a_1, a_2, \dots, a_n d'une fonction approchée $U(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ de façon à faire coïncider U_{ex} et U en n points x_1, x_2, \dots, x_n d'un domaine de définition V .

Cette méthode permet de fournir :

- Une expression approchée en tout point d'une fonction difficile à évaluer, ou bien connue uniquement sur certains points.
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

L'expression de la fonction approchée s'écrit :

$$U(x) = \langle P_1(x) \quad P_2(x) \quad \dots \quad P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\} \quad \dots \quad (III - 14)$$

ou :

a_1, a_2, \dots, a_n sont les paramètres de l'approximation ;

P_1, P_2, \dots, P_n sont des fonctions connues linéairement indépendantes.

Si on choisit comme valeur des a_i la valeur de la fonction exacte en n point de V , on aura une approximation nodale de U_{ex} .

III.2.2.2 Approximation nodale d'une fonction exacte :

Pour le cas d'une approximation nodale, la fonction approchée s'écrit :

$$U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u\} \quad \dots \quad (III - 15)$$

ou :

N_i sont les fonctions d'interpolations qui vérifient :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On aura donc : $U(x) = U_{ex}(x)$ au niveau des nœuds qui correspondent aux positions des paramètres nodaux (U_i).

La difficulté de l'approximation nodale d'une fonction exacte survient lorsque :

- Le nombre de nœuds devient important ;
- Le domaine de définition V de U_{ex} présente une forme complexe ;
- La nécessité de satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de V .

Ce problème est contourné par l'introduction d'une approximation dite par élément fini.

III.2.2.3 Approximation nodale par élément fini :

L'approximation par élément fini consiste à subdiviser le domaine V en un nombre de sous- domaines V^e , et à définir une fonction approchée U^e appropriée à chaque V^e par une approximation nodale qui doit satisfaire les conditions suivantes :

- L'approximation nodale sur un élément V^e ne fait intervenir que les variables nodales liées au nœuds situés sur cet élément et sa frontière ;
- Chaque fonction approchée doit assurer la continuité sur le sous- domaine de sa définition ;
- Les fonctions approchées de deux sous- domaines mitoyens doivent assurer la continuité sur leurs frontière commune.

A fin de satisfaire ces conditions, il est impératif que les sous- domaines V^e vérifient :

- Aucun recouvrement ni trou entre deux éléments voisins ;
- L'ensemble des V^e doit former un domaine aussi proche possible de V .

La nécessité de construire une fonction approchée propre à chaque élément est surpassée par l'introduction de la notion d'élément de référence. Dans ce travail, on considère des éléments quadrilatéraux à neuf et à quatre nœuds ,ainsi que leurs éléments de référence.

III.2.3 Élément et élément de référence quadrilatéraux :

III.2.3.1 Définition :

Un élément de référence V^r est un élément de forme simple, repéré dans un espace de référence et qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique τ^e .

Cette transformation dépend des coordonnées des nœuds géométriques qui définissent l'élément réel, tel que :

$$\tau^e : \xi \rightarrow X^e = X^e(\xi, X_1, X_2, \dots, X_{Nn})$$

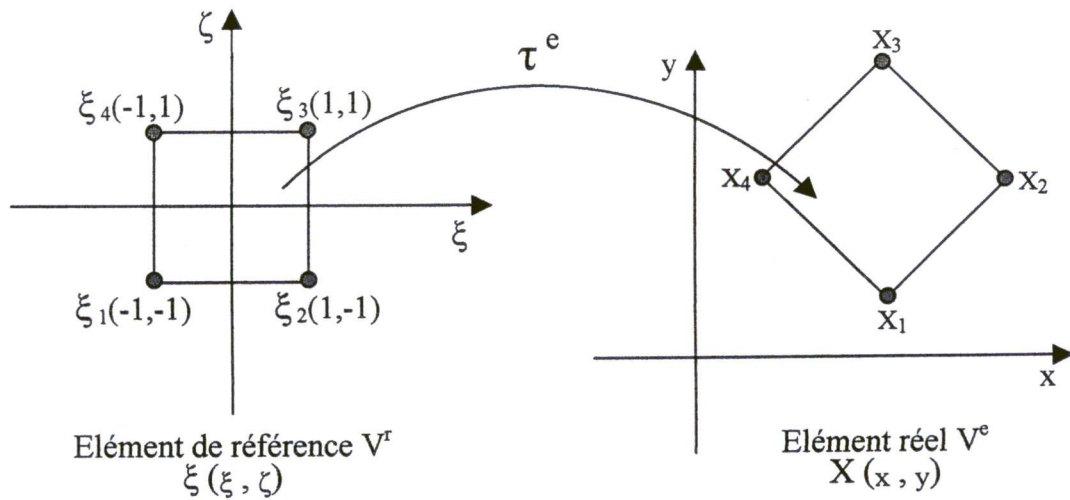
Où :

ξ : coordonnées (ξ, η) d'un point quelconque sur V^r ;

V^r : coordonnées (x, y) du point correspondant sur V^e ;

N_n : nombre de nœuds sur l'élément réel et sa frontière ;

X_1, X_2, \dots, X_{N_n} : les nœuds géométriques de l'élément réel.



[Figure III-2] : Élément réel et son élément de référence associé

III.2.3.2 Constructions des fonctions de transformation géométrique et d'interpolation sur un élément de référence :

Les fonctions de transformation géométrique $\bar{N}(\xi)$ et celles d'interpolation $N(\xi)$ sont identiques sur un élément de référence isoparamétrique qui est caractérisé par la superposition des nœuds géométriques avec les nœuds d'interpolation.

En considérant un élément quadrilatère à quatre nœuds, ces fonctions sont construites à partir d'une base polynomiale $\langle P \rangle$ propre à cet élément :

$$\langle P \rangle = \langle P_1(\xi, \eta) \quad P_2(\xi, \eta) \quad P_3(\xi, \eta) \quad P_4(\xi, \eta) \rangle$$

tel que :

$$\begin{cases} P_1(\xi, \eta) = 1 \\ P_2(\xi, \eta) = \xi \\ P_3(\xi, \eta) = \eta \\ P_4(\xi, \eta) = \xi\eta \end{cases}$$

Soit $\xi(\xi, \eta)$ un point quelconque de l'élément de référence et $X(x, y)$ sont correspondant sur l'élément réel. x et y peuvent s'écrire alors :

$$\langle x \ y \rangle = \langle P_1(\xi, \eta) \ P_2(\xi, \eta) \ P_3(\xi, \eta) \ P_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{Bmatrix} \dots\dots(III - 17)$$

où : a_i, b_i sont des coefficients d'interpolation.

Sachant que, chaque nœud $\xi_i(\xi_i, \eta_i)$ de V^r correspond à un nœud $X_i(x_i, y_i)$ de V^e , et en considérant tout les nœuds ($i = 1, \dots, 4$), on aura :

$$\begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1, \eta_1) & P_2(\xi_1, \eta_1) & P_3(\xi_1, \eta_1) & P_4(\xi_1, \eta_1) \\ P_1(\xi_2, \eta_2) & P_2(\xi_2, \eta_2) & P_3(\xi_2, \eta_2) & P_4(\xi_2, \eta_2) \\ P_1(\xi_3, \eta_3) & P_2(\xi_3, \eta_3) & P_3(\xi_3, \eta_3) & P_4(\xi_3, \eta_3) \\ P_1(\xi_4, \eta_4) & P_2(\xi_4, \eta_4) & P_3(\xi_4, \eta_4) & P_4(\xi_4, \eta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{Bmatrix}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \{X_n\} = [P_n] \{a\} \\ \{Y_n\} = [P_n] \{b\} \end{cases} \dots\dots\dots(III - 18)$$

De (III-18) on déduit :

$$\begin{cases} \{a\} = [P_n]^{-1} \{X_n\} \\ \{b\} = [P_n]^{-1} \{Y_n\} \end{cases} \dots\dots\dots(III - 19)$$

En remplaçant (III-19) dans (III-17) on aura :

$$\begin{cases} x = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \{X_n\} \\ y = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \{Y_n\} \end{cases} \dots\dots\dots(III - 20)$$

Les fonctions d'interpolation et de transformation géométrique sont finalement, définies comme suit :

$$\langle \bar{N} \rangle = \langle N \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \dots\dots\dots (III - 21)$$

Du moment que $[P_n]^{-1}$ ne dépend que des coordonnées nodales de l'élément de référence, les fonctions $\langle N \rangle$ ne sont déterminées qu'une seule fois pour l'ensemble des éléments réels possédant le même élément de référence .

On définit également :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\rangle [P]^{-1} \dots\dots\dots (III - 22) \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \eta} \right\rangle [P]^{-1} \end{array} \right.$$

Les tableaux (III-1) et (III-2) présentent un récapitulatif des fonctions d'interpolations et leurs dérivées respectivement pour un élément de référence quadrilatérale à quatre et à neuf nœuds .

N	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{-1+\eta}{4}$	$\frac{-1+\xi}{4}$
$\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{1-\eta}{4}$	$\frac{-1-\xi}{4}$
$\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{1+\eta}{4}$	$\frac{1+\xi}{4}$
$\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{-1-\eta}{4}$	$\frac{1-\xi}{4}$

Tableau III-1 : Fonctions d'interpolations et leurs dérivées pour un élément de référence quadrilatérale à quatre nœuds.

III.2.7 Forme intégrale globale discrétisée :

La forme intégrale globale W est formée par l'addition des formes élémentaires W^e après expansion.

$$W = \sum_{e=1}^{nel} W^e$$

Si on considère n_d et n_D les nombres de variables nodales respectivement de V^e et V , on aura :

- $\langle \delta u_n^e \rangle, \{ \delta u_n^e \}$ et $\{ f \}$ des vecteurs de dimension n_d ;
- $[k]$ une matrice de dimensions $(n_d \times n_d)$.

Leurs expansion revient alors, à les ramener respectivement à des dimensions n_D et $(n_D \times n_D)$ par l'insertion des lignes et des colonnes de zéros, tout en s'assurant d'avoir attribué à chaque élément des vecteurs et matrice élémentaires un emplacement adéquat dans les vecteurs et la matrice étendus correspondants.

On aura alors :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{ U_n \} - \{ F \}) = 0 \dots\dots\dots(III - 42)$$

où : W est la forme intégrale globale ;

$\langle \delta U_n \rangle$: vecteur global de variation des variables nodales ;

$\{ U_n \}$: vecteur global des variables nodales ;

$[k]$: matrice rigidité globale ;

$\{ F \}$: vecteur sollicitation global.

III.2.8 Forme intégrale globale discrétisée pour les équations de mouvement, de continuité et de l'énergie :

La formulation intégrale globale discrétisée du système d'équations formé par l'équation de continuité et les équations de mouvement, est représentée sous une forme matricielle comme suit :

$$[K]\{U_n\} = \{F\} \quad \dots\dots\dots (III - 43)$$

où :

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice $[K]$ est organisée de la manière suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & C_u \\ K_{vu} & K_{vv} & C_v \\ C_u^T & C_v^T & 0 \end{bmatrix}$$

$K_{uu}, K_{uv}, K_{vu}, K_{vv}, C_u, C_v, F_u$ et F_v sont déterminées par l'addition après expansion des matrices et vecteurs élémentaires correspondants. Ces derniers s'expriment comme suit :

$$[k_{uu}] = \int_{\Omega'} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \eta \left(2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] d\Omega$$

$$[k_{uv}] = \int_{\Omega'} \left(\eta \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$[k_{vu}] = \int_{\Omega'} \left(\eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$[k_{vv}] = \int_{\Omega'} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \eta \left(2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] d\Omega$$

$$[C_u] = - \int_{\Omega'} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \right) d\Omega$$

$$[C_v] = - \int_{\Omega'} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \right) d\Omega$$

$$\{f_u\} = \int_{\Omega'} N_i f_x d\Omega$$

$$\{f_v\} = \int_{\Omega^e} N_i f_y d\Omega$$

On définit par N les fonctions d'interpolation construites à base d'un élément quadrilatéral biquadratique (neuf nœuds), et par M celles propres à un élément quadrilatéral bilinéaire (quatre nœuds).

Pour le cas de l'équation d'énergie, on aura :

$$[K][T] = \{F\} \quad \dots\dots\dots(III - 44)$$

$$\text{Où : } [K] = \sum_{e=1}^{nel} [k]_{\text{étendue}}^e \quad \text{et} \quad \{F\} = \sum_{e=1}^{nel} \{f\}_{\text{étendu}}^e$$

Avec :

$$[k]^e = \int_{\Omega^e} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] d\Omega$$

$$\{f_v\}^e = \int_{\Omega^e} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma^e} N_i q d\Gamma$$

Où :

Q : représente une source de chaleur se trouvant dans le domaine Ω^e ;

q : flux de chaleur au niveau du contour Γ^e .

III.2.9 Méthode de résolution :

La résolution du système d'équations algébriques formulé suite à l'application de la méthode des résidus pondérés, constitue la dernière étape de la méthode des éléments finis après introductions des conditions aux limites.

III.2.9.1 Introduction des conditions aux limites :

Les conditions aux limites peuvent être introduites par plusieurs manières. Dans ce travail, on a adopté la méthode du terme unité sur la diagonale qui consiste à modifier le vecteur $\{F\}$ et la matrice $\{K\}$ de la façon suivante :

Si \bar{u} est la condition au limite imposée à la variable u_i , les modifications se résume à :

$$\begin{aligned} F_j &= F_j - K_{ji}\bar{u} & j = 1, 2, \dots, n & \quad j \neq i \\ F_i &= \bar{u} \\ K_{ij} &= K_{ji} = 0 & j = 1, 2, \dots, n & \quad j \neq i \\ K_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

Qu'on schématise comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \cdots & K_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i-1,1} & \cdots & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \cdots & K_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{i+1,1} & \cdots & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \cdots & K_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n,1} & \cdots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \cdots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1,i}\bar{u} \\ \vdots \\ F_{i-1} - K_{i-1,i}\bar{u} \\ \bar{u} \\ F_{i+1} - K_{i+1,i}\bar{u} \\ \vdots \\ F_n - K_{n,i}\bar{u} \end{bmatrix}$$

III.2.9.2 Résolution du système d'équations algébriques :

La méthode de résolution d'un système d'équations algébriques est dictée par la forme que présente ce dernier. Dans ce travail on a considéré la méthode d'élimination de Gauss pour le système linéaire (III-44) et de substitution pour le système non linéaire (III-44).

III.2.9.2.1 Méthode d'élimination de Gauss :

Cette méthode fréquemment utilisé pour la résolution des problèmes linéaires, est formulée en deux étapes :

- **Triangularisation :**

Qui consiste à transformer le système d'équations algébriques (III-44) en un système triangulaire supérieur :

$$[K]\{U\} = \{F\} \Rightarrow [S]\{U\} = \{F'\}$$

tel que :

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & \cdots & S_{1,i} & \cdots & S_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & S_{i,i} & \cdots & S_{i,n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & S_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_i \\ \vdots \\ F'_n \end{Bmatrix}$$

- **Résolution d'un système triangulaire supérieur :**

la résolution consiste à déterminer en premier lieu la valeur de la dernière variable du vecteur $\{U\}$ tel que :

$$u_n = \frac{F'_n}{S_{n,n}}$$

En suite, à calculer successivement $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ à partir de la relation suivante :

$$u_i = \frac{F'_i - \sum_{j=i+1}^n S_{i,j}u_j}{S_{i,i}}$$

III.2.9.2.2 Méthode de substitution :

La méthode de substitution est l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution des systèmes d'équations algébriques non linéaires.

En considérant le système (III-43) réécrit sous la forme :

$$[K(U)]\{U\} = \{F\}$$

la méthode de substitution se résume à :

1. supposer une solution initiale $\{U^0\}$;
2. déterminer le résidu défini par :

$$\{F\} - [K(U^0)]\{U^0\} = \{R\}$$

3. résoudre le problème linéaire :

$$[K(U^0)]\{\Delta U\} = \{R\}$$

4. calculer $\{U\}$ tel que :

$$\{U\} = \{U^0\} + \{\Delta U\}$$

5. calculer la norme des moindres carrés définit par :

$$\|N\| = \sqrt{\langle \Delta U \rangle \{ \Delta U \}}$$

6. tester la convergence ($\|N\| \leq$ précision souhaitée). Si c'est réalisé, $\{U\}$ est la solution recherchée, si non refaire à partir de (2) en posant :

$$\{U^0\} = \{U\}$$

III.3 Calcul de la fonction de courant :

La fonction de courant est calculée après détermination du champ de vitesse, en considérant les relation suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \end{cases} \dots\dots\dots(III - 45)$$

En dérivant la première équation du système (III-45) par rapport à y , la seconde par rapport à x et après leurs addition , on aura :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \omega \dots\dots\dots(III - 46)$$

Où ω est appelée vecteur tourbillon.

La détermination des lignes de courant se résume donc à la résolution de l'équation elliptique (III-46) (équation de poisson).

III.4 Calcul de nombre de Nusselt :

Le nombre de Nusselt traduit l'intensité du transfert thermique entre une paroi solide et un fluide adjacent.

En considérant q la densité de flux thermique échangé entre le fluide et la paroi, celui-ci est égale d'une part à :

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \dots\dots\dots (III - 47)$$

et d'une autre part à :

$$q = h(T_p - T_m) \dots\dots\dots (III - 48)$$

Où : h est le coefficient de transfert convectif de chaleur ;

T_p est la température de la paroi ;

T_m est la température moyenne du fluide déterminée comme suit :

$$T_m = \frac{1}{\bar{u}} \int_0^H u(y) T(y) dy$$

tel que : H est une longueur caractéristique du processus physique ;

\bar{u} est la vitesse moyenne suivant une section d'écoulement.

A partir de (III-47) et (III-48), on aura :

$$Nu = \frac{hH}{k} = - \frac{H}{T_p - T_m} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H} \dots\dots\dots (III - 49)$$

En tenant compte des variables adimensionnelles définies en [III-1-3], Nu s'écrira alors :

$$Nu = \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \Big|_{y^*=1} \dots\dots\dots (III - 50)$$

III.5 Validation du code de calcul :

Afin de valider notre code de calcul dans lequel nous avons utilisé des éléments quadrilatères à neuf nœuds, nous avons procédé à une comparaison entre nos résultats concernant la convection naturelle de l'air confiné dans une cavité carrée chauffée différentiellement et ceux obtenus par De Vahl Davis [15]. Ce dernier a traité le même problème en adoptant la méthode des différences finies avec la formulation vorticité-courant.

Les figures [III-4] et [III-5], qui représentent respectivement les lignes isothermes et isocourants déterminées par notre code de calcul ainsi que celles obtenues par De Vahl Davis [15], montrent la bonne concordance des deux résultats. Cette constatation nous a permis donc d'attester la validité de notre code de calcul. Le tableau [III-4] constitue une comparaison entre nos valeurs numériques de différents paramètres du problème et celles présentées dans les références [15] et [36].

		$Ra=10^3$	$Ra=10^4$	$Ra=10^5$
V_{\max} (sur l'axe $y = 0.5$)	*	3.6955	19.6245	68.6343
	○	3.679	19.51	68.22
	□	3.73	19.9	70.0
U_{\max} (sur l'axe $x = 0.5$)	*	3.6486	16.1681	34.7115
	○	3.634	16.2	34.81
	□	3.68	16.1	34.0
Nu_{\max} (paroi chaude)	*	1.5071	3.5362	7.8052
	○	1.50	3.53	7.71
	□	1.47	3.47	7.71
Nu_{\min} (paroi chaude)	*	0.6916	0.5863	0.7333
	○	0.692	0.586	0.729
	□	0.623	0.497	0.614
Nu_{moy} (paroi chaude)	*	1.1186	2.2489	4.5584
	○	1.12	2.243	4.52
	□	1.074	2.084	4.3

Tableau III-4 : Comparaison des valeurs numériques de différents paramètres du problème . (*)- présente étude, (○)- De Vahl Davis [15] , (□)- Manzari [36].

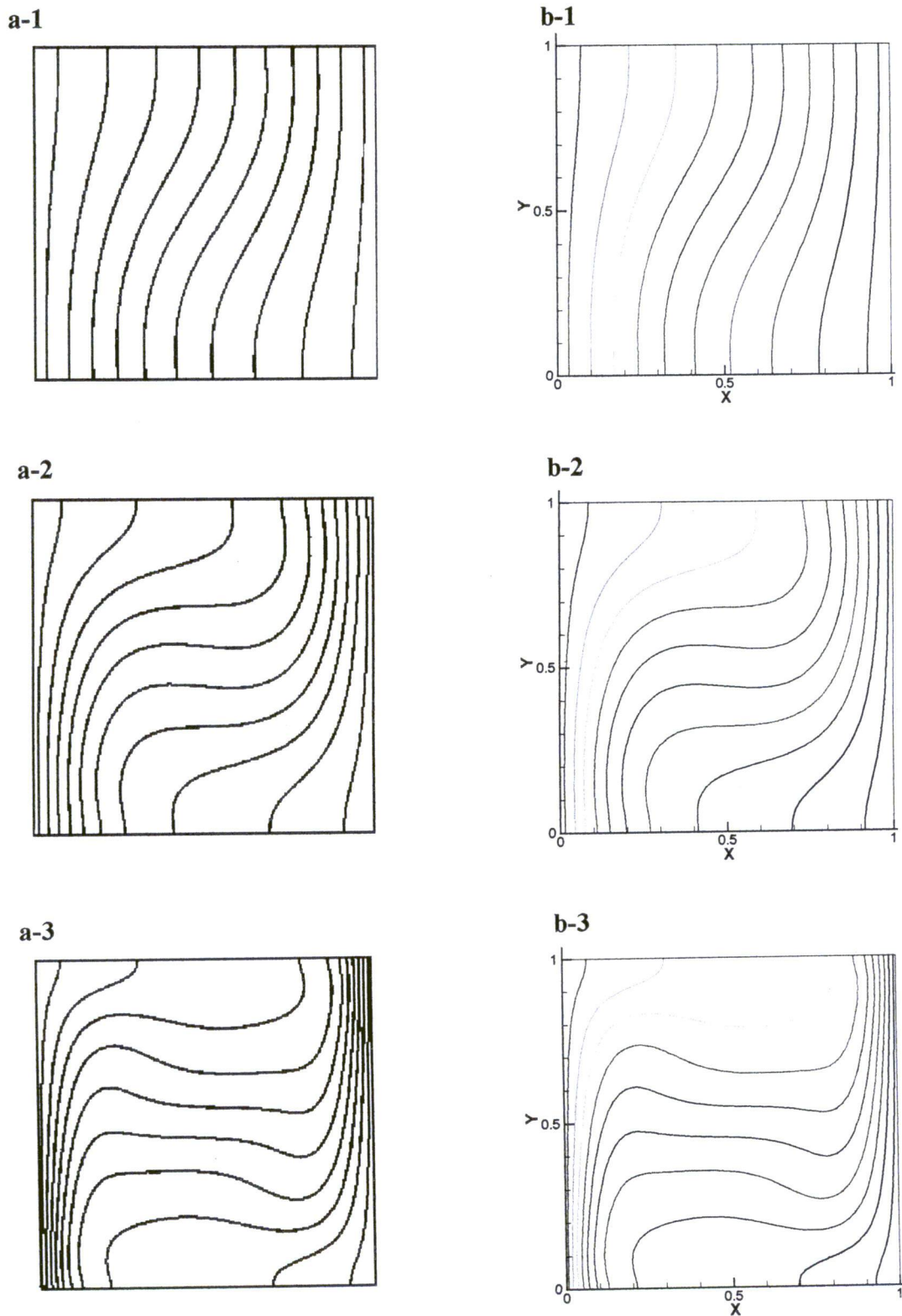


Figure III-4 : lignes isothermes (de 0.05 à 0.95 avec un pas de 0.1),
 (1) : $Ra=10^3$, (2) : $Ra=10^4$, (3) : $Ra=10^5$
 (a) : De Vahl Davis, (b) : Présente étude.

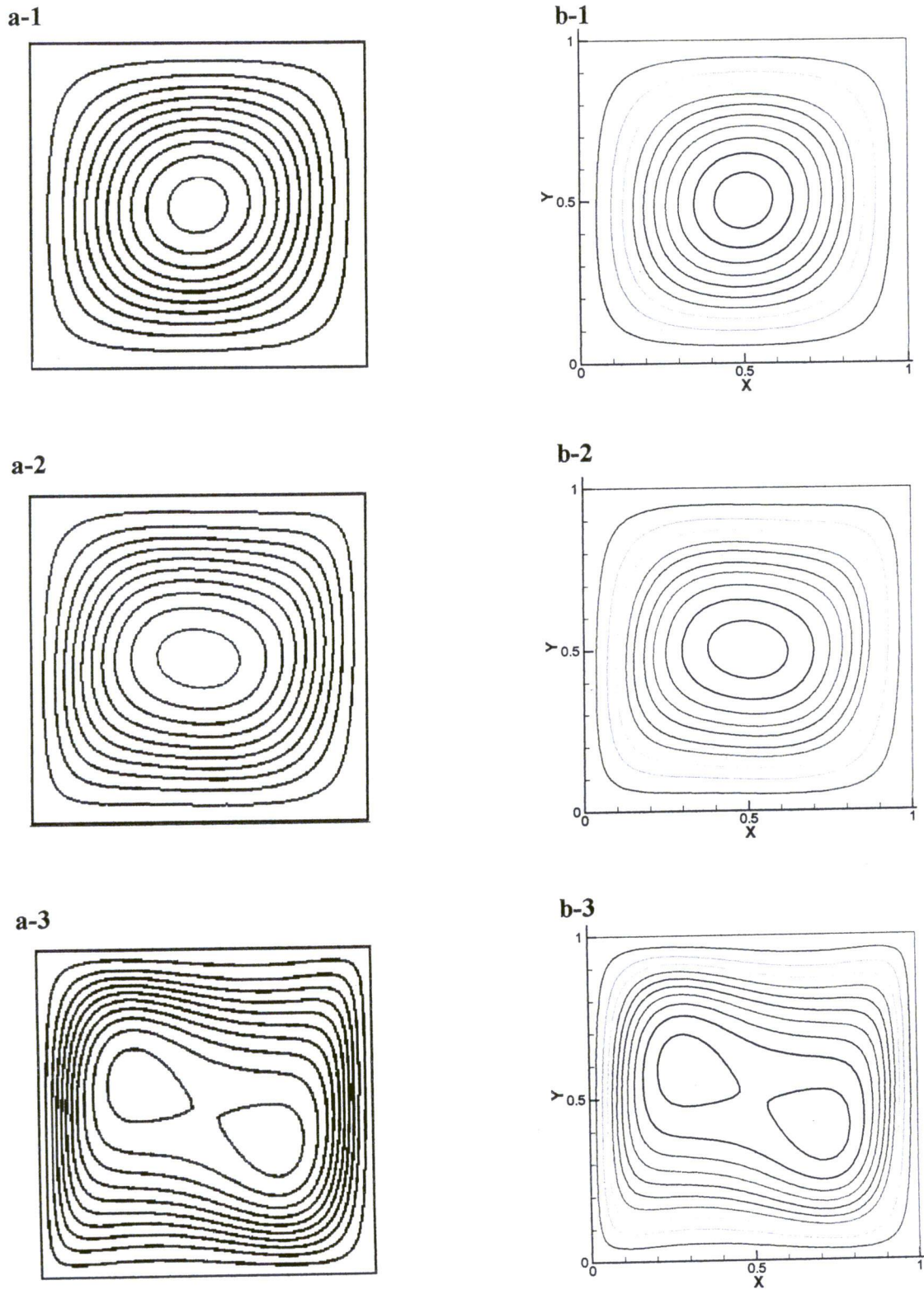


Figure III-4 : lignes isocourants . (1) : $Ra=10^3$, (2) : $Ra=10^4$, (3) : $Ra=10^5$
 (a) : De Vahl Davis, (b) : Présente étude.

CHAPITRE IV

*Ecoulement d'un fluide de Bingham entre deux
plaques planes chauffées*

IV.1 Introduction :

Le transfert thermique lors de l'écoulement laminaire d'un fluide à travers des conduits a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs vu son importance dans l'industrie et précisément dans le dimensionnement des installations thermiques. Le premier à avoir étudié ce phénomène est Graetz (1883-1885) en considérant un fluide newtonien qui s'écoule à travers une conduite cylindrique dont la paroi est chauffée à une température constante. Depuis plusieurs travaux sont venus enrichir la recherche dans cet axe constituant une variété de cas surnommés problèmes de Graetz généralisés. Ces mêmes travaux sont étendus, d'une part aux cas des fluides non-newtoniens, et d'une autre part aux conduits à section autre que circulaire.

En empruntant le même axe de recherche, on a considéré dans ce chapitre, l'écoulement d'un fluide viscoplastique (fluide de Bingham) entre deux plaques planes. Cette étude est orientée vers l'analyse de l'influence exercée par l'inertie et le comportement rhéologique du fluide sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement. L'effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution du champ thermique est également investi pour les deux cas :

- Parois maintenues à une température constante ;
- Parois soumises à un flux de chaleur uniforme.

IV.2 Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux plaques planes :

IV.2.1 Equations gouvernant le problème :

L'écoulement stationnaire, incompressible et laminaire d'un fluide de Bingham entre deux plaques planes chauffées est gouverné par :

- L'équation de continuité ;
- Les équations de mouvement ;
- L'équation de l'énergie ;
- L'équation constitutive.

La figure (IV-1) illustre le domaine physique de l'écoulement. Celui-ci présente un axe de symétrie le divisant en deux parties. Le domaine de calcul peut être ainsi réduit à l'un des sous-domaines.

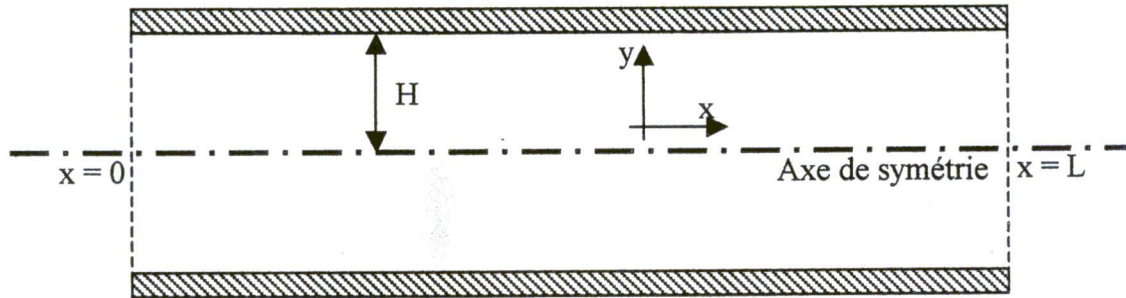


Figure (IV-1) : Domaine physique de l'écoulement

IV.2.2 Conditions aux limites :

Les conditions considérées aux limites représentées dans la figure (IV-2) sont en variables adimensionnelles :

Pour l'analyse de l'établissement hydrodynamique de l'écoulement :

- vitesse uniforme à l'entrée Γ_1 : $u=1$, $v=0$;
- condition de non glissement aux parois Γ_2 : $u=0$, $v=0$;
- profil de vitesse établi à la sortie Γ_3 : $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $v=0$;
- condition sur l'axe de symétrie Γ_4 : $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $v=0$.

Pour l'analyse de l'établissement thermique de l'écoulement ,on a considéré un écoulement établi sur l'ensemble du domaine de calcul. Pour la température on a imposé :

- Température uniforme à l'entrée Γ_1 : $\theta_{x=0}=0$;
- Température constante aux parois Γ_2 : $\theta_{y=1}=1$ ou densité de flux constante $q=1$;
- Profil de température établi à la sortie Γ_3 : $\frac{\partial \theta}{\partial x}=0$;
- Condition sur l'axe de symétrie Γ_4 : $\frac{\partial \theta}{\partial y}=0$

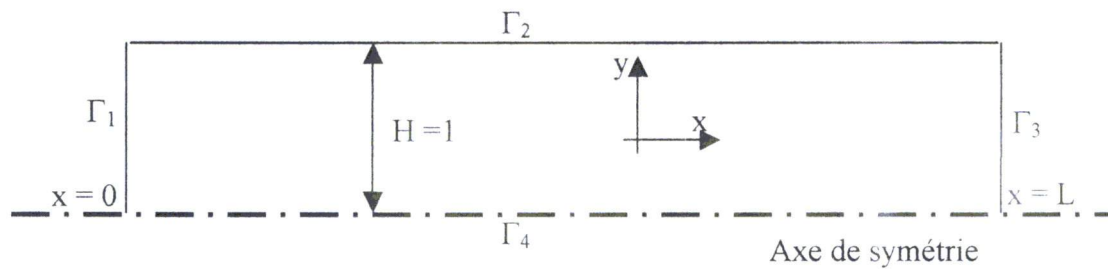


Figure (IV-2) : Domaine de calcul

Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme avec une concentration plus importante au niveau de la zone d'entrée [figure (IV-3)]. Les éléments adoptés sont quadrilatéraux et biquadratiques (9 nœuds).

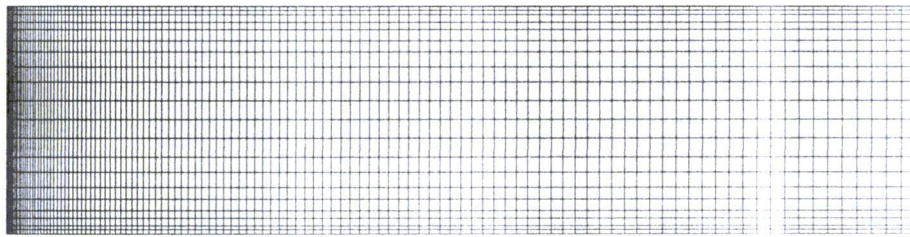


Figure (VI-3) : Maillage non-uniforme.

IV.3 Résultats et interprétations :

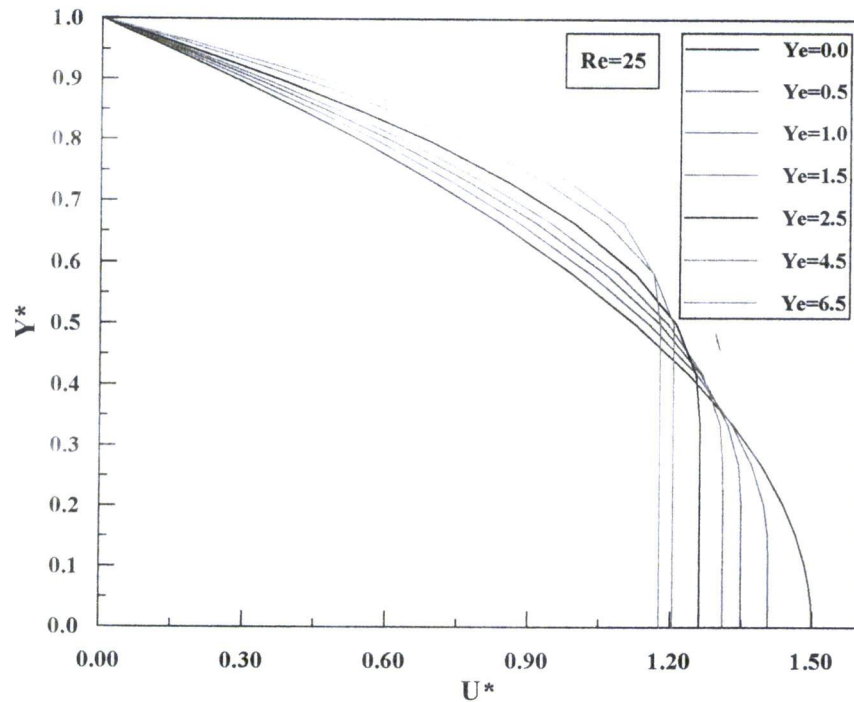
IV.3.1 Régime hydrodynamique :

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'influence exercée par l'inertie (Re) et la contrainte seuil (Ye) sur le champ de vitesse et de pression.

IV.3.1.1 Influence de la contrainte seuil sur les profils établis de la vitesse :

D'après la figure [IV-4], qui présente les profils de vitesse établis pour un $Re=25$ et différentes valeurs de Ye , on constate que, mis à part le cas de $Ye=0$, les courbes manifestent l'existence de deux zones distinctes :

- zone I : située près de la paroi et présente une distribution parabolique de la vitesse,
- zone II : située entre la première zone et l'axe de symétrie. Celle-ci présente une forme aplatie qui traduit l'uniformité de la distribution de la vitesse.



Figure[IV-4] : Profils de vitesse établis pour différentes valeurs de Ye ($Re=25$).

La zone II subit lors de l'écoulement des contraintes de cisaillement inférieures à la contrainte seuil (τ_0), ce qui fait que le fluide résiste à la déformation et ce déplace en bloc formant un bouchon. La vitesse de ce dernier diminue avec l'accroissement de la valeur de Ye , tout en manifestant de plus en plus une tendance à envahir la section d'écoulement.

Compte tenu de la conservation de masse la zone I, qui représente la partie cisailée du fluide, subit une augmentation de sa vitesse avec l'accroissement de Ye .

Le tableau [IV-1] présente la valeur maximale de la vitesse le long de la section d'écoulement pour différentes valeurs de seuil de contrainte.

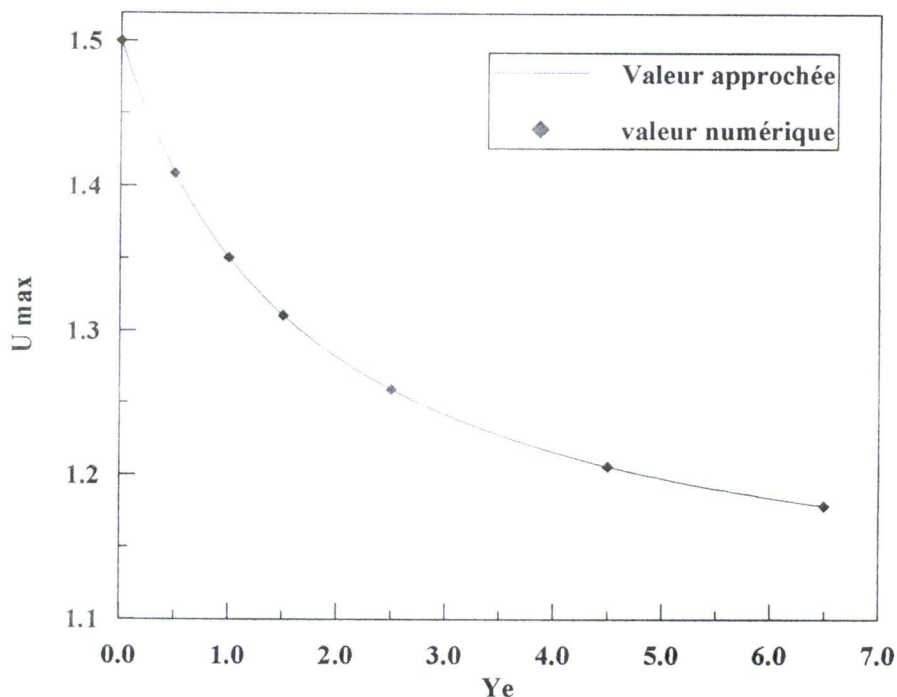
Ye	$U^* \text{ max.}$
0.0	1.4995
0.5	1.4072
1.0	1.3495
1.5	1.3108
2.5	1.2620
4.5	1.2055
6.5	1.1775

Tableau[IV-1] : Vitesse axiale maximale pour différentes valeurs de Ye ($Re=25$).

En utilisant la méthode des moindres carrés (MMC), nous avons pu corrélérer la valeur maximale de la vitesse axiale avec la valeur de la contrainte seuil par la relation suivante :

$$U_{\max} = 1.5 - \frac{Ye}{4.234 + 2.459 Ye}$$

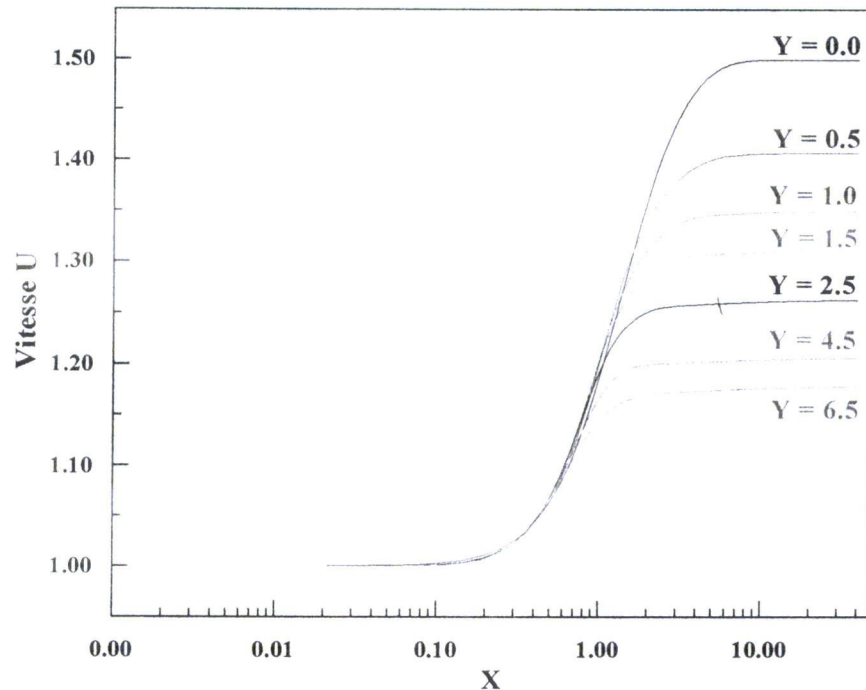
Cette corrélation donne une très bonne approximation¹ des résultats trouvés numériquement (Figure[IV-5]).



Figure[IV-5] : Vitesse axiale maximale pour différentes valeurs de Ye

IV.3.1.2 Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse axiale :

La figure [IV-6] illustre l'évolution de la vitesse sur l'axe de symétrie, d'où on déduit les abscisses correspondant à l'établissement d'un profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Ye .



Figure[IV-6] : Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de Y_e ($Re=25$).

On remarque que la longueur nécessaire à l'établissement d'un régime hydrodynamique diminue avec l'accroissement de Y_e . Ces longueurs sont illustrées dans le tableau[IV-2] pour différentes valeurs de Y_e .

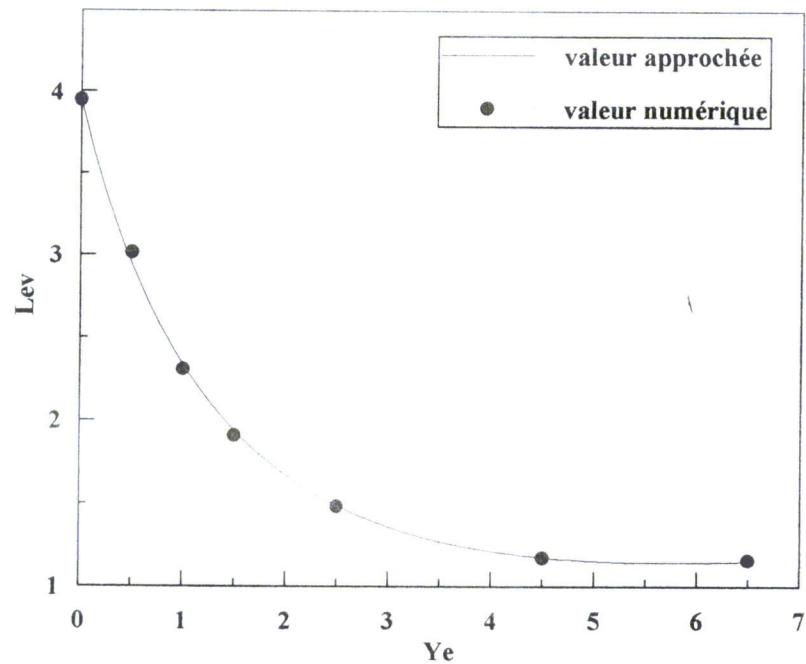
Y_e	Le_v
0.0	3.950
0.5	3.018
1.0	2.309
1.5	1.908
2.5	1.483
4.5	1.173
6.5	1.158

Tableau[IV-2] : Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Y_e ($Re=25$).

Pour ce cas de figure, nous proposons une relation qui prédit la valeur de la longueur d'établissement d'un profil invariant de vitesse en fonction de la valeur de la contrainte seuil (Y_e). Cette corrélation propre au cas d'un $Re=25$, est formulée comme suit :

$$Le_v = 3.95 - \frac{\ln(1+Y_e)}{0.376+0.053 Y_e}$$

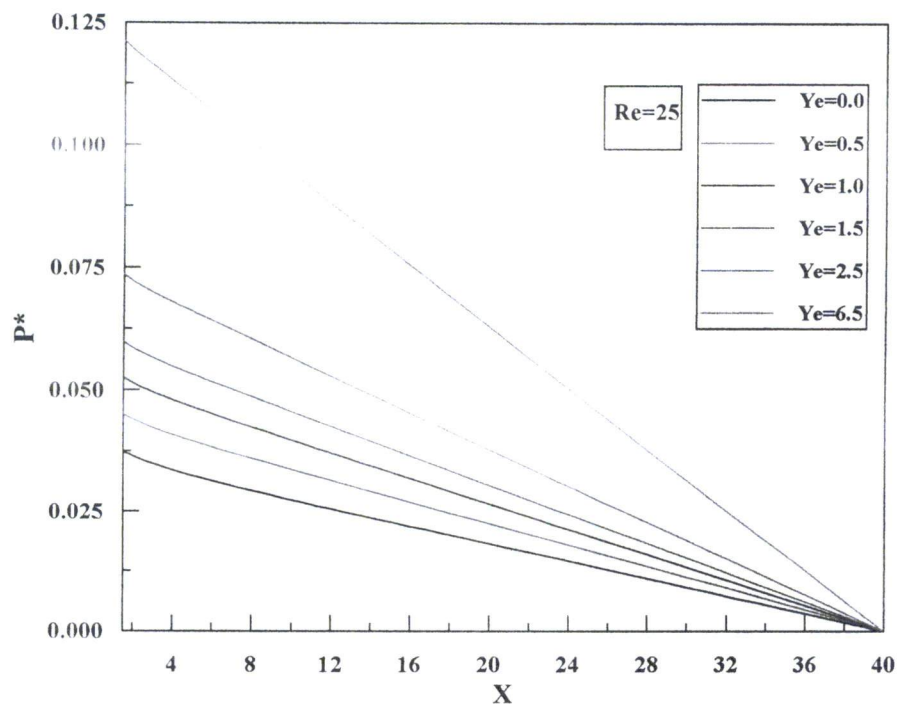
la figure [IV-7] illustre la bonne concordance entre les valeurs numériques et celles corrélées de Le_v .



Figure[IV-7] : Longueur d'établissement de la vitesse pour différents Ye ($Re=25$.)

IV.3.1.3 Influence de la contrainte seuil sur le champ de pression :

La figure[IV-8] illustre l'évolution axiale de la pression pour différentes valeurs de la contrainte seuil. L'existence d'un seuil de contrainte attribut au fluide une résistance à l'écoulement qui provoque de fortes chutes de pression. Ces chutes sont d'autant plus importantes que la valeur de Ye est élevée.



Figure[IV-8] : Evolution axiale de la pression pour différentes valeurs de Ye ($Re=25$).

le tableau[IV-3] présente des valeurs du coefficient de friction ($f Re$) pour différentes valeurs de la contrainte seuil.

Y_e	$f Re$
0	24,0160
0,5	29,9253
1	35,7629
1,5	41,4570
2,5	52,4982
6,5	94,0968

Tableau[VI-3] : Coefficients de friction sous forme de produit ($f Re$) pour différentes valeurs de Y_e .

L'évolution de la valeur du produit ($f Re$) présente une forme parabolique qui peut être exprimée par la relation :

$$f Re = 24 + 11.848 Y_e - 0.164 Y_e^2$$

Cette relation offre une bonne représentation des valeurs numériques du produit ($f Re$) déterminées dans cette présente étude (figure[VI-9]), ainsi que les valeurs présentées par Quaresma et Macêdo[47] (tableau[IV-4]).

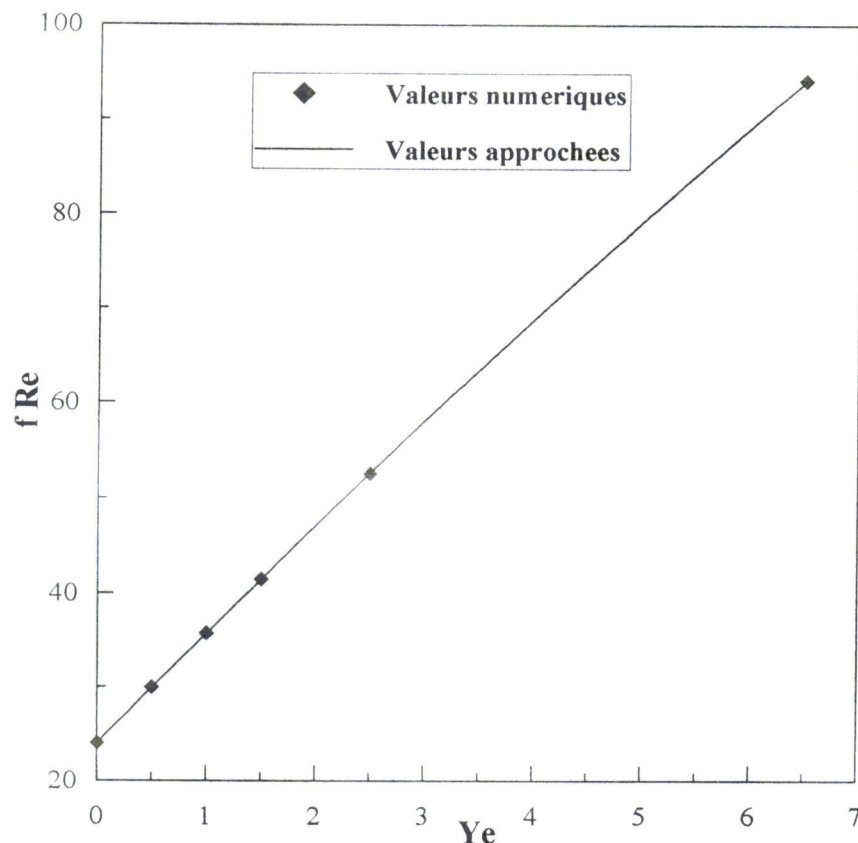


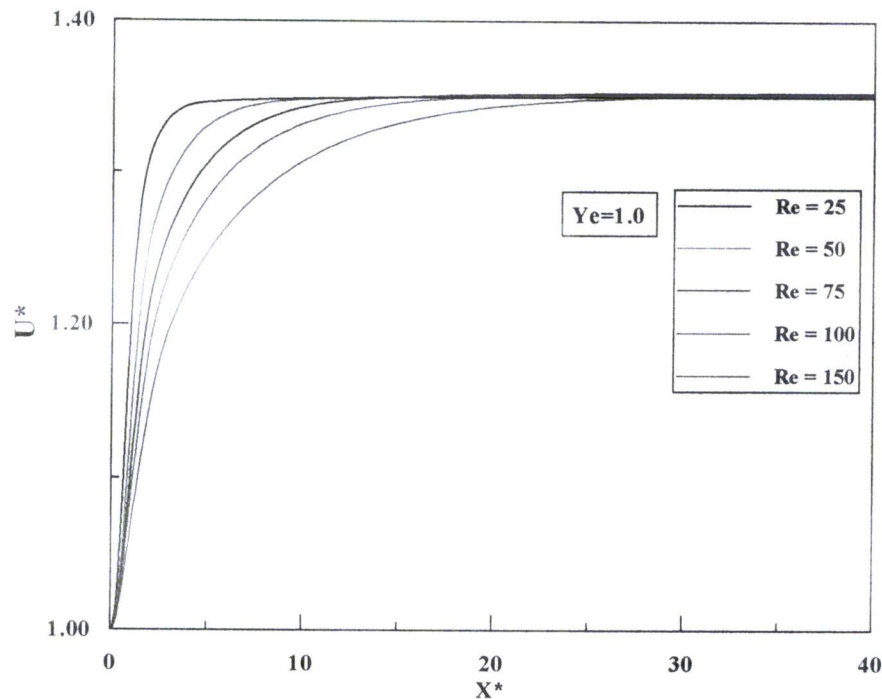
Figure [VI-9] : Coefficients de friction sous forme de produit ($f Re$) pour différentes valeurs de Y_e .

Ye	$f Re^{\square}$	$f Re^{*}$	Erreur relative (%)
0,00	24,0000	24,0000	0,00
0,25	26,9517	26,9945	0,16
1,25	38,5535	38,6656	0,29
2,50	52,5950	52,5515	0,08
5,00	79,1422	78,8535	0,37

Tableau[VI-4] : Coefficients de friction sous forme de produit ($f Re$) pour différentes valeurs de Ye . (\square) présente étude, (*) Quaresma et Macêdo

IV.3.1.4 Influence de l'inertie sur les profils de vitesse axiale :

La figure[VI-10] présente l'évolution des profils de la vitesse axiale pour différentes valeurs de Re . On constate, d'après celle-ci, que la longueur d'établissement d'un profil de vitesse invariant croît avec l'accroissement de Re .



Figure[VI-10] : Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de Re ($Ye=1.0$).

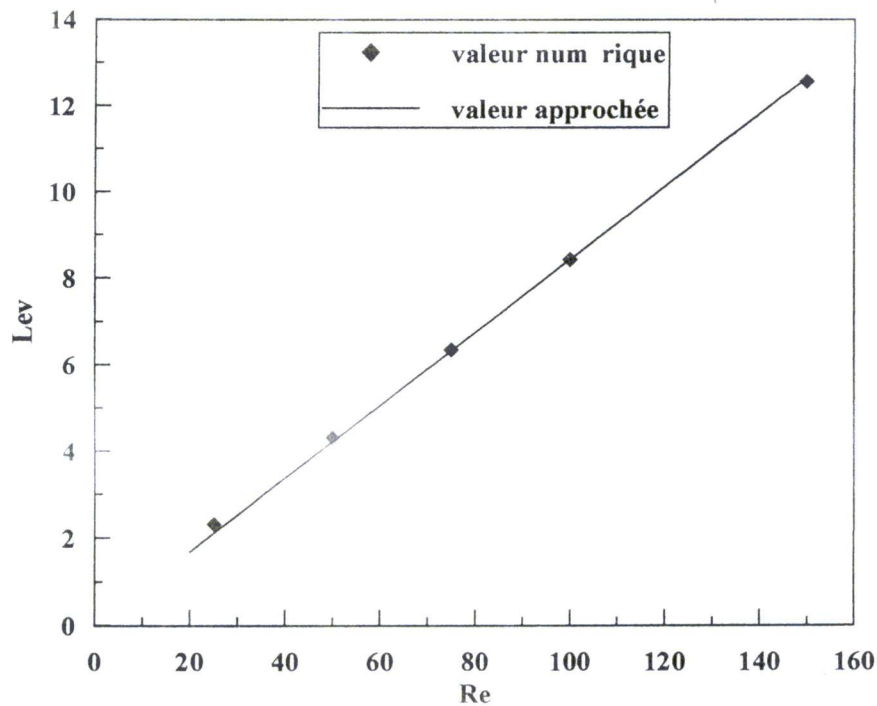
Le tableau [VI-5] illustre des longueurs d'établissement pour différents Re et $Ye=1.0$.

Re	Le_v
25	2.309
50	4.314
75	6.347
100	8.423
150	12.559

Tableau[VI-5] : Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re ($Ye=1.0$).

D'après la figure [IV-11], on constate une évolution linéaire de Le_v en fonction de Re . Une évolution qu'on peut traduire par la relation suivante qui est propre au cas d'un $Ye=1$:

$$Le_v = 0.0843 Re$$



Figure[IV-11] : Longueur d'établissement d'un profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re et $Ye=1$.

IV.3.1.5 Influence simultanée de la contrainte seuil et l'inertie sur la longueur d'établissement :

Le tableau [IV-6] présente l'évolution de la longueur d'établissement d'un profil de vitesses invariant en fonction de la contrainte seuil pour différentes valeurs de Re . On note donc, que l'accroissement de Re provoque un allongement de longueur d'établissement, un effet qui est sensiblement amorti par l'existence d'un seuil de contrainte.

Ye \ Re	25	50	75	100	150
0.0	3.950	7.524	11.074	14.619	21.638
0.5	3.018	5.793	8.509	11.265	16.776
1.0	2.309	4.134	6.347	8.423	12.559
1.5	1.908	3.402	5.005	3.641	9.913
2.5	1.483	2.381	3.452	4.557	6.778
4.5	1.173	1.532	2.004	2.565	3.728
6.5	1.158	1.349	1.589	1.896	2.685

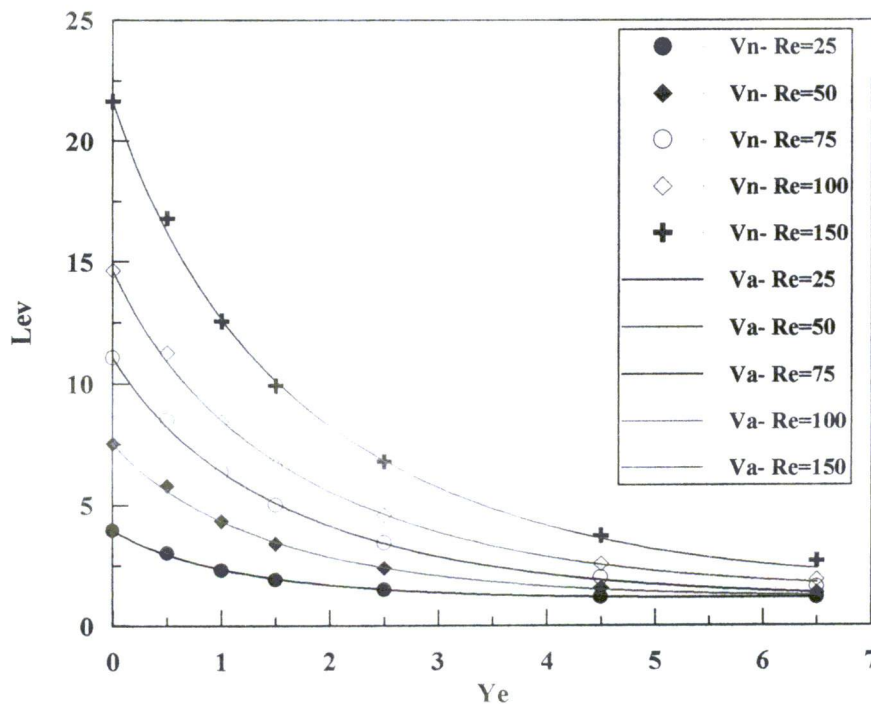
Tableau[IV-6] : Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re et de Ye.

Puisque la longueur d'établissement est influencée simultanément par l'inertie et le seuil de contrainte, nous proposons une relation qui prédit la valeur de Le_v en fonction de Re et Ye. Cette relation est formulée comme suit :

$$Le_v = a - \frac{\ln(1 + Ye)}{b + c \cdot Ye}$$

avec : $a = 0.1458 Re$; $b = 7.2655 Re^{-0.9209}$; $c = 3.502 Re^{-1.32}$

La figure [IV-12] illustre la bonne concordance entre les valeurs de Le_v déterminées numériquement et celles calculées à partir de la relation proposée ci-dessus :



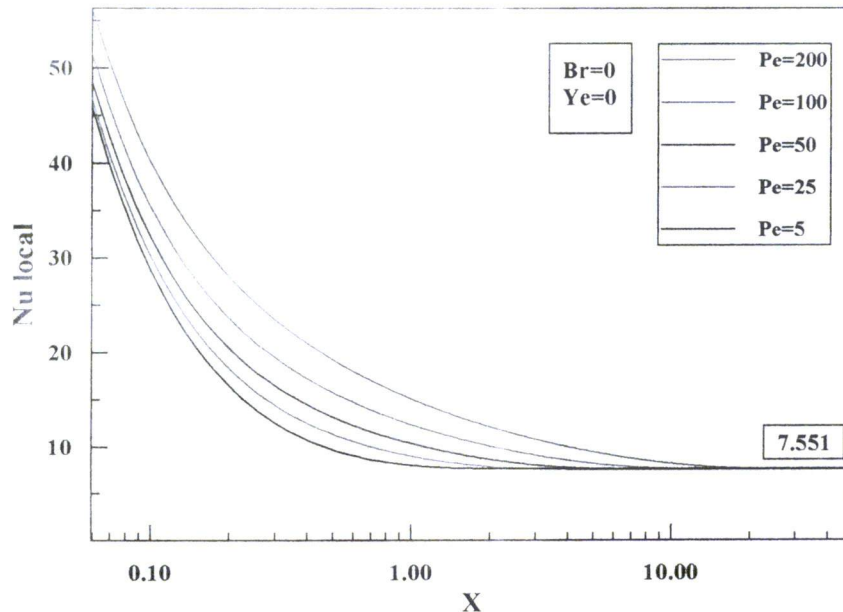
Figure[IV-12] : Longueur d'établissement d'un profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re et de Ye.

IV.3.2 Régime thermique :

Dans ce paragraphe, nous analyserons l'influence de nombre de Peclet, de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'évolution du champ thermique, tout en tenant compte de la conduction axiale du fluide, négligé jusqu'à la par la majorité des auteurs.

IV.3.2.1 Température imposée à la paroi :**IV.3.2.1.1 Influence de Peclet sur l'intensité de l'échange thermique :**

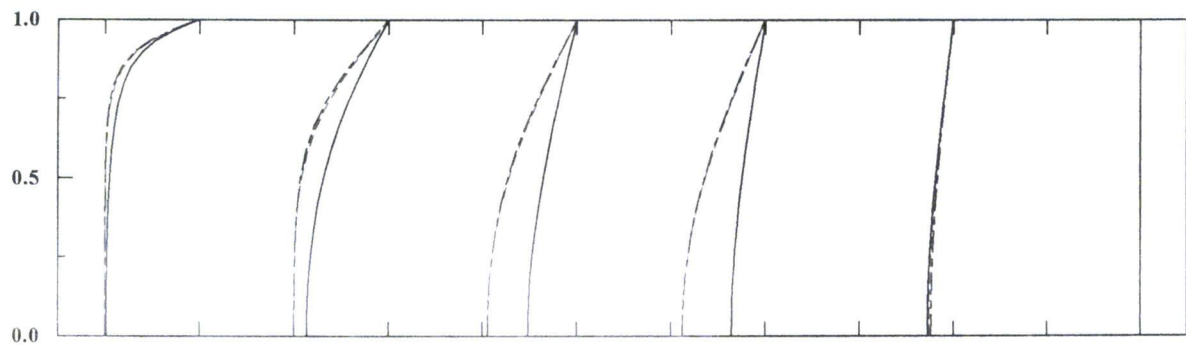
L'évolution de la valeur de Nusselt à la paroi est représentée dans la figure[IV-13] pour différentes valeurs de Pe. Les courbes présentent toutes le même aspect, une diminution aiguë localisée au niveau de la zone d'entrée, et une tendance vers une valeur limite qui traduit un établissement d'un régime thermique. Nous remarquons que l'influence de la valeur de Pe n'est ressentie qu'au niveau de la zone d'entrée, où l'accroissement de Pe provoque une intensification de l'échange thermique et un prolongement de la zone en question. La valeur de Nu établi par contre, reste insensible aux variations de Pe.



Figure[IV-13] : Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Peclet ($Br=0$, $Ye=0$).

IV.3.2.1.2 Influence de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique :

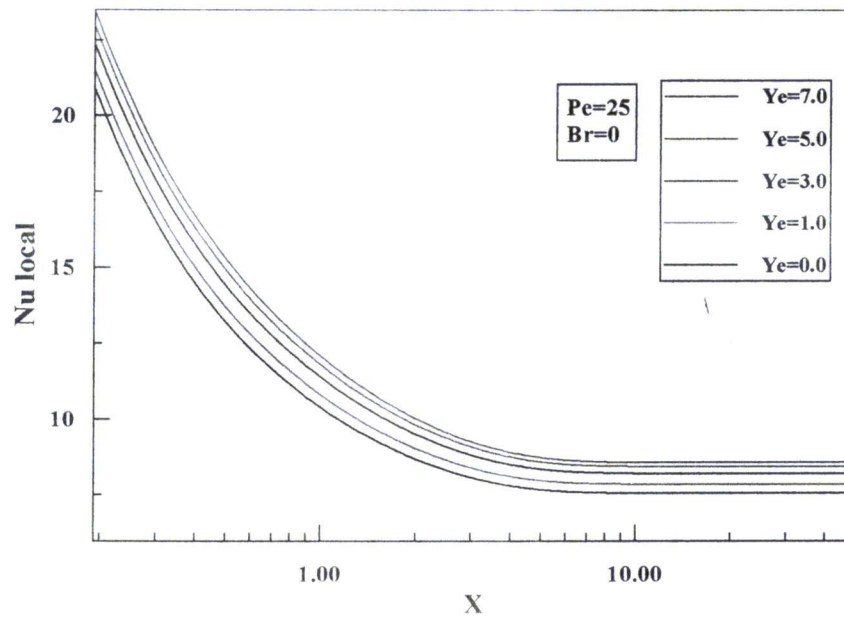
Comme il a déjà été consenti, la contrainte seuil est à l'origine de la diminution de la vitesse de l'écoulement de la zone non cisailée. Cette diminution engendre en contre partie, pour raison de la conservation de masse, une augmentation de la vitesse de la couche fluide en contact avec la paroi, impliquant ainsi une intensification de l'échange de chaleur.



Figure[IV-14] : Profils de température pour $Br=0$, $Pe=25$ et $Ye=0.0 ; 1.5 ; 6.5$ respectivement aux positions $X^*=0.078 ; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001 ;$ et 50

La figure [IV-14] illustre l'évolution du profil de température pour un Ye de $0, 1.5$ et 6.5 . nous remarquons explicitement le retard causé par la contrainte seuil dans l'établissement d'un régime thermique invariant. Ce dernier correspond à l'égalité entre la température du fluide et celle de la paroi, du moment que l'effet de la dissipation visqueuse est négligé.

L'intensité de l'échange thermique est représentée dans la figure[IV-15] où les tracés de l'évolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Ye , montrent une légère augmentation localisée au niveau des deux zones, à savoir, la zone d'entrée et celle de l'établissement du régime thermique.



Figure[IV-15] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Ye ($Br=0$, $Pe=25$).

Les valeurs de Nusselt établi pour différentes valeurs de la contrainte seuil sont représentées dans le tableau [IV-7-a].

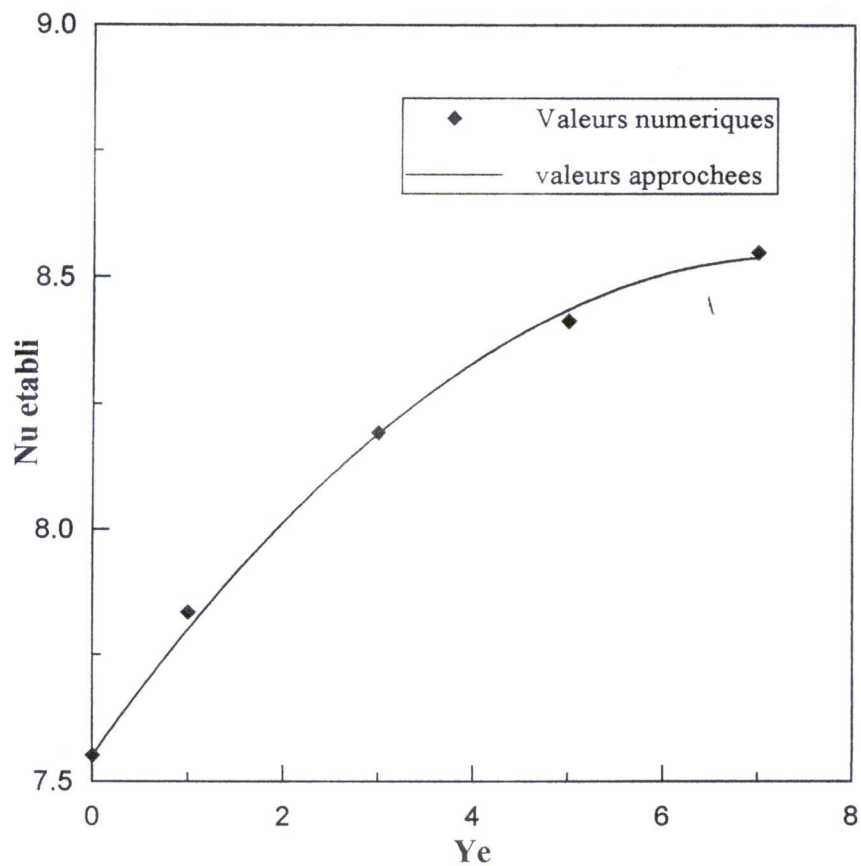
Ye	Nu_{∞}
0.0	7.551
1.0	7.835
3.0	8.193
5.0	8.413
7.0	8.548

Tableau[IV-7-a] :Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye et $Br=0$

L'évolution de Nu_{∞} en fonction de la valeur de la contrainte seuil peut être prédite par la relation :

$$Nu_{\infty} = 7.551 + 0.268 Ye - 0.018 Ye^2$$

Cette relation offre une bonne approximation des valeurs de Nu_{∞} déterminées numériquement dans cette présente étude (figure[IV-16]) et celles proposées par Lin et Shah [32] avec un pourcentage d'erreur relative qui n'excède pas 0.5% (tableau [IV-7-b]).



Figure[IV-16] : Evolution des valeurs du Nusselt établi en fonction des valeurs de Ye (température imposée aux paroi) .

Température imposée aux parois			
Ye	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^*	Erreur relative (%)
0	7,551	7,541	0,13
0,25	7,617	7,619	0,03
1,25	7,857	7,884	0,34
2,5	8,107	8,115	0,10
5	8,436	8,401	0,42

Tableau[IV-7-b] : Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye .(\square) présente étude, (*) Lin et Shah

IV.3.2.1.3 Influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :

Les figures [IV-17] et [IV-18] présentent l'évolution des profils de température suivant l'axe de symétrie, respectivement dans le cas du réchauffage ($Br > 0$) et de refroidissement ($Br < 0$) d'un fluide newtonien.

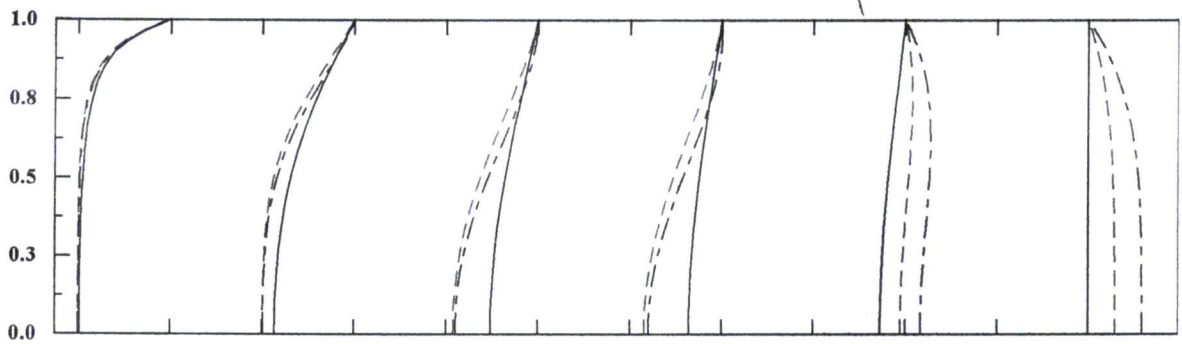


Figure [IV-17] : Profils de température pour $Ye=0$, $Pe=25$ et $Br=0.0 ; 0.4 ; 0.8$ respectivement aux positions $X^*=0.078 ; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001$; et 50

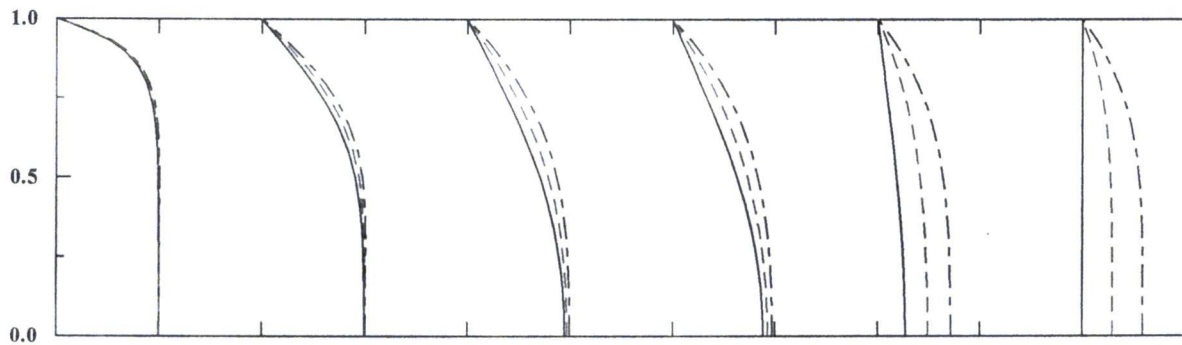
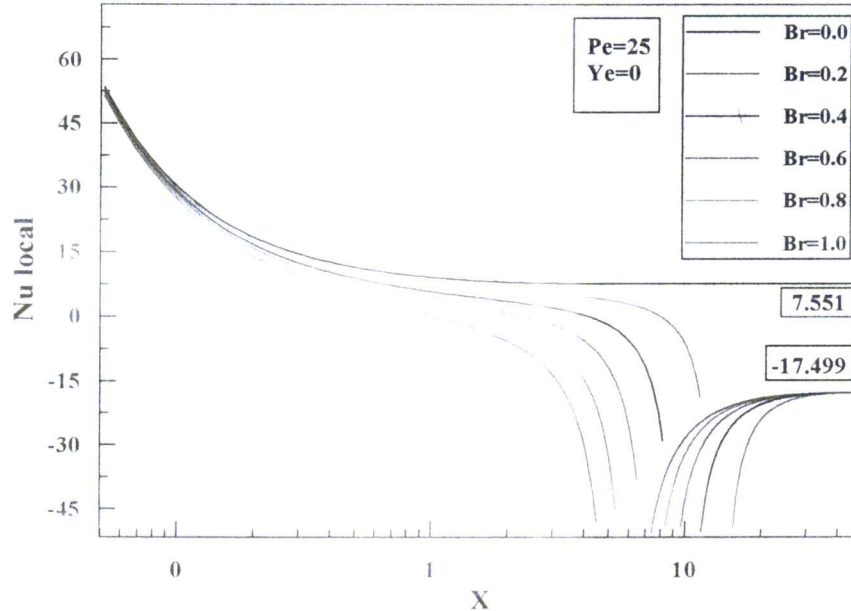


Figure [IV-18] : Profils de température pour $Ye=0$, $Pe=25$ et $Br=0.0 ; -0.4 ; -0.8$ respectivement aux positions $X^*=0.078 ; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001$; et 50

On remarque, pour le cas d'un réchauffage, que les profils de température pour lesquels on a considéré l'effet de la dissipation visqueuse, manifestent un retard dans leurs évolutions par rapport aux profils dont le Br est nul. Ce retard est ressenti fortement à partir du moment où la température de la couche fluide en contact avec la paroi approche celle de cette dernière.

Cette couche fluide caractérisée par ces fortes valeurs de taux de cisaillement, donc d'un apport de chaleur par frottement aussi important, constitue une contrainte freinant la pénétration du flux thermique vers les sous-couches fluides internes, d'où la diminution de l'intensité de l'échange thermique.

Lorsque la température de ce film dépasse celle de la paroi, le flux de chaleur change de direction et le fluide se met à réchauffer la paroi, d'où les valeurs négatives de Nusselt dans la figure [IV-19].

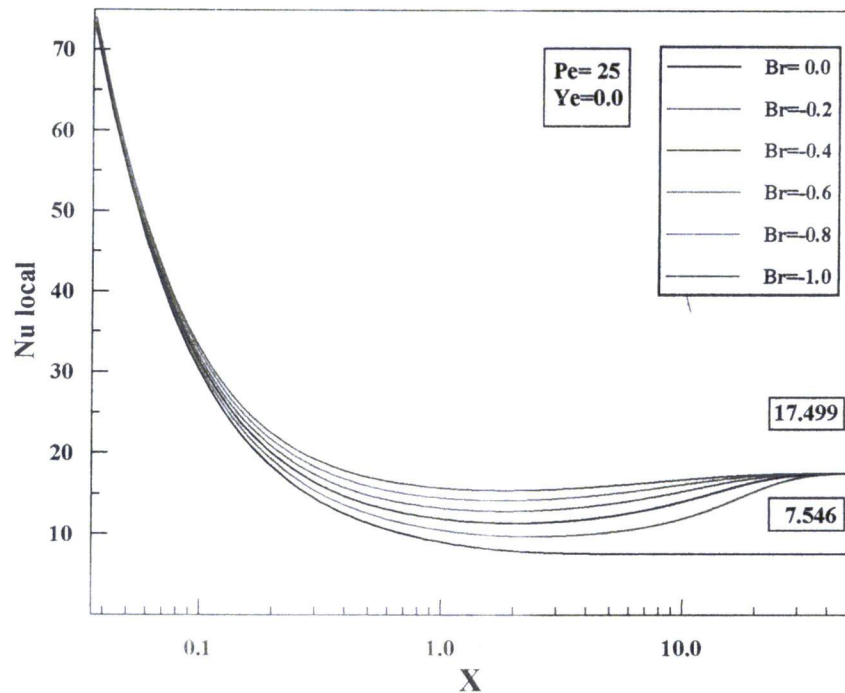


Figure[IV-19] : Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br > 0$ ($Ye=0$, $Pe=25$).

Les courbes représentatives de l'évolution de Nusselt local présentent une discontinuité qui survient lorsque la température moyenne du fluide égale celle de la paroi, causant ainsi un état d'indétermination dans la formule (III-50). Lorsque le régime thermique s'établit, le Nu atteint sa valeur limite qui est de -17.499 .

Dans le cas d'un refroidissement (figure [IV-18]) l'apport de chaleur par effet de frottement fait que les profils de température pour $Br \neq 0$ devancent dans leurs évolutions ceux dont on a négligé l'effet de la dissipation visqueuse ($Br = 0$). L'échange de chaleur devient alors plus intense, qui est une conséquence directe de l'accroissement de l'écart de température entre le fluide et la paroi.

La figure [IV-20] illustre la variation de l'intensité de l'échange thermique fluide-paroi, dans on note la tendance des tracés de Nu_{local} vers une valeur limite (17.499), traduisant l'établissement d'un régime thermique.

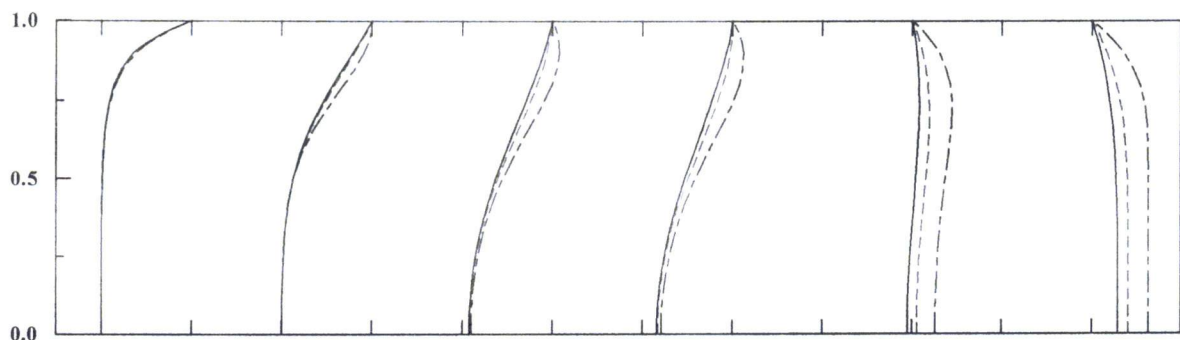


Figure[IV-20] :Evolution de Nusselt local pour des valeurs de $Br < 0$ ($Ye=0$, $Pe=25$).

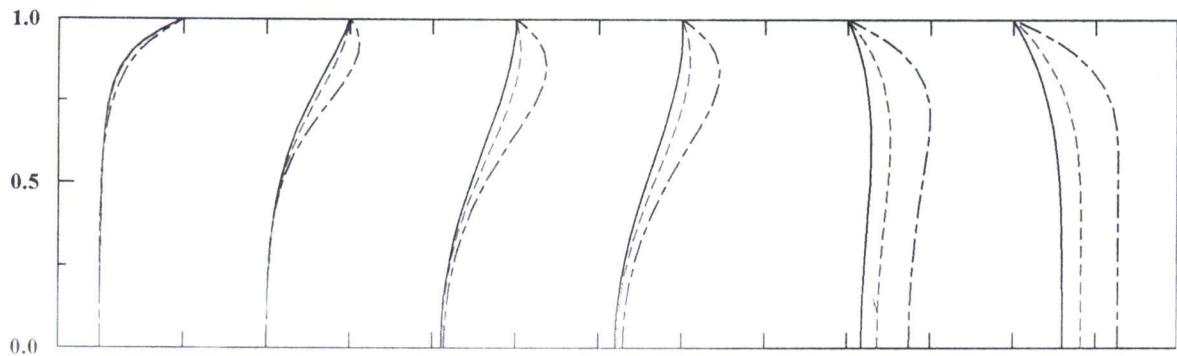
IV.3.2.1.4 Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :

Comme il a déjà été vu, la contrainte seuil engendre des taux de déformation $[\dot{\gamma}]$ très importants dans la zone cisailée qui se situe près de la paroi, et qui sont à l'origine de l'auto réchauffage du fluide par effet de la dissipation visqueuse. Il est donc clair, que ce dernier sera sensiblement influencé par l'accroissement de Ye .

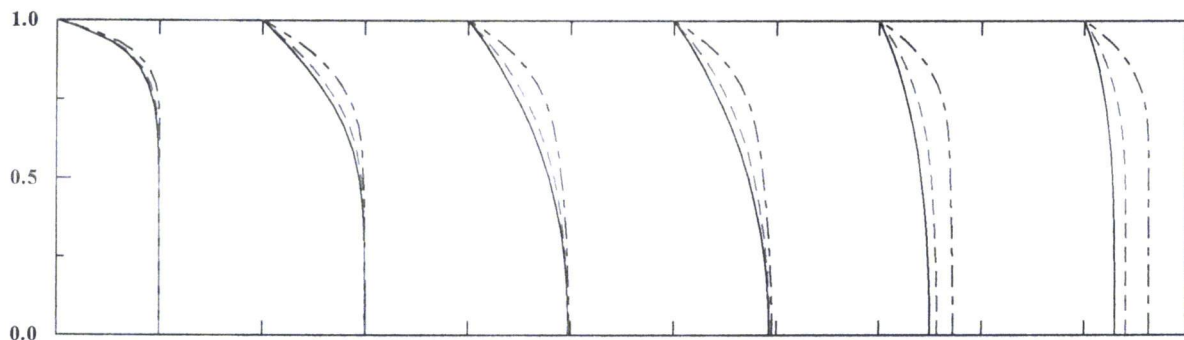
Les figures [IV-21(a,b)]et[IV-22(a,b)] représentent l'évolution des profils de température pour des valeurs non nul de Ye et Br , respectivement dans le cas d'un réchauffage et d'un refroidissement.



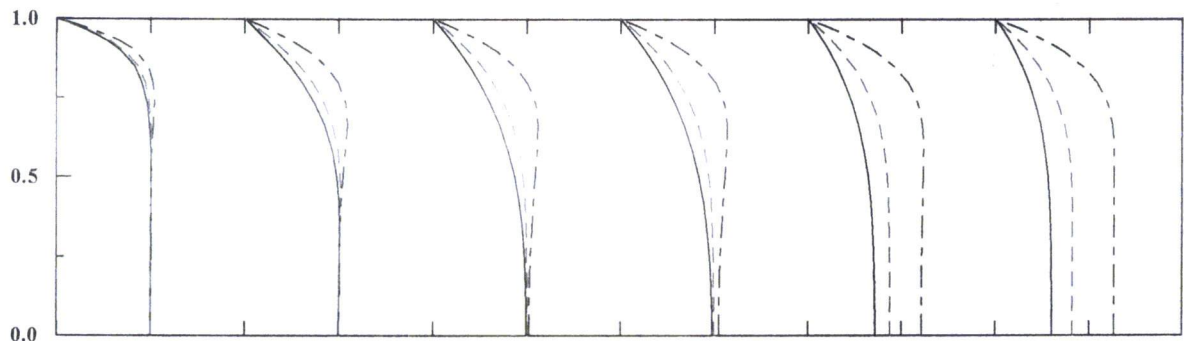
Figure[IV-21-a] :Profils de température pour $Pe=25$, $Br=0.4$ et $Ye=0.0$; 1.5; 6.5 respectivement aux positions $X^*=0.078$; 0.4112; 1.3961; 10.001; et 50



Figure[IV-21-b] : Profils de température pour $Pe=25$, $Br=0.8$ et $Ye=0.0$; 1.5 ; 6.5 respectivement aux positions $X^*=0.078$; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001 ; et 50

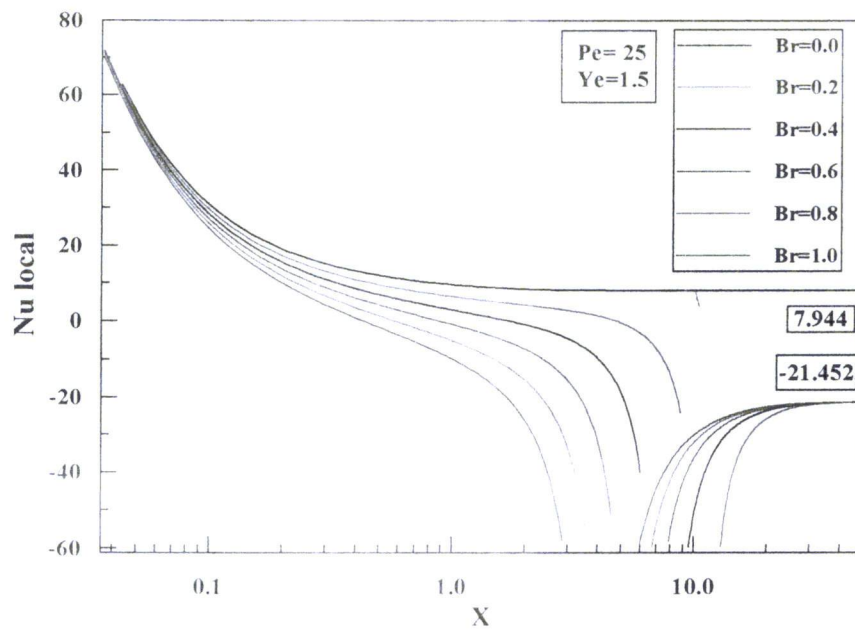


Figure[IV-22-a] : Profils de température pour $Pe=25$, $Br=-0.4$ et $Ye=0.0$; 1.5 ; 6.5 respectivement aux positions $X^*=0.078$; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001 ; et 50

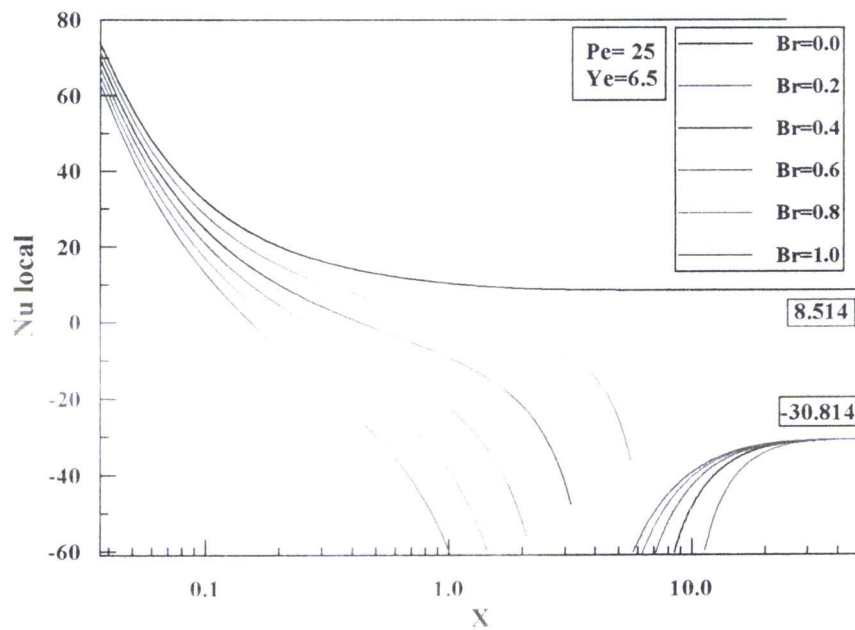


Figure[IV-22-b] : Profils de température pour $Pe=25$, $Br=-0.8$ et $Ye=0.0$; 1.5 ; 6.5 respectivement aux positions $X^*=0.078$; 0.4112 ; 1.3961 ; 10.001 ; et 50

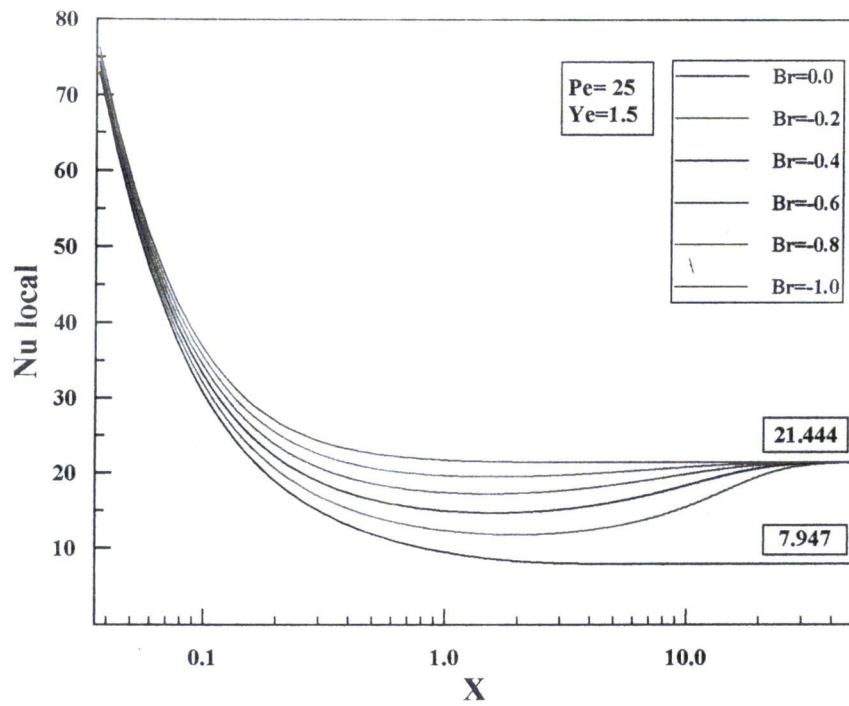
Ces courbes peuvent être interprétées d'une façon similaire que celles obtenues en considérant le cas d'un fluide newtonien, du moment qu'elles présentent un même allure, tout en soulignant l'effet accentué de la dissipation visqueuse causé par la contrainte seuil. Ceci est nettement explicite en analysant l'évolution de Nu local représentée dans les figures [IV-23(a,b)] et [IV-24(a,b)].



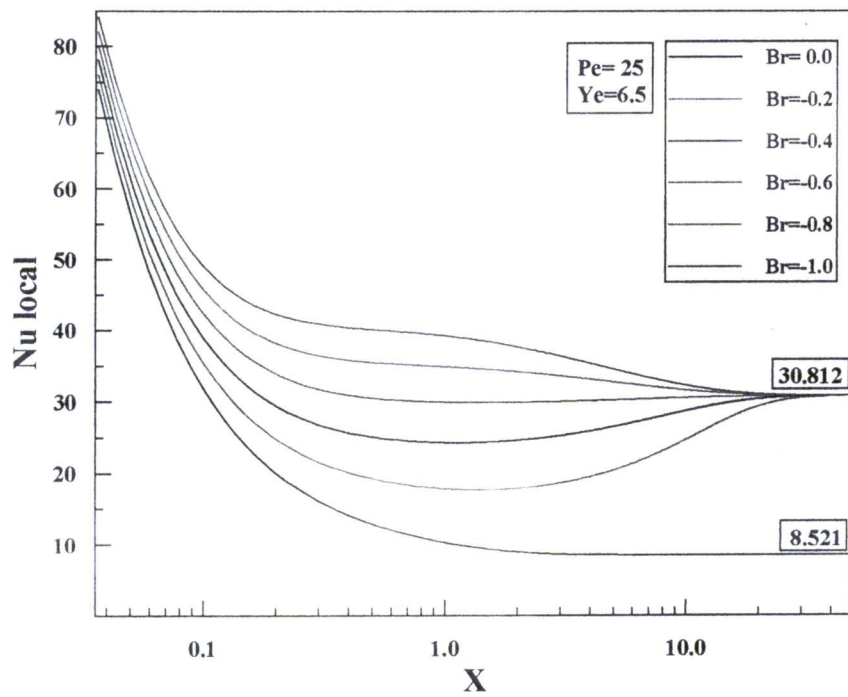
Figure[IV-23-a] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br > 0$, $Pe=25$ et $Ye=1.5$.



Figure[IV-23-b] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br > 0$, $Pe=25$ et $Ye=6.5$.



Figure[IV-24-a] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br < 0$, $Pe=25$ et $Ye=1.5$.



Figure[IV-24-b] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br < 0$, $Pe=25$ et $Ye=6.5$.

Des valeurs de Nusselt limite pour différents seuils, dans le cas où on tient compte de l'effet de la dissipation visqueuse, sont illustrées dans le tableau [IV-8].

Ye	$[Nu_{\infty}]$
0.0	17.499
1.0	17.515
3.0	20.187
5.0	28.588
7.0	31.575

Tableau[IV-8] : Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye et $Br \neq 0$

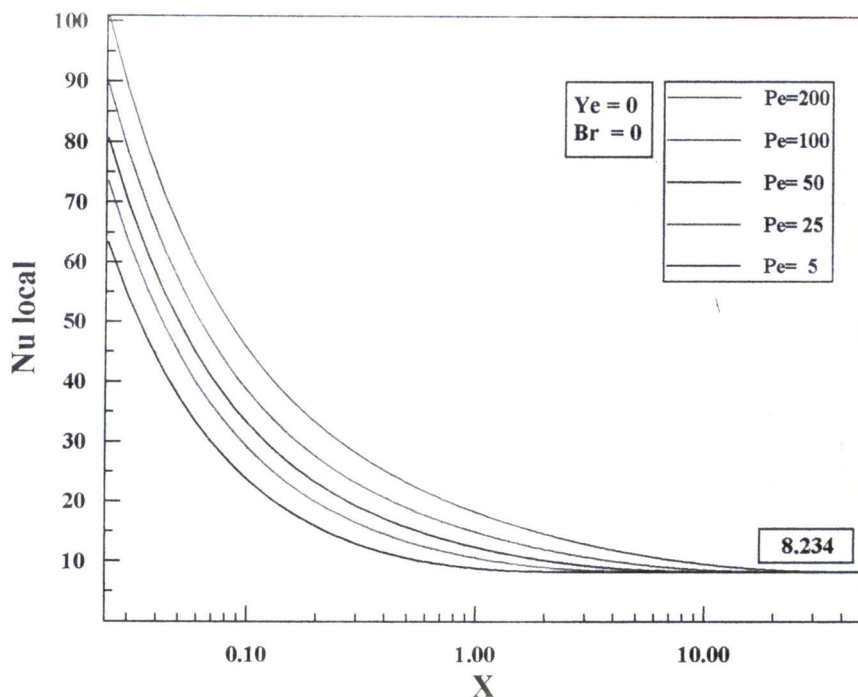
IV.3.2.2 Flux imposé à la paroi :

Dans ce paragraphe nous nous intéresserons à l'influence de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur le transfert de chaleur, dans le cas d'un flux imposé à la paroi. Ce cas de figure représente le principe de fonctionnement de la grande partie des installations thermiques rencontrées dans l'industrie dont on cite en guise d'exemple, les réchauffeurs à bain d'eau , le système de refroidissement des réacteurs nucléaires... .

IV.3.2.2.1 Influence de Peclet sur l'intensité de l'échange thermique :

La figure [IV-25] comporte les tracés de Nusselt local pour différentes valeurs de Pe . identiquement au cas d'une température imposée à la paroi, l'accroissement de Pe n'influe que sur la zone d'entrée, où il provoque une intensification de l'échange thermique entre le fluide et la paroi, et un accroissement de l'abscisse correspondant au début de la zone du régime thermique établi.

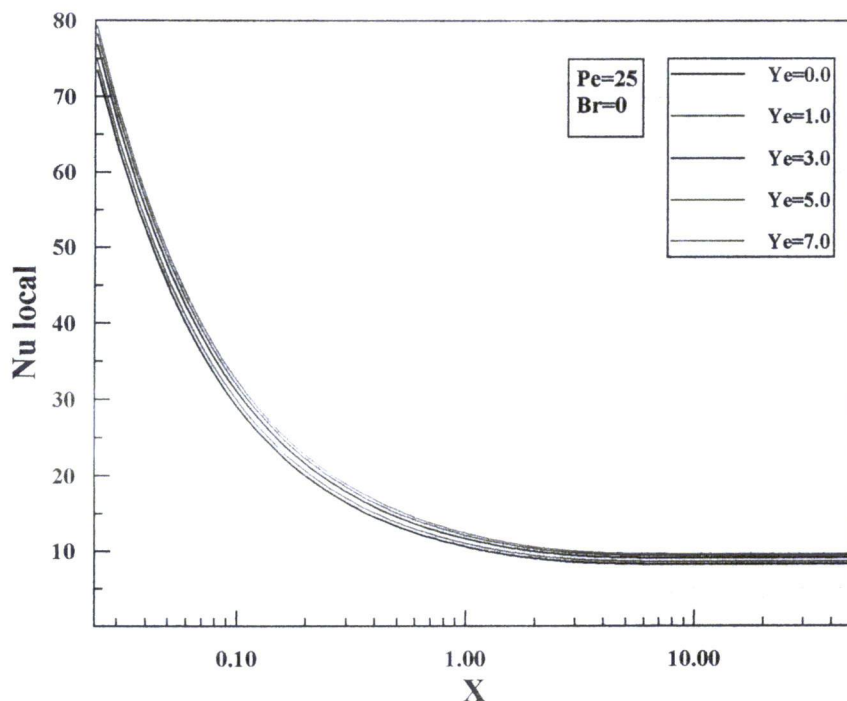
La valeur de Nusselt établi pour ce cas, où on a considéré un fluide newtonien ($Ye=0$) et négligé l'effet de dissipation visqueuse ($Br=0$), est de 8.234 qui donne un bon agrément avec la valeur trouvée numériquement par Lin et Shah [32], qui est de 8.239.



Figure[IV-25] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Peclet ($Br=0$, $Ye=0$)

IV.3.2.2.2 Influence de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique :

L'analyse de l'évolution des courbes de Nusselt local représentées pour différentes valeurs de la contrainte seuil et un Br nul (figure[IV-26]), montre que l'effet de ces dernières est minime sur l'intensité de l'échange thermique.



Figure[IV-26] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Ye ($Br=0$, $Pe=25$).

Le tableau (IV-9) illustre les valeurs de Nu établi pour différentes valeurs de la contrainte seuil.

Ye	Nu_{∞}
0.0	8.234
1.0	8.591
3.0	9.064
5.0	9.372
7.0	9.576

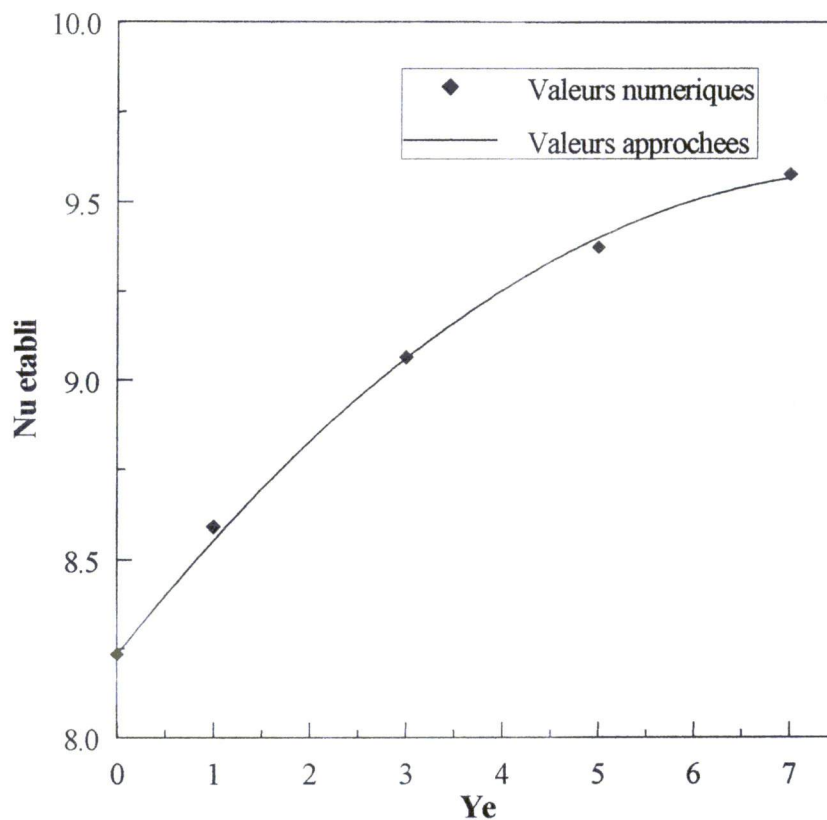
Tableau[IV-9] : Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye et $Br=0$

Les valeurs de Nu_{∞} pour le cas d'un flux imposée aux parois présentent une évolution parabolique en fonction des valeurs de la contrainte seuil (figure[IV-27]).

Cette évolution est exprimée par la relation :

$$Nu_{\infty} = 8.234 + 0.3401 Ye - 0.0214 Ye^2$$

Qui donne une bonne représentation de nos valeurs numériques, comme elle offre un bon agrément avec les résultats proposés par Lin et Shah [32] pour ce cas de figure (tableau[IV-10]).



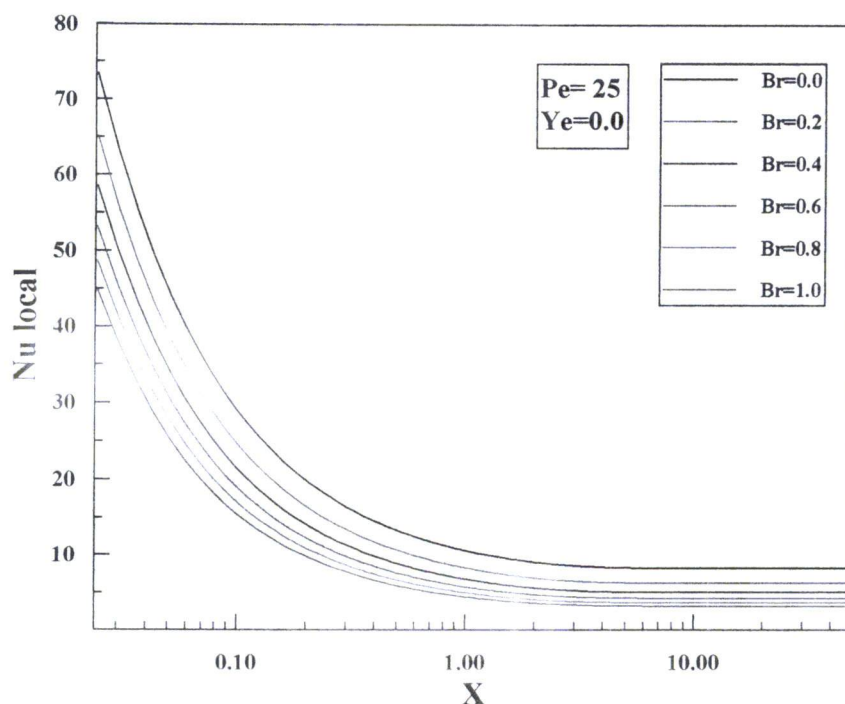
Figure[IV-27] : Evolution des valeurs du Nusselt établi en fonction des valeurs de Ye (Flux imposé aux paroi).

Flux imposé aux parois			
Ye	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^*	Erreur relative (%)
0	8,234	8,239	0,06
0,25	8,318	8,335	0,21
1,25	8,626	8,666	0,47
2,5	8,950	8,966	0,18
5	9,398	9,357	0,44

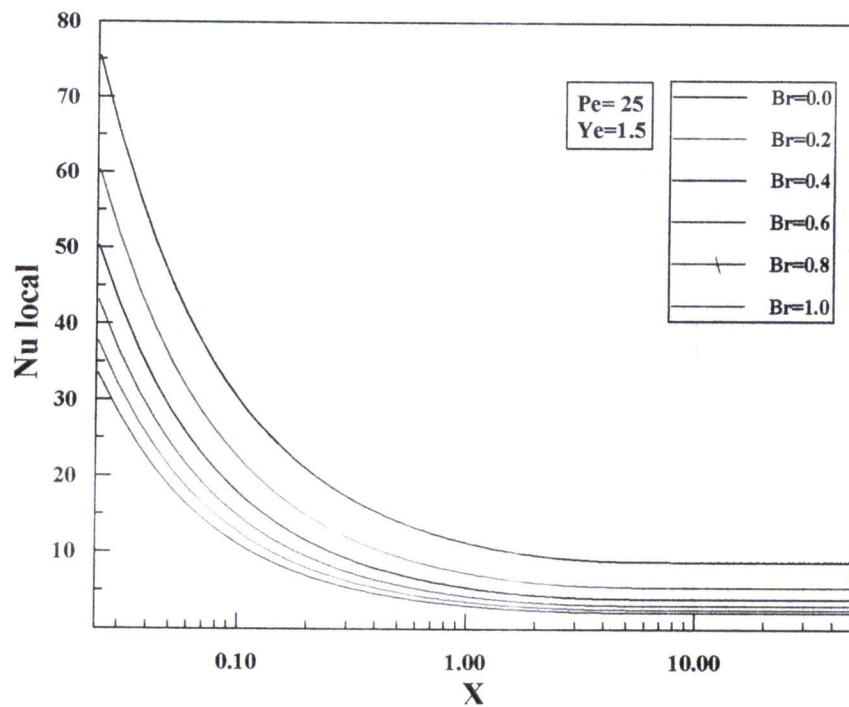
Tableau[IV-10] : Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye. (\square) présente étude, (*) Lin et Shah

IV.3.2.2.3 Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :

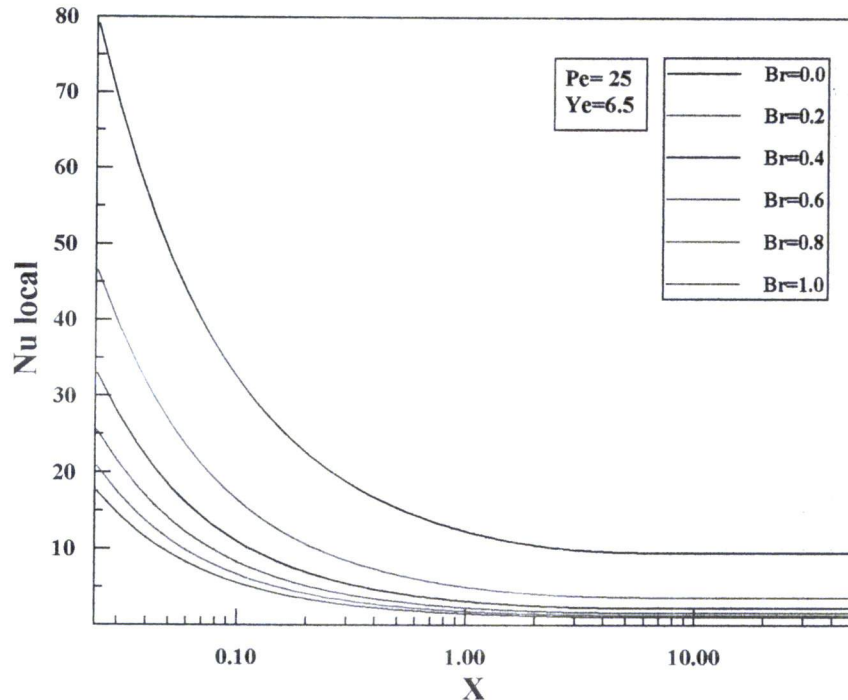
L'auto réchauffage du fluide par effet de frottement lors de son écoulement provoque une diminution de l'intensité de l'échange thermique dans la zone d'entrée et celle du régime thermiquement établi (figure[IV-28]). Cette diminution est amplifiée par la contrainte seuil, du moment qu'elle accentue l'effet de la dissipation visqueuse (figure[IV-29], figure[IV-30]).



Figure[IV-28] : Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Br ($Ye=0$, $Pe=25$).



Figure[IV-29] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Br (Ye=0 ,Pe=25).



Figure[IV-30] :Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Br (Ye=6.5 , Pe=25).

On remarque que, différemment du cas d'une température imposée à la paroi, la valeur de Nu établi décroît avec l'accroissement de Br et de Ye qui résulte de la diminution de l'écart de température entre le fluide et la paroi. Le tableau [IV-11] présente des valeurs de Nu établi pour différentes valeurs de Br et Ye .

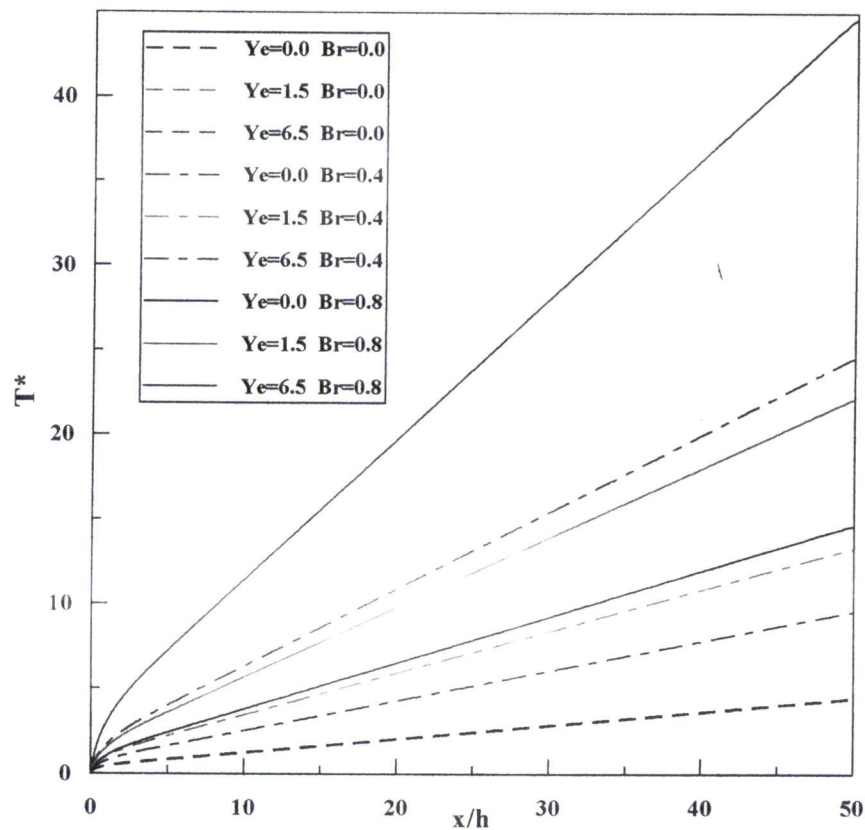
Ye \ Br	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	8.234	6.251	5.036	4.217	3.627
1.0	8.591	5.674	4.236	3.380	2.811
3.0	9.064	4.725	3.196	2.415	1.940
5.0	9.372	4.028	2.565	1.881	1.485
7.0	9.576	3.510	2.149	1.548	1.210

Tableau[IV-11] : Nusselt établi pour différentes valeurs de Ye et Br

IV.3.2.2.4 Evolution de la température de la paroi :

La diminution de l'intensité de l'échange de chaleur entre la paroi et le fluide causée par l'effet simultané de la contrainte seuil et la dissipation visqueuse, fait qu'une grande partie du flux imposé à la paroi ne contribue qu'au réchauffage de celle-ci, ce qui induit l'élévation de sa température.

La figure [IV-31] présente l'évolution de la température local de la paroi pour différentes valeurs de Br et Ye . On constate aisément, que la paroi se réchauffe à des températures de plus en plus élevées que les valeurs du seuil et de la dissipation visqueuse deviennent importantes.



Figure[IV-31] : Evolution la température de la paroi pour différentes valeurs de Br et Ye.

IV.4 Conclusion :

Dans cette partie de notre travail, nous avons procédé à l'analyse de la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement non-isotherme entre deux plaques planes d'un fluide viscoplastique idéal (fluide de Bingham).

Cette analyse nous a permis de mettre en évidence l'influence exercée par les différents paramètres caractéristiques de l'écoulement et du fluide sur les champs de vitesses, de pression et de température.

Les résultats obtenus nous ont permis en particulier, de déceler l'importance de l'effet exercé par la contrainte seuil sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique, et de justifier la nécessité impérieuse de tenir compte de l'effet de la dissipation visqueuse lors des analyses thermiques associées à cette catégorie de fluides.

CHAPITRE V

Ecoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque.

V.1 Introduction :

Les écoulements à travers des conduits munis d'expansions ou de contractions brusques ont constitué depuis plusieurs décennies, un centre d'intérêt d'une multitude d'investigations numériques, analytiques et expérimentales [4,17,20,34,...]. Ces études ont considéré essentiellement le cas des fluides newtoniens en régime laminaire et turbulent et cela en analysant l'impact de l'inertie sur la zone tourbillonnaire et le coefficient de perte de charge local. Cependant, les travaux recensés dans le cas des fluides non newtoniens restent peu nombreux au moment où la majorité des fluides rencontrés manifestent des comportements autres que celui d'un fluide newtonien.

Dans ce chapitre nous nous proposons l'étude du développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide non newtonien (fluide de Bingham) à travers un élargissement brusque de rapport géométrique **1:2**. Cette étude consiste donc, à analyser l'influence simultanée de l'inertie et de la contrainte seuil sur la structure de l'écoulement, à savoir, la zone tourbillonnaire, la perte de charge locale et le coefficient d'échange thermique.

V.2 Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque :

V.2.1 Equations gouvernant le problème :

L'écoulement stationnaire, incompressible et laminaire d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque est gouverné par :

- L'équation de continuité ;
- Les équations de mouvement ;
- L'équation de l'énergie ;
- L'équation constitutive.

La figure [V-1] représente le domaine physique de l'écoulement. Celui-ci présente un axe de symétrie le divisant en deux parties, offrant ainsi la possibilité de réduire le domaine de calcul à l'un des sous-domaines.

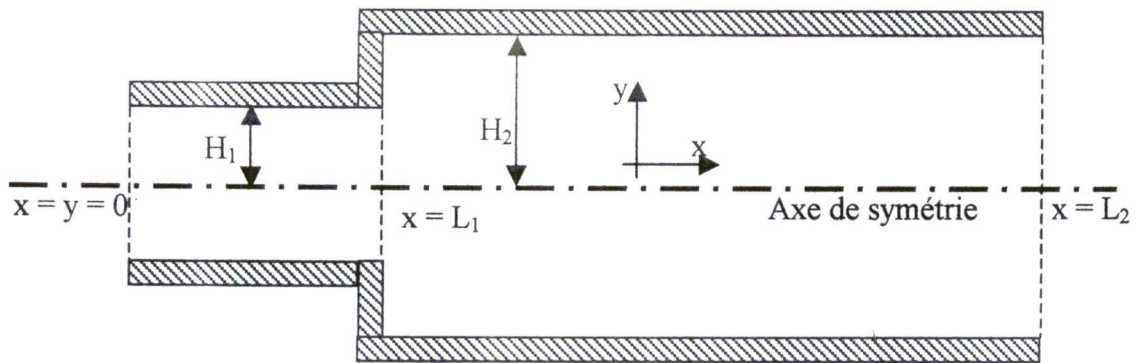


Figure [V-1] : Domaine physique de l'écoulement

V.2.1 Conditions aux limites

Les conditions considérées aux limites représentées dans la figure [V-2] sont en variables adimensionnelles comme suit:

- vitesse établie à l'entrée Γ_1 : $u=f(y, Y_e), v=0$;
- condition de non glissement aux parois Γ_2 et Γ_3 : $u=0, v=0$;
- profil de vitesse établi à la sortie Γ_4 : $\frac{\partial u}{\partial x}=0, v=0$;
- condition sur l'axe de symétrie Γ_5 : $\frac{\partial u}{\partial y}=0, v=0$.
- Température uniforme à l'entrée Γ_1 : $\theta_{x=0}=0$;
- Paroi adiabatique Γ_2 et Γ_3 : $\frac{\partial \theta}{\partial y}=0$
- Profil de température établi à la sortie Γ_4 : $\frac{\partial \theta}{\partial x}=0$;
- Condition sur l'axe de symétrie Γ_5 : $\frac{\partial \theta}{\partial y}=0$

N.B :

Les profils de vitesses établis ($u=f(y, Y_e)$) considérés à la frontière Γ_1 sont ceux déterminés numériquement dans le chapitre précédent (Figure[IV-4]).

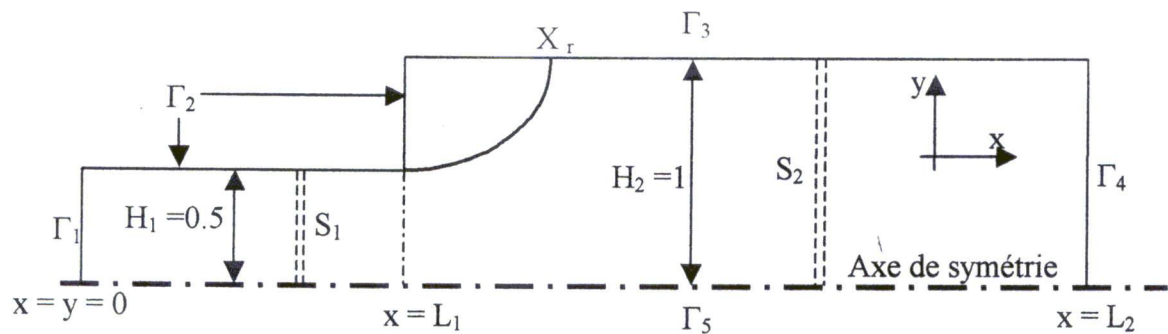


Figure [V-2] : Domaine de calcul

S_1 et S_2 : représentent des sections d'écoulement où règne un régime hydrodynamique établi, situées respectivement en amont et en aval de l'élargissement brusque.

X_r : est l'abscisse du point de rattachement. Ce dernier est défini comme étant le point de la zone tourbillonnaire le plus loin de la section de l'élargissement.

Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme avec une concentration plus importante au niveau de l'élargissement (figure [V-3]). Les éléments adoptés sont quadrilatéraux et biquadratiques (9 nœuds).

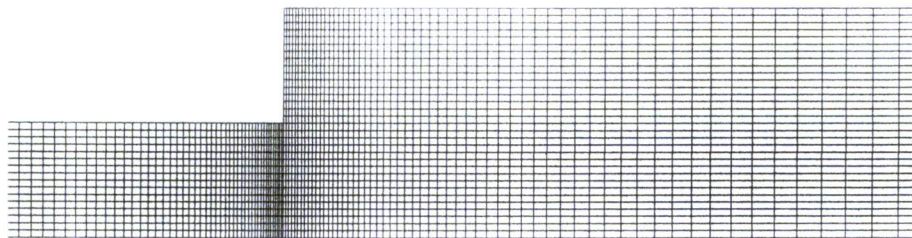


Figure [V-3] Maillage non-uniforme:

V.3 Résultats et interprétations :**V.3.1 Régime hydrodynamique :****V.3.1.1 Influence de l'inertie sur le profil axial de vitesse :**

L'évolution de la vitesse axiale (u), considérée sur l'axe de symétrie de l'élargissement, est représentée dans les figures [V-4] et [V-5] pour différentes valeurs de Reynolds, respectivement pour le cas d'un fluide newtonien et un fluide semi solide de Bingham ($Ye=3$). Les courbes représentatives de cette évolutions présentent toutes une même allure formée par trois (3) zones distinctes .

les zones (I) et (III) sont caractérisées par l'uniformité de la vitesse ($u=Cte$). Elles traduisent de ce fait, un écoulement en régime établi.

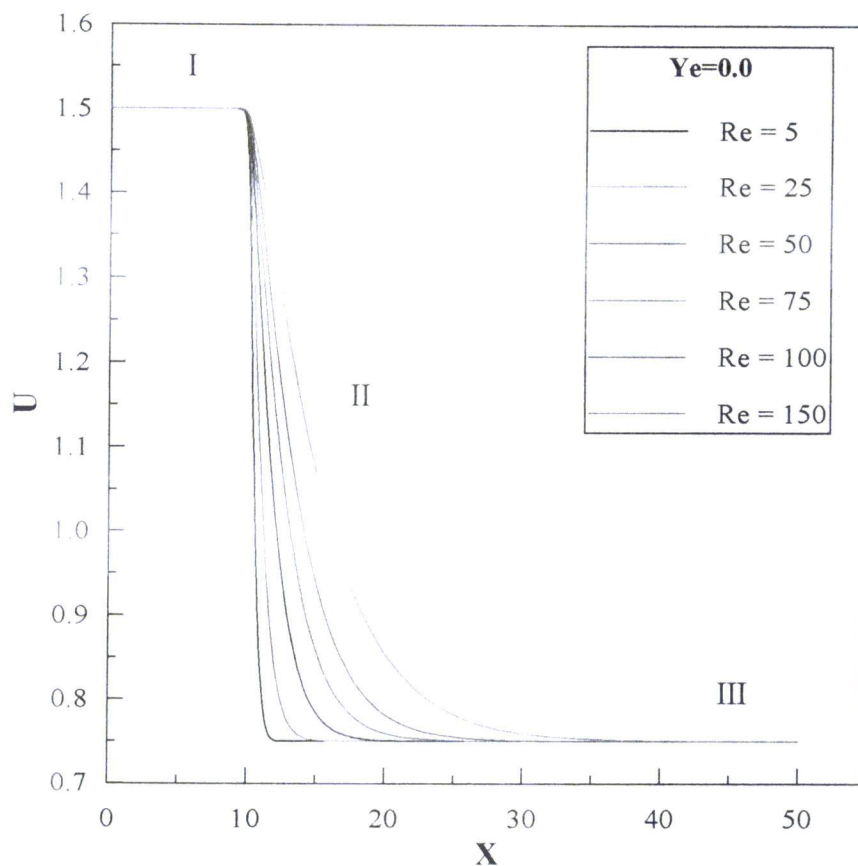


Figure [V-4] : L'influence de l'inertie sur le profil de vitesses axiales ($Ye = 0.0$)

La zone (II) correspond à un état de transition entre les deux régimes établis situées à l'amont et en aval de l'élargissement. Cette transition localisée donc au niveau du changement de section, s'étale de plus en plus vers l'aval que le nombre de Reynolds devient important (figure[V-4]).

La figure[V-5] indique clairement, la restriction de la zone (II) occasionné par la présence d'un seuil de contrainte. Un fait qui est justifié par la diminution de la vitesse sur l'axe de symétrie, causée essentiellement par l'existence d'un écoulement bouchon.

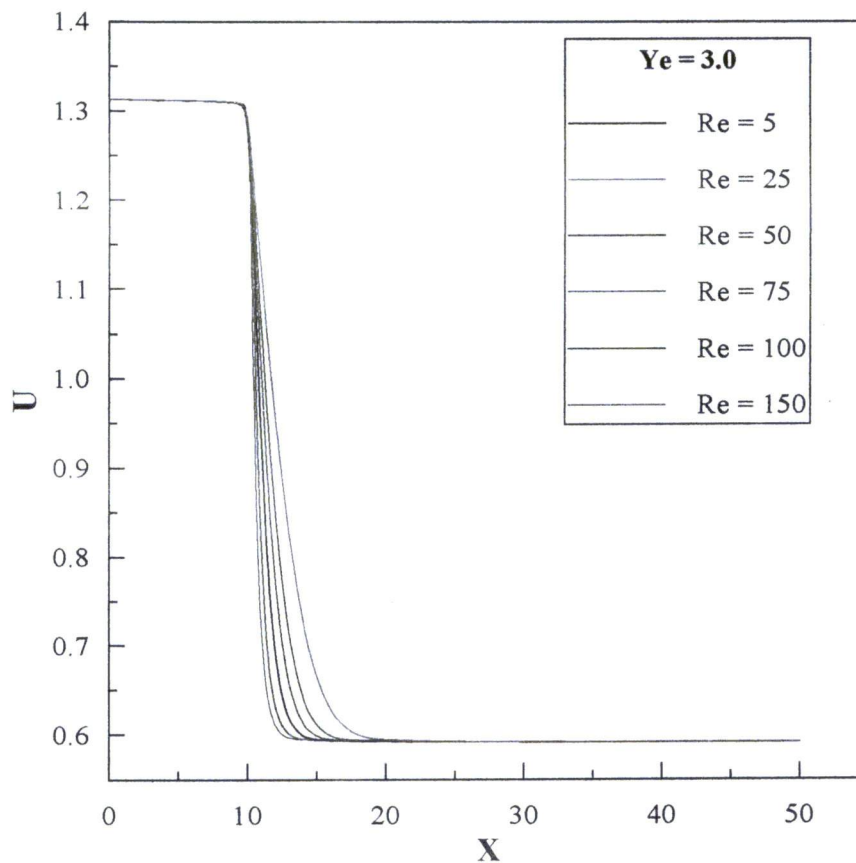


Figure [V-5] : L'influence de l'inertie sur le profil de vitesses axiales ($Y_e = 3.0$)

V.3.1.2 Influence de la contrainte seuil sur le profil axial de vitesse :

Comme il a été constaté dans la chapitre précédent, l'existence d'un seuil de contrainte est à l'origine de la formation d'un écoulement bouchon. Celui-ci est caractérisé par son envahissement de la section d'écoulement avec l'accroissement de la valeur du Y_e , accompagnée d'une diminution de plus en plus aiguë de sa vitesse.

Ce constat est explicitement illustré par les figures [V-6] et [V-7], qui présentent l'évolution du profil de vitesse axial pour différentes valeurs de Y_e , respectivement pour un Re égal à 50 et 150. On en déduit de plus, la diminution de la zone de transition qui n'est en faite que la longueur nécessaire à l'établissement hydrodynamique de l'écoulement après la perturbation engendrée par le passage à travers l'élargissement.

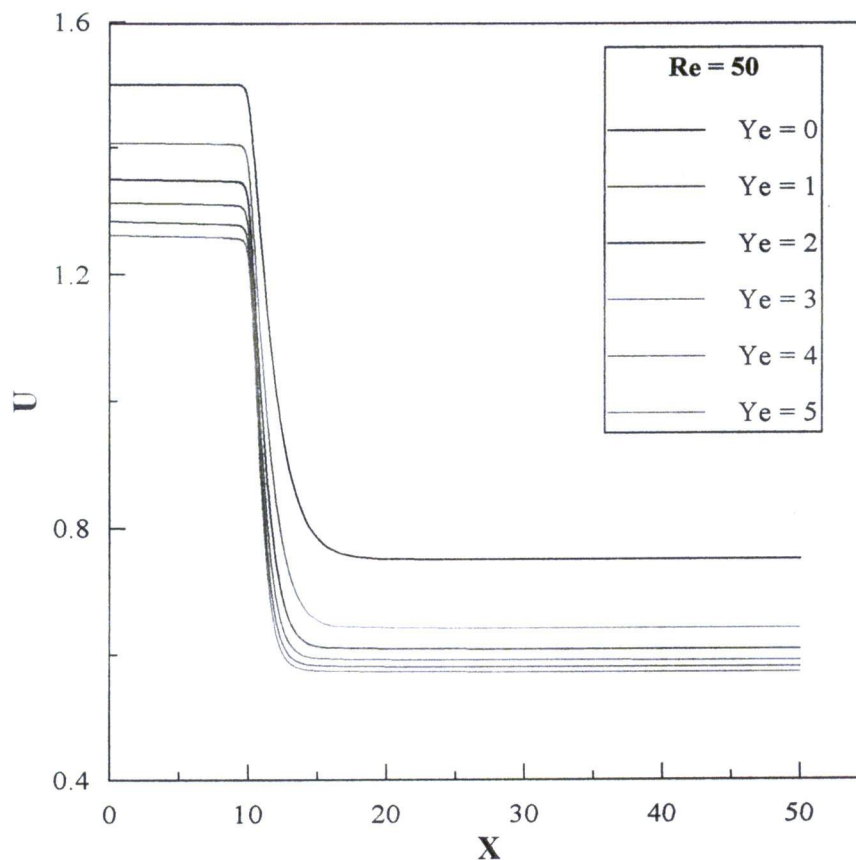


Figure [V-6] : L'influence de la contrainte seuil sur le profil de vitesses axial ($Re = 50$)

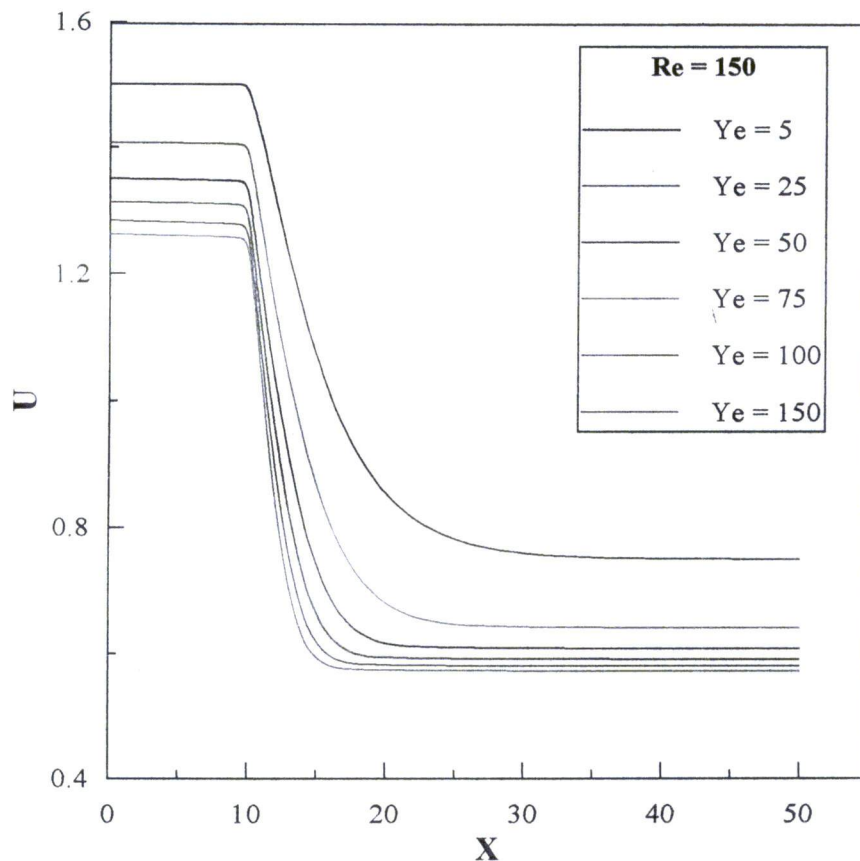


Figure [V-7] : L'influence de la contrainte seuil sur le profil de vitesses axiales ($Re = 50$)

V.3.1.3 Influence de l'inertie sur la zone tourbillonnaire :

Le passage d'un fluide à travers un élargissement brusque conduit à la formation d'une zone dite tourbillonnaire, localisée au niveau du coin supérieur formé par le changement subite de la section d'écoulement.

Les figures [V-8] illustrent l'influence de l'inertie sur la zone tourbillonnaire. On remarque que l'augmentation du nombre de Reynolds provoque un allongement du tourbillon fluide et l'éloignement vers l'aval du point de recollement (X_r). Ce dernier est formé par l'intersection de la ligne de courant délimitant la zone de recirculation et la paroi.

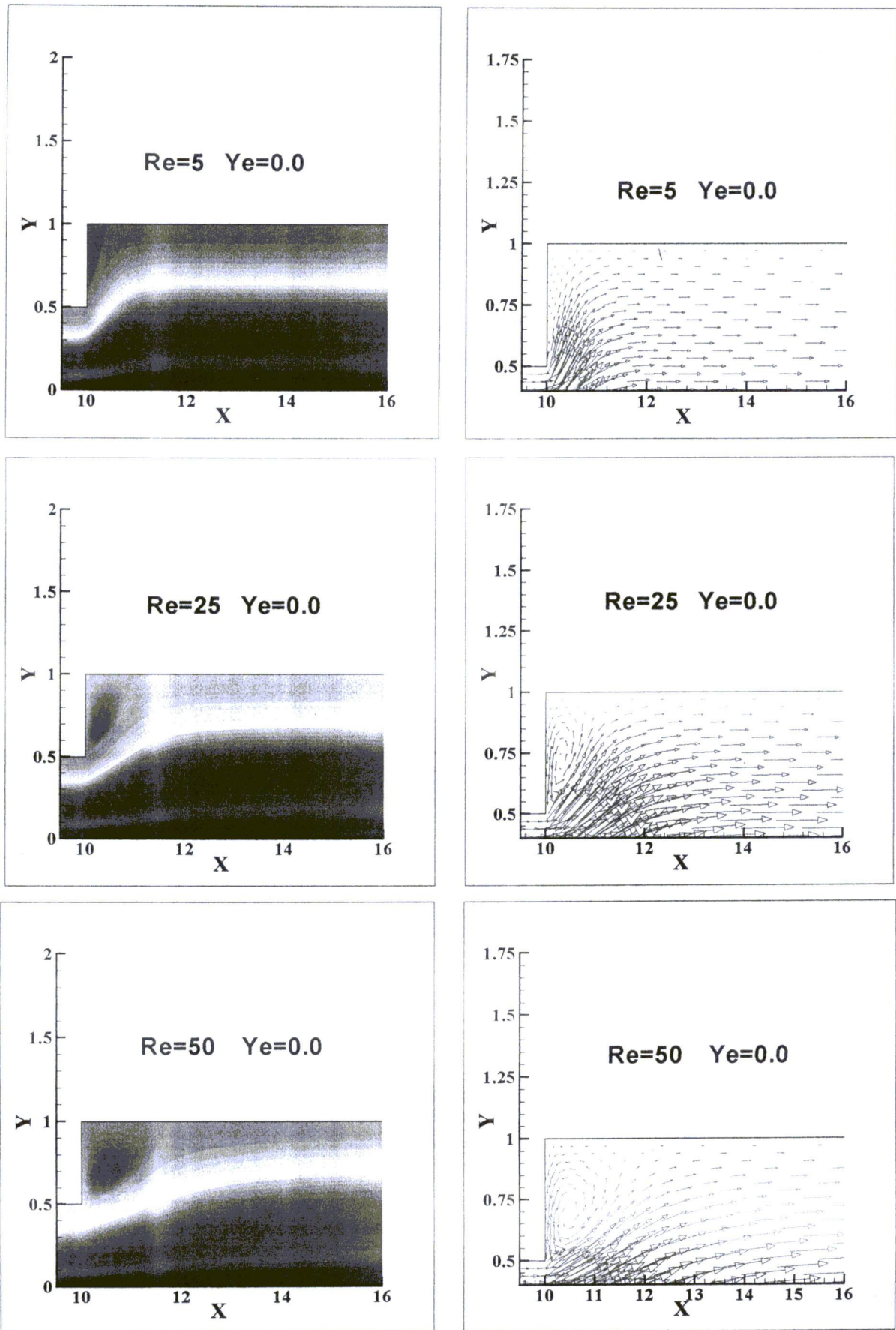


Figure [V-8-a] : lignes de courant et vecteurs vitesses pour $Re=5$; 25 ; 50 et $Ye=0$

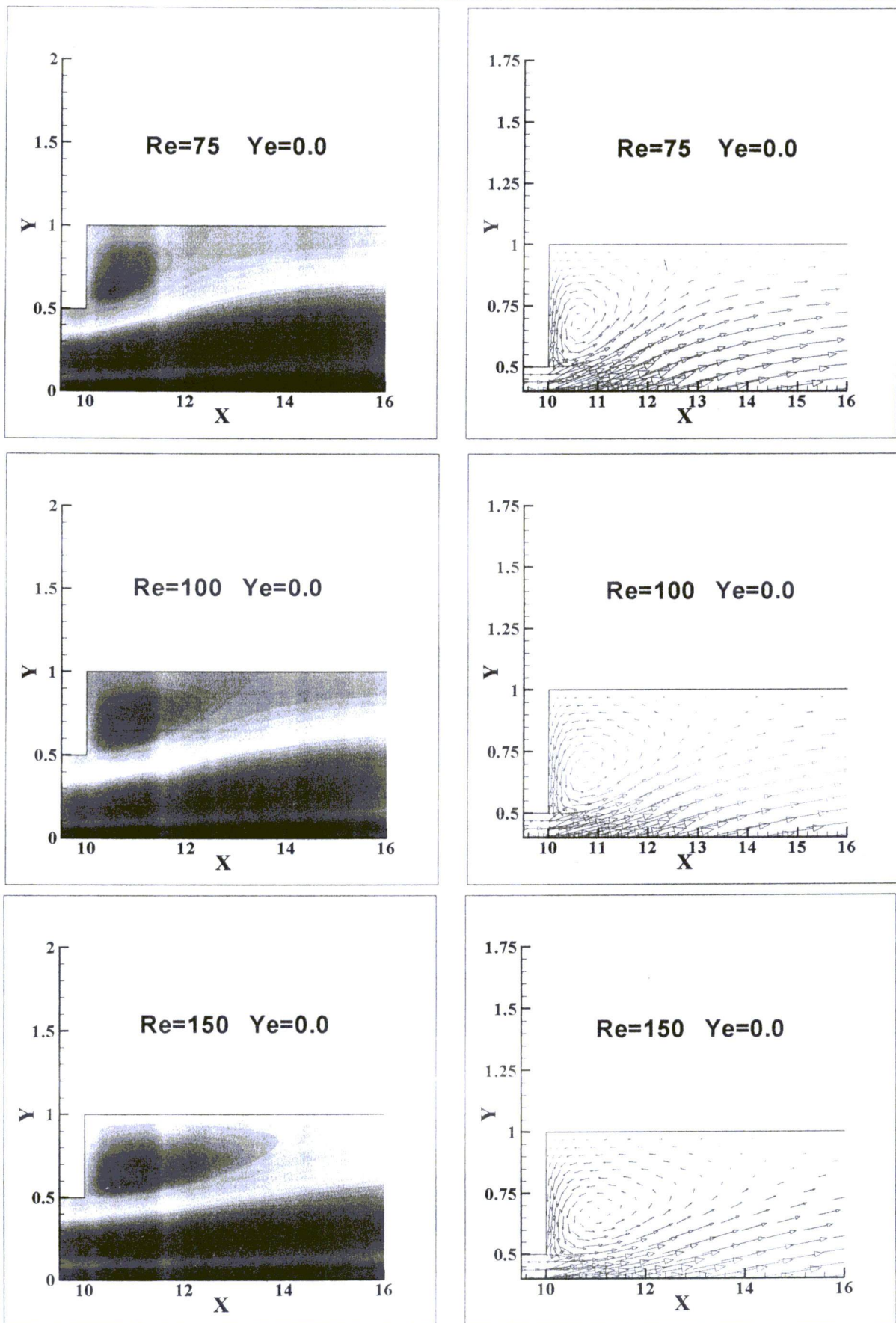


Figure [V-8-b] : lignes de courant et vecteurs vitesses pour $Re=75, 100, 150$ et $Ye=0$

l'évolution de la valeur du point de recollement présente une forme linéaire pour des valeurs importantes du nombre de Reynolds. Cette évolution par contre, tend vers une valeur asymptotique lors d'un écoulement rompart (faibles nombre de Reynolds). Ce constat, illustré par la figure[V-9], correspond avec ce qui formulé par Pinho et al [45] en considérant l'écoulement d'un fluide de puissance à travers un élargissement brusque axisymétrique de rapport géométrique 1:2.6.

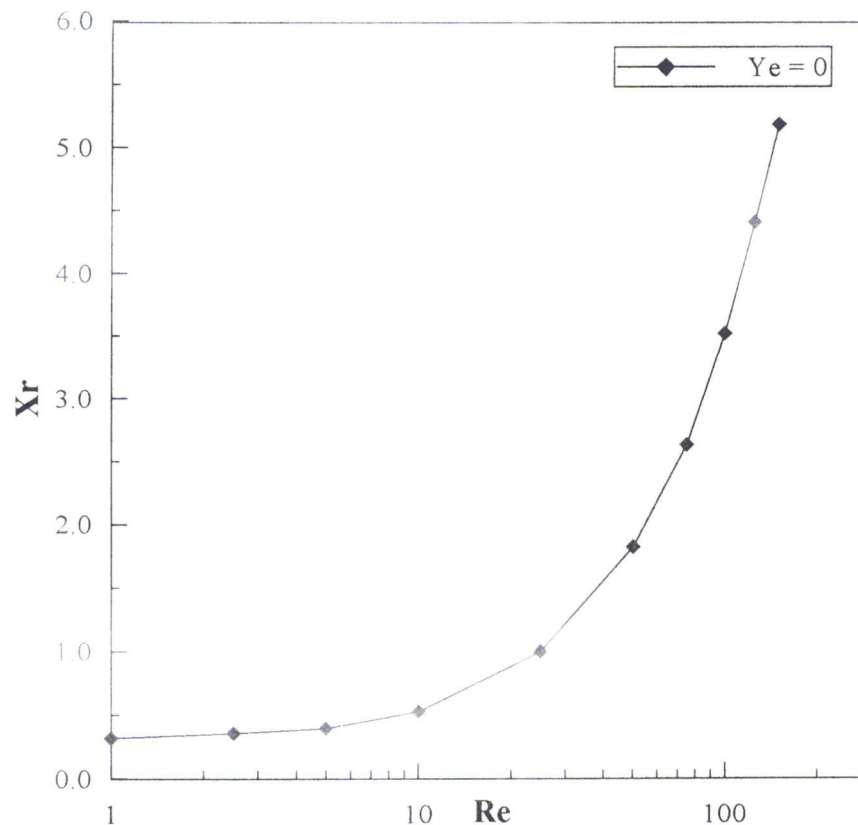


Figure [V-9] :Evolution du point de recollement en fonction de Re ($Y_e=0$).

V.3.1.4 Influence de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire :

L'influence exercée par la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire est illustrée par les figures[V-10], qui comportent les tracés des lignes de courant pour différentes valeurs de Y_e dans le cas d'un $Re=50$ et 100 .

On constat que, contrairement à l'inertie, le seuil de contrainte réduit la taille de la zone tourbillonnaire. Cette réduction s'accroît avec l'accroissement des valeurs du Y_e .

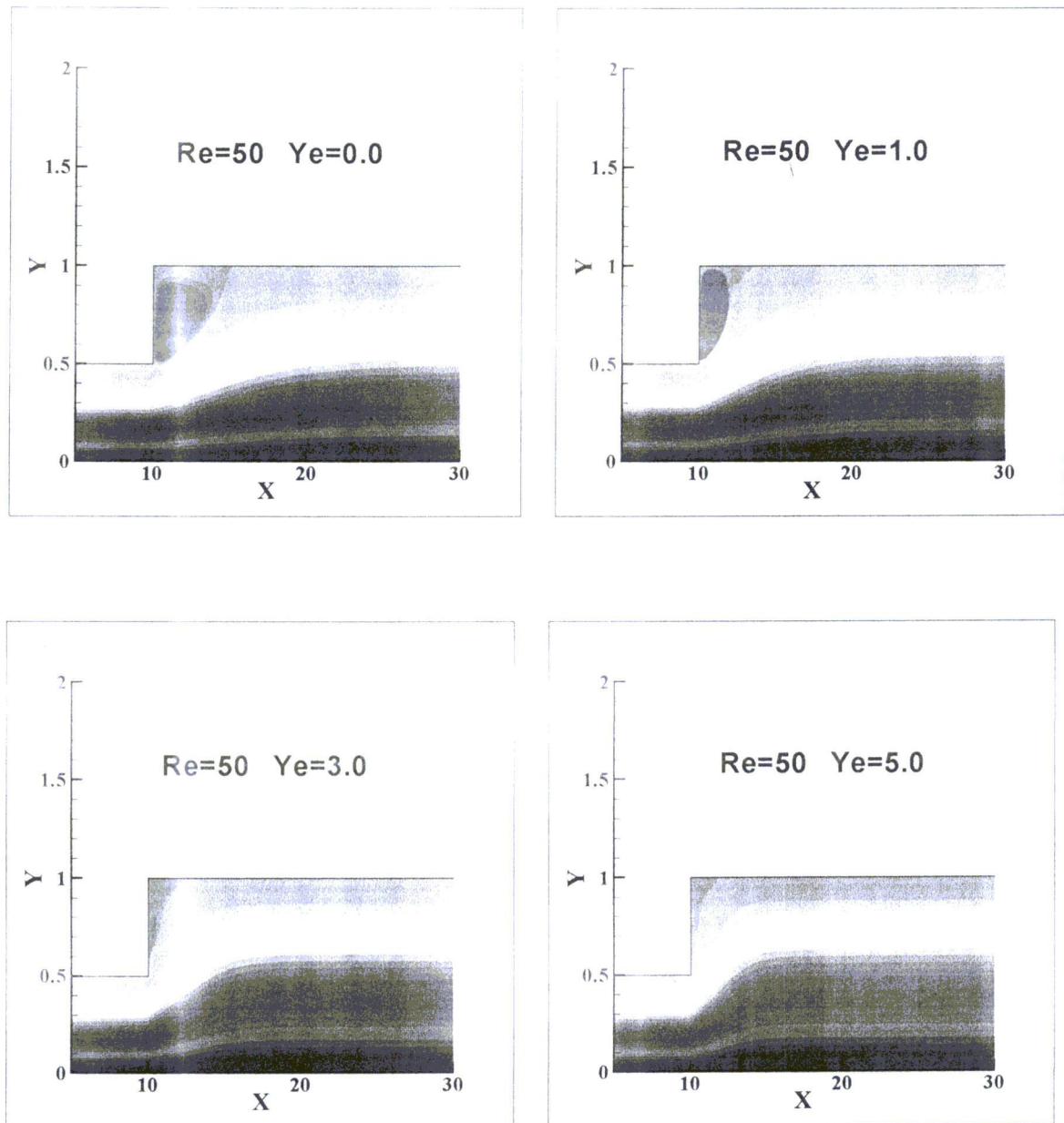


Figure [V-10-a] : lignes de courant pour $Ye = 0 ; 1 ; 3$ et 5 ($Re = 50$).

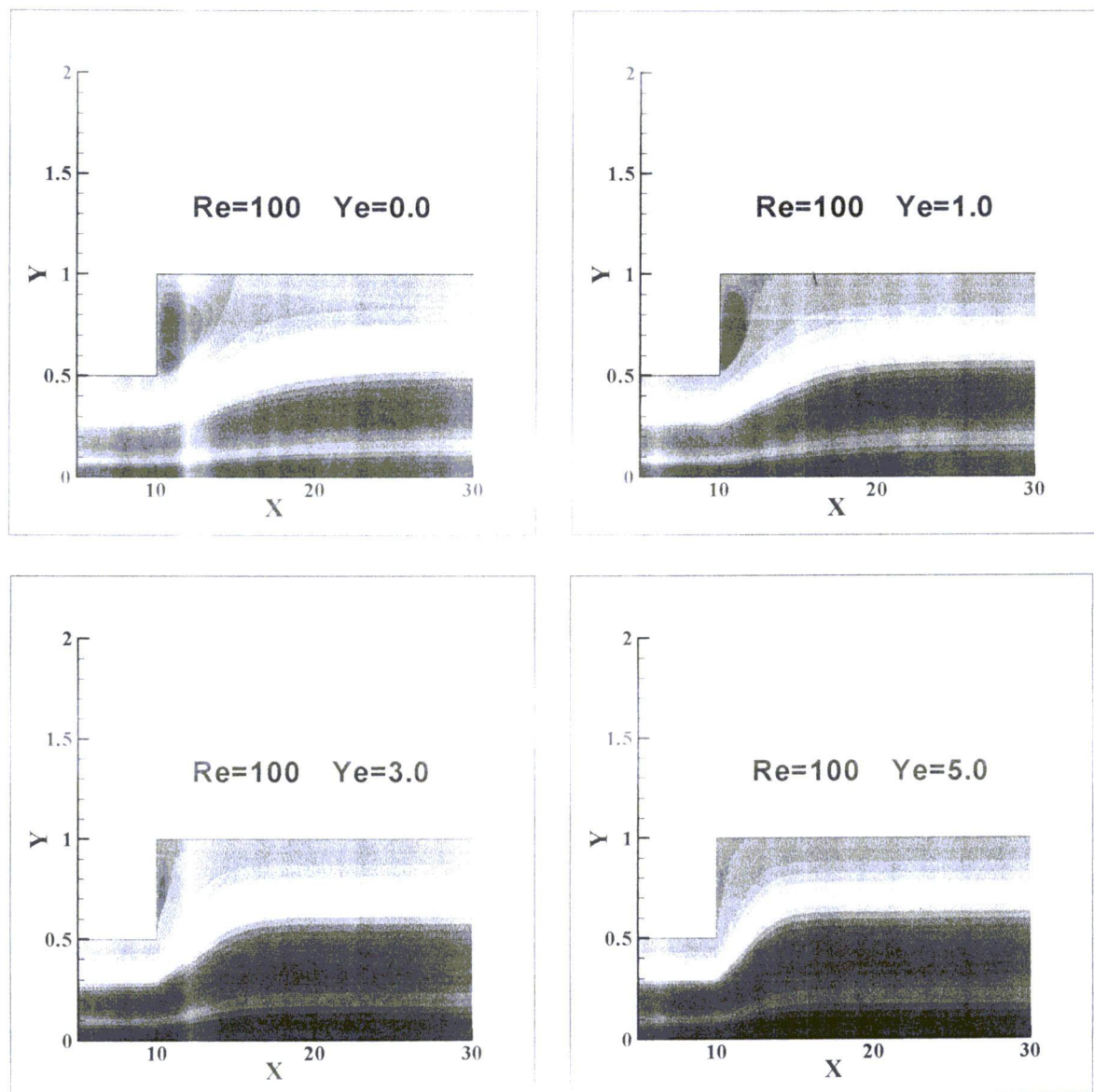


Figure [V-10-b] : lignes de courant pour $Ye = 0 ; 1 ; 3$ et 5 ($Re = 100$).

La diminution de la zone tourbillonnaire est engendrée par les fortes valeurs de viscosité localisées au niveau du bouchon de fluide. Cette diminution s'accroît en raison de la prise de l'ampleur que manifeste la zone non cisailée avec l'accroissement de la contrainte seuil en envahissant de plus en plus la section d'écoulement et en se rapprochant de l'élargissement. Ce constat est nettement illustré par la figure [V-11] qui présente la distribution du champ de viscosité pour différentes valeurs de Ye et un nombre de Reynolds égale à **150**.

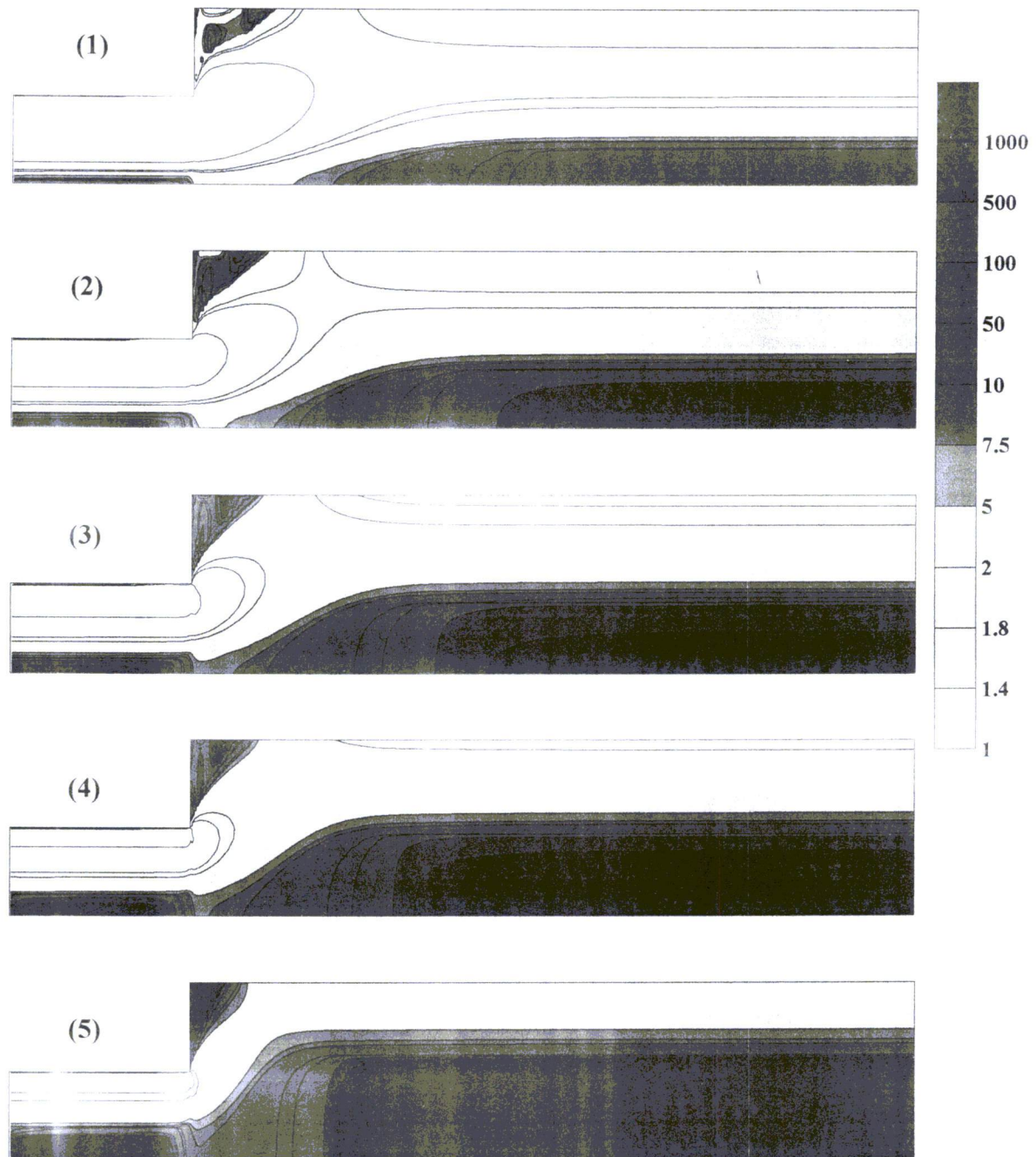


Figure [V-11] : Distribution du champ de viscosité pour $Re=150$ et $Ye = 0.5$ (1) ; 1 (2) ; 1.5 (3) ; 2 (4) et 4 (5).

la figure [V-12] illustre l'influence de la contrainte seuil sur le point de recollement. Les tracés de l'évolution de ce dernier en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de Ye montrent que, pour des faibles valeurs de Reynolds (cas d'un écoulement rampant), l'accroissement de Ye entraîne un léger éloignement du point de recollement vers l'aval qui résulte de l'augmentation

de la zone tourbillonnaire. Cependant, lorsque les valeurs de Re sont importantes, la zone de recirculation décroît avec l'accroissement Ye et les points de recollements se rapprochent de l'élargissement.

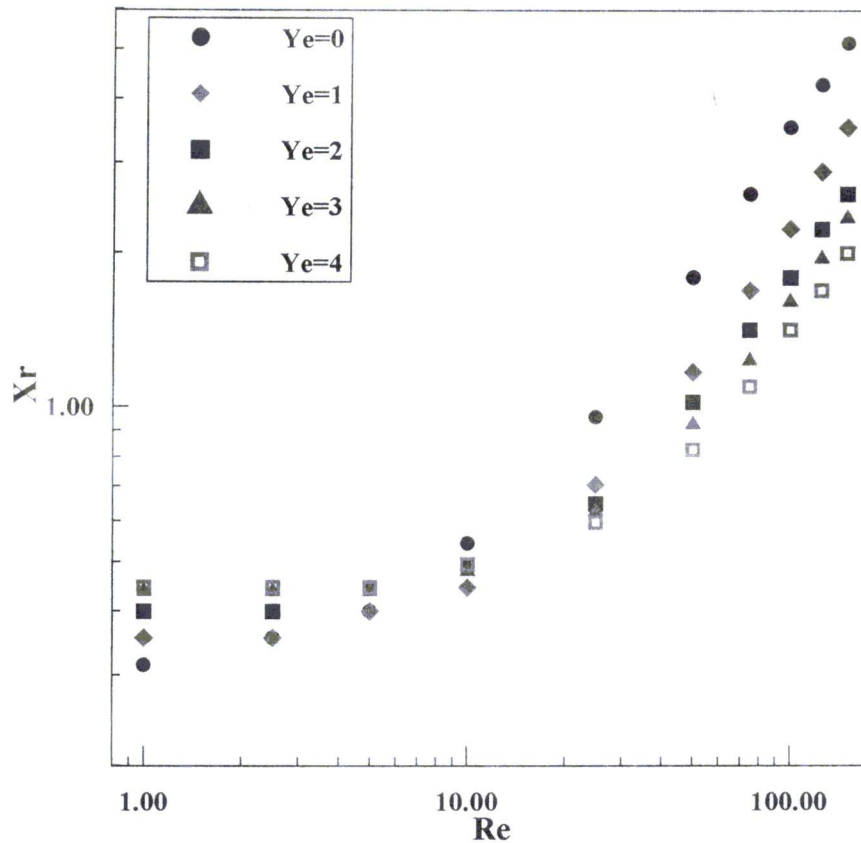


Figure [V-12] : L'évolution du point de recollement (X_r) en fonction de Re pour $Ye = 0 ; 1 ; 2 ; 3$ et 4

V.3.1.5 Champ de pression :

Les figures [V-13-a et b] présentent des tracés représentatifs de l'évolution de la pression sur l'axe de symétrie pour différentes valeurs de Reynolds, respectivement pour le cas d'un $Ye=0$ et 3 .

On remarque que la perte de pression est nettement plus importante lorsque le fluide possède un seuil de contrainte (figure[V-13-b]). Ce fait est lié aux fortes valeurs de viscosité localisées au niveau de la zone non cisillée du fluide qui engendrent une importante perte d'énergie lors de l'écoulement, ce qui se traduit par une forte chute de pression. La perte de pression sera par conséquent, de plus en plus accentuée que la valeur de la contrainte seuil est élevée.

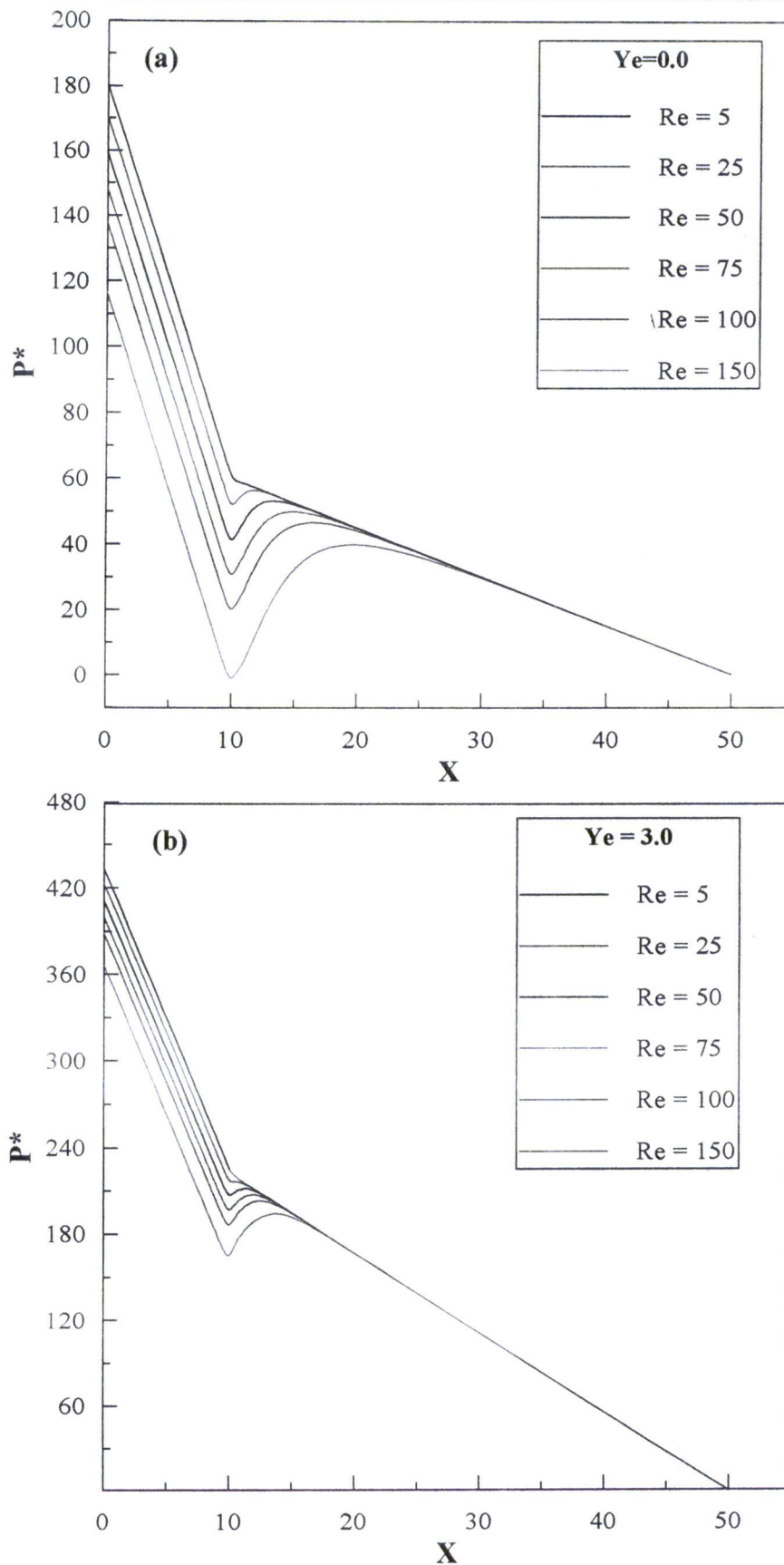


Figure [V-13] : L'évolution de la pression sur l'axe de symétrie pour différentes valeurs de Re , (a) : $Ye = 0$; (b) : $Ye = 3$

V.3.1.6 Détermination du coefficient de perte de charge local :

Dans ce paragraphe, on procède à la détermination du coefficient de perte de charge locale pour différentes valeurs du Reynolds et de la contrainte seuil. Ce paramètre d'une très grande importance dans les calculs hydrauliques des installations industrielles, est déterminé à partir des tracées de l'évolution axiale de la pression recueillie sur l'axe de symétrie de l'expansion (figures [V-13]).

La méthode de détermination de ce coefficient exposée par Oliveira et Pinho [42], consiste à calculer l'écart entre les deux droites représentatives de la chute de pression par friction en amont et en aval de l'élargissement après leurs extrapolation au plan de ce dernier (figure[V-14]).

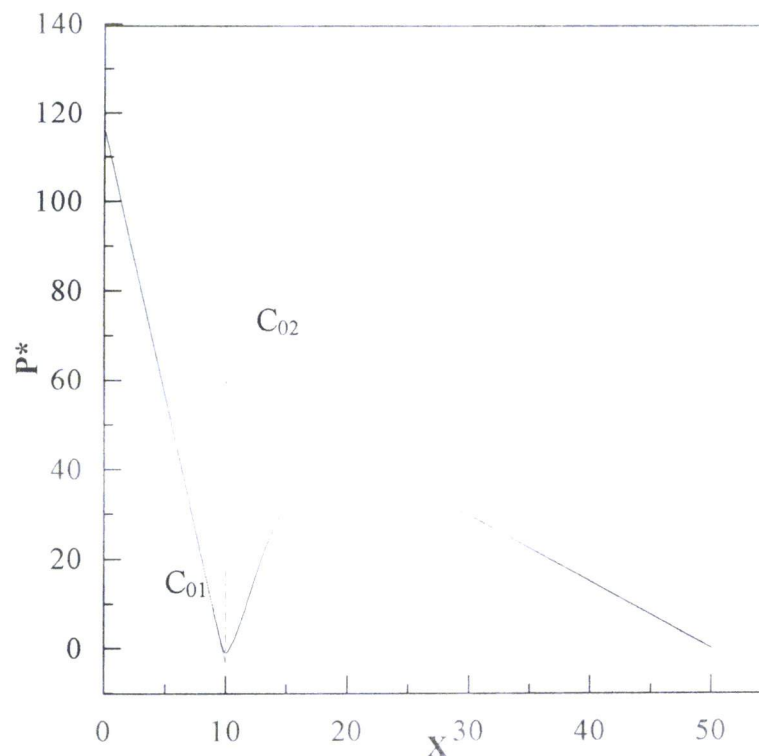


Figure [V-14] : Détermination du coefficient de perte de charge locale

On écrit alors :

$$C_{RI} = C_{01} - C_{02}$$

où C_{RI} dénote le saut de pression localisé au niveau de l'élargissement brusque. Ce saut est occasionné d'une part par un accroissement de la pression due à la variation de l'énergie cinétique « C_R » (accroissement réversible), et d'une autre part une diminution irréversible qui traduit la perte de charge locale « C_I ».

le coefficient de perte de pression irréversible s'écrira alors :

$$C_I = C_R - C_{RI}$$

$$\text{avec : } C_R = \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sigma^2 \right)$$

où : α est le moment d'énergie déterminé par la relation : $\alpha = \frac{\overline{u^3}}{3\overline{u}}$

$$\text{avec : } \overline{u^3} = \frac{\iiint u^3 ds}{\iiint ds} \quad \text{et} \quad \overline{u} = \frac{\iiint u ds}{\iiint ds}$$

Les indices 1 et 2 désignent deux sections localisées respectivement dans les zones d'écoulement établi amont et aval de l'élargissement ;

σ est le rapport géométrique de l'élargissement (H_1/H_2).

La figure [V-15] illustre l'évolution du coefficient de perte de charge irréversible en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de la contrainte seuil. On constate que, dans une échelle long-long, le C_I décroît avec l'accroissement de l'inertie. Cette décroissance présente une allure linéaire pour les faibles valeurs de Re et une tendance vers une valeur asymptotique lorsque les valeurs de ce dernier deviennent importantes.

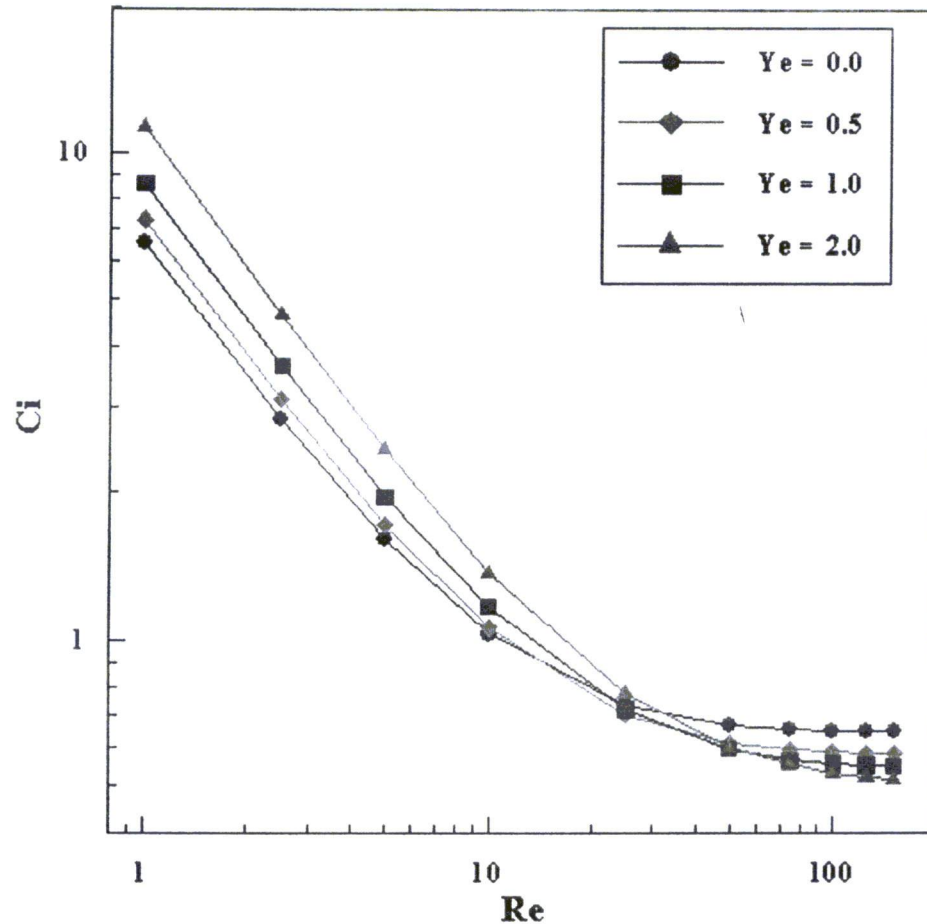


Figure [V-15] : Evolution du coefficient de perte de charge locale en fonction du Re pour différentes valeurs de Ye .

On y constate également, l'effet antagoniste exercé par la contrainte seuil sur le coefficient de perte de charge locale lors des écoulements à faibles et à fortes valeurs de Re : à faibles valeurs de Reynolds, le C_I croît avec l'accroissement de la contrainte seuil. Alors qu'à fortes valeurs de Reynolds, l'accroissement de Ye entraîne une diminution du coefficient de perte de charge locale.

Le tableau [V-1] présente pour différentes valeurs de Reynolds et de la contrainte seuil, des valeurs numériques du coefficient de perte de pression réversible (C_R) et irréversible (C_I).

Ye	Re	α_1	α_2	C_R	C_{RI}	C_I
0	1	1,5428	0,1928	1,4946	-5,0258	6,5204
	2,5				-1,3295	2,8241
	5				-0,1152	1,6097
	10				0,4662	1,0284
	25				0,7620	0,7326
	50				0,8271	0,6675
	75				0,8403	0,6543
	100				0,8447	0,6499
	125				0,8464	0,6482
	150				0,8470	0,6476
1	1	1,4728	0,1692	1,4305	-7,1854	8,6159
	2,5				-2,2102	3,6407
	5				-0,5311	1,9616
	10				0,2583	1,1722
	25				0,7100	0,7205
	50				0,8331	0,5975
	75				0,8630	0,5675
	100				0,8732	0,5573
	125				0,8775	0,5530
	150				0,8796	0,5509
3	1	1,3803	0,1548	1,3416	-11,6790	13,0206
	2,5				-4,0716	5,4132
	5				-1,5258	2,8674
	10				-0,2521	1,5937
	25				0,4947	0,8469
	50				0,7187	0,6229
	75				0,7830	0,5586
	100				0,8116	0,5300
	125				0,8272	0,5144
	150				0,8373	0,5043
4	1	1,3500	0,1514	1,3122	-14,0162	15,3284
	2,5				-5,0441	6,3563
	5				-2,0308	3,3430
	10				-0,5184	1,8306
	25				0,3802	0,9321
	50				0,6576	0,6546
	75				0,7395	0,5727
	100				0,7763	0,5359
	125				0,7964	0,5158
	150				0,8089	0,5033

Tableau [V-1] : Valeurs prédites de C_R et C_I pour différentes valeurs de Reynolds et de la contrainte seuil.

Dans ce paragraphe, nous proposons une corrélation qui permet la détermination du coefficient de perte de charge locale en fonction du nombre de Reynolds et de la contrainte seuil. cette corrélation formulée comme suit :

$$C_I = a + \frac{b}{Re} + 0.0762 \ln(Re)$$

$$\text{avec : } a = -0.7664 + \frac{1}{(1 + 2.1946 Ye)^{0.1046}}$$

$$b = 2.423 Ye + 6.2876$$

est valable uniquement dans le cas d'un élargissement brusque de rapport géométrique $1 : 2$ et d'une plage d'utilisation définie par : $1 \leq Re \leq 150$ et $0 \leq Ye \leq 4.5$. la figure [V-16] illustre le bon agrément entre les valeurs de C_I déterminées à partir des résultats de la simulation numérique et celles prédites par la corrélation proposées, où l'écart relative maximal n'excède pas 6%.

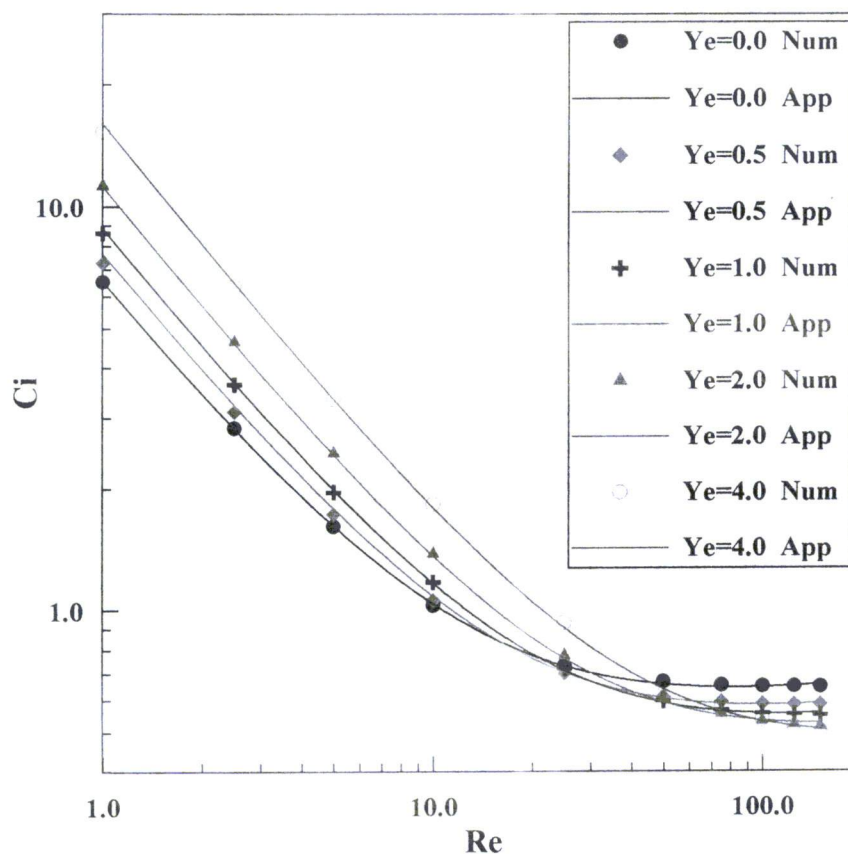


Figure [V-16] : Comparaison entre les valeurs numériques et celles approchées de C_I .

V.3.2 Régime thermique :

Dans ce paragraphe, nous analyserons l'évolution du champ thermique en considérant l'effet de la dissipation visqueuse comme l'unique source de chaleur contribuant au réchauffage du fluide. Pour cela les parois de l'expansion sont considérées adiabatiques et le nombre de Brinkman est pris égale à l'unité ($\mathbf{Br}=1$). Cette dernière hypothèse, valable pour des faibles valeurs du nombre de Peclet, nous conduit à l'utilisation d'une nouvelle jauge de température (ΔT) pour la construction de la forme adimensionnelle de l'équation d'énergie.

En tenant compte de l'expression du nombre de Brinkman formulée dans le chapitre (III) et de l'hypothèse sus-cité, nous définissons la jauge de température (ΔT) comme suit :

$$\Delta T = \frac{\mu_p U_{\text{moy}}^2}{K}$$

et la température adimensionnelle s'écrira :

$$\theta = \frac{T - T_e}{\Delta T}$$

Dans ce qui suit, nous étudierons l'influence du nombre de Prandtl (\mathbf{Pr}), de l'inertie (\mathbf{Re}) et de la contrainte seuil (\mathbf{Ye}) sur le champ thermique. Les résultats de la simulation numérique pour chaque cas considéré sont exprimés dans des référentiels différents du fait que la jauge de température (ΔT) soit dépendante de la vitesse moyenne de l'écoulement et de la conductivité thermique du fluide.

Afin de permettre une analyse sans équivoque, nous avons rapporté l'ensemble des résultats à un référentiel commun en utilisant le même ΔT pour les différents cas étudiés.

V.3.2.1 Influence de Prandtl sur le champ thermique :

L'influence du nombre de Prandtl sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la figure [V-17], qui comporte les tracés des lignes isothermes pour $Re=100$, $Ye=0$ (fluide newtonien) et différentes valeurs de Pr . Ces tracés nous ont donc, permis de constater une augmentation significative de la température localisée au niveau de la zone tourbillonnaire et près des parois solides, occasionné par les forts taux de cisaillement.

En considérant des nombres de Prandtl croissants, nous remarquons une augmentation de la température de plus en plus accentuée au niveau des parois (figure[V-18]-(b)). Ce constat est justifié par le fait que la température générée à l'amont soit de plus en plus convectée vers l'aval, constituant ainsi une augmentation supplémentaire à celle apportée par le terme source (la dissipation visqueuse).

Contrairement à la paroi, l'évolution de la température sur l'axe de l'élargissement manifeste un accroissement de moins en moins important que le Pr augmente (figure[V-18]-(a)). Ce fait résulte de l'apport insignifiant de la dissipation visqueuse à l'élévation de la température du fluide en raison des faibles taux de cisaillement qui caractérisent cette zone, à l'exception de la longueur de l'établissement d'un régime hydrodynamique.

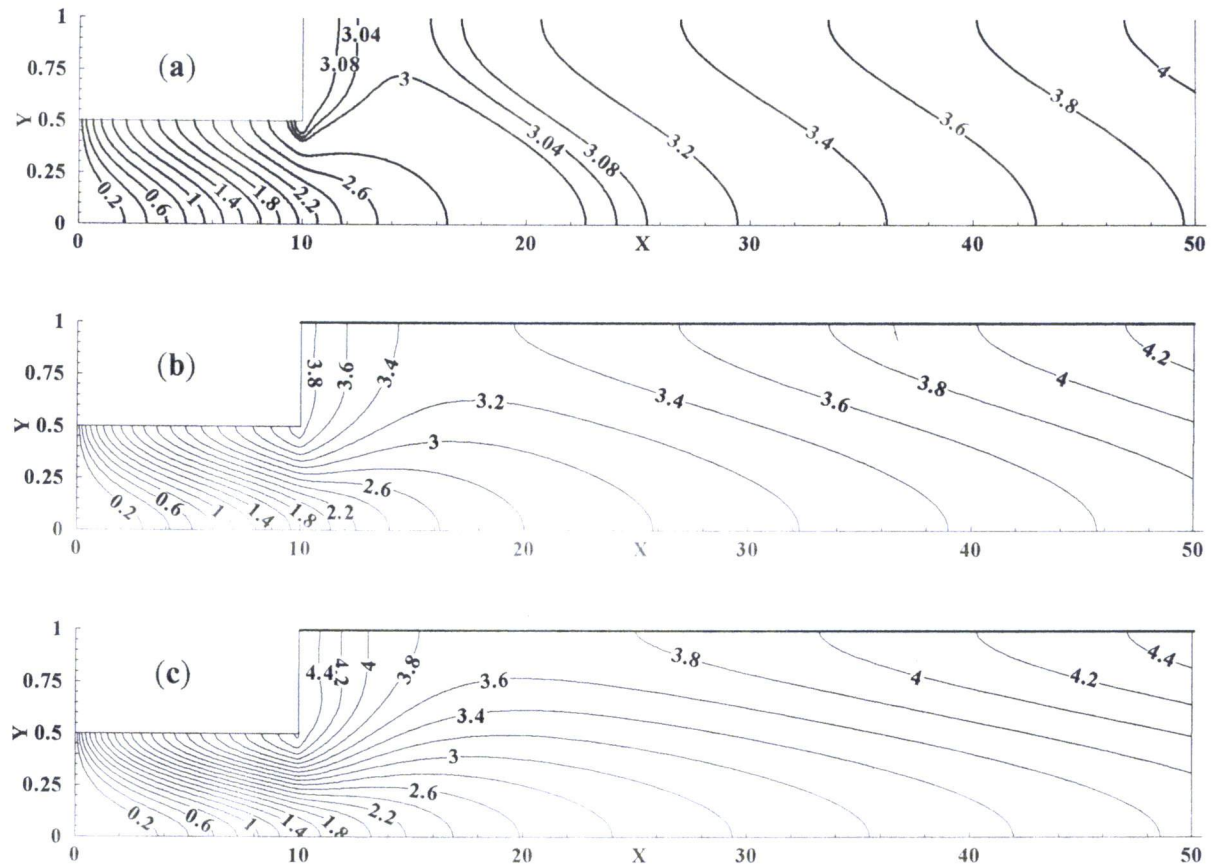


Figure [V-17] : Courbes isothermes pour $Re=100$, $Ye=0$, $Pr= 0.5$ (a) ; 1.0 (b) et 1.5 (c)

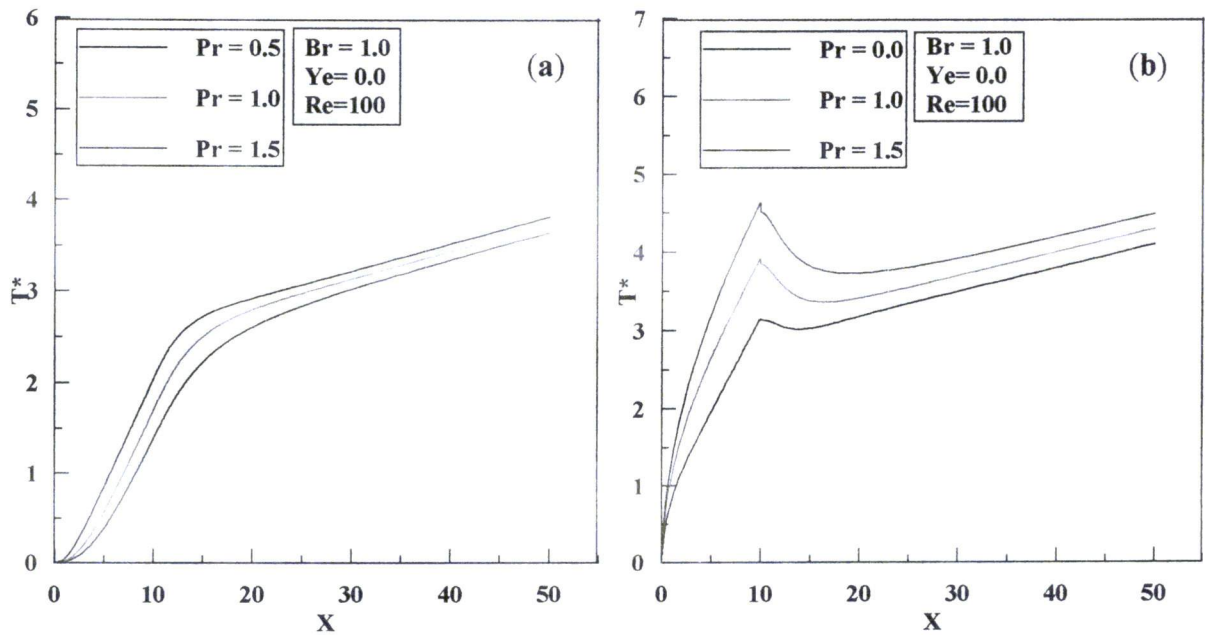


Figure [V-18] : Evolution de la température pour $Re=100$, $Ye=0$, et différentes valeurs de Pr . (a) sur l'axe de symétrie, (b) au niveau des parois solides.

V.3.2.2 Influence de l'inertie (Re) sur le champ thermique :

L'influence du nombre de Reynolds sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la figure [V-19], qui comprend les courbes isothermes pour $Pr=1$, $Ye=0$ et différentes valeurs de Re . on y déduit que le réchauffage du fluide s'intensifie avec l'accroissement de la vitesse d'écoulement, chose qui résulte d'une part de l'augmentation des taux de cisaillement, et d'une autre part, de l'effet de plus en plus accentué de la convection.

Contrairement au nombre de Pr , l'accroissement du nombre de Re engendre une augmentation de la température au niveau de l'axe de symétrie de l'expansion (figure[20]). Ce constat résulte de l'augmentation de la longueur nécessaire à un établissement hydrodynamique de l'écoulement et qui constitue une importante source de chaleur du fait de ces forts taux de cisaillement.

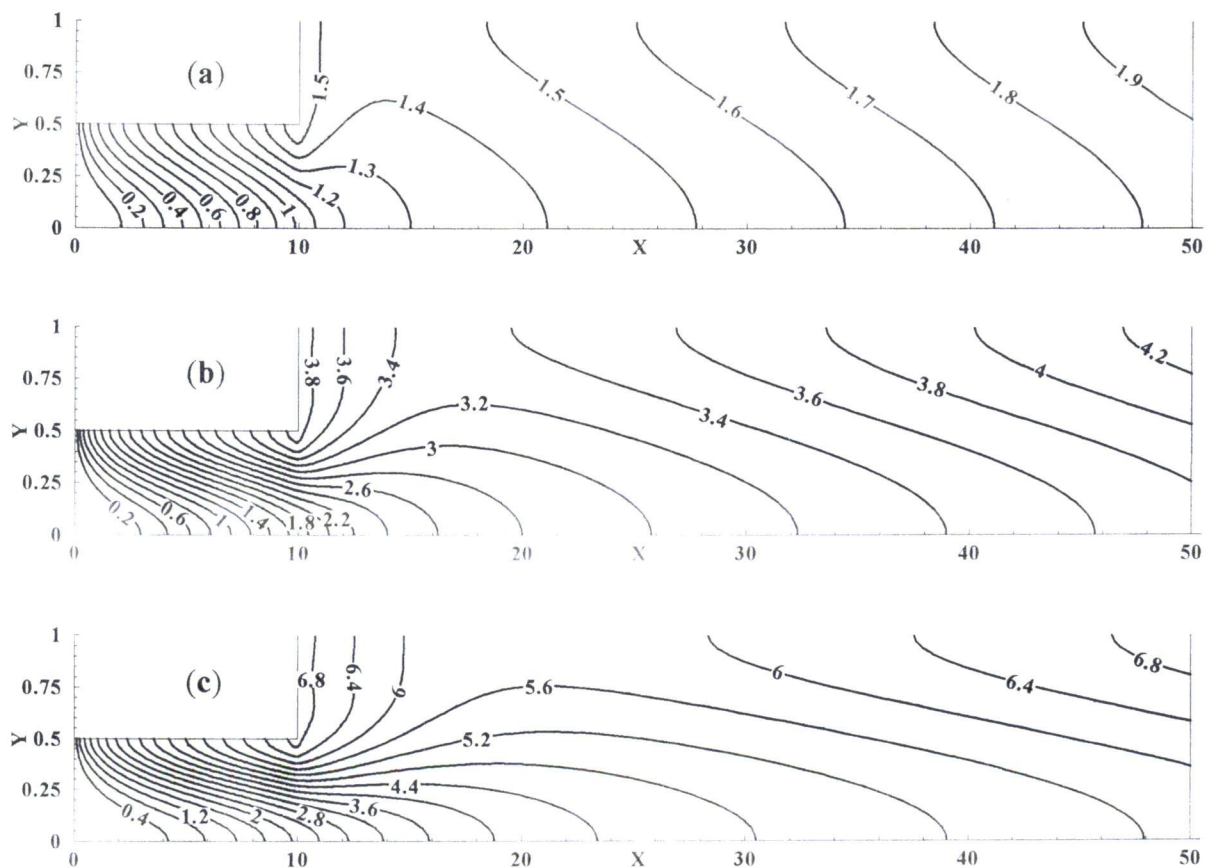


Figure [V-19] : Courbes isothermes pour $Pr=1.0$, $Ye=0$, $Re= 50$ (a) ;
100 (b) et 150 (c)

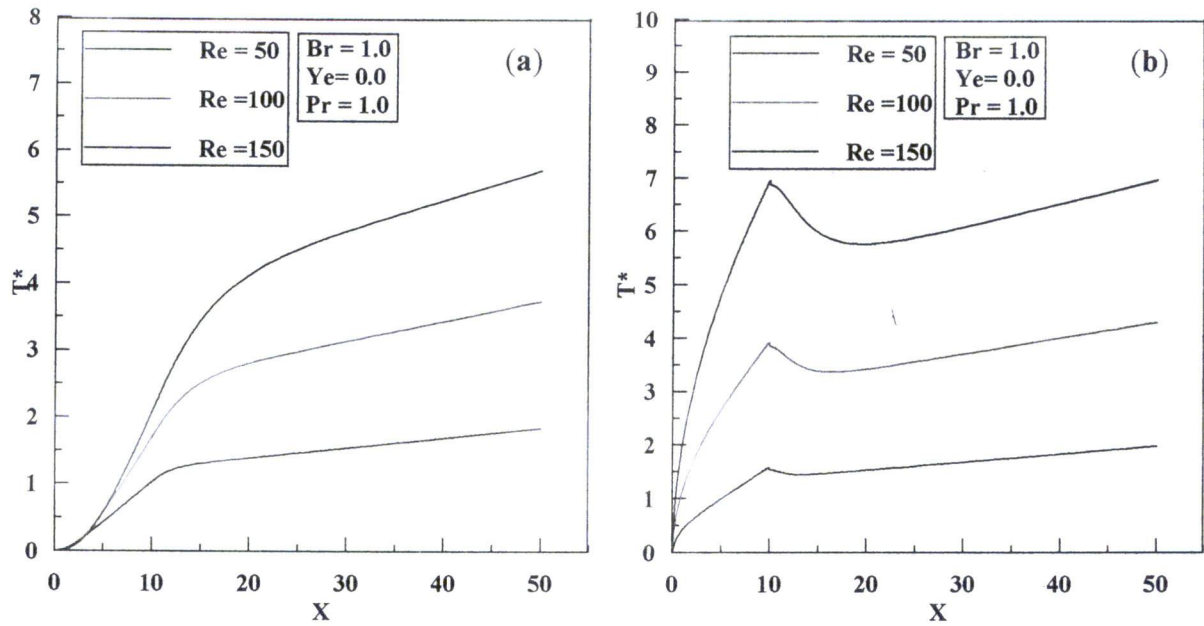


Figure [V-20] : Evolution de la température pour $Pr=1$, $Ye=0$, et différentes valeurs de Re . (a) sur l'axe de symétrie, (b) au niveau des parois solides.

V.3.2.3 Influence de la contrainte seuil sur le champ thermique :

L'influence de la contrainte seuil sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la figure [V-21], qui comprend les courbes isothermes pour $Pr=1$, $Re=100$ et différentes valeurs de Ye . On y déduit que le réchauffage du fluide s'intensifie avec l'accroissement de la contrainte seuil, chose qui résulte d'une part de l'augmentation des taux de déformation dans la zone cisailée, et d'une autre part, de l'importance de la viscosité qui siège dans la zone non cisailée.

L'accroissement de la contrainte seuil engendre une augmentation de plus en plus importante de la température au niveau de l'axe de symétrie et de la paroi. Cette constatation est illustrée dans la figure[V-22].

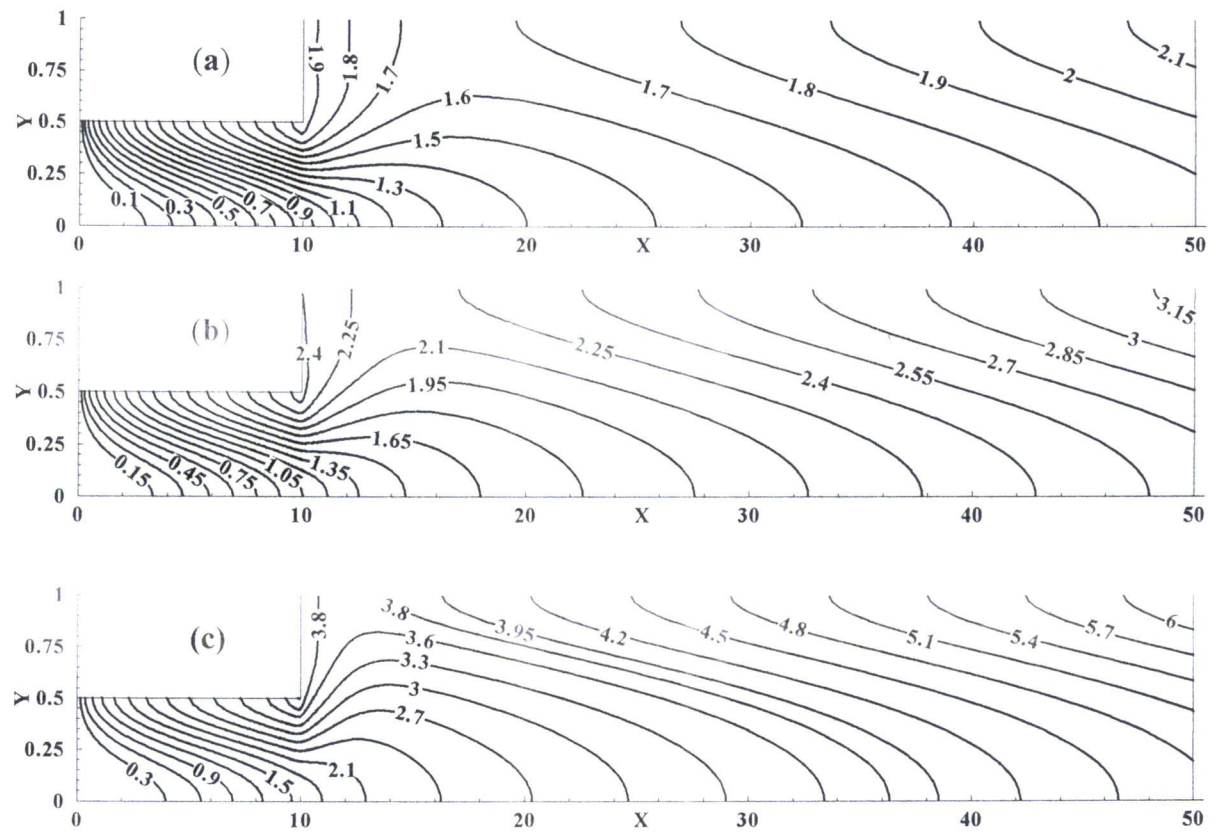


Figure [V-21] : Courbes isothermes pour $Pr=1.0$, $Re=100$, $Ye=0$ (a) ; 1.0 (b) et 4.0 (c)

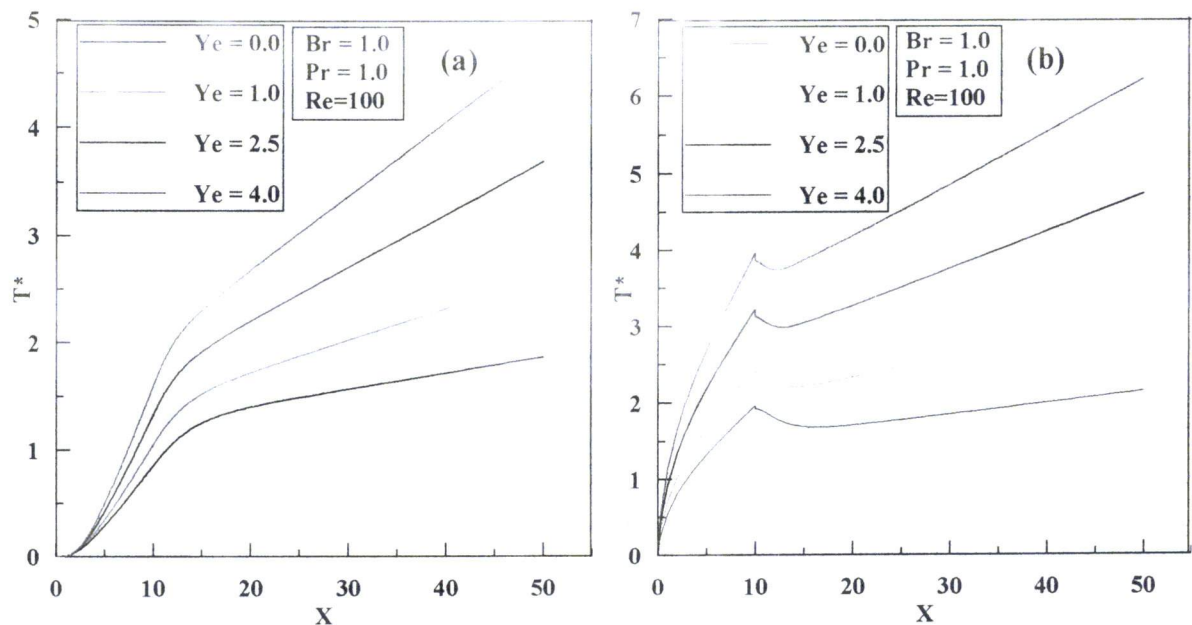


Figure [V-22] : Evolution de la température pour $Re=100$, $Pr=1$, et différentes valeurs de Ye . (a) sur l'axe de symétrie, (b) au niveau des parois solides.

V.4 Conclusion :

L'écoulement laminaire à travers un élargissement brusque d'un fluide à seuil de contrainte a été investi dans cette partie de notre travail. Les résultats obtenus nous ont permis plusieurs constatations sur les effets exercés par les paramètres de l'écoulement et les propriétés rhéologiques du fluide sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement.

Nous avons remarqué particulièrement l'effet antagoniste exercé par l'inertie et la contrainte seuil sur les zones de recirculation, les longueurs d'établissement et les longueurs de recollement ainsi que sur le coefficient de perte de charge locale (cas des faibles nombres de Reynolds).

L'analyse de l'importance du champ thermique généré par la dissipation visqueuse nous a permis de conclure que celui-ci ne peut être négligé dans le cas des fluides non-newtoniens fortement visqueux.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale :

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'investigation numérique d'un problème de Graetz généralisé, qui est défini par l'écoulement laminaire et non-isotherme d'un fluide viscoplastique idéal entre deux plaques planes et à travers un élargissement brusque. L'analyse de l'influence occasionnée par les caractéristiques rhéologiques de cette catégorie de fluides sur la structure de l'écoulement et l'intensité de l'échange thermique ont constitué de ce fait, les principaux objectifs de notre étude.

Avant d'exposer les différents cas de figures considérés dans ce travail, nous avons procédé dans une première partie, à une description détaillée de la méthode des éléments finis. Une technique numérique que nous avons adopté pour l'élaboration d'un code de calcul, qui permet la discrétisation du modèle mathématique exprimé en variables primitives (u, v, p) et sa résolution en adoptant une formulation mixte (vitesses-pression).

Dans une seconde partie, nous avons étudié l'écoulement laminaire entre deux plaques planes, d'un fluide viscoplastique idéal dont le comportement rhéologique est défini par la loi constitutive de Bingham. Les résultats de la simulation numérique, nous ont permis de proférer plusieurs constatations sur les effets subis par la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement, occasionnés par l'aspect non newtonien du fluide et les différents paramètres de l'écoulement. Nous résumons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus :

- L'existence d'un seuil de contrainte engendre l'apparition au niveau de l'axe de symétrie d'une zone dépourvue de déformation, qui forme un bouchon de fluide se déplaçant en bloque.
- L'accroissement de la contrainte seuil provoque la diminution de la vitesse du bouchon fluide et sa tendance à envahir la section d'écoulement.

- La longueur nécessaire à l'établissement d'un régime hydrodynamique diminue sensiblement avec l'accroissement de la contrainte seuil.
- Une augmentation du nombre de Reynolds entraîne à son tour une augmentation de la longueur d'établissement.
- La perte de charge par friction augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds et de la contrainte seuil.
- Une augmentation du nombre de Peclet entraîne une intensification de l'échange thermique dans la zone d'entrée.
- Le nombre de Nusselt établi reste insensible à l'accroissement du nombre de Peclet.
- L'accroissement de la contrainte seuil provoque une faible intensification de l'échange thermique ressentie dans les deux zones d'écoulement (zone d'entrée et zone d'établissement thermique).
- La dissipation visqueuse influe sensiblement sur le champ de température et l'intensité de l'échange thermique.

Dans la dernière partie de notre travail, nous avons procédé à l'analyse de l'écoulement laminaire et non-isotherme d'un fluide semi-solide de Bingham à travers un élargissement brusque. Les principales constatations déduites de cette analyse sont énumérées ci-dessous :

- A l'aval de l'élargissement, la longueur nécessaire à un établissement hydrodynamique de l'écoulement croit avec l'accroissement du nombre de Reynolds et décroît avec l'augmentation de la contrainte seuil.
- L'apparition d'une zone tourbillonnaire au coin de l'élargissement même lors d'un écoulement à faible nombre de Reynolds (écoulement rampant).
- Le point de recollement s'éloigne de l'élargissement (vers l'aval) avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'effet inverse est provoqué par l'accroissement de la contrainte seuil.
- Une augmentation du nombre de Reynolds conduit à une diminution du coefficient de perte de charge locale.

- Pour des faibles nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge locale croit avec l'accroissement de la contrainte seuil. l'effet inverse est constaté dans le cas des nombres de Reynolds élevés.
- L'auto réchauffage du fluide par effet de la dissipation visqueuse est d'autant plus important que les valeurs de Prandtl, de Reynolds et de la contrainte seuil sont élevées.

Le travail que nous avons réalisés, même s'il est restreint à une classe de fluides bien définie, nous a permis de mettre en évidence l'importance des effets de l'aspect non-newtonien sur la structure des écoulements et sur le transfert thermique associé.

Finalement, nous conviendrons bien de la nécessité d'entreprendre des recherches appropriées à chaque classe de fluides. Ce qui sans doute, nous procurera une meilleure assimilation de ces phénomènes, et qui nous servira d'atout principal pour les mieux contrôler.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Abdalis, S. S., Mitsoulis, E., and Markatos, N. C.**, 1992. Entry and exit flows of Bingham fluids. *Journal of Rheology*, 1992, 36, 2, 389-407.
- [2] **Ahmed, M.E.S.** , 2000. Laminar heat transfer for thermally developing flow of a Hershel Bulkley fluid in a square duct. *Int comm.. heat Transfer* vol 27, pp1013-1024,2000.
- [3] **Ahmet Pinarbsu and M.I.**, 2002. Non isothermal channel flow of a Newtonian fluid with viscous heating. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* vol. 29 N°8, Pp1094-1107, 2002..
- [4] **Back, L., and Roshke, E.**, 1972. Shear layer regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *J. Appl. Mech.* , 94, 677-681.
- [5] **Barletta, A.**, 1997. Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation. *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 40, n°1, pp. 15-26.
- [6] **Basu, T., and Roy, D. N.**,1985. Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation. *Int. J. Heat Transfer*, 28. 699-701.
- [7] **Berardi, P. G., Cuccurullo, G., Acierno, D., and Russo, P.**, 1995. Viscous dissipation in duct flow of molten polymers. *Proceedings of Eurotherm Seminar*, 46, pp 39-43, Pisa, Italy, July (1995).
- [8] **Bird, R. B., Armstrong, R. C., and Hassager, O.**, 1987. *Dynamics of polymeric liquids. (Vol. I, Fluid Mechanics)*, John Wiley and Sons, New York.
- [9] **Blackwell, B. F.**, 1985. Numerical solution of the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow with constant wall temperature. *ASME Journal of Heat transfer*, Vol. 107, pp. 466-468.
- [10] **Boger, D. V.**, 1981. Circular entry flows of inelastic and viscoelastic fluids. In *Advances in Transport Processes*, Wiley, New York, Vol. 2, pp. 43-98.
- [11] **Cho, Y. I., and Hartnett, J. P.**, 1982. Non-Newtonian fluids in circular pipe flow. *Adv. Heat Transfer* 15, pp. 59-141.

- [12] **Choi, H.G., and Yoo, J.Y.**, 1994. Streamline upwind scheme for the segregated formulation of the Navier-Stokes equation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 25, 145-161, 1994.
- [13] **Cotta, R. M., and Özisik, M. N.**, 1986. Laminar forced convection of power law non-Newtonian fluids inside ducts. *Wärme Stoffübertragung* 20, 211-218.
- [14] **Dang, V. D.**, 1983. Heat transfer of power-law fluid at low Peclet number flow. *ASME Trans. J. Heat Transfer* 105, pp. 542-549.
- [15] **De Vahl Davis, D.**, 1983. Natural convection of air in a square cavity: A benchmark solution, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [16] **Ellwood, K. R. J., Georgiou, G. C., Papanastasiou, T. C., and Wilkes, J. O.**, 1991. Laminar jets of Bingham plastic liquids. *Journal of Rheology*, 1990, 34, 787-812.
- [17] **Fletcher, D., Maskel, S., and Patrick, M.**, 1985. Heat and mass transfer computations for laminar flow in axisymmetric sudden expansion. *Computers Fluids*, 13, 207.
- [18] **Garrioch, S. H., and James, D. F.**, 1997. A finite-element study of Newtonian and power-law fluids in conical channel flow. *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, pp. 341-345.
- [19] **Grigull, U.**, 1956. Wärmeübergang and nicht-Newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung. *Chem. Ing. Techn.* 28, pp. 553-556.
- [20] **Habib, M. A., and Whitelaw, J. H.**, 1982. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numer. Heat trans.*, 5, 145.
- [21] **Hartnett, J. P.**, 1994. Single phase channel flow forced convection heat transfer. *Proceedings of the 10th International Heat Transfer Conference*, Vol. 1, pp. 247-258. Taylor and Francis, Bristol, PA (1994).
- [22] **Hsu, C. J.**, 1967. An exact mathematical solution for entrance region laminar heat transfer with axial conduction. *Applied Scientific Research*, Vol. 17, pp. 359-376.
- [23] **Irvine, T. F., and Karni, J.**, 1987. Non-Newtonian fluid flow and heat transfer. In *Handbook of single-phase convective Heat Transfer* (Edited by Kakaç, S., Shah, R. K., and Aung, W.), Chap. 20, Wiley, New York.

- [24] **Jay, P., Magnin, A., and Piau, J. M.**, 2002. Numerical simulation of viscoplastic fluid flows through an axisymmetric contraction. *J. Fluids Eng.*, Vol. 124, 3, pp. 700-705, September 2002.
- [25] **Johnston, P. R.**, 1991. Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1209-1217.
- [26] **Kahin, K., Nguyen, V.T., et Lebouche, L.**, 1997. Ecoulement des fluides non newtoniens a travers des élargissements brusques .*Inter comm. heat mass transfer* vol 24 N°8 pp1103-1112, 1997.
- [27] **Kays, W. M., and Grawford, M. E.**, 1993. *Convective heat and masse transfer*. 3rd Ed. McGraw-Hill, New York.
- [28] **Khezzar, L., Whitelaw, J. H., and Yianneskis, M.**, 1985. An experimental study of round sudden expansion flows. *Proc. 5th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Cornell University, 5-25.
- [29] **Lawal, A., and Mujumdar, A. S.**, 1992. The effects of viscous dissipation on heat transfer to power fluids in arbitrary cross-sectional ducts. *Wärme Stoffübertragung* 27, 437-446.
- [30] **Lin, P., and Julina, Y.**, 1996. Numerical approach to model heat transfer in polymer melts flowing in constricted channels. *Numerical heat transfer Part A*. 30 pp103-123,1996.
- [31] **Lin, T., Hawks, K. H., and Leindenfrost, W.**, 1983. Analysis of viscous dissipation effect on thermal entrance heat transfer in laminar pipe flows with convective boundary conditions. *Wärme stoffübertragung*, 17. 97-105.
- [32] **Lin, T., and Shah, V. L.**, 1978. Numerical solution of heat transfer to yield power-law fluids flowing in the entrance region. *Proc. Of the 6th International Heat Transfer Conference*, 5, 317-322, Tornto 1978.
- [33] **Liou, C. T., and Wang, F. S.**, 1990. Solutions to the extended Graetz problem for a power-law fluid with viscous dissipation and different entrance boundary conditions. *Numer. Heat Transfer*, A17, pp. 91-108.

- [34] **Macagno, E. O., and Hung, T. K.,** 1967. Computation and experimental study of a captive annular eddy. *J. Fluid Mech.*, 28, pp. 43-64.
- [35] **Maiga, S.E.B., et Nguyen, C.T.,** 2003. Transfert thermique d'un nano fluide dans un tuyau chauffé uniformément à la paroi. 6^{ème} colloque inter universitaire Franco-Québécois thermique des systèmes 26-28 mai 2003 Québec.
- [36] **Mayne, D.A., Usmani, A. S., and Crapper, M.,** 2000. h-adaptive finite element solution of high Rayleigh Number thermally driven cavity problem, *int. j. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, Vol. 10, pp, 598-615, 2000.
- [37] **McNaughton, K. J., and Sinclair, C. G.,** 1966. Submerged jets in short cylindrical flow vessels. *J. Fluid Mech.*, 25, 367.
- [38] **Min, T., Yoo, J. Y., and Choi, H.,** 1997a. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –I. Analytical approach- thermally fully developed flow and thermally developing flow (The Graetz problem extended). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 3025-3037.
- [39] **Min, T., Yoo, J. Y., Choi, H. G., and Choi, H.,** 1997b. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II. Numerical approach- Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 3689-3701.
- [40] **Min, T., and Yoo, J. Y.,** 1999. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe with uniform wall heat flux, the Graetz problem extended. *ASME*, Vol. 121, August 1999.
- [41] **Oliveira, P. J., and Pinho, F. T.,** 1997. Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18, 518-529.
- [42] **Oliveira, P.J., and Pinho, F.T.,** 1998. A general correlation for the local loss coefficient in Newtonian axisymmetric sudden expansion . *International journal of heat and fluid flow* 19 1998 pp(655-660)
- [43] **Ou, J. W., and Cheng, K. C.,** 1973. Viscous dissipation effects on thermal entrance region heat transfer in pipes with uniform wall heat flux. *Applied Scientific Research*, Vol. 28, pp. 289-301.

- [44] **Papanastasiou, T. C.**, 1987. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 1987, 31, 385-404.
- [45] **Pinho, F. T., Oliveira, P. J., and Miranda, J. P.**, 2003. Pressure loss in the laminar flow of shear-thinning Power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24, 747-761.
- [46] **Prusa, J., and Manglik, R. M.**, 1994. Asymptotic and numerical solutions for thermally developing flows of Newtonian and non-Newtonian fluids in circular tubes with uniform wall temperature. *Numer. Heat Transfer*, A26, pp. 199-217.
- [47] **Quaresma, J. N. N., and Macêdo, E. N.**, 1998. Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts. *Braz. J. Chem. Eng.* Vol. 15, n°1, Sao Paulo, Mars 1998.
- [48] **Sellars, J. R., Tribus, M., and Klein, J. S.**, 1956. Heat transfer to laminar flow in a round tube of flat conduit – The Graetz problem extended. *ASME transaction*, Vol. 78, pp. 441-448.
- [49] **Shah, R. K., and London, A. L.**, 1978. Laminar flow forced convection in ducts. *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic Press, New York.
- [50] **Siegel, R., Sparrow, E. M., and Hallman, T. M.**, 1958. Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux. *Applied Scientific Research*, Sec. A7, pp. 386-392.
- [51] **Stieglmeier, M., Tropea, C., Weiser, N., and Nitsche, W.**, 1989. Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions. *J. Fluids Eng.*, 111, 464-471.
- [52] **Tadmor, Z., and Gogos, C. G.**, 1979. Principles of polymer processing. Wiley, New York, pp. 1-692.
- [53] **Viana, M. J. G., Nascimento, U. C. S., Quaresma, J. N. N., and Macêdo, E. N.**, 2001. Integral transform method for laminar heat transfer convection of Herschel-Bulkley fluids within concentric annular ducts. *Braz. J. Chem. Eng.* , vol. 18 , no.4, São Paulo, Dec. 2001.

- [54] **Vradis, G. C., Dougher, J., and Kumar, S.,** 1993 . Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36 n° 3, pp. 543-552.
- [55] **Wan, D.C., Patnaik, B.S.V., and Wei, G.W.,** 2001. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 40: 199-228, 2001.
- [56] **Wissler, E. H., and Schechter, R. S.,** 1959. The Graetz-Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic. *Chemical Engineering Progress Symposium, Series 29*. Vol.55, pp. 203-208.