

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed Bouguerra Boumerdes

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques



Mémoire de fin d'études

Pour L'obtention du Diplôme de Master en

Mathématiques Financières

Thème

Modèles stochastiques des taux d'intérêt

Réalisé par

Brahimi Amina

Moussaoui Rania

Soutenue le 30/06/2019 , devant le Jury composé de :

<i>Président</i>	Mr A.Rahmoune
<i>Promoteur</i>	Mr K.Khaldi
<i>Examinatrice</i>	Mme S.Meddahi

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Toute notre gratitude, grâce et remerciement est à Allah le plus puissant qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

*Nous remercions également, le directeur de mémoire **Mr. KHALED KHALDI** pour notre encadrement, ses directives et sa disponibilité.*

*En outre, nous remercions **Mr. A.RAHMOUNE** président du jury , qui a accepté de présider l'honorable jury, malgré ses nombreuses occupations.*

*Également, nous remercions **Mme. S. MEDDAHI** pour la pertinence de ses remarques avisées.*

Nous remercions aussi tout le corps enseignant et administratif qui a contribué à notre formation universitaire.

Nous remercions également, tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à notre formation du primaire à la poste graduation.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier tous notre amis sans exception.

Dédicaces

Je rends mes profondes gratitude à ALLAH qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail.

J'exprime mes profondes gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leurs soutiens

et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Je dédie ce modeste travail à mes frères et mes sœurs.

Sans oublier toute ma famille et mes amis

et à ma binôme Rania.

Amina BRAHIMI

Dédicaces

Je rends mes profondes gratitude à ALLAH qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail.

J'exprime mes profondes gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leurs soutiens

et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Je dédie ce modeste travail à mes sœurs.

Sans oublier toute ma famille et mes amis.

et à ma binôme Amina.

Rania MOUSSAOUI

Table des matières

1	Calcul Stochastique	8
1.1	Introduction	9
1.2	Rappels de probabilité	9
1.2.1	Espace de probabilité filtré	9
1.2.2	Variable aléatoire	10
1.2.3	Indépendance de Variable aléatoire	10
1.3	Généralités sur les processus stochastiques	11
1.3.1	Processus Stochastique	11
1.3.2	Processus adapté	11
1.3.3	Espérance conditionnelle	12
1.3.4	Martingale	12
1.3.5	Temps d'arrêt	13
1.3.6	Processus gaussien	13
1.4	Mouvement brownien	14
1.4.1	Mouvement brownien géométrique	14
1.4.2	Mouvement brownien et martingale	14
1.5	Intégrale stochastique	15
1.5.1	Construction de l'intégrale stochastique	15
1.5.2	Propriétés de l'intégrale stochastique	16
1.6	Calcul d'Itô	17
1.6.1	Processus d'Itô	17
1.6.2	Formule d'Itô	17
1.7	Equation différentielle stochastique	18
1.7.1	Exemples d'EDS	19
1.8	Changement de probabilité	20
2	Évaluation des options	22
2.1	Introduction	23
2.2	Concepts fondamentaux	23

2.3	Les options	25
2.3.1	Définitions	25
2.3.2	Les déterminants du prix d'une option	25
2.4	Parité Put-Call	26
2.5	Modèle à temps discret	26
2.5.1	Modèle binomial à une période	27
2.5.2	Modèle binomial à plusieurs périodes	29
2.6	Modèle à temps continu (Black et Scholes)	33
2.6.1	L'EDP du modèle de Black-Scholes	34
2.6.2	Résolution analytique de l'équation de Black-Scholes dans le cas d'un Call et d'un Put européen	36
3	Modèles stochastiques des taux d'intérêt	43
3.1	Introduction	45
3.2	Définitions et notations des taux de base	45
3.3	Equation aux dérivées partielles des taux	47
3.4	Modélisation des taux d'intérêt	48
3.4.1	Modèles de taux d'intérêt à un facteur	48
3.4.2	Modèle sans arbitrage	56
3.4.3	Modèle de taux d'intérêt à deux facteurs	58
4	Simulation	62
4.1	Introduction	63
4.2	Discrétisation des processus de diffusion	63
4.2.1	Discrétisation approximative	63
4.3	Simulation des trajectoires du mouvement brownien	64
4.4	Simulation des trajectoires des processus de diffusion	67
4.4.1	Modèle de Black-Scholes	67
4.4.2	Modèle de Vasicek	69
4.4.3	Modèle de CIR	70
4.4.4	Modèle de Hull & White	72
4.4.5	Modèle de gaussien à deux facteurs	73
4.5	Simulation de trajectoire réelle et estimé	75
4.5.1	Modèle de Vasicek	75
4.5.2	Modèle de CIR	76

Introduction générale

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue un rôle des plus importants, et est parfois à l'origine de crises économiques. Cet vient, de l'importance prise par les marchés financiers dans les économies contemporaines. Il apparaît alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix.

parmi ces modèles, on s'intéressera, dans ce mémoire, au modèle de Black et Scholes (1973) qui est considéré comme un modèle en temps continu très connu dans le monde de la finance moderne. Puis viennent par la suite d'autres modèles dont celui de Vasicek (1977), CIR(1985), Hull & White(1990) et gaussien à deux facteurs (2005) et d'autres afin de modéliser l'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêts.

Dans notre travail, nous essaierons de fournir des explications et des réponses à la question suivante :

- Est-ce-que le comportement des taux d'intérêt calculé par des modèles stochastiques dans notre travail est-il proche de la réalité ?

Pour répondre à la question ci-dessus, ce travail est présenté en quatre chapitres :

Le premier chapitre, est un chapitre introductif qui présente les différents aspects des processus stochastiques. On introduira le mouvement brownien et ses propriétés principales, intégration stochastique (des notions sur le calcul d'Itô) et les équations différentielles stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les concepts et définitions de base concernant les options, les stratégies financières et couverture du portefeuille. Ensuite on donne une brève description du modèle de Black-Scholes d'évaluation d'option européenne, en expliquant les formules d'évaluation des options.

Au troisième chapitre, on introduit les notions des taux de base, la modélisation stochastique à temps continu, nous présenterons des modèles de taux en finance à savoir le modèle de Vasicek, CIR, Hull & White ainsi que le modèle gaussien deux facteurs.

Le quatrième et dernier chapitre, est une application des notions introduites dans les chapitres précédents. Nous commençons par simuler les trajectoires du mouvement Brownien, ensuite, la simulation des modèles financiers étudiés précédemment, Black-Scholes et Vasicek, CIR, Hull & White et le modèle gaussien deux facteurs.

Chapitre 1

Calcul Stochastique

1.1 Introduction

L'objet de ce premier chapitre est de donner un rappel des principales notions mathématiques qui seront utiles dans les prochains chapitres.

1.2 Rappels de probabilité

1.2.1 Espace de probabilité filtré

1.2.1.1 Tribu

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble quelconque, et \mathcal{A} la famille de parties de Ω est une tribu (ou σ algèbre) sur Ω si elle vérifie les propriétés suivantes :

- i) Contenant l'ensemble vide et l'ensemble Ω ($\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$).
- ii) Stable par passage au complémentaire ($A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$).
- iii) Stable par union dénombrable ($(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$, et de même pour l'intersection).

On dit alors que (Ω, \mathcal{A}) est un espace mesurable.

Exemple 1.1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$ on peut définir plusieurs tribus sur Ω .

1. $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ est la plus petite tribu (tribu grossière).
2. $A \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu (i.e $A = 2 \subset \Omega$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ est une tribu).
3. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ est la plus grande tribu (tribu complète).

Définition 1.2. Soit B une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, l'intersection de toutes les tribus contenant B est une tribu, elle est appelée tribu engendrée par B ou la plus petite tribu contenant B , elle est notée

$$\sigma(B) = \bigcap_{\mathcal{A}(\text{tribu}), B \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple 1.1

$B \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ est la tribu engendrée par $\sigma(B)$; (si $B = \{\{2\}\}$, alors $\sigma(B) = \mathcal{A}_1$).

Définition 1.3. La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est la tribu sur X engendrée par la famille des intervalles ouverts ou fermés de X .

Exemple 1.3. $X = \mathbb{R}$, La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les familles suivantes de parties de \mathbb{R} :

1. $A = \{]a, b[: -\infty < a < b < +\infty\} = \{ \text{intervalles ouverts dans } \mathbb{R} \}$
2. $A = \{]a, b[: -\infty < a < b < +\infty\} = \{ \text{intervalles ouverts à gauche dans } \mathbb{R} \}$
3. $A = \{[a, b[: -\infty < a < b < +\infty\} = \{ \text{intervalles ouverts à droite dans } \mathbb{R} \}$
4. $A = \{[a, b] : -\infty < a < b < +\infty\} = \{ \text{intervalles fermés dans } \mathbb{R} \}$

Définition 1.4. G une sous tribu de \mathcal{A} est une tribu, telle que si $A \in G$ alors $A \in \mathcal{A}$. On note $G \subset \mathcal{A}$.

1.2.1.2 Espace de probabilité

Définition 1.5. Un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) muni d'une mesure de probabilité \mathbb{P} avec $P(\Omega) = 1$. De manière évidente, P est une application de \mathcal{A} dans $[0,1]$, Telle que :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n)$

1.2.1.3 Filtration

Définition 1.6. Une filtration est une suite croissante emboîtée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous tribus de \mathcal{A} .

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$ est un espace de probabilité filtré.

1.2.2 Variable aléatoire

Définition 1.7. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et B est un ensemble borélien ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), une telle application X de Ω dans \mathbb{R} sera dite variable aléatoire si

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

1.2.3 Indépendance de Variable aléatoire

Définition 1.8. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité.

i) On dit que deux événement A et B sont indépendants (on note $A \perp B$) si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- ii) Deux variables aléatoires X et Y sont indépendants si est seulement si les deux événements $A \in X$ et $B \in Y$ sont indépendantes, c'est à dire

$$P(A \in X, B \in Y) = P(A \in X) \times P(B \in Y)$$

1.3 Généralités sur les processus stochastiques

1.3.1 Processus Stochastique

Définition 1.9. Un processus stochastique (aléatoire) en temps continu est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires indicées par les éléments d'un ensemble de temps T (en général $T = \mathbb{R}^+$), définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Un processus $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres t (généralement le temps) et de la variable aléatoire $\omega \in \Omega$.

Où $t \in T$ fixé, l'application $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, $t \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté $X_t(\omega) = X(\omega, t)$.

Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est continue (c'est à dire les trajectoires sont continues).

Exemple 1.4. On considère un guichet de poste, soit X_t le nombre de personnes en attente à l'instant t , $(X_t)_{t \in T}$ constitue un processus stochastique.

1.3.2 Processus adapté

Définition 1.10. Soit (Ω, \mathcal{A}) et (Ω', \mathcal{A}') deux espaces mesurables, une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}'$; où l'on note :

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$$

Définition 1.11. Un processus X est dit mesurable si l'application

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega) \quad \text{est mesurable.} \end{aligned}$$

Définition 1.12. Un processus stochastique $X_t(\omega)$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable $\forall t \geq 0$.

1.3.3 Espérance conditionnelle

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et G une sous tribu de \mathcal{F} et soit X une variable aléatoire positive intégrable ($EX = \int_{\Omega} X dP < +\infty$).

Définition 1.13. [15] Soit G une sous tribu de \mathcal{F} , l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire (v.a) intégrable X sachant G est la v.a. $E[X/G]$ définie par les deux propriétés suivantes :

- i) $E[X/G]$ est G -mesurable.
- ii) Pour tout $A \in G$, $\int_A X dP = \int_A E[X/G] dP$

1.3.3.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle [17]

1. $E(\alpha X + \beta Y/G) = \alpha E(X/G) + \beta E(Y/G)$, α, β deux constantes
2. $E(E(X/G)) = E(X)$ (l'espérance total)
3. $E(X/G) = X$ si X est G -mesurable
4. $E(X/G) = E(X)$ si X est indépendante de G
5. $E(XY/G) = Y E(X/G)$ si Y est G -mesurable

1.3.4 Martingale

Définition 1.14. Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ un espace de probabilité filtré. Un processus stochastique adapté $(M_n)_{n \geq 0}$ à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de variable aléatoire intégrable (i.e $E(|M_n|) < \infty$) est :

- i) Une \mathcal{F}_n - sur-martingale si pour tout, $n \in \mathbb{N}$, $E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq M_n$
- ii) Une \mathcal{F}_n - sous-martingale si pour tout, $n \in \mathbb{N}$, $E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq M_n$
- iii) Une \mathcal{F}_n -martingale si le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ qui à la fois une sous-martingale et une sur-martingale (C'est-à-dire $E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) = M_n, \forall n \in \mathbb{N}$)

1.3.4.1 Propriétés

1. L'espérance d'une martingale est constante pour tout $n \geq 0$, c-à-d

$$E(M_0) = E(M_1) = \dots$$

$$E(M_{(n+1)}) = E(E(M_{(n+1)})/\mathcal{F}_n) = E(M_n) = \dots = E(M_0)$$

2. processus est complètement déterminé par sa valeur terminale, c'est-à-dire

$$E(M_N/\mathcal{F}_n) = M_n, n < N$$

Exemple 1.5. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendants de même loi ($p(X_n = 1) = p(X_n = -1) = \frac{1}{2}$) et $E(X_1) = 0$, et soit $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ une marche aléatoire symétrique à valeurs dans \mathbb{Z} ou \mathbb{R} .

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\forall n \geq 1$. Alors, $(S_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, en effet :

i) S_n est \mathcal{F}_n mesurable $\forall n \geq 1$

ii) $E(|S_n|) \leq \sum_{i=1}^n E(|X_i|) < \infty$

iii) $E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(S_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$
 $= E(S_n/\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$
 $= S_n + E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$ (S_n est \mathcal{F}_n mesurable)
 $= S_n + E(X_{n+1})$ (X_{n+1} est indépendante de \mathcal{F}_n)
 $= S_n$ (X_n sont toutes centrées)

1.3.5 Temps d'arrêt

Définition 1.15. Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ un espace de probabilité filtré. On appelle temps d'arrêt une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathcal{N}$.

Exemple 1.6. Soit X_n est un processus adapté à (\mathcal{F}_n) , alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire τ_a définie par :

$\tau_a = \inf\{n \in \mathcal{N}, X_n \geq a\}$ est un temps d'arrêt, car $\{\tau_a \leq n\} = \{\exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \{X_i \geq a\}\} = \bigcup_{i=0}^n \{X_i \geq a\} \in \mathcal{F}_n$

Car chaque événement $\{X_i \geq a\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$, du fait que le processus X_n est adapté et que $i \leq n$.

1.3.6 Processus gaussien

Définition 1.16. Une variable aléatoire gaussienne (*v.a.g*) de paramètre m et σ est une v.a. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet pour densité

$$t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, alors X est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite (ou de loi gaussienne centrée et réduite).

Définition 1.17. Le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t)_{t \geq 0}$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire :

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \text{ est une variable aléatoire gaussienne.}$$

1.4 Mouvement brownien

Définition 1.18. Le mouvement brownien ou processus de Wiener, est un processus gaussien à accroissements indépendants et stationnaires, ce qui veut dire que pour toute $0 < t_1 < \dots < t_n$ les accroissements $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, 0 \leq i \leq n-1\}$ sont indépendants, et de plus $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ suit une loi gaussienne centrée, de variance $(t_{i+1} - t_i)$.

Définition 1.19. Les variables aléatoires $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, t_{i+1} > t_i \geq 0$, sont appelées accroissements du processus $\{W_t, 0 \leq t\}$.

1.4.1 Mouvement brownien géométrique

Le mouvement brownien géométrique sert couramment de modèle de prix d'actifs financiers.

Définition 1.20. Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ est M.B.S .

Un mouvement brownien géométrique de dérive b et de coefficient de diffusion σ , est un processus de la forme :

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

avec une condition initiale X_0

Ce processus est s'appelle aussi processus "log-normal".

1.4.2 Mouvement brownien et martingale

Si $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard alors :

- i) W_t est une \mathcal{F}_t - martingale

ii) $W_t^2 - t$ est une \mathcal{F}_t - martingale

iii) $\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est une \mathcal{F}_t - martingale

1.5 Intégrale stochastique

Le but est de déterminer l'intégrale stochastique du type $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour tous $t \in [0, T]$, notre problème qui se pose c'est de donner un sens à cette variable aléatoire.

Par exemple, on a f et g deux fonctions, si g est régulière et f est dérivable donc, on intègre g par rapport à f , on obtient cette intégrale :

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds$$

Lorsque f n'est pas dérivable mais à variation bornée, on s'en sort à une intégrale qui s'appelle intégrale de Stieljes s'écrit sous forme :

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

et note $\pi_n = \max|t_{i-1} - t_i|$

Dans ce cas, on ne peut pas définir cette limite car le mouvement brownien n'est pas à variation bornée.

1.5.1 Construction de l'intégrale stochastique

On se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ et soit $(B_t)_{t \geq 0}$ est un \mathcal{F}_t - M.B.S définie sur cet espace.

On construit l'intégrale stochastique sur un ensemble des processus élémentaires $\xi = \xi(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ définie sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$

Définition 1.21. (*Processus élémentaire*)

On dit que $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ (pour tout $T \in \mathcal{R}^+$, T est fini), s'écrit :

$$H_t(B) = \sum_{i=1}^p \Phi_i(B) 1_{]t_{i-1}, t_i]}(t)$$

Avec Φ_i est bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$

Définition 1.22. (*Intégrale stochastique*)

L'intégrale stochastique continue du processus élémentaire $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, notée

$$\int_0^t H_s dB_s$$

Et définie par, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{1 \leq i \leq K} \Phi_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \Phi_{k+1} (B_t - B_k)$$

S'écrit aussi :

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{1 \leq i \leq p} \Phi_i (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t})$$

1.5.2 Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique est définie sur l'ensemble des processus élémentaires ξ , satisfait les propriétés suivantes :

1) *La linéarité*

Soit θ et ψ deux processus et a, b des constantes. On a

$$\int_0^t (a\theta_s + b\psi_s) dB_s = a \int_0^t \theta_s dB_s + b \int_0^t \psi_s dB_s$$

2) *La continuité*

Le processus $(\int_0^t \theta_u dB_u, 0 \leq t \leq T)$ est continu à des trajectoires du mouvement brownien.

3) *Propriété de la martingale*

On a $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$ est une \mathcal{F}_t -martingale si :

$$E\left(\int_0^t \theta_u dB_u / \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s \theta_u dB_u \quad \forall s \leq t$$

Avec sa moyenne et sa variance,

$$E\left(\int_0^t \theta_u dB_u\right) = 0$$

$$VAR\left(\int_0^t \theta_u dB_u\right) = E\left(\int_0^t \theta_u^2 du\right)$$

4) *Propriété d'isométrie*

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

1.6 Calcul d'Itô

On introduit un calcul différentiel c'est un outil qui permet de calculer les intégrales stochastiques, On appelle ce calcul « Calcul d'Itô ».

1.6.1 Processus d'Itô

Définition 1.23. Soit $(B_t)_{t>0}$ est un M.B adaptée à \mathcal{F} sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit processus d'Itô s'il s'écrit de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

D'une autre manière

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

X_0 est \mathcal{F}_0 - mesurable, $(b_t)_{t>0}$ et $(\sigma_t)_{t>0}$ sont deux processus adaptés à \mathcal{F}_t , telle que

$$\int_0^T |b_s| ds < \infty \quad P.p.s$$

$$\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty \quad P.p.s$$

1.6.2 Formule d'Itô

Théorème 1.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continument dérivable et la seconde dérivée de f est bornée. On a

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

Théorème 1.2. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

et $g(t, X_t)$ est une fonction deux fois différentiable par rapport à X et une fois en t (i.e de classe $C^{1,2}$), on a

$$g(t, X_t) = g(0, X_s) + \int_0^t g'_s(s, X_s) ds + \int_0^t g'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g'_{xx}(s, X_s) d \langle X_s \rangle$$

Proposition 1.1. Soient X_t et Y_t deux de processus d'Itô, tels que

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

et

$$dY_t = b'_t dt + \sigma'_t dB_t$$

Donc

$$X_t Y_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + \langle X_t, Y_t \rangle$$

avec la convention $\langle X_t, Y_t \rangle = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds$

1.7 Equation différentielle stochastique

Les équations différentielles stochastiques sont la généralisation des équations différentielles ordinaires prenant en compte un terme de bruit c-à-d une perturbation aléatoire (stochastique), on va définir ici la notion d'équation différentielle stochastique. Typiquement, une équation différentielle stochastique est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.1)$$

avec b et σ des applications boréliennes de $\mathbb{R} \times [0, T]$ sont les coefficients de l'équation (1.1) et dB_t est la différentielle d'un mouvement brownien B , $x \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale.

En effet, cette équation n'a pas de sens car la différentielle dB_t n'a pas de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire sous forme d'intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (1.2)$$

et si l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$ a un sens, donc l'équation intégrale (1.2) a un sens.

Définition 1.24. Soient B un mouvement brownien et X_0 une variable aléatoire sont définis sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , avec B et X_0 sont indépendants, et soient b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Un processus X \mathcal{F}_t -adaptée est une solution de cette équation différentielle stochastique qui s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

où sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient σ est appelé coefficient de diffusion, tandis que b est appelé dérive ou **drift**.

La solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) est appelée processus de diffusion.

Théorème 1.3. (Théorème d'existence et d'unicité)

Si b et σ sont des fonctions continues et bornées dans $[0, T]$, telle qu'il existe une constante $K < +\infty$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$:

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2. $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|^2)$
3. $E(|X_0|^2) < +\infty$

Alors il existe une unique solution de l'équation (1.2) sur l'intervalle $[0, T]$.

Cette solution est unique dans le sens que $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux solutions d'EDS, alors $0 \leq t \leq T$

$$X_t = Y_t \quad \text{P.p.s}$$

1.7.1 Exemples d'EDS

1.7.1.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

considérons l'EDS proposé par Langevin (en 1908) qui s'appelle équation de Langevin, s'écrit sous forme :

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.3)$$

on peut l'écrire aussi

$$X_t = X_0 - c \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s \quad (1.4)$$

où $\sigma, x \in \mathbb{R}$ et $c > 0$, et B un brownien indépendant de X_0 . Cette équation X_t modélise le problème physique qui est le mouvement d'une particule en suspension dans un liquide.

La solution unique de l'EDS (1.3) est un processus $(X_t)_{t>0}$, ce processus est appelé le processus d'Ornstein Uhlenbeck.

La formule d'Itô montre que cette solution peut s'écrire sous forme d'intégrale :

$$X_t = xe^{-ct} + \sigma \int_0^t e^{-c(t-s)} dB_s \quad (1.5)$$

1.7.1.2 Modèle de Black-Scholes

on considère l'EDS suivante :

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1.6)$$

On utilise cette EDS en mathématiques financières pour modéliser l'évolution de taux d'intérêt, de produit financier ... ; On peut dire que ce modèle de Black-Scholes est très utile aux marchés financiers.

La solution unique de cette EDS (1.6) qui s'appelle le mouvement brownien géométrique, s'écrit :

$$X_t = x \exp\left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) \quad (1.7)$$

1.8 Changement de probabilité

Définition 1.25. on dit que \mathbb{P}^* est une probabilité risque neutre associée à \mathbb{P} si :

- i) $\mathbb{P}^*(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0$
- ii) $(S_t)_{t \geq T}$ est une martingale sous \mathbb{P}^* .

Théorème 1.4. (*Radon-Nikodym*)

Étant donné deux mesures de probabilité équivalentes \mathbb{P} et \mathbb{Q} (c-à-d si elles ont le même ensemble d'évènements impossible) construites sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) , il existe une

variable aléatoire Y à valeurs positives telle que

$$\mathbb{Q}(A) = E^{\mathbb{P}}(Y\delta_A)$$

Cette variable aléatoire Y est souvent notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Et pour tout $A \in \mathcal{F}$, δ_A dénote la fonction indicatrice de l'évènement :

$$\delta_A = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 1.5. (*Cameron-Martin-Girsanov*)

Soit $\gamma = \{\gamma_t : t \in [0, T]\}$, un processus $\{\mathcal{F}_t\}$ -prévisible tel que $E^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$.

Il existe une mesure \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{F}) telle que

1. \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P}
2. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left[- \int_0^T \gamma_t dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right]$
3. Le processus $W^{\mathbb{Q}} = \{W_t^{\mathbb{Q}} : t \in [0, T]\}$ défini par $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \gamma_s ds$ est un $(\{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.

La condition $E^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$ est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Chapitre 2

Évaluation des options

2.1 Introduction

Nous nous limiterons, dans ce chapitre, à l'étude de deux modèles. Le premier modèle étudié sera le modèle binomial qui a été développé indépendamment par Cox, Ross et Rubinstein (1979), d'une part, et par Rendelman et Barter (1979), d'autre part. Le second sera le modèle de Black et Scholes (1973), également développé indépendamment par Merton (1973). Le modèle d'évaluation des options de Black et Scholes reste le plus utilisé dans les milieux professionnels, alors que de nombreuses extensions ont été et sont encore développées dans les milieux académiques.

2.2 Concepts fondamentaux

Définition 2.1. (*action*)

Une action est un titre de propriété d'une société conférant à son détenteur une participation d'une partie de capital ainsi que des dividendes. Il s'agit donc d'une fraction du capital de l'entreprise émise afin de se financer sur les marchés, cela vaut certains droits notamment le droit de participer au succès de l'entreprise, le droit sur les bénéfices réalisés.

La société qui détermine la valeur initiale de l'action, ensuite, en fonction de l'offre et de la demande va être évoluer sur les marchés.

Définition 2.2. (*Couverture*)

Le problème de couverture de l'option (hedging) consiste à trouver une stratégie financière basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au pay-off de l'option c-à-d consiste à construire un portefeuille de couverture.

Définition 2.3. (*Problème de pricing*)

Un problème majeur apparaît sur les options Call et put. Par exemple dans un Call l'acheteur est toujours protégé car il choisit l'exercice de l'option donc il ne craint rien, par contre le vendeur son risque est plus grand car sa perte est possiblement inférieure.

Le problème de pricing d'une option consiste à déterminer la valeur de l'option à toute date t , souvent appelée **la prime**, notée C .

Définition 2.4. Un portefeuille est une collection d'actifs financiers détenus par un investisseur ou un individu sur le marché, c-à-d il désigne le nombre d'actifs ou de produit dérivé qu'il possède. Ce dernier peut contenir des options, des actions, des devises... Il s'appelle un portefeuille initial s'il n'y a pas la gestion des risques.

Mais nous nous intéressons sur les portefeuilles autofinancés pour la couverture des options.

Définition 2.5. Un portefeuille **autofinancé** est une stratégie d'achat ou de vente. Un portefeuille Π est un couple $\Pi = (\phi_t, \psi_t)$ avec ϕ_t est une quantité d'actif risqué S et ψ_t est une quantité d'actif sans risque R . Sa valeur est donnée par :

$$\Pi_t = \phi_t S_t + \psi_t R_t$$

avec la condition autofinancement :

$$d\Pi_t = \phi_t dS_t + \psi_t dR_t$$

Définition 2.6. (*Stratégie autofinancante*)

on dit que une stratégie est autofinancante s'il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argent dans le portefeuille entre le temps t et $t+1$.

Pour répondre à ces problèmes, on a besoin d'une hypothèse fondamentale appelée absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A).

On s'intéresse à l'évolution du marché jusqu'à une date d'échéance T fixé.

Définition 2.7. On dit qu'il y a une opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille autofinancé Π tel que

$$\Pi_0 = 0, \quad \Pi_t \geq 0, \quad \forall t \leq T, \quad \text{et} \quad P(\Pi_T > 0) > 0$$

La notion d'opportunité d'arbitrage, correspond à la notion économique : "suppose qu'il est impossible de gagner de l'argent sans prendre de risque à instant donné". Cette dernière est reliée à une probabilité risque neutre .

Théorème 2.1. Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement si il existe au moins une probabilité risque neutre.

Définition 2.8. (*Produit financier répliquable*)

On dit qu'un produit financier est répliquable ou atteignable, s'il existe une stratégie autofinancante de couverture de ce produit. Autrement dit, le produit financier S est dit répliquable si on peut construire un portefeuille qui dépend de différents produits du marché et qui à chaque instant t vaut S_t .

Définition 2.9. (*marché complet*)

on considère un marché où l'hypothèse d'A.O.A est vérifiée, ce marché est dit **complet** si tout produit financier est répliquable.

On suppose dans la suite que le marché sera complet.

2.3 Les options

On s'intéresse dans ce chapitre aux options européennes.

2.3.1 Définitions

Définition 2.10. (*Call Européen*)

Une option d'achat européenne (call) est un contrat qui donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date future, notée T , appelée maturité, et à un prix fixé dans le contrat, noté K , appelé **strike**.

L'acheteur ayant donc le droit et non pas le devoir d'exercer l'option à la maturité. Il va exercer son option si $S_T > K$, si non il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le "pay-off" de l'option, est donc :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

Définition 2.11. (*Put Européen*)

Une option de vente européenne (put) est un contrat qui le droit le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent à une date future et à un prix fixé dans le contrat. Avec les mêmes notations que pour le call, on obtient que le pay-off du put est :

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$$

2.3.2 Les déterminants du prix d'une option

1. **Le prix de l'actif sous-jacent** : C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. Il peut être un actif physique (matières premières ou agricoles,...), ou instrument financiers (actions, obligations, taux d'intérêt,...).
2. **Le prix d'exercice (ou Strike)** : C'est le prix auquel l'acheteur de l'option peut acheter l'actif sous-jacent (Call), ou vendre l'actif sous-jacent (Put). Ce prix d'exercice est déterminé lors de la négociation de l'option.
3. La durée $\tau = T - t$ restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option.
4. **Taux sans risque** : c'est le taux d'intérêt d'un placement sur lequel on prête de l'argent avec un risque de défaillance nul.
5. **La volatilité** : est le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Pour les options, il faut distinguer deux types de volatilités :

- **La volatilité historique**

Elle représente la volatilité du prix d'un sous-jacent observé au cours de séances de négociation sur une certaine période de temps dans le passé.

- **La volatilité implicite**

La volatilité implicite est un outil clé dans la gestion des risques car elle permet, à partir de la connaissance d'un prix d'option de mettre en place des stratégies de couverture et les mesures de sensibilité associées.

2.4 Parité Put-Call

On peut construire une relation entre un Put et Call européen, dans un marché sans arbitrage, appelé relation de parité Put-Call. Cette relation est très pratique pour déterminer le prix de l'un des deux dans le modèle de Black-Scholes.

Avec le Call et le Put européen sont basés sur le même actif sous-jacent S_T , de maturité T et de prix d'exercice (strike) K .

Et pour démontrer cette relation on va considérer deux stratégies de portefeuilles présentant le même profil de gain à l'échéance T donc ayant la même valeur à tout instant t .

Supposons qu'on achète un Call et on vend un Put avec une maturité T et un prix d'exercice K identiques, donc notre gain ou perte à l'échéance est de

$$\forall t \in [0, T] \quad C_t - P_t = (S_t - K)_+ - (K - S_t)_+ = S_t - K$$

De plus, si on achète une action et emprunter un montant égal à la valeur actuelle du prix d'exercice dans un actif sans risque, donc on obtient la relation de parité Put-Call de la forme

$$\forall t \in [0, T] \quad C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

2.5 Modèle à temps discret

Le modèle binomial était le premier modèle qui permet d'évaluer les options, développé par Cox, Ross et Rubinstein en 1979. Ce modèle est très pratique pour calculer la valeur d'une option en décomposant l'intervalle jusqu'à maturité en n parties égales pour le rendre plus réaliste. Il repose sur l'hypothèse que le prix de l'action sous-jacent prend deux valeurs à la période suivante, et donc pour généraliser ce modèle en augmentant le nombre de périodes en n période.

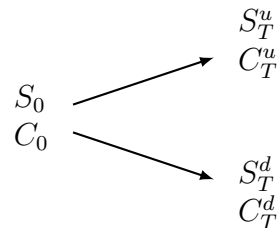
On considère un marché financier qui comporte deux actifs, un actif sans risque R qui représente l'argent placé à la banque au taux r dont la valeur est notée R_t , et son processus de prix est donné par

$$R_t = R_0 e^{rt}$$

Et un actif risqué S de valeur S_0 en $t = 0$ et pour tout $t > 0$ l'actif S peut prendre deux valeurs différentes, une valeur haute $S_t^u = uS_t$ et une valeur basse $S_t^d = dS_t$ avec u et d deux constantes tel que $d < u$, donc S_t est le processus de prix de l'actif risqué S .

2.5.1 Modèle binomial à une période

Considérons une action du prix S_t d'un actif sous-jacent, si l'action elle cote aujourd'hui S_0 (le cours de l'action à l'instant 0) et la valeur de l'option C_0 (la prime), dans un arbre binomial à une période $[0, T]$ cette action peut prendre deux directions possibles une hausse $S_T^u > S_0$ (avec la probabilité p) et une baisse $S_T^d < S_0$ (avec la probabilité $1 - p$)



avec le couple (C_T^u, C_T^d) est le prix à l'échéance T .

L'objectif c'est de trouver la valeur de la prime C_0 . Dans ce cas là, il est possible de construire un portefeuille de réplcation pour valoriser le prix de l'option qui est composé à la fois d'une certaine quantité de Δ action (i.e une fraction d'action d'un actif sous-jacent) et une quantité de b (valeur d'actif sans risque).

En effet, le couple (Δ, b) construit un portefeuille de couverture. Donc on va calculer la quantité de Δ et b par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \Delta S_T^u + (1+r)b = C_T^u \\ \Delta S_T^d + (1+r)b = C_T^d \end{cases} \quad (2.1)$$

La solution représente la composition du portefeuille dans la modèle binomial, qui est donnée par

$$\Delta = \frac{C_T^u - C_T^d}{S_T^u - S_T^d} = \frac{C_T^u - C_T^d}{S_0(u - d)}$$

$$b = \frac{C_T^d u - C_T^u d}{(1+r)(u - d)} = \frac{C_T^u - \Delta S_T^u}{1+r} = \frac{C_T^d - \Delta S_T^d}{1+r}$$

Donc il aisé de déduire le prix du Call en début de période :

$$C_0 = \Delta S_0 + b \quad (2.2)$$

De plus, la valeur acquise de cette action s'écrit :

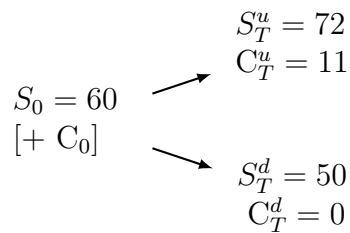
$$C_0 = \left[pC_T^u - (1-p)C_T^d \right] e^{-rt} \quad (2.3)$$

Et on posant

$$p = \frac{S_0 e^{rt} - S_T^d}{S_T^u - S_T^d} = \frac{e^{rt} - d}{u - d}$$

Exemple 2.1. Considérons un Call européen qui va être expirer dans une période pour un actif sous-jacent une action, le prix de l'exercice est 61 . L'option ne verse pas de dividende, elle cote aujourd'hui 60 , et ne peut prendre que deux valeurs à l'échéance T, soit une hausse de 72 et une baisse de 50 , avec un taux sans risque $r = 5\%$ et une maturité $T = 3$ mois.

On peut illustré ces informations grâce à un arbre binomial :



Alors, le détenteur selon cette arbre va exercer son option si S_T s'élève au prix de 72 dans le cas (up) , avec son gain à l'échéance T est :

$$C_T^u = \max(S_T - K, 0) = \max(72 - 61, 0) = 11$$

Donc il va vendre son Call et empocher sa valeur C_0 , où C_0 est la prime versé à l'instant $t = 0$.

Si non n'exerce pas l'option si S_T diminue au prix de 50 dans le cas (down), donc il prend le risque de perdre C_0 avec le pay-off à l'échéance T est :

$$C_T^d = \max(S_T - K, 0) = \max(50 - 61, 0) = 0$$

On définit une stratégie pour éliminer le risque à la maturité T et de pouvoir couvrir son contrat, qui détermine aussi la valeur de la prime C_0 , on construit cette stratégie par un portefeuille de couverture qui contiendra respectivement Δ d'action (une quantité de part de sous-jacent) et b valeur d'actif sans risque.

D'où la valeur de ce portefeuille est :

$$\begin{cases} 72\Delta + 1.05b = 11 \\ 50\Delta + 1.05b = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La solution unique de ce système (2.4) de deux inconnues est

$$\begin{cases} \Delta = 0.5 \\ b = -23.81 \end{cases}$$

Autrement dit, le détenteur achète 0.5 d'action ($\frac{1}{2}$ d'action) et emprunte 23.81, donc il va encaisser à l'instant $t=0$ la valeur de l'option, qui est égale à :

$$C_0 = 60 \times \Delta + b = 6.19$$

2.5.2 Modèle binomial à plusieurs périodes

On reprend la modélisation d'évolution du prix sous-jacent d'un modèle binomial à un seul actif risqué dans un monde à plusieurs périodes, considérons un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes, pour tout $i = 0, \dots, N$, $t_i = t_0 + i\Delta t$, avec $\Delta t \geq 0$ est un petit réel positif.

On a à l'instant $t = 0$ l'actif S_0 est connu, et étant données deux réels distincts $d < u$ vérifiant $u.d = 1$. Ce modèle est restrictif au temps $t_i = t_0 + i\Delta t$ on obtient $i+1$ valeurs possibles donné par

$$S_t = S_{i\Delta t} \in \{S_0 d^{i-j} u^j, j = 0, \dots, i\}$$

avec j est le nombre de hausse, $(i - j)$ le nombre de baisse.

On prend pour les paramètres u et d les valeurs suivantes $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, on peut écrire aussi de cette façon $\left(d = \frac{1}{u}, u = \frac{1}{d}\right)$, et σ est une constante s'appelle une volatilité.

Soit une option européenne d'un Call, son pay-off à la maturité T est

$$C_T^m = \max(S_T^m - k, 0)$$

Et pour calculer le prix du Call à l'instant initial, cette méthode procède une marche arrière sur l'intervalle du temps $[0, T]$, on peut écrire la formule suivante :

$$C_t = e^{-r\Delta t} \left(p C_T^u + (1 - p) C_T^d \right)$$

Avec p est la probabilité hausse , s'écrit

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

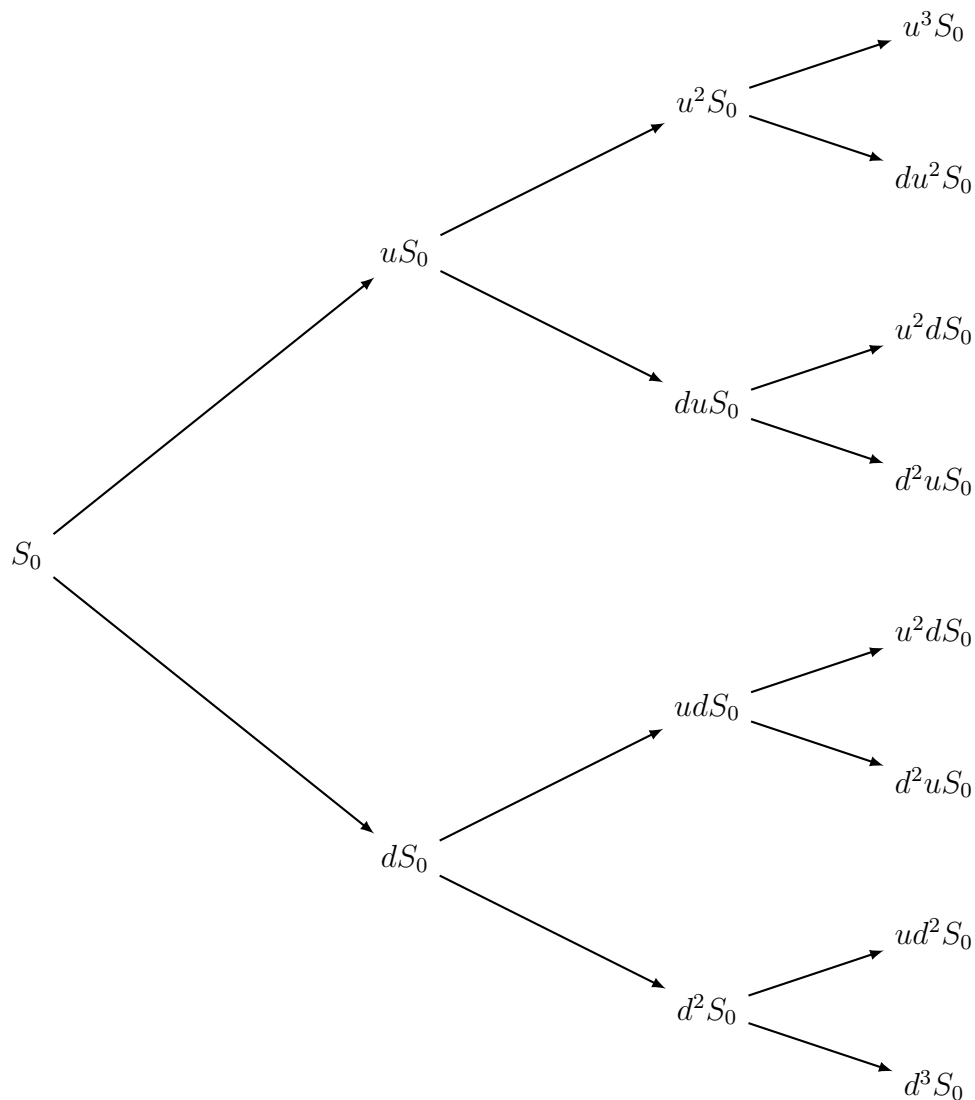
où Δt , égale à :

$$\Delta t = T/n$$

T : la maturité (avec la durée mensuelle on la rend annuelle)

n : le nombre de périodes

Donc, on prend par exemple l'arbre binomial sur l'évolution du prix de l'actif S_t , qui correspond à trois périodes est



Exemple 2.2. On va prendre une action qui cote aujourd'hui $S_0 = 80$, son échéance est $T = 6$ mois, le taux sans risque $r = 5\%$, la volatilité du titre $\sigma = 40\%$, et le prix d'exercice de l'actif $K = 85$. Le Call de cette action va être évalué sur 3 périodes.

En effet, on va d'abord calculer Δt et les paramètres u et d :

$$\Delta t = T/n = \frac{6}{12} \times \frac{1}{3} = 0.166$$

et

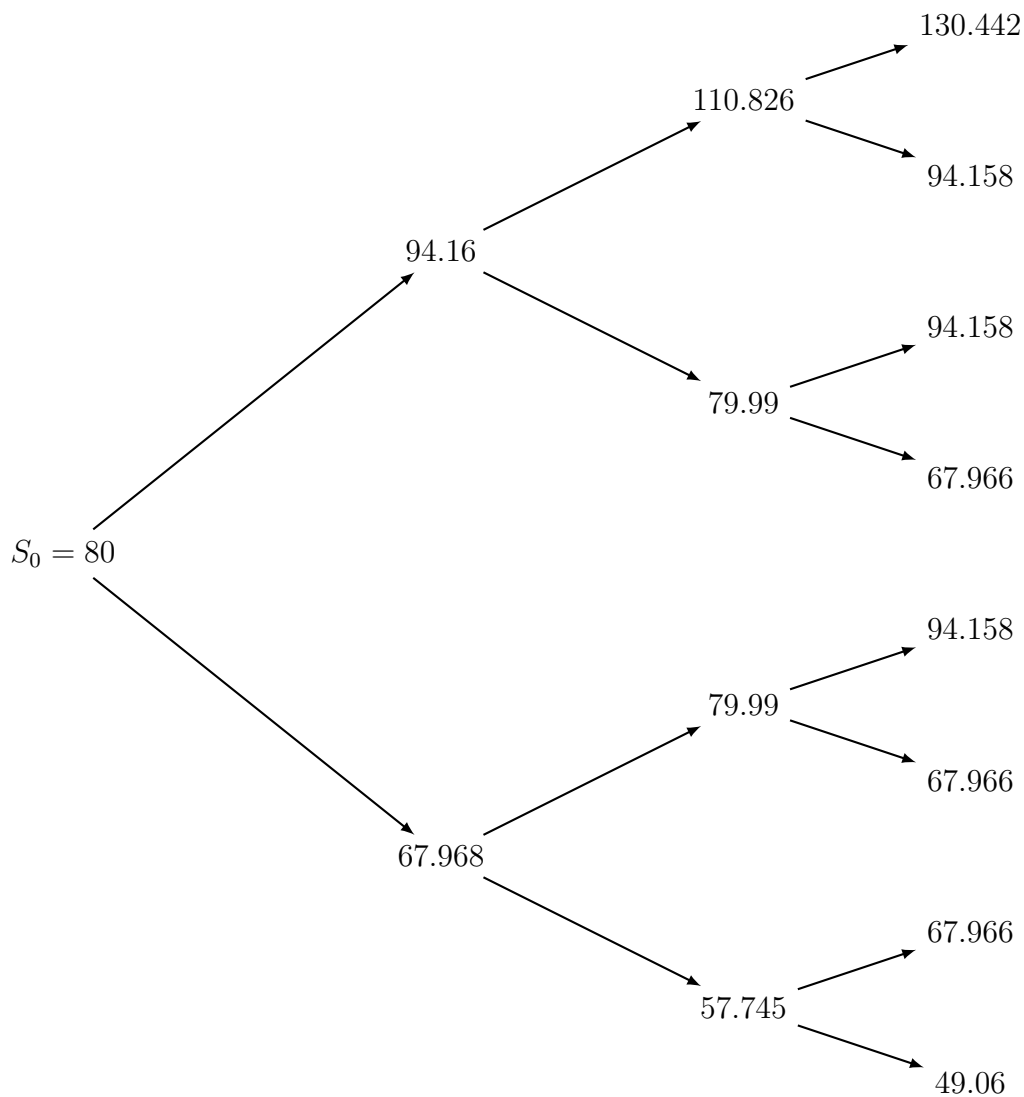
$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.4\sqrt{0.166}} = 1.1770 \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u} = 0.8496 \end{cases}$$

Maintenant, il faut calculer la probabilité risque neutre p est

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \times 0.166} - 0.8496}{1.1770 - 0.8496} = 0.4848$$

et la probabilité baisse égale à $(1 - p) = 0.5151$

A l'aide d'un arbre binomial on va décrire la dynamique de l'actif S_t :



L'étape suivante, on calculons la prime c'est le prix du Call à l'instant $t = 0$

$$\max(S_T - K, 0) = \begin{cases} 130.422 - 85 = 45.442 \\ 94.158 - 85 = 9.158 \\ 67.966 - 85 = 0 \\ 49.06 - 85 = 0 \end{cases}$$

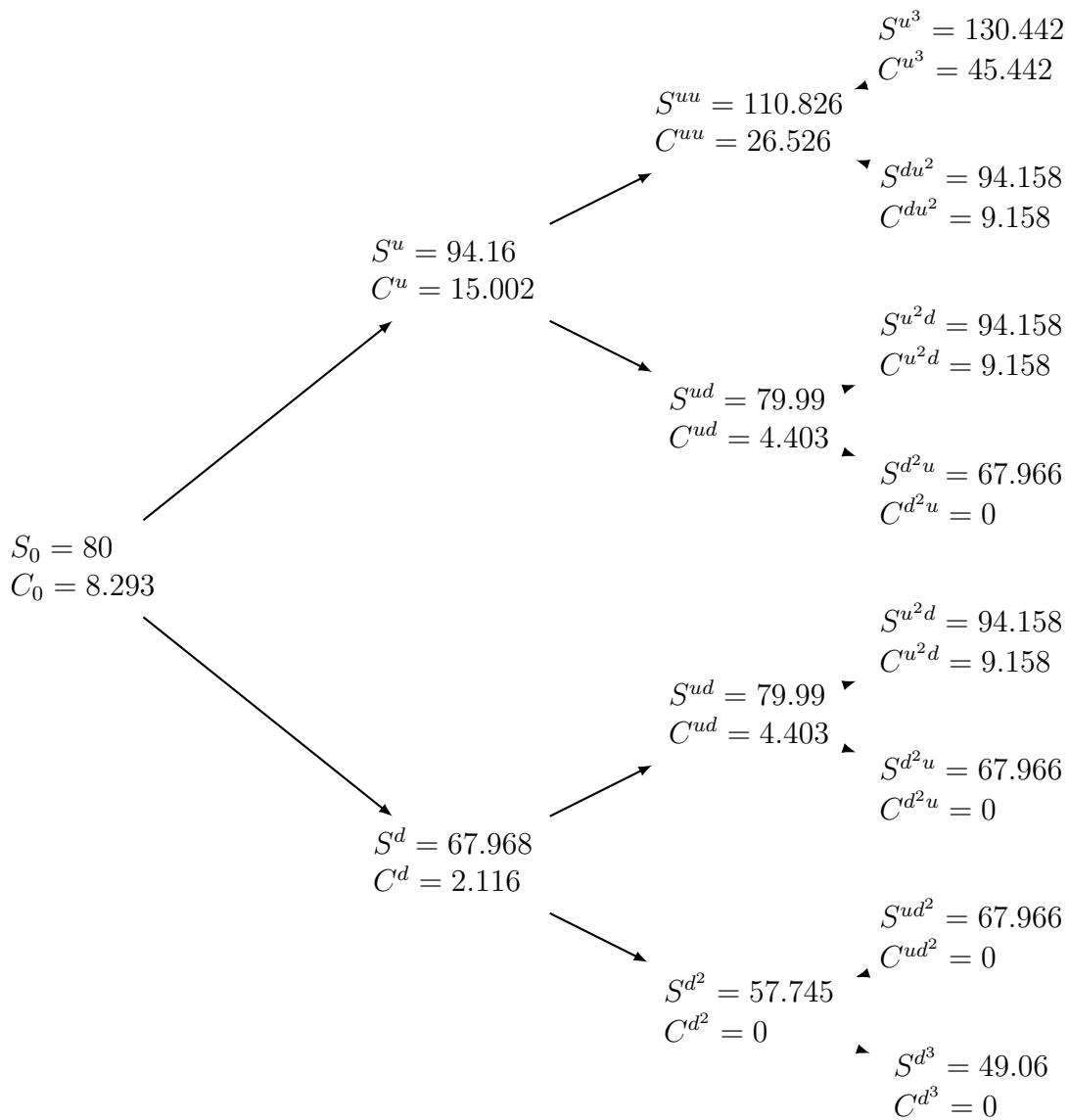
On continue le calcul avec cette formule,

$$C_t = e^{-r\Delta t} \left(pC_T^u + (1-p)C_T^d \right)$$

1. $(0.4848 \times 45.442 + 0.5151 \times 9.158)e^{-0.05(0.166)} = 26.526$
2. $(0.4848 \times 9.158 + 0.5151 \times 0)e^{-0.05(0.166)} = 4.403$
3. $(0.4848 \times 0 + 0.5151 \times 0)e^{-0.05(0.166)} = 0$
4. $(0.4848 \times 26.526 + 0.5151 \times 4.403)e^{-0.05(0.166)} = 15.002$
5. $(0.4848 \times 4.403 + 0.5151 \times 0)e^{-0.05(0.166)} = 2.116$
6. $(0.4848 \times 15.002 + 0.5151 \times 2.116)e^{-0.05(0.166)} = 8.293$

Donc la valeur de l'option de l'actif S à la date initiale $t = 0$ égale à $C_0 = 8.293$

On va illustrer ces informations dans l'arbre :



2.6 Modèle à temps continu (Black et Scholes)

Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option européenne sur une action ne distribuant pas de dividendes. De plus, il repose implicitement sur les hypothèses supplémentaires, et notamment que :

- il n'y a pas de frais de transaction lors des achats et ventes d'actions ou d'options.
- le taux d'intérêt sans risque existe et il est constant.
- les actifs sont divisibles à l'infini.
- Le marché est complet.
- Le temps est continu.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

- La volatilité est connue et constante.
- Le cours de l'action S suit un processus d'évolution stochastique en temps continu appelé mouvement Brownien géométrique et défini par(EDS) :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

de solution explicite

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

Les coefficients de dérive μ et de diffusion σ sont constants et W_t un mouvement brownien standard, S_0 est le cours observé à la date 0.

2.6.1 L'EDP du modèle de Black-Scholes

Dans ce paragraphe on va présenter une façon de résoudre le problème de l'évaluation et de la couverture d'une option, par la dérivation du prix d'arbitrage selon Black et Scholes. On suppose avoir un marché financier où il y a :

1. Un actif sans risque dont le prix S^0 vérifie

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt \tag{2.5}$$

où r est une constante.

2. Un actif risqué dont le prix S_t vérifie

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{2.6}$$

On s'intéresse à une option européenne de prix noté E_t à l'instant t ($0 \leq t \leq T$), sur actif risqué S (ayant l'équation (2.6) comme élément représentative de l'évaluation de son prix), qui rapporte à son détenteur $H = h(S(T))$ à l'échéance T (où h est la fonction pay-off), alors on a :

$$E_T = h(S(T))$$

De plus, il existe une application $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, on a :

$$E_t = u(t, S_t)$$

On peut donc appliquer le Lemme d'Itô, ce qui nous donne :

$$dE_t = du(t, S_t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2}(t, S_t)dt$$

En remplace dS_t par l'équation (2.6) , on obtient :

$$dE_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t) dW_t \quad (2.7)$$

Étant donné qu'on est dans un marché complet, alors il existe un portefeuille qui se présente comme suit :

$$V_T(X, Y) = X_t S_t^0 + Y_t S_t \quad \forall t \in [0, T]$$

Où

X_t : donnant à chaque instant t la quantité d'actif sans risque de zéro-coupon, noté S_t^0 , détenus dans le portefeuille.

Y_t : La quantité de l'actif risqué S dans le portefeuille à chaque instant, telle que la richesse V_T associée à l'instant final T soit :

$$V_T(X, Y) = h(S(T)) = E_T$$

On suppose que

$$dV_t(X, Y) = X_t dS_t^0 + Y_t dS_t \quad (2.8)$$

(condition d'autofinancement)

Or en remplaçant (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.8) , on trouve :

$$dV_t(X, Y) = (rX_t S_t^0 + \mu Y_t S_t)dt + \sigma Y_t S_t dW_t = dE_t \quad (2.9)$$

En comparant cette équation avec l'équation (2.7), on obtient l'égalité suivant :

$$\sigma Y_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t)$$

D'où

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t)$$

Et d'autre part

$$rX_t S_t^0 + \mu Y_t S_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2}(t, S_t)$$

et on a

$$u(t, S_t) = X_t S_t^0 + Y_t S_t$$

D'où

$$X_t = \frac{u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial S_t}(t, S_t)}{S_t^0}$$

En utilisant le résultat précédent, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2}(t, S_t) = ru(t, S_t)$$

avec pour condition terminale $u(T, S_T) = h(S(T))$

Tout d'abord nous transcrivons l'équation de Black et Scholes pour une option Call européenne, notons $C(S, t)$, qui correspond au u précédemment, où S représente le prix du sous-jacent et $t \in [0, T]$, T étant maturité.

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(t, S_t) = rC(t, S_t) \quad (2.10)$$

Avec $C(T, S_t) = h(S_T) = (S_T - E)^+$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces relations soient satisfaites est que C soit solution de l'EDP parabolique suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) = rC(t, x) \quad \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+$$

Avec $C(T, x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$

C'est l'équation aux dérivées partielles de Black Scholes.

2.6.2 Résolution analytique de l'équation de Black-Scholes dans le cas d'un Call et d'un Put européen

Pour résoudre l'EDP de Black-Scholes, on va procéder à divers changements de variable pour se ramener à une équation de la chaleur de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

De solution u définit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, 0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Pour obtenir ce type d'équation, on procède tout d'abord à un changement de variable qui permet de supprimer les coefficients de S et S^2 de l'équation de Black-Scholes. Pour ce faire on pose :

$$\begin{cases} S = Ee^x \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \\ C(S, t) = Ev(\tau, x) \end{cases}$$

Alors à partir de ce changement de variable on a :

$$v(\tau, x) = \frac{1}{E} C\left(Ee^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right)$$

avec $x = \ln(S/E)$ et $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$.

Ensuite on dérive l'expression $C(Ee^x, T - 2\tau/\sigma^2)$ une fois par rapport à τ et deux fois par rapport à x :

- par rapport à τ

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau} \right) = -\frac{2}{\sigma^2 E} \frac{\partial C}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 E}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

- par rapport à x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S}$$

D'où :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{E}{S} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{E} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{E}{S^2}$$

En introduisant ces équations dans l'EDP de Black-Scholes (2.10) on obtient :

$$-\frac{\sigma^2 E}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + rE \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma^2 E}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - rEv = 0$$

On divise sur $-\frac{\sigma^2 E}{2}$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-a)\frac{\partial v}{\partial x} + av = 0 \quad (2.11)$$

avec $a = \frac{2r}{\sigma^2}$

Ainsi pour résoudre l'équation, on passe du domaine

$$\begin{cases} t \in [0, T] \\ S \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Au nouveau domaine

$$\begin{cases} \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous avons alors comme condition initiale (en $\tau = 0$ puisque la condition est en $t = T$)

$$v(x, 0) = \frac{1}{E}C(Ee^x, T) = \frac{1}{E}\max(Ee^x - E, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

On applique un changement de variable, soit α et β deux réels on cherche v sous la forme

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

On dérive v par rapport à τ une fois et deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u(x, \tau) \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u(x, \tau) \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u(x, \tau) \right)$$

On remplace cela dans l'équation (2.11)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-a-2\alpha)\frac{\partial v}{\partial x} + (\beta - \alpha^2 + \alpha - a\alpha + a)v = 0$$

On doit éliminer les termes en $\frac{\partial u}{\partial x}$ et u , pour cela on résolve le système :

$$\begin{cases} 1 - a - 2\alpha = 0 \\ \beta - \alpha^2 + \alpha - a\alpha + a = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1-a}{2} \\ \beta = -\frac{(1+a)^2}{4} \end{cases}$$

D'où

$$v(x, \tau) = e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)x + \left(-\frac{(1+a)^2}{4}\right)\tau} u(x, \tau) \quad (2.12)$$

Elle est ici complet la condition initiale $v(x, \tau = 0)$

$$u(x, 0) = e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)x} v(x, 0) = e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)x} \max(e^x - 1, 0) = \max\left(e^{\frac{1+a}{2}x} - e^{\frac{a-1}{2}x}, 0\right)$$

u vérifie alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)x} \max(e^x - 1, 0) \end{cases}$$

La solution analytique de cette équation est :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)y} \max(e^y - 1, 0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

On note que :

- Si $y < 0$: $\max(e^y - 1, 0) = 0$ donc $u(x, \tau) = 0$
- Si $y > 0$: $\max(e^y - 1, 0) = e^y - 1$ donc

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{\left(\frac{1-a}{2}\right)y} (e^y - 1) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} dy$$

On utilise le changement de variable $b = \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$, sachant que $y = b\sqrt{2\tau} + x$ et donc $dy = \sqrt{2\tau}db$

On détermine

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u_0(b\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{b^2}{2}} db$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{(\frac{a+1}{2})(b\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{b^2}{2}} db - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{(\frac{a-1}{2})(b\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{b^2}{2}} db$$

On détaille le calcul de la primaire intégrale I_1 (celui de I_2 est similaire), dont on va essayer de le ramener à la loi de répartition normale centrée réduite :

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{(\frac{a+1}{2})(b\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{b^2}{2}} db$$

Nous avons la relation (2.12) dont on lui ajoute la quantité $e^{\frac{(1+a)^2}{4}\tau}$, ce qui donne :

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{(\frac{a+1}{2})(b\sqrt{2\tau}+x)} e^{\frac{(1+a)^2}{4}\tau} e^{-\frac{b^2}{2}} db$$

Après simplification on obtient

$$I_1 = \frac{e^{\frac{a+1}{2}x} e^{\frac{(1+a)^2}{4}\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(b - \frac{a+1}{2}\sqrt{2\tau} \right)^2} db$$

On pose : $p = b - \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2\tau}$, et donc $dp = db$

Lorsqu'on $b \rightarrow -\frac{x}{2\sqrt{\tau}}$ on a $p \rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{a+1}{2}\sqrt{2\tau}$, donc l'intégrale devient :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{a+1}{2}x + \frac{(1+a)^2}{4}\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{a+1}{2}\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp$$

Nous notons que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite s'écrit sous la forme suivante :

$$N(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

On pose également $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{a+1}{2}\sqrt{2\tau}$

On obtient alors : $I_1 = e^{\frac{a+1}{2}x + \frac{(1+a)^2}{4}\tau}(1 - N(-d_1))$

Or, pour tout $d_1 \in \mathbb{R}$, on a $N(d_1) + N(-d_1) = 1$

Finalement :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{a+1}{2}x + \frac{(1+a)^2}{4}\tau} N(d_1) \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{a+1}{2}\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$\begin{cases} I_2 = e^{\frac{a-1}{2}x + \frac{(a-1)^2}{4}\tau} N(d_2) \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{a-1}{2}\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

D'où $u(x, \tau) = I_1 - I_2$

Maintenant on calcul la valeur de $C(S, t)$ à partir de $u(\tau, x)$.

On a $C(S, t) = Ev(\tau, x)$ et $v(x, \tau) = e^{(\alpha x + \beta \tau)}u(x, \tau)$, alors $C(S, t) = Ee^{(\alpha x + \beta \tau)}u(x, \tau)$

Ainsi que :

$$\alpha = \frac{1-a}{2}, \quad \beta = -\frac{(1+a)^2}{4}, \quad x = \ln \frac{S}{E}, \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

On développe notre solution

$$\begin{aligned} C(S, t) &= Ee^{\frac{1-a}{2}x - \frac{(1+a)^2}{4}\tau} \left(e^{\frac{a+1}{2}x + \frac{(1+a)^2}{4}\tau} N(d_1) - e^{\frac{a-1}{2}x + \frac{(a-1)^2}{4}\tau} N(d_2) \right) \\ &= Ee^x N(d_1) - Ee^{-a\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

D'où

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Nous avons trouvés l'équation qui caractérise le prix d'une option Call européenne, maintenant on peut utiliser la relation Call-Put pour obtenir l'équation d'un Put européenne (de même maturité et de même Strike E).

$$C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}$$

Donc :

$$P(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

Après simplification on trouve :

$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

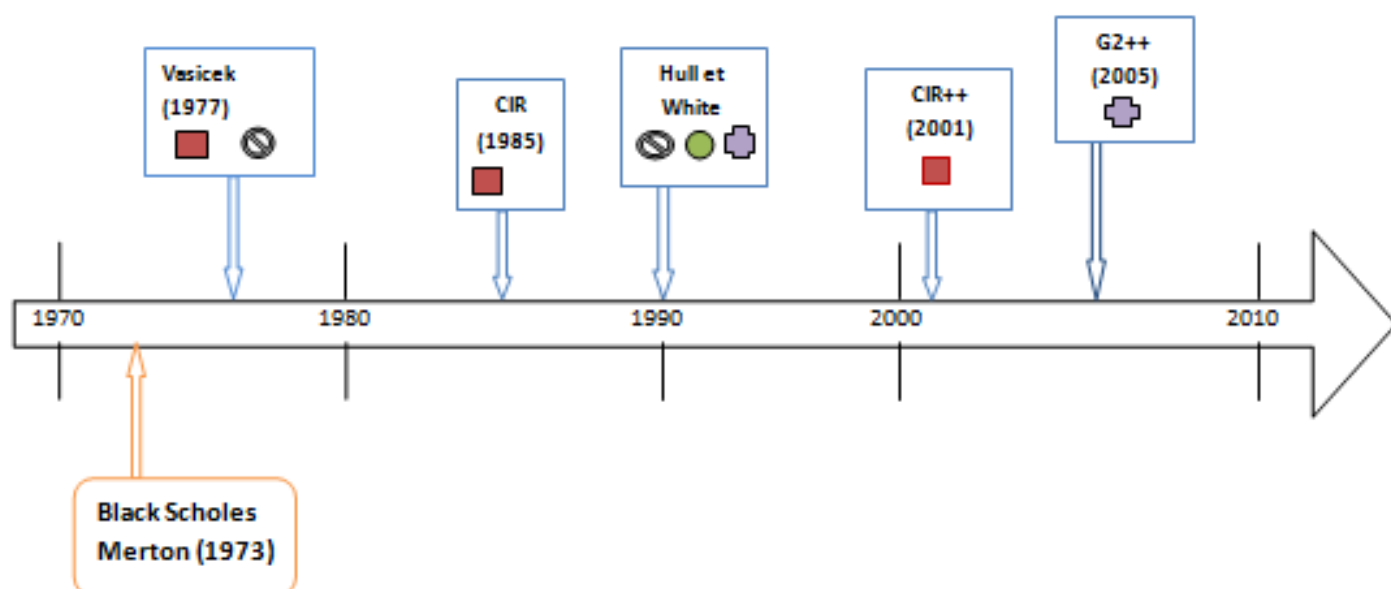
Chapitre 3

Modèles stochastiques des taux d'intérêt

Historique des modèles de diffusion

Légende :

- taux action
- Taux court
 - Taux forward instantané
 - Taux négatifs possibles
 - Reproduction de la courbe de taux initiale



3.1 Introduction

L'incertitude sur les mouvements futurs de taux d'intérêt est une partie importante du financement, parce qu'ils affectent la majorité des agents qui ont une certaine aversion au risque, et le risque est lié en particulier au taux d'intérêt. Pour permettre aux agents d'anticiper les risques futurs et contrent tous dangers éventuels qui peuvent menacer leur investissement, ils doivent effectuer une étude sur la structure par terme de taux d'intérêt.

Afin d'étudier le comportement des taux d'intérêt dans un environnement incertain stochastique, nous avons estimé qu'il est bon d'aborder dans la présent chapitre, la notion de taux d'intérêt et ses types, et quelques autres notions et points nécessaires pour nous faciliter.

3.2 Définitions et notations des taux de base

Définition 3.1. (*La structure à terme des taux*)

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux) est la fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau du taux d'intérêt associé.

Définition 3.2. L'intérêt consiste en une rémunération du capitale prêtée, versée par l'emprunteur au prêteur, il est fixe lors de la conclusion du contrat comme un pourcentage du capitale prêtée.[10]

Un taux d'intérêt est un prix qui s'applique à une somme d'argent prêtée ou empruntée. Pour l'emprunteur ou débiteur, le taux d'intérêt est le prix qu'il faut payer pour emprunter de l'argent. Pour le prêteur ou créancier, c'est la rémunération pour le service qu'il rend à l'emprunteur ainsi que pour le risque qu'il encourt de ne pas être remboursé. Ce taux est calculé an pourcentage de la somme empruntée ou prêtée. Le taux d'intérêt se détermine ainsi :

$$TR = \frac{Sr - Sp}{Sp} \times 100$$

Avec

- TR : taux d'intérêt
- Sr : somme remboursée
- Sp : somme prêtée

Ce taux dépend de conditions du marché, de la longueur du prêt (court terme, moyen terme, long terme) et de la réputation de l'emprunteur.

Définition 3.3. (*Le taux d'intérêt instantané [20]*)

Le taux $r(t)$ est le taux instantané au comptant, porté par un prêt devant être remboursé un instant après (la durée de cet instant étant infiniment petite). Il peut donc être défini comme la limite du taux d'intérêt $R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t}$, quand la maturité T tend vers t .

Formellement, on écrira :

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = - \lim_{T \rightarrow t} \frac{\ln B(t, T)}{T - t}$$

Définition 3.4. (*Taux d'intérêt forward*)

Un taux d'intérêt forward est un contrat effectué à l'instant t , on dit qu'il est instantané pour la maturité T la quantité

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}$$

Et on a

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

Peut on définir les prix de zéro-coupon forward à la date t pour l'expiration T et la maturité S par

$$B(t, T, S) = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

$B(t, T, S)$ est la valeur vue à la date t du montant à payer à la date T pour acheter l'obligation zéro-coupon qui versera un euro à la date S .

Définition 3.5. (*Taux court et taux long*)

Le taux d'intérêt est varié avec la durée de l'emprunt. Communément :

- le taux court terme est un taux appliqué aux opérations dont la période n'excède pas deux ans.
- le taux moyen terme est un taux appliqué aux opérations dont la période est comprise entre deux et cinq ans.
- le taux long terme est un taux appliqué aux opérations dépassant les cinq ans.

Définition 3.6. (*Taux zéro-coupon*)

Le coupon correspond à la somme d'argent versée par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance, et qui correspondent à des intérêts sur le marché.

Le taux zéro-coupon est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement qui n'engendrera aucun détachement de coupon intermédiaire jusqu'à la maturité.

Définition 3.7. (*Obligation zéro-coupon*)

Une obligation est un titre de créance négociable ou un actif financier de durée déterminée rapportant un intérêt généralement fixe appelé coupon (les coupons sont payables à des intervalles de temps réguliers, tous les ans, tous les semestres, voire tous les trimestres), émis par

des entreprises publiques ou privées, elle est représentée comme une dette financière à moyen, long terme.

On dit que l'obligation est de zéro-coupon lorsqu'elle ne verse aucun coupon pendant la durée de vie du titre, en effet les intérêts sont versés en totalité à l'échéance de l'emprunt.

Définition 3.8. (*Risque de taux d'intérêt*)

Le risque de taux d'intérêt correspond à de possibles pertes économiques dues au désinvestissement ou au réinvestissement des flux monétaires. Il occasionne un risque de moins-value temporaire ou définitif en capital.

3.3 Equation aux dérivées partielles des taux

Nous pouvons obtenir une EDP reliant aux prix des zéros-coupons dans le cas du modèle Black-Scholes, sous la probabilité historique \mathcal{P} on suppose une dynamique générale du taux spot

$$dr_t = \mu_r(t, r)dt + \sigma_r(t, r)dW_t \quad (3.1)$$

avec μ le drift du processus $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et σ sa volatilité, W_t est un mouvement brownien standard. Le prix zéro-coupon est une fonction du taux court (spot) : $B(t, T) = B(t, r, T)$ où B est une fonction réelle, en supposant que la fonction B soit régulière et de classe C^2 , on a par la formule d'Itô (T fixé) :

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) (t, r, T) dt + \sigma_r \frac{\partial B}{\partial r} (t, r, T) dW_t \\ &= B(t, T) \mu(t, r, T) dt + B(t, T) \sigma(t, r, T) dW_t \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où

$$\begin{cases} \mu(t, r, T) = \frac{1}{B(t, r, T)} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) (t, r, T) dt \\ \sigma(t, r, T) = \frac{1}{B(t, r, T)} \sigma_r \frac{\partial B}{\partial r} (t, r, T) dW_t \end{cases} \quad (3.3)$$

D'après le théorème de Girsanov, on suppose qu'il existe une prime de risque, fonction du temps et de taux court $(\lambda(t, r), (t, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, tel que

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s, r) ds$$

est un mouvement brownien sous \mathcal{Q} . L'équation de diffusion de r sous la mesure risque neutre \mathcal{Q} est donnée par,

$$dr_t = (\mu_r(t, r) - \lambda(t, r)\sigma_r(t, r))dt + \sigma_r(t, r)d\tilde{W}_t$$

La dynamique du prix zéro-coupon sous \mathcal{Q} est

$$dB(t, T) = B(t, T)(\mu(t, r, T) - \lambda(t, r)\sigma(t, r, T))dt + B(t, T)\sigma(t, r, T)d\tilde{W}_t \quad (3.4)$$

On note que le prix actualisé $B(t, T)/S_t^0$ est une \mathcal{Q} -martingale, le terme de tendance de $B(t, T)$ doit être égal à r_t sous \mathcal{Q} , soit

$$\mu(t, r, T) - \lambda(t, r)\sigma(t, r, T) = r_t$$

Remplaçons les expressions de μ et σ trouvées en (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) - \lambda \sigma_r \frac{\partial B}{\partial r} &= rB \\ \frac{\partial B}{\partial t} + (\mu_r - \lambda \sigma_r) \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cette EDP est associée à la condition terminale $B(T, r, T) = 1$.

3.4 Modélisation des taux d'intérêt

Les modèles de taux d'intérêt sont utilisés principalement pour "pricer" et couvrir des obligations et des options sur obligations. Il existe deux catégories principales de modèles : les modèles d'équilibre et les modèles sans arbitrage.

Dans la partie suivante, nous présenterons certains des modèles de taux d'intérêt les plus utilisés à un facteur et à deux facteurs.

3.4.1 Modèles de taux d'intérêt à un facteur

3.4.1.1 Modèles d'équilibre

I. Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek (réalisé en 1977) est le modèle d'équilibre classique. Il permet de modéliser le taux instantané à court terme, on utilise le processus d'Ornstein Uhlenbeck, qui est défini par la formule suivante :

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.6)$$

Avec

- a , b et σ sont des constantes positives et W un mouvement brownien.
- (r_t) : le taux au temps t .
- a : correspond à la valeur d'équilibre, la valeur moyenne de long terme du taux r .
- b : étant la vitesse de retour à la moyenne de long terme.
- σ : est la volatilité du taux court.

Le terme dt du processus d'Ornstein Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long-terme a avec une vitesse de retour à la moyenne b . Ceci veut dire que si (r_t) est supérieur à a , alors, le terme $b(a - r_t)$ est négatif et r_t diminue dans le temps pour se rapprocher de la valeur moyenne a , à la vitesse b . A l'inverse, si r_t inférieur à a , dans ce cas le terme $b(a - r_t)$ est positif et r_t aura tendance à augmenter pour se rapprocher de la valeur moyenne a .

On a vu que la solution de l'EDS du taux court est :

$$r_t = a + (r_0 - a)e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW_s \quad (3.7)$$

On voit que le taux court est Gaussien, de moyenne et de variance :

$$E(r_t) = a + (r_0 - a)e^{-bt}$$

$$V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

- Passage à la mesure risque-neutre :

Nous prenons une prime de risque constante, λ tel que $dW_t = d\tilde{W}_t - \lambda dt$, cela donne :

$$\begin{aligned} dr_t &= b(a - r_t)dt + \sigma(d\tilde{W}_t - \lambda dt) \\ &= b(a - \sigma\lambda/b - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

On voit donc que sous \mathcal{Q} , le processus du taux court reste un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de mêmes volatilité et vitesse de retour à la moyenne, mais la valeur d'équilibre modifiée :

$$\tilde{a} = a - \sigma\lambda/b$$

L'EDS du taux court sous \mathcal{Q} est donc :

$$dr_t = b(\tilde{a} - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (3.8)$$

1) La solution de l'EDS

$$r_t = \tilde{a} + (r_0 - \tilde{a})e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} d\tilde{W}_s \quad (3.9)$$

Où r_0 représente le taux à l'instant 0.

Démonstration 3.1. On va démontrer la solution du modèle de Vasicek (3.9), On applique le lemme d'Itô à $f(r_t, t) = r_t e^{bt}$, ce qui donne, après simplification :

$$df(r_t, t) = b\tilde{a}e^{bt}dt + \sigma e^{bt}d\tilde{W}_t$$

Après intégration, nous avons :

$$e^{bt}r_t = r_0 + \tilde{a}(1 - e^{bt}) + \sigma \int_0^t e^{bs}d\tilde{W}_s$$

$$r_t = \tilde{a} + (r_0 - \tilde{a})e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}d\tilde{W}_s$$

D'une manière générale,

$$r_t = \tilde{a} + (r_s - \tilde{a})e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-b(t-u)}d\tilde{W}_u \quad (3.10)$$

On remarque que r_t est alors un processus gaussien sous \mathcal{Q} (en supposant que r_0 est gaussien) de moyenne et de variance :

$$E(r_t) = \tilde{a} + (r_0 - \tilde{a})e^{-bt}$$

$$V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

(variance inchangée)

Démonstration 3.2. $\int_0^t e^{-b(t-s)}d\tilde{W}_s$ est conditionnellement à \mathcal{F}_s une martingale gaussienne de moyenne nulle et de variance $\int_0^t e^{-2b(t-s)}ds$.

2) Le prix de zéro-coupon

Le prix d'un zéro-coupon de maturité T, noté B est donné par la formule :

$$B(t, T) = E_{\mathcal{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} / \mathcal{F}_t\right)$$

Pour valoriser un zéro-coupon, nous avons besoin de calculer $\int_t^T r_s ds$.

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= \int_t^T b(\tilde{a} - r_s) ds + \int_t^T \sigma d\tilde{W}_t \\ r_T - r_t &= -b \int_t^T r_s ds + b\tilde{a}(T-t) + \int_t^T \sigma d\tilde{W}_t \\ b \int_t^T r_s ds &= r_t - r_T + b\tilde{a}(T-t) + \int_t^T \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

En remplaçant r_T par sa solution (3.10) nous obtenons

$$\int_t^T r_s ds = (r_t - \tilde{a}) \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} + \tilde{a}(T-t) + \int_t^T \sigma \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} d\tilde{W}_s \quad (3.11)$$

r_t est un processus gaussien, l'intégrale $\int_t^T r_s ds$ est également gaussienne conditionnellement à \mathcal{F}_t . On peut calculer directement la moyenne et la variance conditionnellement à \mathcal{F}_t du $\int_t^T r_s ds$.

$$E\left(\int_t^T r_s ds / \mathcal{F}_t\right) = (r_t - \tilde{a}) \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} + \tilde{a}(T-t)$$

$$\begin{aligned} Var\left(\int_t^T r_s ds / \mathcal{F}_t\right) &= E\left(\left(\int_t^T \sigma \frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b} d\tilde{W}_s\right)^2 / \mathcal{F}_t\right) \\ &= \sigma^2 \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b}\right)^2 ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2b^3} \left(1 - e^{-b(T-t)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{b^2} \left(T - t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}\right) \end{aligned}$$

(Rappel : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $E(e^X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$)

En utilisant les calculs précédents, la formule de zéro-coupon devient :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp\left\{-E\left(\int_t^T r_s ds / \mathcal{F}_t\right) + \frac{1}{2}Var\left(\int_t^T r_s ds / \mathcal{F}_t\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\left(\tilde{a} - r_t\right) \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} - \tilde{a}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4b^3} \left(1 - e^{-b(T-t)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2b^2} \left(T - t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-R_\infty(T-t) + (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} - \frac{\sigma^2}{4b^3} (1 - e^{-b(T-t)})^2\right\} \end{aligned}$$

$$\text{où } R_\infty = \tilde{a} - \frac{\sigma^2}{2b^2}$$

Du prix d'un zéro-coupon on peut extraire directement le taux zéro-coupon, par la relation

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{-\ln B(t, T)}{T-t} \\ &= R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4b^3(T-t)} \left(1 - e^{-b(T-t)}\right)^2 \end{aligned}$$

3) Limites du modèle de Vasicek

L'avantage de ce modèle est qu'il possède une solution explicite.

Les inconvénients de ce modèle sont :

- Les taux courts instantanés peuvent prendre des valeurs négatives car il est gaussien.
- Les taux des différentes maturités sont parfaitement corrélés entre eux (problème de tous les modèles de taux court à 1 facteur).
- Impossibilité de reproduire exactement la courbe des taux initiale du marché (après passage à la mesure risque neutre). Les trois paramètres \tilde{a} , b et σ ne suffisent en général pas pour correspondre au prix du modèle et au prix du marché.

Exemple :

Supposons simplement que la courbe des taux soit plate

$$B(0, t) = e^{-\delta t} \quad \forall t > 0 \iff R(0, t) = \delta \quad \forall t > 0$$

pour une constante $\delta > 0$, en regardant l'expression de $R(0, t)$, que ce n'est tout simplement pas possible dans le modèle de Vasicek.

II. Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Le modèle CIR a répondu au problème de la positivité du taux court. Ce modèle a été proposé par Cox-Ingersoll-Ross en 1985.

On suppose que sous la probabilité risque neutre \mathcal{Q} , le taux court instantané r est modélisé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (3.12)$$

Où W est un processus de Wiener,

avec b , a et σ sont des constantes positives vérifiant la condition $2ba > \sigma^2$ qui permet de s'assurer la positivité du processus r_t . Contrairement au modèle du Vasicek car le terme en dt de l'équation est suffisamment important cela signifie que le taux court ne prendra pas des

valeurs négatifs et dès qu'il atteindra 0, il revient sur le champ positif.

De plus le **drift** du processus CIR s'interprète le retour à la moyenne comme dans le cas du modèle précédent.

La solution de l'équation différentielle stochastique n'est pas explicite, mais on peut calculer explicitement le prix d'un zéro-coupon.

1) Le prix du zéro-coupon

Supposons que $\lambda_t = \lambda\sqrt{r_t}$ comme prime de risque, soit $dW_t = d\tilde{W}_t - \lambda\sqrt{r_t}dt$ sous la probabilité risque neutre le taux court suit une dynamique de la même forme :

$$dr_t = \tilde{b}(\tilde{a} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t$$

$$\text{avec } \tilde{b} = b + \lambda\sigma \text{ et } \tilde{a} = \frac{ba}{b + \lambda\sigma}$$

On utilise l'équation aux dérivées partielles des taux satisfaite par le prix zéro coupon $B(t, T) = B(t, r, T)$ dans le modèle CIR est

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \tilde{b}(\tilde{a} - r_t)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB = 0 \quad (3.13)$$

avec la condition terminale $B(T, r, T) = 1$

Pour résoudre cette EDP, on cherche la solution du prix B de la forme

$$B(t, r, T) = \Phi(T - t)e^{A(T-t)r} \quad (3.14)$$

Ensuite, on note $\tau = T - t$ et en remplaçant dans l'EDP précédente (3.13), on obtient

$$-\Phi'(\tau) + \Phi(\tau)A'(\tau)r - \tilde{b}(\tilde{a} - r)\Phi(\tau)A(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 r \Phi(\tau)A^2(\tau) - r\Phi(\tau) = 0$$

L'identification des coefficients de r dans la relation ci-dessus conduit aux EDO satisfaites par Φ et A :

$$\begin{cases} A'(\tau) + \tilde{b}A(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(\tau) - 1 = 0 \\ -\Phi'(\tau) - \tilde{b}\tilde{a}A(\tau)\Phi(\tau) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

avec les conditions initiales $\Phi(0) = 1$ et $A(0) = 0$

La résolution de ces équations différentielles ordinaires donne des expressions explicites de A , Φ et donc $B(t, r, T)$.

La première équation du système (3.15) est une équation de Riccati, donc c'est possible de lui trouver une solution, que l'on réinjecte dans la deuxième équation pour déterminer A .

* Equation de Riccati

Une équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire de type

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

où a et b sont des coefficients différents de zéro. En général, nous ne pouvons pas la résoudre, mais il existe une méthode de résolution dès que l'on en connaît une solution particulière.

Donc par un changement de variable $z = c(x)y$, on obtient alors

$$z' = z^2 + z(b(x) + c'(x)/c(x)) + c(x)a(x)$$

Ainsi, on pose $z = -u'/u$

D'où

$$u'' - (b(x) + c'(x)/c(x))u' + c(x)a(x)u = 0$$

En effet, la solution de l'équation initiale est $y = -u'/(c(x)u)$, et cette équation est utile pour valoriser le prix du zéro-coupon dans ce modèle CIR.

La solution générale des fonctions Φ et A est,

$$A(\tau) = \frac{2(e^{\rho\tau} - 1)}{(\tilde{b} + \rho)(e^{\rho\tau} - 1) + 2\rho}$$

$$\Phi(\tau) = \left(\frac{2\rho e^{(\tilde{b} + \rho)\tau/2}}{(e^{\rho\tau} - 1) + 2\rho} \right)^{\frac{2\tilde{b}\tilde{a}}{\sigma^2}}$$

Démonstration 3.3. Dans le système (3.15), on a la seconde équation dépend des fonctions Φ et A d'où l'on peut pas résoudre avant qu'on résoud la première équation, il s'agit d'une équation de Riccati elle uniquement écrite en fonction de A , Donc on a

$$A'(\tau) = 1 - \tilde{b}A(\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 r A^2(\tau)$$

Appliquons la méthode classique de l'équation, on obtient

$$u'' + \tilde{b}u' - \frac{1}{2}\sigma^2 u = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$v^2 + \tilde{b}v - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

Les racines du polynôme sont

$$r_{\pm} = \frac{-\tilde{b} \pm \sqrt{\tilde{b}^2 + 2\sigma^2}}{2}$$

La solution de u est de type

$$u = \lambda_1 e^{r_1 \tau} + \lambda_2 e^{r_2 \tau}$$

En effet, on a $A = -u' / (-\frac{1}{2\sigma^2}u)$, donc on déduit que

$$A(\tau) = -\frac{\lambda_1 r_1 e^{r_1 \tau} + \lambda_2 r_2 e^{r_2 \tau}}{-\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1 e^{r_1 \tau} + \lambda_2 e^{r_2 \tau})}$$

On utilisons la condition initiale $A(0) = 0$, on trouve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

Remplaçons dans $A(\tau)$, on obtient

$$A(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{-r_2 e^{r_1 \tau} + r_2 e^{r_2 \tau}}{-\frac{r_2}{r_1} e^{r_1 \tau} + e^{r_2 \tau}} \right)$$

Posons que $\rho = \sqrt{\tilde{b}^2 + 2\sigma^2}$, après quelques simplifications nous avons le résultat

$$A(\tau) = \frac{2(e^{\rho\tau} - 1)}{(\tilde{b} + \rho)(e^{\rho\tau} - 1) + 2\rho}$$

En injectant cette solution de $A(\tau)$ dans la deuxième équation, et en déduit

$$\Phi(\tau) = \left(\frac{2\rho e^{(\tilde{b} + \rho)\tau/2}}{(e^{\rho\tau} - 1) + 2\rho} \right)^{\frac{2\tilde{b}\tilde{a}}{\sigma^2}}$$

Finalement la courbe des taux dans le modèle CIR, est alors

$$\begin{aligned}
R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \\
&= -\frac{1}{T-t} \ln \left(\Phi(T-t) e^{A(T-t)r} \right) \\
&= -\frac{A(T-t)}{T-t} r_t - \frac{\ln(\Phi(T-t))}{T-t}
\end{aligned}$$

2) Limites du modèle CIR

L'avantage du modèle CIR, le taux d'intérêt est toujours positive.

Les inconvénients de ce modèle sont :

- Les taux de ce modèle correspond à des maturités différentes sont parfaitement corrélées.
- Le modèle ne se calibre pas parfaitement sur la courbe des taux initiale .

Remarque 3.1. Les modèles de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross présentent un grand défaut : les prix générés à l'aide de ces modèles ne correspondent pas toujours aux prix du marché. Ce problème fut résolu par les modèles sans arbitrage dans ces modèles contrairement aux modèles d'équilibre, le drift et l'écart-type instantané des équations différentielles stochastiques dépendent du temps.

3.4.2 Modèle sans arbitrage

II. Le modèle de Hull White à un facteur (Vasicek étendu)

Ce modèle à un facteur a été proposé par Hull and White (en 1990), est une simple extension du modèle de Vasicek. En effet, la différence réside pour le paramètre de moyenne à long terme a , constant dans le modèle de Vasicek, qui varie maintenant en fonction du temps. Ils ont supposé que sous la probabilité risque neutre \mathcal{Q} , l'évolution du taux d'intérêt court r représenté par le processus de retour à la moyenne suivante :

$$dr_t = (a_t - br(t))dt + \sigma dW_t \quad (3.16)$$

Où a_t une fonction positive déterministe dépendant du temps. Ce paramètre contrôle le moyen long terme. Le paramètre b une constante positive correspondant à la vitesse de retour à la moyenne. Le paramètre σ une constante positive correspondant à la volatilité du taux court. W_t est le mouvement Brownien.

Notons :

- $B^M(0, t)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T observé sur le marché à la date 0.

- $f^M(0, t)$ le taux instantané forward associé $f^M(0, t) = \frac{\partial}{\partial T} \ln(B^M(0, t))$

L'intérêt du modèle c'est que le modèle Hull White reproduit exactement la courbe de taux zéro-coupon de marché à l'aide de la fonction déterministe suivante :

$$a_t = \frac{\partial f^M}{\partial T}(0, t) + b f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

1) La solution de l'EDS

En utilisant la même astuce que pour le modèle de Vasicek, et donc, le processus d'Ornstein Uhlenbeck, nous pouvons trouver la solution de (3.16) :

$$r_t = r_0 e^{-bt} + e^{-bt} \int_0^t a_s e^{bs} ds + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW_s$$

On peut réécrire cette équation de la forme suivante :

$$r_t = r_s e^{-b(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_u \quad (3.17)$$

avec

$$\alpha_t = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2$$

On conclut de l'expression (3.17) que dans le modèle de Hull and White, le taux court $r(t)$ est gaussien, de moyenne et variance :

$$\begin{cases} E_{\mathcal{Q}}(r_t / \mathcal{F}_t) = r_s e^{-b(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-b(t-s)} \\ \text{Var}_{\mathcal{Q}}(r_t / \mathcal{F}_t) = \frac{\sigma^2}{2b} \left(1 - e^{-2b(t-s)}\right) \end{cases}$$

2) Le prix du zéro-coupon

Le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t, pour le modèle de Hull-White est donné par l'équation

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \right) \\ &= \exp \left\{ E \left(-\int_t^T r_s ds \right) + \frac{1}{2} \text{Var} \left(-\int_t^T r_s ds \right) \right\} \end{aligned}$$

Avec

$$\int_t^T r_u du = r_t \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} + \int_t^T a_s \frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b} ds + \int_t^T \sigma \frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b} dW_s \quad (3.18)$$

$$E\left(-\int_t^T r_u du\right) = -r_t \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} - \int_t^T a_s \frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b} ds$$

$$\text{Var}\left(-\int_t^T r_u du\right) = \int_t^T \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 \left(1 - e^{-b(T-s)}\right)^2 ds$$

D'où

$$B(t, T) = \exp\left(-r_t \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} - \int_t^T a_s \frac{1 - e^{-b(T-s)}}{b} ds + \frac{1}{2} \int_t^T \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 \left(1 - e^{-b(T-s)}\right)^2 ds\right)$$

3) Limites du modèle Hull White à un facteur

L'avantage de ce modèle :

- Le modèle se calibre parfaitement sur la courbe des taux initiale.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de la courbe des taux plate (qui ne pouvait être calibrée parfaitement par le modèle de Vasicek), on voit que dans Hull-White cela donne comme choix pour a_t : Si $R(0, t) = \delta$ pour tout t , alors on voit directement que $f(0, t) = \delta$ pour tout t .

On voit donc que a_t est bien une fonction de t , on quitte donc le cadre de Vasicek.

Les inconvénients :

- Possibilité de taux négatifs (on peut refaire la même extension que dans le modèle de Vasicek : CIR++).
- Modèle à un facteur, parfaite corrélation entre taux de différentes maturités.

3.4.3 Modèle de taux d'intérêt à deux facteurs

Les modèles à un facteur sont particuliers. Ils ont des limites quand on parle des produits de taux avec différentes maturités. Ces modèles impliquent que les taux évoluent de façon parfaitement corrélés donc la corrélation de deux taux zéro-coupon de maturité $T1$ et $T2$ distinctes est égale à 1. Cette propriété est évidemment loin de la vérité.

La figure ci-dessous (3.1) reproduit une matrice de corrélation par terme de variations quotidiennes de taux zéro-coupon [13].

	1w	1m	6m	12m	5ans	30ans
1w	1					
1m	0,976	1				
6m	0,960	0,961	1			
12m	0,953	0,952	0,999	1		
5ans	0,935	0,907	0,943	0,946	1	
30ans	0,772	0,789	0,797	0,795	0,802	1

FIGURE 3.1 – Matrice de Corrélacion d'obligations françaises à différentes maturités. Données journalières du 02/01/12 au 31/07/13.

Nous voyons que des taux de maturités proches, comme le taux de maturité 1 mois et celui de maturité 12 mois, sont très corrélés, tandis que des taux de maturité éloignées (par exemple le taux 5 ans et le taux 30 ans) le sont très peu.

Ces observations montrent la nécessité et l'importance de l'introduction des modèles multifactoriels.

3.4.3.1 Modèle gaussien à deux facteurs (G2++)

Ce modèle a été proposé par Brigo & Mercurio en 2005. On suppose ici que sous la mesure risque-neutre \mathcal{Q} la dynamique du taux court est donnée par :

$$r_t = x_t + y_t + \phi_t, \quad r_0 = 0 \quad (3.19)$$

où les deux facteurs $x(t)$ et $y(t)$ sont deux processus stochastique, et $\phi(t)$ représente une fonction déterministe.

$$\begin{cases} dx_t = -ax_t dt + \sigma dW_t^1, & x_0 = 0 \\ dy_t = -by_t dt + \eta dW_t^2, & y_0 = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Où

- a, b : coefficients de retour à la moyenne.
- σ, η : volatilités des processus.
- ces paramètres sont tous positifs et constants.
- corrélation entre les deux mouvements browniens W^1 et W^2 : $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ avec $-1 < \rho < 1$.

1) La solution de l'EDS

Les processus $(x_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ suivent des processus d'Ornstein Uhlenbeck. Donc on peut écrire aisément le taux court dans ce modèle sous la forme :

$$r_t = x_s e^{-a(t-s)} + y_s e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u^1 + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_u^2 + \phi_t \quad (3.21)$$

Il est clair que r_t , conditionnellement à son historique, est gaussien de moyenne et variance :

$$E(r_t / \mathcal{F}_s) = x_s e^{-a(t-s)} + y_s e^{-b(t-s)} + \phi_t \quad (3.22)$$

$$Var(r_t / \mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right) + \frac{\eta^2}{2b} \left(1 - e^{-2b(t-s)}\right) + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} \left(1 - e^{-(a+b)(t-s)}\right) \quad (3.23)$$

2) Le prix du zéro-coupon

par la méthode qui a été déjà utilisée dans le cas du modèle de Vasicek, On peut donc calculer le prix de l'obligation zéro-coupon .

Dans le modèle gaussien à deux facteurs, le prix d'un zéro-coupon $B(t, T)$ à l'instant t de maturité T est donnée par :

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_0^T \phi_u du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x_t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y_t + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}$$

Où

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Le modèle gaussien à deux facteurs est calibré sur la courbe $B^M(0, T)$ du prix zéro-coupon observés sur le marché si et seulement si la fonction ϕ est définie par :

$$\phi_T = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-aT}\right)^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} \left(1 - e^{-bT}\right)^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(1 - e^{-aT}\right) \left(1 - e^{-bT}\right) \quad (3.24)$$

Ce modèle n'est qu'une généralisation en deux dimensions d'un modèle de Hull and White à un facteur.

3) Limites du modèle gaussien à deux facteurs

- L'avantage du modèle est la possibilité de réglage de la corrélation entre les maturités grâce au paramètre ρ .
- L'inconvénient du modèle est comme dans le modèle à un facteur du modèle Hull et White, des taux négatifs présents dans le modèle gaussien à deux facteurs.

Chapitre 4

Simulation

4.1 Introduction

Nous allons dans ce chapitre, décrire des méthodes permettant la simulation des modèles financiers étudiés précédemment, Black-Scholes, Vasicek, CIR, HW et G2++.

4.2 Discrétisation des processus de diffusion

Prenons l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (4.1)$$

où sous forme d'intégrale

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \quad (4.2)$$

On peut simuler le processus considéré par une discrétisation exacte dès que l'on peut résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique qui lui est associée, si non par un développement d'Itô-Taylor de l'équation sous sa forme intégrale nous permet de disposer d'une version discrétisée approximative.

4.2.1 Discrétisation approximative

Dans le cas stochastique, les schémas d'Euler et de Milstein sont les procédés les plus répandus pour discrétiser un processus continu sous-jacent, lorsque la discrétisation exacte n'existe pas. Tous les deux à des ordres différents, d'ordre 1 pour Euler et d'ordre 2 pour Milstein.

En effet, on dira que le schéma de discrétisation \tilde{X} converge fortement vers le processus continu X_t lorsque l'erreur moyenne absolue est négligeable.

$$\forall T > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} E(|\tilde{X}_T^h - X_T|) = 0$$

- **Schéma d'Euler**

L'approximation d'Euler consiste à utiliser une discrétisation régulièrement espacée du temps. Le schéma d'Euler est analogue à celui que l'on a pour les EDO.

Le schéma d'Euler pour EDS est donnée par :

$$\tilde{X}_{t+h} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)h + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{h}\varepsilon$$

où ε est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, h est le pas de discrétisation retenu.

- Schéma de Milstein

Pour obtenir une méthode fortement convergente on pousse plus loin le développement du terme $\sigma(X_t, t)dW_t$, on obtient alors :

$$\tilde{X}_{t+h} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)h + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{h}\varepsilon + \frac{\sigma_x(\tilde{X}_t, t)\sigma(\tilde{X}_t, t)}{2}h(\varepsilon^2 - 1)$$

où $\sigma_x(\tilde{X}_t, t)$ désigne la dérivée par rapport au premier argument de la fonction $\sigma(\tilde{X}_t, t)$.

4.3 Simulation des trajectoires du mouvement brownien

D'abord, nous allons intéresser à la simulation des trajectoires du mouvement brownien W_t sur un intervalle $[0, T]$ pour T fixé, qui est la base de la simulation approchée des diffusions stochastiques.

Le mouvement brownien standard W_t est une variable aléatoire qui dépend continument du temps ($0 \leq t \leq T$), on l'a simule simplement car elle suit une loi normale gaussienne de moyenne nulle et de variance t , et on sait que le mouvement brownien est à accroissements indépendants donc on peut simuler la trajectoire en des instants.

Considérons $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien discrétisé définie sur $[0, 1]$, soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, on se donne le pas de discrétisation $\Delta t = \frac{T}{N}$ pour N est un entier positive, et soit W_{t_j} on le note W_j avec $t_j = j\Delta t$, $j = 1, \dots, N$.

La condition initiale est $P(W_0 = 0) = 1$, on calcule la suite par :

$$W_j = W_{j-1} + \Delta W_j$$

avec $\Delta W_j \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, s'écrit aussi $\Delta W_j \sim \sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1)$

On donne la simulation d'une trajectoire du M.B.S sur $[0, 1]$ dans le programme 1 en Matlab.

```

1      %programme1: Mouvement brownien standard
2 -    clear all
3 -    T=1;
4 -    N=1000;
5 -    dt=T/N;      % discrétisation du temps
6 -    t=[0:dt:T];
7 -    w(1)=0;      % condition initiale
8 -    for j=1:N
9 -        dw(j)=sqrt(dt)*randn;
10 -       w(j+1)=w(j)+dw(j);
11 -    end
12 -    plot(t,w,'b')      % le graphe de W en fonction de t
13 -    xlabel('t','FontSize',16)
14 -    ylabel('W(t)','FontSize',16)

```

Le résultat de la simulation est illustré dans la figure (4.3) ci-dessous

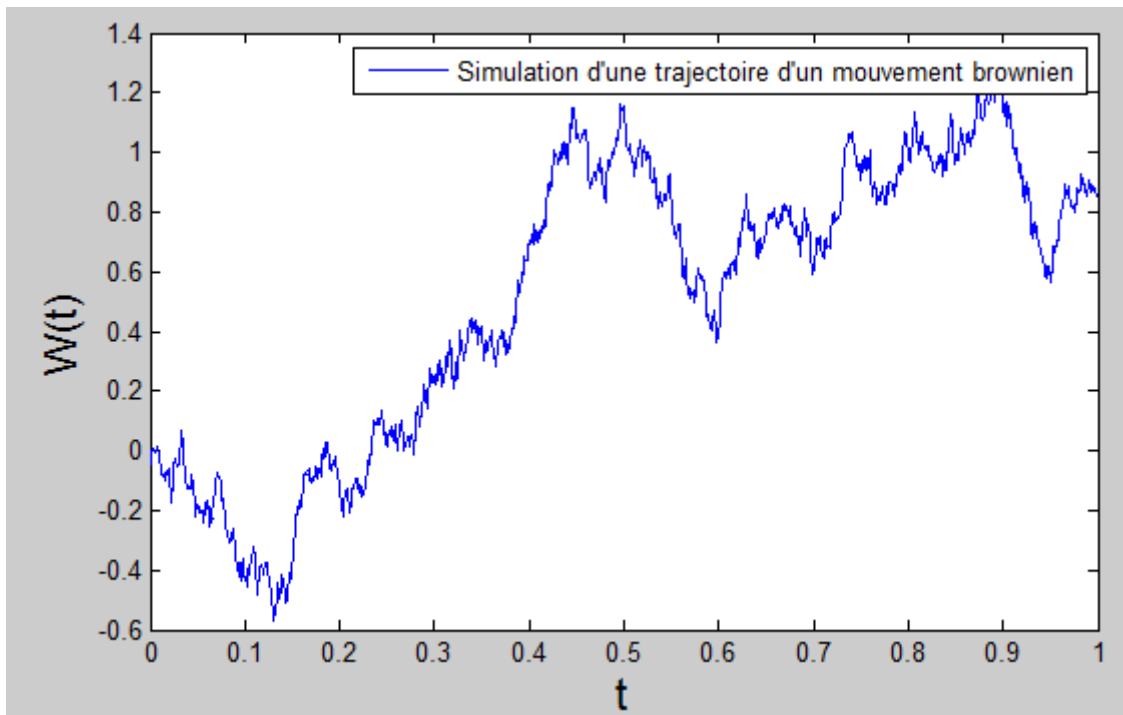


FIGURE 4.1 – Simulation d'une trajectoire de mouvement brownien standard

Dans le deuxième programme, c'est la simulation d'une trajectoire du M.B.S dans deux dimensions.

```

1      % programme2: Mouvement brownien dans deux dimensions
2      clear all
3      T=1;
4      N=1000;
5      dt=T/N;
6      t=[0:dt:T];
7      w(1)=0;
8      v(1)=1;
9      for j=1:N
10         dw(j)=sqrt(dt)*randn;
11         dv(j)=sqrt(dt)*randn;
12         w(j+1)=w(j)+dw(j);
13         v(j+1)=v(j)+dv(j);
14     end
15     plot(w,v,'r')
16     xlabel('t')
17     ylabel('W(t)')

```

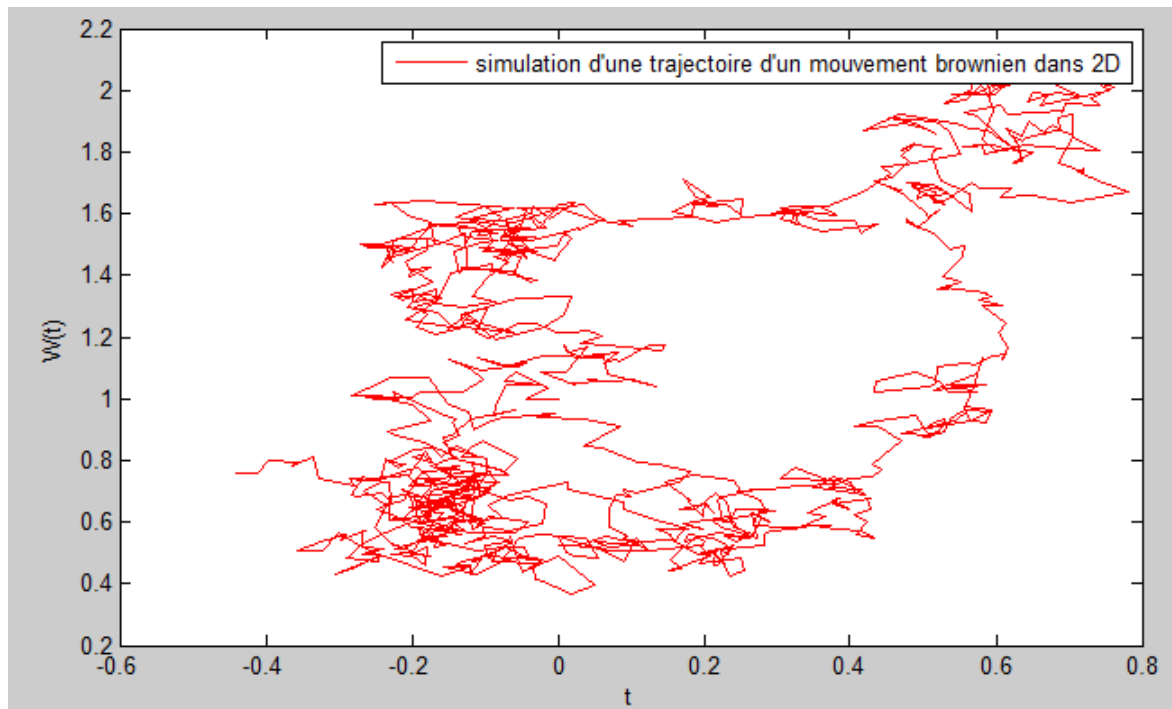


FIGURE 4.2 – Simulation d’une trajectoire du mouvement brownien à deux dimensions

En effet, le troisième programme c’est une simulation de N trajectoires d’un mouvement brownien.

```

1      % programme3 : simulation de N trajectoires du mouvement brownien
2 -    clear all
3 -    T=1;
4 -    N=1000;
5 -    dt=T/N;
6 -    n=100;
7 -    t=[0:dt:T];
8 -    for j=1:n
9 -        w(1,j)=0;
10 -    for i=1:N
11 -        dw(i,j)=sqrt(dt)*randn;
12 -        w(i+1,j)=w(i,j)+dw(i,j);
13 -    end
14 - end
15 - plot(t,w)
16 - xlabel('t')
17 - ylabel('W(t)')

```

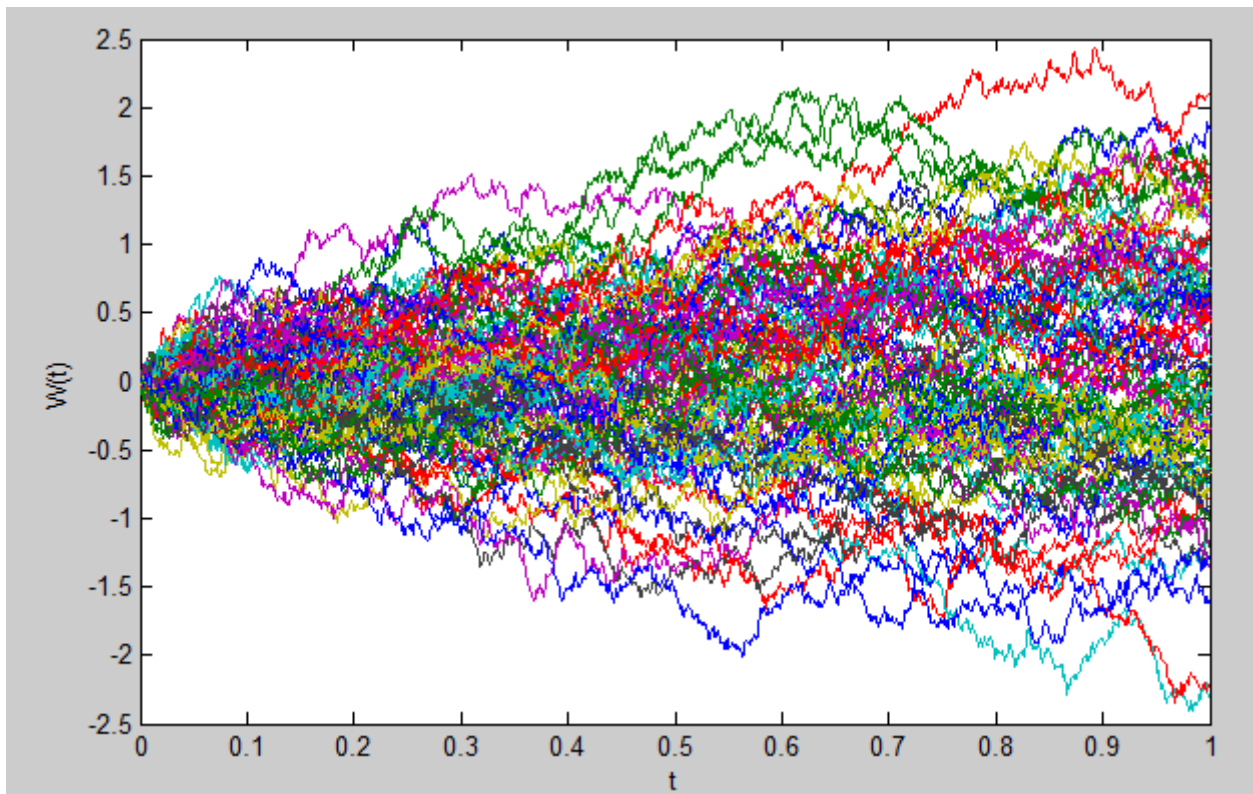


FIGURE 4.3 – Simulation de N trajectoires du mouvement brownien standard

4.4 Simulation des trajectoires des processus de diffusion

4.4.1 Modèle de Black-Scholes

On va simuler la trajectoire de mouvement brownien géométrique en discrétisation du temps.

- discrétisation exacte :

$$x_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

- discrétisation par le schéma d'Euler :

$$x_{t+h} = x_t + \mu x_t h + \sigma x_t \sqrt{h} \varepsilon_t$$

- discrétisation par le schéma de Milstein :

$$x_{t+h} = x_t + \mu x_t h + \sigma x_t \sqrt{h} \varepsilon_t + \frac{\sigma^2}{2} x_t h (\varepsilon_t^2 - 1)$$

La simulation de modèle de Black-Scholes est illustré dans le programme ci-dessous

```

1 - clear all
2 - %simulation de mouvement brownien géométrique
3 - randn('state',100)
4 - N=100;
5 - T=1;
6 - dt=T/N;
7 - t=[0:dt:T];
8 - mu=0.2;
9 - s=0.5;
10 - x(1)=1;
11 - xe(1)=1;
12 - xm(1)=1;
13 - w(1)=0;
14 - for i=1:N
15 -     w(i)=sqrt(dt)*randn;
16 -     x(i+1)=x(i)*exp((mu-0.5*s^2)*dt+s*w(i));
17 -     xe(i+1)=xe(i)+mu*xe(i)*dt+s*xe(i)*w(i);
18 -     xm(i+1)=xe(i)+mu*xm(i)*dt+s*xm(i)*w(i)+(s*s*xm(i)/2)*dt*(w(i)^2-1);
19 - end
20 - hold on
21 - plot(t,x,'b',t,xe,'g',t,xm,'r')

```

Le résultat est illustré dans la figure (4.4) ci-dessous

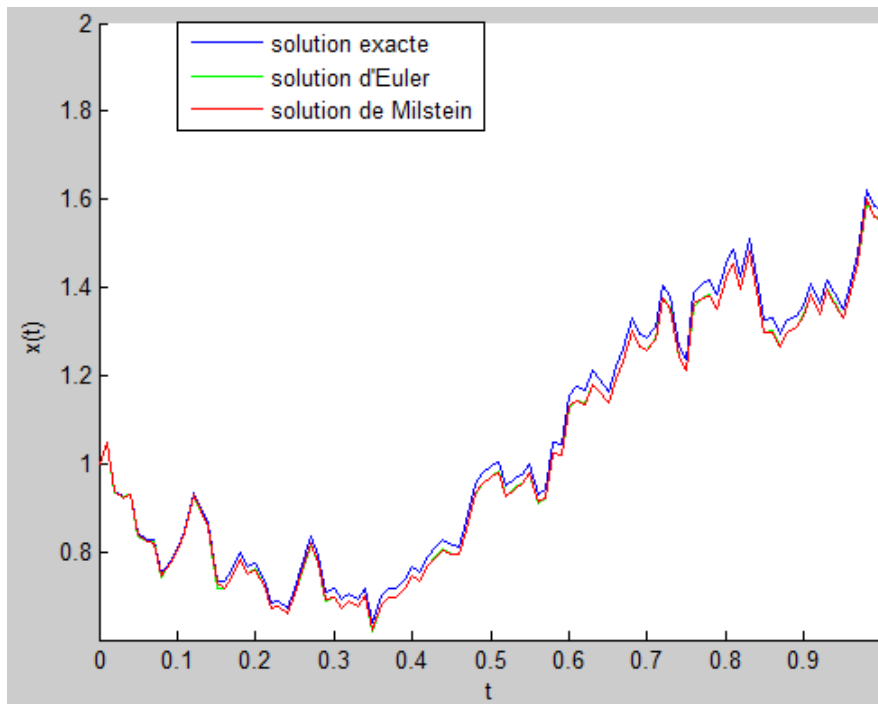


FIGURE 4.4 – La simulation de modèle de Black-Scholes

4.4.2 Modèle de Vasicek

La formule de discrétisation de Vasicek est :

- discrétisation exacte :

$$r_{t+h} = r_t e^{-bh} + a(1 - e^{-bh}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2bh})}{2b}} \varepsilon_t$$

A travers le programme suivant nous avons le résultat de la solution exacte du modèle Vasicek.

```

1 - clear all
2 - randn('state',50)
3 - T=1;
4 - N=1000;
5 - dt=T/N;
6 - t=[0:dt:T];
7 - s=0.064;
8 - a=0.05;
9 - b=2;
10 - r(1)=0;
11 - x(1)=0;
12 - for i=1:N
13 -     w=sqrt(dt)*randn;
14 -     r(i+1)=r(i)*exp(-b*dt)+a*(1-exp(-b*dt))+s*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/2*b)*w/sqrt(dt);
15 -
16 - end
17 - hold on
18 - plot(t,r,'b')

```

Le résultat est illustré dans la figure (4.5)

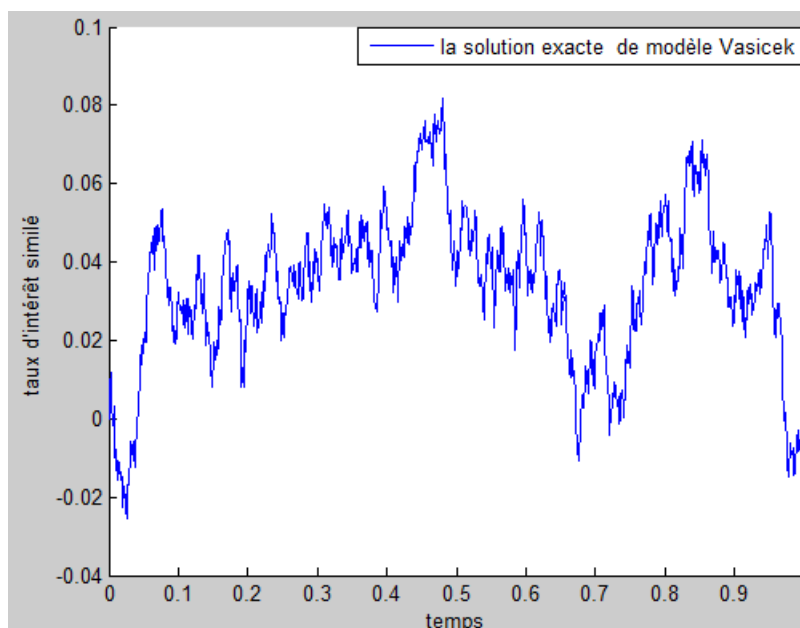


FIGURE 4.5 – la solution exacte pour le modèle de Vasicek

4.4.3 Modèle de CIR

La formule de discrétisation de CIR est :

- discrétisation par le schéma d'Euler :

$$r_{t+h} = r_t + b(a - r_t)h + \sigma\sqrt{r_t}h\varepsilon_t$$

- discrétisation par le schéma de Milstein :

$$r_{t+h} = r_t + b(a - r_t)h + \sigma\sqrt{r_t}h\varepsilon_t + \frac{\sigma^2}{4}h(\varepsilon^2 - 1)$$

A travers le programme suivant nous avons le résultat de la solution approximée par le schéma d'Euler le schéma de Milstein de modèle CIR. Le résultat est illustré dans la figure (4.6)

```

1 - clear all
2 - randn('state',20)
3 - T=1;
4 - N=1000;
5 - dt=T/N;
6 - t=[0:dt:T];
7 - s=0.04;
8 - a=0.06;
9 - b=0.5;
10 - r(1)=0.01;
11 - x(1)=0.01;
12 - for i=1:N
13 -     w(i)=sqrt(dt)*randn;
14 -     r(i+1) = r(i)+b*(a-r(i))*dt+s*(sqrt(r(i)*dt))*w(i)/sqrt(dt) ;
15 -     x(i+1)=x(i)+b*(a-x(i))*dt+s*(sqrt(x(i)*dt))*w(i)/sqrt(dt)+(0.5*s^2/4)*dt*((w(i)/sqrt(dt))^2 -1);
16 - end
17 - hold on
18 - plot(t,r,'r')
19 - plot(t,x,'b')

```

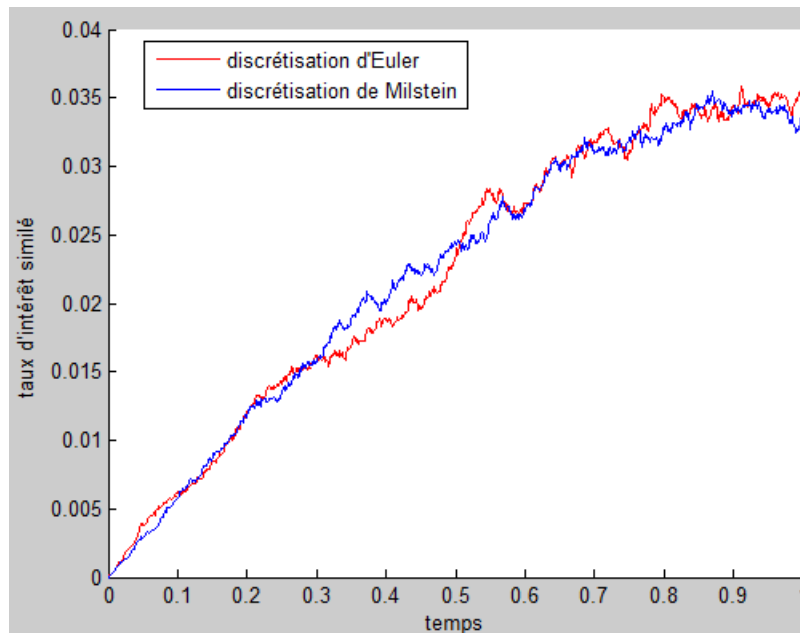


FIGURE 4.6 – Simulation de taux d'intérêt à l'aide de modèle CIR

Application :

Considérons maintenant un placement d'un produit financier, le taux d'intérêt initial est de 1%, nous essayons de projeter le taux d'intérêt sur les dix prochaines années. Dans un cadre préliminaire, nous fixons une volatilité de court terme σ de 5%, une vitesse de retour à la moyenne de 0.6 et une moyenne long terme du taux de 0.01.

```

1 -   clc,clear all
2 -   T=10;
3 -   N=500;
4 -   dt=T/N;
5 -   t=[0:dt:T];
6 -   s=0.05;
7 -   a=0.01;
8 -   b=0.6;
9 -   r(1)=0.01;
10 -  x(1)=0.01;
11 -  for i=1:N
12 -      w(i)=sqrt(dt)*randn;
13 -      r(i+1) = r(i)*exp(-b*dt)+a*(1-exp(-b*dt))+s*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/2*b)*w(i)/sqrt(dt);
14 -      x(i+1)= x(i)+b*(a-x(i))*dt+s*(sqrt(x(i)*dt))*w(i)/sqrt(dt);
15 -
16 -  end
17 -  hold on
18 -  plot(t,r,'b')
19 -  plot(t,x,'r')

```

Le programme ci-dessus est l'évolution du taux court avec les modèles de Vasicek ,CIR avec les mêmes paramètres. Le résultat est illustré dans la figure (4.7)

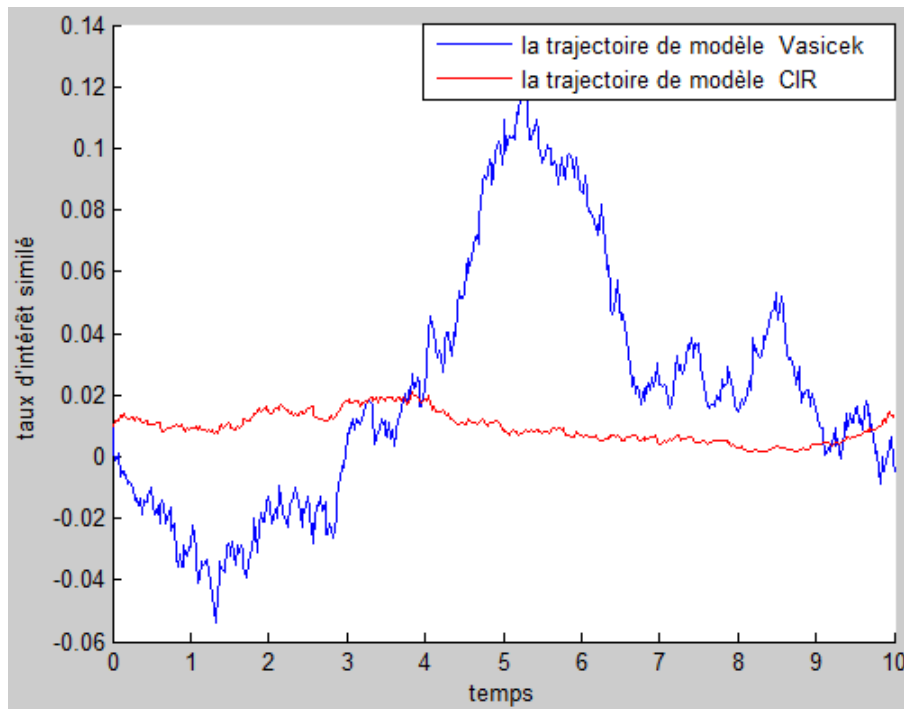


FIGURE 4.7 – Simulation de taux par les modèles (Vasicek ,CIR)

Interprétation :

On remarque la présence de l'effet de retour à la moyenne dans la simulation des deux trajectoires avec possibilité de valeurs négatives pour le modèle de Vasicek contrairement à celui de CIR.

4.4.4 Modèle de Hull & White

La formule de discrétisation de Hull and White est :

- discrétisation exacte :

$$r_{t+h} = r_t e^{-bh} + \alpha_{t+h} - \alpha_t e^{-bh} + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2bh})}{2b}} \varepsilon_t$$

avec

$$\alpha_t = fw(t) + \frac{\sigma^2}{2b^2} \left(1 - e^{-2bt}\right)^2$$

A travers le programme suivant nous avons le résultat de la solution exacte du modèle Hull & White. Le résultat est illustré dans la figure (4.8)

```

1 clear all
2 randn('state',50)
3 T=10; N=10;
4 dt=T/N;
5 t=[0:dt:T];
6 b=0.05; s=0.07;
7 r(1)=0.01; x(1)=0.01;
8 fw=[0.03651 0.035359 0.03565 0.035047 0.03447 0.035709 0.035397 0.026261 0.038509 0.04759];
9 for i=1:N
10     alpha(i) = fw(i) + (s^2/2*b^2)*(1-exp(-2*b*t(i)))^2;
11 end
12 for i=1:N-1
13     w=sqrt(dt)*randn;
14
15     r(i+1)=r(i)*exp(-b*dt)+alpha(i+1)-alpha(i)*exp(-b*dt)+s*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/2*b)*w/sqrt(dt);
16     end
17 hold on
18 plot(r,'b')

```

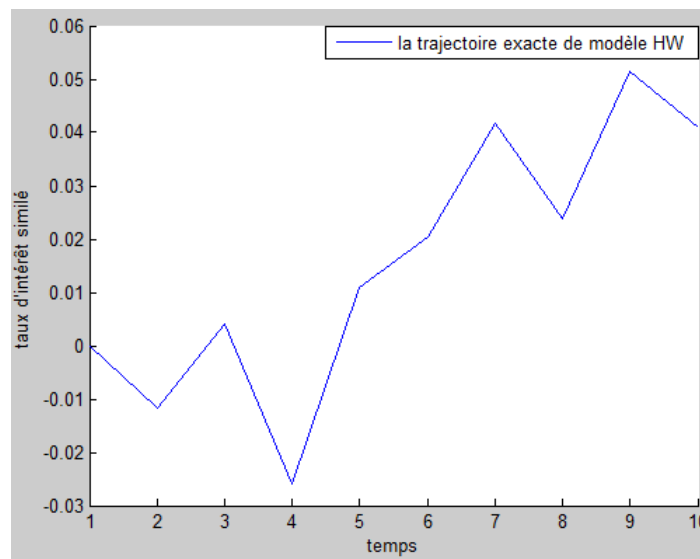


FIGURE 4.8 – Simulation de taux d'intérêt à l'aide de modèle Hull and White

4.4.5 Modèle de gaussien à deux facteurs

La simulation des taux courts est effectuée avec la formule discrétisée du modèle G2++

$$x_{t+h} = x_t e^{-ah} + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2ah})}{2a}} \varepsilon_t^1$$

$$y_{t+h} = y_t e^{-bh} + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2bh})}{2b}} \varepsilon_t^2$$

$$\phi_t = fw(t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-at}\right)^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} \left(1 - e^{-bt}\right)^2 + \rho \frac{\sigma \eta}{ab} \left(1 - e^{-at}\right) \left(1 - e^{-bt}\right)$$

$$r_t = x_t + y_t + \phi_t$$

Le programme ci-dessous illustre la simulation du taux d'intérêt de ce modèle.

```

1 - clear all
2 - randn('state',50)
3 - T=1; N=10; dt=T/N;
4 - t=[0:dt:T];
5 - s1=0.016; s2=0.014;a=1.50; b=1.53; rho=-0.04;
6 - r(1)=0; x(1)=0; y(1)=0;
7 - fw=[0.03651 0.035359 0.03565 0.035047 0.03447 0.035709 0.035397 0.026261 0.038509 0.04759];
8 - for i=2:N-1
9 -     v=dt*i;
10 -    ph(i)= fw(i) + 0.5 * ((s1/a)^2*(1- exp(-a*v))^2 + (s2/b)^2*(1- exp(-b*v))^2 )+...
11 -        (s1*s2*rho*(1- exp(a*v))*(1- exp(-b*v)))/(a*b);
12 - end
13
14 - for i=2:N-2
15 -    w(i)=sqrt(dt)*randn;
16 -    x(i)=x(i-1)*exp(-a*dt)+s1*sqrt((1-exp(-2*a*dt))/2*a)*w(i)/sqrt(dt);
17 -    y(i)=y(i-1)*exp(-b*dt)+s2*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/2*b)*w(i)/sqrt(dt);
18 -    r(i)=x(i)+y(i)+ph(i);
19 - end
20 - hold on
21 - plot(r,'b')
22 - plot(x,'r')
23 - plot(y,'g')

```

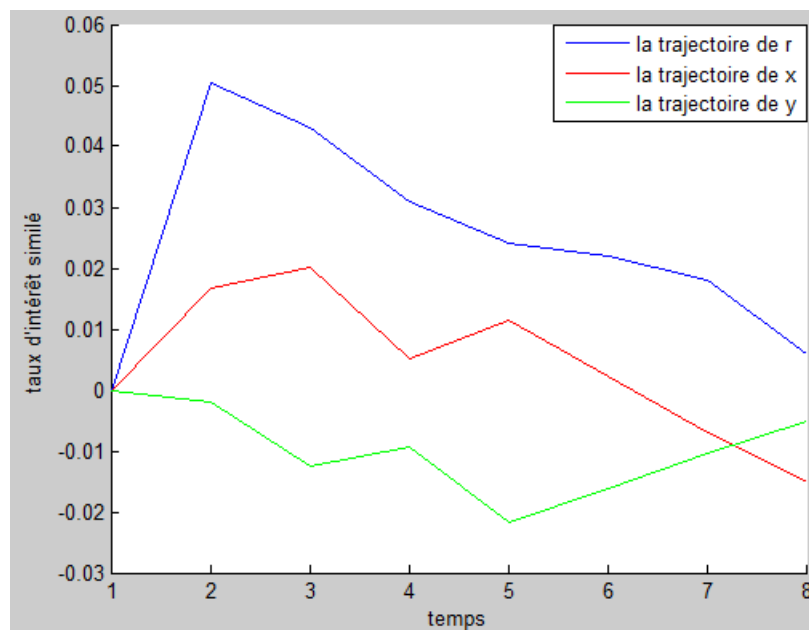


FIGURE 4.9 – Simulation de taux d'intérêt par le modèle gaussien à deux facteurs

4.5 Simulation de trajectoire réelle et estimé

Remarque 4.1. Les paramètres réelles et estimées nous les avons pris de [6].

4.5.1 Modèle de Vasicek

Le programme Matlab suivant permet de simuler la trajectoire de Vasicek par les paramètres réelles et les paramètres estimés.

$$\begin{aligned} a &= 0.005 & b &= 0.05 & s &= 0.07 \\ \hat{a} &= 0.0044 & \hat{b} &= 0.3613 & \hat{s} &= 0.0576 \end{aligned}$$

```

1 - randn('state',300)
2 - T=100; n=100; dt=T/n;
3 - dw=sqrt(dt)*randn(1,n);
4 - w=randn(1,n)
5 - a=0.005; b=0.05; s=0.07;
6 - aest=0.0044; best=0.3613; sest=0.0576;
7 - rzero=0.1; rest=rzero; rex=rzero;
8 - for i=2:n
9 -     rex(i)=rex(i-1)*exp(-b*dt)+a*(1-exp(-b*dt))+s*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/(2*b))*dw(i);
10 -    rest(i)=rest(i-1)*exp(-best*dt)+aest*(1-exp(-best*dt))+sest*sqrt((1-exp(-2*best*dt))/(2*best))*dw(i);
11 - end
12 - plot([0:dt:T],[rzero,rex],'b') ,hold on
13 - plot([0:dt:T],[rzero,rest],'r') ,hold on
14 - er=sum(abs(rex-rest))/n

```

Exécution :

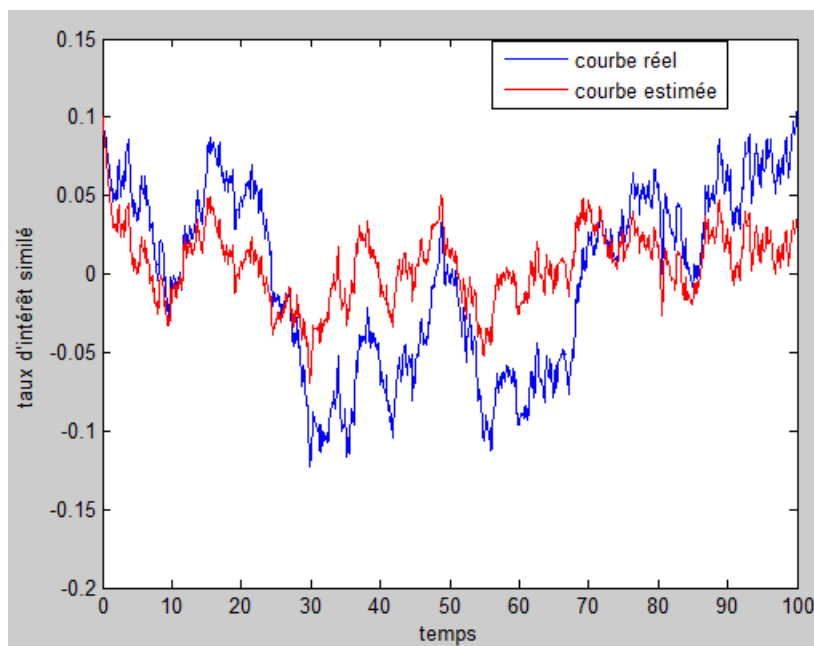


FIGURE 4.10 – Simulation de trajectoire de taux d'intérêt par Vasicek

er =

0.0395

4.5.2 Modèle de CIR

Le programme Matlab suivant permet de simuler la trajectoire de CIR par les paramètres réelles et les paramètres estimés.

$$\begin{aligned} a &= 0.1 & b &= 0.2 & s &= 0.05 \\ \hat{a} &= 0.1003 & \hat{b} &= 0.2253 & \hat{s} &= 0.0566 \end{aligned}$$

```

1 -   randn('state',300)
2 -   T=100; n=1000; dt=T/n;
3 -   dw=sqrt(dt)*randn(1,n);
4 -   w=randn(1,n)
5 -   a=0.1; b=0.2; s=0.05;
6 -   aest=0.1003; best=0.2253; sest=0.0566;
7 -   rzero=0; rest=rzero; reul=rzero;
8 -   for i=2:n
9 -       reul(i) = reul(i-1)+b*(a-reul(i-1))*dt+s*(sqrt(reul(i-1)*dt))*dw(i)/sqrt(dt);
10 -      rest(i) = rest(i-1)+b*(a-rest(i-1))*dt+s*(sqrt(rest(i-1)*dt))*dw(i)/sqrt(dt);
11 -   end
12 -   plot([0:dt:T],[rzero,reul],'b') ,hold on
13 -   plot([0:dt:T],[rzero,rest],'r') ,hold on
14 -   er=sum(abs(reul-rest))/n

```

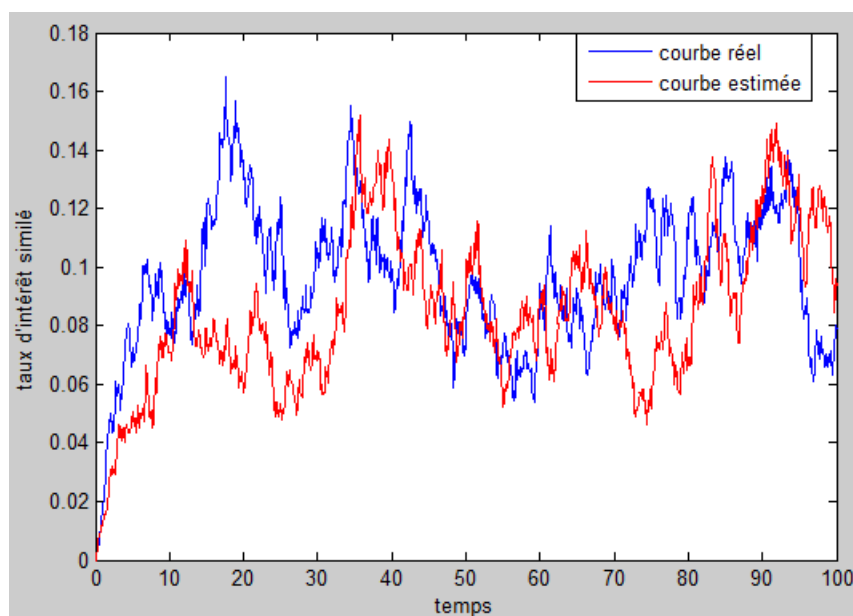


FIGURE 4.11 – Simulation de trajectoire de taux d'intérêt par CIR

```
er =  
0.0249
```

Interprétation :

D'après la simulation des trajectoires réelles et estimées sur les modèles des taux d'intérêts stochastiques. On remarque que l'erreur obtenue par le modèle CIR est le plus petit par rapport au modèle de Vasicek , donc la trajectoire du modèle CIR est la plus proche à la courbe réelle.

Conclusion générale

Ce mémoire nous a permis d'avoir des connaissances sur les produits dérivés et comment les valoriser, grâce au modèle de Black et Scholes. Comme on a pris connaissance que le taux d'intérêt peut être volatil et qu'il existe plusieurs modèles modélisant le taux d'intérêt à court terme. On a choisi dans notre étude quatre modèles (Vasicek, CIR, HW et G2++) et essayé de déterminer le modèle le plus réaliste.

Le concept fondamental de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent. Ce succès est dû à la simplicité de ces formules. Mais, d'un côté ce modèle ne peut être appliqué qu'aux options de type européen, car il n'est pas adapté pour celles de type américain. D'autre côté, le modèle de Black-Scholes est basé sur des hypothèses qui sont pas toujours fiables sur les marchés financiers par exemple l'instabilité des taux d'intérêt.

Jusqu'à présent, aucun modèle n'a pu s'imposer comme modèle de référence au même titre que le modèle de Black-Scholes pour les options sur actions. Les trois premiers modèles sont des modèles à un facteur, faciles à comprendre en théorie et qui présentent l'avantage de donner des expressions analytiques à un zéro-coupon. Ces expressions sont facilement implémentables du point de vue informatique, et connaissant les paramètres, on peut obtenir le prix très rapidement. Comme il nous permet d'obtenir une formule de prix zéro coupon. Cependant, l'un des principaux défauts de ces modèles est qu'il existe une relation parfaite corrélation entre les taux des différentes maturités.

Pour remédier à ce défaut, nous avons tenté de présenter un modèle à deux facteurs G2++. L'avantage de ce modèle permet de donner une bonne représentation de la courbe des taux. Et son inconvénient comme dans le modèle de Vasicek, le taux court instantané peut toujours prendre des valeurs négatives.

Pour pallier au défaut du modèle gaussien à deux facteurs qui est la négativité des taux, plusieurs modèles de taux ont été proposés en littérature financière tels que le modèle de CIR2++ qui constitue un thème de recherche très intéressant.

Bibliographie

- [1] Ait-Hocine Fadila, Modélisation stochastique en finance, Modèles de taux et évaluation d'actifs, Mémoire de Magister umbb, 2007.
- [2] Bertrand Jacquillat, Bruno Solnik, Marchés financiers, Gestion de portefeuille et des risques, 2^e édition.
- [3] Broquet. Cobbaut, Gillet. van den BERG, Gestion de portefeuille, 3^e édition.
- [4] Christophe Lunven, Projet-modèle-de-taux, 29 Février 2012.
- [5] Dominique Foata, Aimé Fuchs, Processus de Poisson, Chaines de Markov et martingales.
- [6] Équations différentielles stochastiques, Estimation et simulation, M2, 2018.
- [7] Frédéric Planchet, Modèles financiers en assurance et analyses dynamiques.
- [8] Haneche Mohamed mémoire de magister UMBB, Processus stochastiques et Equations aux dérivées partielles, 2008-2009.
- [9] InterestRatesModels-LectureNotes, Modèles stochastiques de taux d'intérêts, 2011.
- [10] Jean-Louis Reiffers, Théorie de la structure par terme des taux d'intérêts, 14 mars 1994.
- [11] Khaldi Yamina mémoire de magister UMBB, Interprétation probabiliste des EDP et processus de diffusion, 2007.
- [12] Meddahi Samia mémoire de magister UMBB, Estimation des paramètres des EDS :Modèle de Black-Scholes, 2009.
- [13] Modèle de taux surface de volatilité et introduction au risque de crédit(1).
- [14] Monique Jeanblanc, Cours de Calcul stochastique, master 2IF EVRY, Septembre 2006.
- [15] M'hamed Eddahbi, Marché financier et modèles des taux d'intérêts en temps discret et continu, 2003.
- [16] M.Sakarovitch, Techniques mathématiques de la recherche opérationnelle, V-Processus aléatoire.

-
- [17] Olivier Leveque, Cours de probabilités et Calcul stochastique, EPEL, 2004-2005.
- [18] Romuald Elie & Idris Kharoubi, Calcul stochastique appliqué à la finance.
- [19] Robert Cobbaut, Roland Gillet, Georges Hubner, La gestion de portefeuille, Instruments, stratégie et performance.
- [20] Trari-Medjaoui Hocine, Des limites de la finance conventionnelle a l'Emergence de la finance alternative.
- [21] Vlad Bally, Modèles de Taux d'intérêts, 2008.