

Université M'HAMED BOUGARA
Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie
BOUMERDÈS

Département : *Automatisation des Procédés Industriels et Électrification*
Laboratoire : *Automatique appliquée. Axe : Process control.*

Mémoire de Magister

Spécialité : *Génie électrique. Option : Équipements Électriques Industriels.*

Présenté par :

Abdelhamid IRATNI

COMMANDE ET ANALYSE DES INTERACTIONS
DES SYSTÈMES MULTIVARIABLES PAR BOND-GRAPHS.

Soutenu publiquement le 22/07/2003, devant le jury d'examen composé de :

<u>Président :</u>	Mr. F. LAAOUAD	MC	Université de BOUMERDES
<u>Rapporteur :</u>	Mr. A. KHELASSI	CC	Université de BOUMERDES
<u>Examineurs :</u>			
	Mr. E. BERKOUK	MC	ENP El-Harrach ALGER
	Mr. M. TADJINE	MC	ENP El-Harrach ALGER
	Mr. A. BENHALLA	CC	Université de BOUMERDES

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements au Docteur A. Kfielassi, Chargé de cours à l'université de M'hamed Bougara Boumerdès pour m'avoir encadré durant ce mémoire de la meilleure manière qui soit et d'avoir favorisé, par son dynamisme et sa compétence, un terrain de travail agréable et encourageant.

Je tiens à remercier monsieur F. LAAOUAD, Maître de conférence à l'université de M'hamed Bougara Boumerdès pour avoir été président de mon jury de soutenance.

Tous mes remerciements vont aussi à monsieur E. BRKOUK, Maître de Conférence à ENP El-Harrach, monsieur M. TADJINE, Maître de Conférence à ENP El-Harrach, et monsieur A. BENHALLA, Chargé de cours à l'université de M'hamed Bougara Boumerdès pour avoir accepté d'être membres de mon jury de soutenance.

J'exprime enfin ma sincère gratitude à tous les enseignants et responsables de notre université qui m'ont aidé à avancer dans mes travaux par leurs connaissances, par leurs conseils et par leur soutien moral et matériel.

À chacun des événements de ma vie, je ne manque pas d'avoir une pensée pour les personnes qui m'ont donné l'initiative, la liberté et l'enthousiasme de faire ce que je fais : mes parents,...

À mon petit frère Youssef, tous mes soeurs,...

À tous mes amis,...

u T??

u?rW?P ?urR?OTRSR Ri?rW U??s? S R?zs?RtYs?r?yrU ?rW? RW?D o
s?? ???usB r?us?Brsy?R?r UT?? Ur?s??t s?W?u ?T?URy r???? r??U?u?us
ttYs?R?W? Ri ??t s? ?s??usUrU?S?? u YrRU Yr?y r?SU? ?SuT?B?r??u?us
S R?zs?R?Ys?R ?t s?RSr?UR?Ys???t s?R S R?zs?R

i ??t s?S?D?S R?zs?R?it ?t s?W?RT?URi rUrU?S?S r?UR?Ys?R?i s?R
i?s?? r?yrU ?rU?i Ri ?r?Y?U?R??s?r??S?RP S R?zs?R?Ys???yrU ?W?
?yrU ?R?Y?R?y r?r?us? ?s ??U?i r?S?S R?zs?R?Ys?R?i s?r r?ur??S r?r?S?b
D ?S u?ury ?S r?UR?Ys???t s?W?u ?T?URo r??u??ryuUus?O

r????B r?us?Ry??S?D ?D ???t s?r??us? Ut ID??Ys •

??t s?W? ?u??Y?D ??Ys?r?U?i ???t s?R?S ?R?S?U?r?STR •

?T?URi r? u???O? ??t s?r??us? Ut ID??Ys? ?u? D ?U?D ?U?r u?S ? ?b
uYs r?UR?Ys???t s?W? ?o??R?t s?R??us? ?Y?y ??t S r?UR?Ys???t s?W?
r?UR? ? TRS? ?U?? ??t s?B r?UuR?SUR ?U s?sR SuT? ? Tt? RUI r
r?Y?r??u ?r?Y?U?r??y ? Ut s?r??us?RP ??SU?f?D i R?rs?R?us?P????R
S R?zs?R?Ys?R?W? Ri S?TRSR

??R?W? R?t ?i R?P? S R?zs?R?Ys? r?W? R??t s?i ?s ? ?S?u T? ?Y?R?
??RU ?RO r??R?rul BU??

?S ?R?S?U?R ?Y?SU?P??D ?r??u ?RU ?D ???R?i? ? ??t s?Ri S R?R?S?R uzR
S?TRSR?S?Y?i r?Y?U?r??t s?

BT??S RZs?RtYs?RWA RZszU ?iuY?BU rY PRO?USZ t?? ?l RrrR
ZSj ?YsUS?SR? s?Q??t sR??U ?? R?Uj ?YsUS?sB? TRSPŠY?? ??? sBuu R

r?i RUi

uUrrU UTt??urRuBRSr??RŠ??r bYs?R?? UR Yrr??t?? ?sRrrR ?i

SUP?D ?r??uBRZs?RYS?W?R??u ?UTs?i r??YsU?RR?Š??BuuR Yr

r??Rurul m s??

t??i rUUsTR? S?SRrrR?U ?? ? ??t sRrŠY??RR O:umuBRSr??R

? usRU R RP ?i SuT?RjTt?Ri SRZs?R?ttYR ??Us?R r?WA RVf?y r URtR

? R? i r??Rurul rrtu??SUP??uRZUR??u ?UTs?R?U u? rŠY?buu ??O

RZU?Rj TRSRy D ?U s?SRt sR??R?? Yu?RrUt B?R??s r ?t?r?Yr ?t ?s??R

ROR?Ut??BRt? ?t RD ?i j?rYsU?Ry rUUSYs? Uj ?UBr??D o bZ?SUP???

rurul BRSr??R

tt?r URtrr?? ?YR?D?u? Tl RrrR i ?b?us r?uuR?r??Yi D??sŠR??

u?Zs??

Abstract

In recent years, there has been considerable interest in developing process control strategies for multivariable control systems. Multivariable control involves the objective of maintaining several controlled variables at their independent set points. However, in these systems new characteristics due to **interaction** must be considered. Interaction results from process relationships that cause a manipulated variable to affect more than one controlled variable. Despite its importance, interaction analysis gives a full understanding of process behavior.

There are two basic multivariable control approaches. The first is a straightforward extension of single-loop control to many controlled variables in a single process. This is termed **multiloop control** and has been applied with success for many decades. The second main category is *coordinated* or *centralized control*, in which a single control algorithm uses all measurements to calculate, all manipulated variables simultaneously.

The traditional industrial control strategy for multivariable control problems is to use a multiloop control scheme consisting of several conventional PI or PID controllers. The design of the multiloop control system can be broadly divided into two stages as follows:

1. Selection of controlled and manipulated variables to be paired on one-to-one basis; and
2. Selection of control law and tuning controllers to provide an acceptable level of performance.

In this approach, the key decision is to select the best pairing of controlled and manipulated variables. This work is related to modelling, analysis and control of the multivariable systems. For processes represented by bond-graph, the aim is to propose suitable tools for concurrent engineering of control systems: is it possible to design, for a given model, a control strategy by interaction analysis? The first chapter aims to recall the main results allowing defining the modes of representation of the multivariable systems, and different analytical methods for interaction analysis, based either on the transfer function, or based on the state space representation. In the second chapter, some existing results dealing with bond-graph formalism are presented. It is particularly focused on the methods used to emphasise the structure of a multivariable system from its bond-graph model. The third chapter is devoted to the study of square models: The numbers of input and output variables are identical. Structural analysis methods are first presented. They aim to characterise graphically on the open loop bond-graph model whether a stable decoupled model can be designed. Geometric methods are then presented to synthesise the symbolic expressions of control laws insuring both closed loop non-interaction and stability. These methods are finally implemented on distillation column, which the product composition is to control.

Table des matières

Introduction	1
1. Représentation et analyse des systèmes multivariables	3
1.1. Représentation des systèmes multivariables	3
1.1.1. Diverses représentations	4
1.2. Représentation algébrique	5
1.2.1. Zéros d'une matrice polynômiale	5
1.2.2. Pôles et zéros d'une matrice rationnelle	6
1.2.3. Pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle	7
1.2.4. Inversibilité d'un système.....	7
1.3. Représentation géométrique	8
1.3.1. Notations.....	8
1.3.2. Sous-espaces invariants	8
1.3.3. Récapitulatif.....	12
1.4. Analyse des interactions.....	13
1.4.1. Méthodes utilisant la matrice de transfert du système.....	13
1.4.2. Méthode d'analyse utilisant la représentation d'état.....	18
1.5. Conclusion.....	22
2. Méthodologie Bond-graph	23
2.1. Le Langage bond-graph.....	23
2.1.1. Éléments et causalité	23
2.1.2. Chemin causal.....	27
2.2. Les bases de contrôle par bond-graph	28
2.2.1. Représentation d'état.....	28
2.2.2. Rang de la matrice d'état	30
2.2.3. Commandabilité en état	30
2.2.4. Inversibilité	31
2.3. Eude structurelle.....	32
2.3.1. Structure finie	33
2.3.2. Structure infinie.....	35
2.3.3. Structure infinie et transmissions directes.....	37
2.3.4. Structure essentielle	39
2.4. Conclusion.....	39

3. Analyse et commande	40
3.1. Commande des Systèmes Multivariables.....	40
3.1.1. Méthodes Fréquentielle	40
3.1.2. Méthodes Temporelles	42
3.2. Outils pour l'analyse	44
3.2.1. Zéros invariants des modèles lignes	45
3.2.2. Application.....	47
3.2.3. Nombre de zéros invariants nuls.....	51
3.2.4. Application.....	53
3.2.5. Extension à l'étude des zéros-système nuls	56
3.2.6. Application.....	59
3.3. Outils pour la commande	61
3.3.1. Découplage et rejet de perturbations.....	62
3.3.2. Sous-espaces de découplage.....	65
3.3.3. Application.....	67
3.4. Conclusion	73
4. Application	74
4.1. Description du process	74
4.2. Modèles de la colonne de distillation.....	75
4.2.1. Hypothèses de modélisation	75
4.2.2. Modèle Classique	76
4.2.3. La non-linéarité	79
4.2.4. L'effet de variation de débit d'alimentation.....	79
4.3. Analyse des interactions	80
4.3.1. Matrice des gains relatifs	81
4.4. Modèle bond-graph.....	83
4.4.1. Bond-graph à mots	83
4.4.2. Modèle Hydraulique	84
4.4.3. Modèle Chimique.....	84
4.4.4. Transfert d'énergie thermique.....	84
4.5. Découplabilité et rejet de perturbation.....	85
4.5.1. Rejet de perturbations	86
4.5.2. Etude du modèle initial.....	86
4.5.3. Découplage et rejet de perturbation.....	88
4.6. Conclusion.....	90
Conclusion	91
Bibliographie	93
Annexes	96
A.1. Variables généralisées.....	96
A.2. Composants et éléments de jonction.....	97
A.3. Lien d'information.....	98
A.4. Retour d'état et stabilité	100
A.5. Programmes Matlab	102

Introduction

Ce travail concerne la modélisation, l'analyse des interactions et la commande des systèmes multivariables. Il s'inscrit dans la problématique suivante :

- Une architecture de commande est à concevoir pour un système multivariable.
- Un modèle bond-graph est utilisé pour décrire le système considéré. Ce modèle est graphique, il permet une compréhension rapide des différents phénomènes physique concernés.

L'idée est alors d'exploiter la forme graphique de ce modèle pour en détecter les propriétés structurelles dans un objectif de commande donné. Dès la phase de modélisation, il s'agit ainsi de répondre à la question suivante : étant donné un objectif de commande visé, placement de pôles ou rejet de perturbation par exemple, est-il possible de mettre en œuvre, à partir du modèle considéré, une stratégie de commande donnée, le découplage? Cette démarche d'analyse permet de proposer d'éventuelles modifications du modèle, destinée à rendre possible la stratégie de commande choisie, prise en compte de phénomènes physiques négligés jusqu'à présent, modification du placement des capteurs et actionneurs. La synthèse structurelle de la loi de commande peut alors être réalisé en utilisant des outils méthodologiques existants, approche géométrique.

A travers ce travail, notre objectif est de proposer des méthodes graphiques simples permettant d'apporter rapidement une réponse aux questions suivantes : le modèle proposé est-il découplable en préservant la stabilité ? Quelles sont les propriétés dynamiques du modèle découplé ? De quelles parties du modèle en boucle ouverte ces propriété dépendent-elles ? Comment calculer l'expression formelle des lois de commande correspondantes ?

Dans le premier chapitre, nous ferons un point sur les principaux éléments définissant un système multivariable, les principales méthodes de représentation d'un système multivariable dans le cas continu et les techniques d'analyse des interactions. Nous nous attacherons à mettre en relief les propriétés découlant de chacun d'entre eux. Il a également pour but de situer l'intérêt de ces concepts dans un objectif de commande par découplage.

Le second chapitre sera consacré à la méthodologie bond-graph, nous présentons quelques rappels relatifs à cette méthodologie. L'objectif est tout d'abord de résumer les principales règles permettant de construire un modèle bond-graph, en lien avec les phénomènes physiques qu'il décrit. Il s'agit également de rappeler des méthodes existantes, destinées à caractériser la structure d'un système à partir de son modèle bond-graph.

Notre contribution est présentée dans les troisième et quatrième chapitres. Elle s'applique, pour une large part, aux systèmes multivariables dont la matrice d'état est inversible. Cette hypothèse est satisfaite pour un nombre important d'applications. En particulier le cas des modèles non simplifiés.

Le troisième chapitre concerne l'étude des modèles bond-graph possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie. Pour cette classe de modèles, nous présentons des méthodes d'analyse puis de synthèse de lois de commande fondées sur des procédures graphiques. Les

méthodes d'analyse ont pour but de caractériser graphiquement la stabilité du modèle découplé à partir du modèle bond-graph en boucle ouverte. Les méthodes de synthèse visent à déterminer l'expression formelle de lois de commande assurant la non interaction et la stabilité du modèle en boucle fermée. Ces méthodes reposent sur l'utilisation d'outils géométriques.

A travers une application colonne de distillation entrant dans le cadre de recherche de notre équipe, nous illustrons l'intérêt de ces procédures dans une démarche de conception d'architecture de commande. Nous étudions le modèle de la colonne, pour laquelle l'objectif est de contrôler la composition des produits. Nous avons construit le modèle bond-graph, sur lequel nous mettons en œuvre certains des méthodologies présentées dans les chapitres précédents. Une simulation est présentée à chaque partie pour valider notre méthodologie.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale sur l'ensemble de ce travail et nous suggérons des perspectives de continuité de travail.

Chapitre I

Représentation et analyse des systèmes multivariables

La représentation des systèmes multivariables est étudiée depuis de longue date par la communauté des automaticiens. A cet effet, deux approches ont historiquement été utilisées. La première, algébrique, vise à décrire le système par l'intermédiaire de représentations matricielles et polynomiales [38]. La seconde, géométrique, repose sur la notion de sous-espace de l'espace d'état. L'objectif poursuivi dans ce cas est d'associer les propriétés dynamiques du système à des propriétés d'espace [52] [33].

Ces deux approches véhiculent une quantité importante d'informations concernant le système [10] [28]. L'objectif de ce chapitre est de préciser les plus importantes d'entre elles, dans une optique d'analyse des interactions et de commande.

Ce chapitre regroupe les outils et les techniques utilisés pour l'analyse et la représentation des systèmes multivariables (*MIMO : Multi Input Multi Output*). On présente principalement les différents modes de représentation des systèmes multivariables, qui se caractérisent par des phénomènes de couplage (*ou d'interaction*), et les principales méthodes basées sur ces modes pour l'analyse des interactions.

1.1 Représentation des systèmes multivariables

Les systèmes multivariables sont des systèmes à plusieurs entrées (u_1, u_2, \dots, u_m) et à plusieurs sorties (y_1, y_2, \dots, y_r) (*figure 1.1*). Ces derniers ne se réduisent pas à la mise en parallèle de systèmes monovariables mais se caractérisent par des phénomènes d'interaction (ou de couplage) dans la mesure où l'application d'un signal sur une entrée entraîne en général une variation de plusieurs ou de toutes les sorties [13] [14].

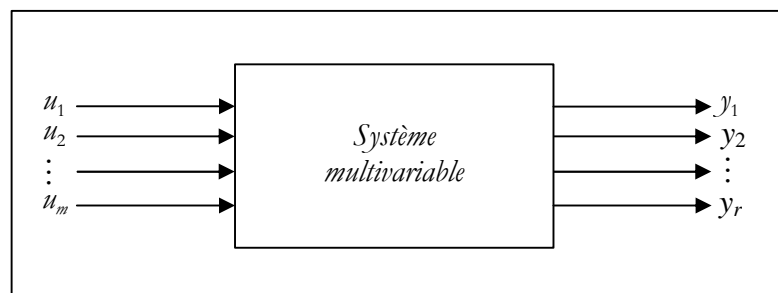


Figure 1.1 : *Système multivariable.*

Les entrées sorties d'un système multivariable sont données par :

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad y^T = [y_1, y_2, \dots, y_r].$$

Où :

m : nombre d'entrées.

r : nombre de sorties.

u : vecteur de commande (entrées) de dimensions $m \times 1$.

y : vecteur de sorties de dimensions $r \times 1$.

1.1.1 Diverses représentations

La figure 1.2 résume les principales représentations d'un système multivariable dans le cas continu [13]. Comme pour les systèmes monovariabes continus, trois types de représentation sont possibles [13] :

- Par un système de r équations différentielles liant les r sorties aux m entrées et à leurs dérivées, c'est le modèle auquel on arrive généralement lorsque les lois de la physique peuvent être utilisées. Tous les systèmes d'équations différentielles n'ont pas les mêmes propriétés d'existence et d'unicité de la solution. Il en résulte des comportements très différents face aux techniques d'intégration numérique.

(a) Représentation par matrice de transfert :

$$y(s) = G(s) u(s).$$

Où :

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1}(s) & g_{r2}(s) & \dots & g_{rm}(s) \end{bmatrix}.$$

(b) Représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u, \\ y &= C x + D u. \end{aligned}$$

Avec x vecteur d'état.

(c) Représentation par équations différentielles :

$$\begin{aligned} F_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_r, \dot{y}_r, \dots, u_1, \dots, \dot{u}_m, \dots) &= 0, \\ \dots & \dots \\ F_r(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_r, \dot{y}_r, \dots, u_1, \dots, \dot{u}_m, \dots) &= 0. \end{aligned}$$

Figure 1.2 : Divers types classiques de représentation.

- Par une matrice de transfert, c'est-à-dire une matrice de fonctions de transfert représentant les transmittances entre les divers couples entrée-sortie $[u_j - y_i]$, il est en général le modèle de base dont on dispose lorsque le système est trop complexe pour être mis complètement en équations en utilisant les lois de la physique et que l'on procède à une identification globale entrées-sorties.
- Par un modèle d'état, ce sera le plus souvent un modèle abstrait, fondamental pour l'analyse et la commande. Au niveau d'un système, on peut définir des variables d'entrée et des variables de sortie. C'est typiquement ce que représente un schéma bloc (block diagram). Connaissant les entrées du système à un instant donné, le modèle du système permet de calculer l'évolution future de l'état de celui-ci. A chaque instant, l'état du système résume le passé de celui-ci. C'est la connaissance minimale nécessaire pour déterminer son évolution, connaissant l'évolution des variables d'entrée. L'état du système est décrit par ses *variables d'état*.

Dans une optique d'analyse et de commande, nous précisons les importantes informations véhiculées par les deux approches de représentation des systèmes.

1.2 Représentation algébrique

Nous rappelons tout d'abord les techniques de factorisation matricielle nécessaire pour définir les notions de pôles et zéros, finis et infinis, de matrices polynomiales et rationnelles. Puis nous introduisons deux matrices spécifiques – la matrice système et la matrice de transfert – à partir desquelles seront définis les éléments caractéristiques du système. Ces deux matrices sont finalement utilisées pour rappeler les principales définitions relatives à l'inversibilité du système.

Nous considérons donc des systèmes linéaires invariants décrits par l'équation d'état (1.1), $x(\cdot) \in \mathcal{X} \approx \mathfrak{R}^m$ représente le vecteur d'état, $y(\cdot) \in \mathcal{Y} \approx \mathfrak{R}^p$ représente le vecteur de sortie et $u(\cdot) \in \mathcal{U} \approx \mathfrak{R}^m$ représente le vecteur d'entrée de commande. Précisons que l'amalgame sera fait, dans ce chapitre, entre la notion de modèle mathématique et celle de système d'état, noté $\Sigma(C, A, B)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2.1 Zéros d'une matrice polynômiale

Les zéros d'une matrice polynômiale sont calculés à partir de sa forme de Smith, exprimée comme le rappelle la définition suivante.

Définition 1.1 : Soit $R(s) \in \mathfrak{R}_{pol}^{a \times b}(s)$ une matrice polynômiale de rang r . Il existe toujours des matrices unimodulaires $U_1(s) \in \mathfrak{R}_{pol}^{a \times b}(s)$ et $U_2(s) \in \mathfrak{R}_{pol}^{a \times b}(s)$ vérifiant les équations (1.2) et (1.3), où $L(s)$ est la forme de Smith de $R(s)$.

$$U_1(s) \cdot R(s) \cdot U_2(s) = L(s) \quad (1.2)$$

$$L(s) = \begin{bmatrix} I_r(s) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & I_r(s) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les polynômes $I_i(s)$ sont appelés polynômes invariants de $R(s)$. Ils sont uniques, normalisés – unitaires – et vérifient :

Propriété 1.2 : Pour $i = 1, \dots, (r-1)$, $I_i(s)$ divise $I_{i+1}(s)$.

La définition suivante établit le lien entre les polynômes invariants et les zéros d'une matrice polynômiale.

Définition 1.3 : Les zéros d'une matrice polynômiale sont les racines de ses polynômes invariants.

Comme l'exprime la remarque suivante, il est possible de caractériser les polynômes invariants d'une matrice polynômiale $R(s)$ sans systématiquement calculer sa forme de Smith.

Remarque 1.4 : Soit $D_i(s)$ le plus grand diviseur commun à tous les mineurs d'ordre i de $R(s)$. Les polynômes invariants de $R(s)$ sont alors exprimés par les relations (1.4) et (1.5).

$$I_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \quad (1.4)$$

$$D_0(s) = 1 \quad (1.5)$$

1.2.2 Pôles et zéros d'une matrice rationnelle

Les pôles et zéros d'une matrice rationnelle sont calculés à partir de sa forme de Smith McMillan, exprimée comme le rappelle la définition suivante.

Définition 1.5 : Soit $H(s) \in \mathfrak{R}_{\text{rat}}^{p \times m}(s)$ une matrice rationnelle de rang r . Soit $d(s)$ le plus petit commun multiple normalisé des dénominateurs de $H(s)$ tel que $H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$. Soit $L(s)$ la forme de Smith de $N(s)$. Il existe des matrices unimodulaires $U_1(s)$ et $U_2(s)$ telles que $U_1(s) \cdot H(s) \cdot U_2(s) = \frac{L(s)}{d(s)}$. Posons $\frac{L(s)}{d(s)} = \text{diag} \left\{ \frac{\mathbf{e}_i(s)}{\mathbf{y}_i(s)} \right\}$ et notons $\mathbf{e}_i(s)$ et $\mathbf{y}_i(s)$ des polynômes premiers entre eux tels que $\left\{ \frac{I_i(s)}{d(s)} \right\} = \left\{ \frac{\mathbf{e}_i(s)}{\mathbf{y}_i(s)} \right\}$. La forme de Smith McMillan de $H(s)$ est alors la matrice $M(s)$ définie par les équations (1.6) et (1.7).

$$U_1(s) \cdot H(s) \cdot U_2(s) = M(s) \quad (1.6)$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{e}_1(s)}{\mathbf{y}_1(s)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\mathbf{e}_r(s)}{\mathbf{y}_r(s)} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Les polynômes $\mathbf{e}_i(s)$ et $\mathbf{y}_i(s)$ sont uniques, normalisés et vérifient :

Propriété 1.6 : pour $i = 1, \dots, (r-1)$, $\mathbf{e}_i(s)$ divise $\mathbf{e}_{i+1}(s)$ et $\mathbf{y}_{i+1}(s)$ divise $\mathbf{y}_i(s)$.

Le lien, entre ces polynômes et les pôles et zéros de la matrice rationnelle $H(s)$, est rappelé par la définition suivante.

Définition 1.7 : Les zéros –respectivement pôles– de la matrice rationnelle $H(s)$ sont les racines des polynômes $e_i(s)$ - respectivement $y_i(s)$.

1.2.3 Pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle

Les ordres de multiplicité des pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle quelconque sont caractérisés à partir d'une troisième forme canonique : la forme de Smith McMillan à l'infini.

Définition 1.8 [19] [49] : Soit $T(s) \in \mathfrak{R}_{rat}^{p \times m}(s)$ une matrice rationnelle de rang r . Il existe toujours des matrices bicausales $B_1(s)$ et $B_2(s)$ vérifiant les équations (1.8) et (1.9), où $F(s)$ est la forme de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$.

$$T(s) = B_1(s) \cdot F(s) \cdot B_2(s) \quad (1.8)$$

$$F(s) = \begin{bmatrix} s^{-n'_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & s^{-n'_r} & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Les coefficients n'_i sont rangés par ordre décroissant dans la matrice $F(s)$. Ils caractérisent les ordres des pôles et zéros à l'infini de $T(s)$, comme le rappelle le théorème suivant.

Théorème 1.9 [10] [11] : Soit $T(s)$ une matrice rationnelle de r . Il existe des factorisation de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$. La forme de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$, notée $F(s)$, est cependant unique. n'_i Positif est appelé ordre d'un zéro à l'infini de $T(s)$. Si n'_i est négatif ($-n'_i$) est appelé ordre d'un pôle à l'infini de $T(s)$.

C'est en particulier à travers l'étude de deux matrices spécifiques que ces techniques permettent d'exhiber les caractéristiques du système $\sum(C, A, B)$: la matrice système, une matrice polynômiale, et la matrice de transfert, une matrice rationnelle.

1.2.4 Inversibilité d'un système

Définition 1.10 : La matrice système associée au système $\sum(C, A, B)$ est la matrice polynômiale $P(s)$ définie par l'équation (1.10).

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Définition 1.11 : La matrice de transfert associée au système $\sum(C, A, B)$ est la matrice rationnelle $T(s)$ définie par l'équation (1.11).

$$T(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (1.11)$$

Ces deux matrices vérifient la propriété suivante.

Propriété 1.12 : La matrice système $P(s)$ et la matrice de transfert $T(s)$ associées au système $\Sigma(C, A, B)$ vérifient l'équation (1.12).

$$\det[P(s)] = \det[sI - A] \cdot \det[T(s)] \quad (1.12)$$

Essentielles pour caractériser la structure du système $\Sigma(C, A, B)$, ces matrices renferment également les informations relatives aux propriétés d'inversibilité du système : connaissant les valeurs désirées des variables de sortie, est-il possible de déterminer les valeurs à imposer aux variables d'entrée ? Caractériser l'inversibilité d'un système consiste donc de déterminer le rang de la matrice de transfert.

Définition 1.13 : Soit $\Sigma(C, A, B)$ le système décrit par l'équation (1.1), possédant m variables d'entrée et p variable de sortie. Soit $T(s)$ sa matrice de transfert. Le système $\Sigma(C, A, B)$ est inversible à droite si le rang $[T(s)] = p$. Il est inversible à gauche si et seulement si $[T(s)] = m$.

Pour un système carré, cette définition se simplifie de la manière suivante.

Définition 1.14 : Un système possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie est inversible si et seulement si sa matrice de transfert est inversible.

1.3 Représentation géométrique

A l'instar des techniques algébriques précédentes, l'approche géométrique définit des outils pour l'analyse et la commande des systèmes linéaires. L'utilisation de ces outils repose sur des fondements différents. Il s'agit en effet d'associer les propriétés dynamiques du système à des propriétés d'espaces [53].

Après avoir précisé les notations essentielles, nous rappelons les principales définitions et propriétés des sous-espaces usuels [51]. Nous résumons finalement les notations relatives aux sous-espaces utilisés par la suite.

1.3.1 Notations

Considérons le système $\Sigma(C, A, B)$ écrit par l'équation (1.1). Notons $K = \ker C$ le noyau de la matrice de sortie $\mathbf{b} = \text{Im } B$ l'espace image de la matrice de commande B .

Le demi-plan complexe gauche est noté C , et le spectre d'une matrice H est noté $\mathbf{s}(H)$. Notons également h_i la i^{me} ligne de la matrice H et H_i son i^{me} bloc. \overline{h}_i représente la matrice H privée de sa i^{me} ligne, \overline{H}_i représente la matrice H privée de son i^{me} bloc.

Enfin, soient W_1 et W_2 deux sous-espaces tels que $W_1 \subset W_2$. L'espace quotient de W_2 sur W_1 est noté W_2/W_1 : il contient les vecteurs de W_2 qui n'appartiennent pas à W_1 . Si W_1 et W_2 vérifient de plus $AW_1 \subset W_1$ et $AW_2 \subset W_2$, alors l'application induite par A sur l'espace quotient W_2/W_1 est notée $(A|W_2/W_1)$.

1.3.2 Sous-espaces invariants

Dans cette section, nous présentons deux types de sous-espaces communément utilisés pour la résolution de problèmes de commande : les sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariant et les sous-espaces (K, A) -invariants.

Définition 1.15 : W est un sous-espace de (A, \mathbf{b}) -invariant si et seulement s'il vérifie l'équation (1.13).

$$AW \subset W + \mathbf{b} \quad (1.13)$$

En termes de retour d'état, cette définition se traduit par la propriété suivante.

Propriété 1.16 : W est un sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariant si et seulement il existe un ensemble de retours d'états F tels que $(A + BF)W \subset W$.

La loi de commande ainsi construite garantit donc que toute trajectoire d'état initialisée dans le sous-espace W y sera maintenue. Nous noterons $F(A, B, W)$ l'ensemble des matrices de retour F vérifiant $(A + BF)W \subset W$.

Soit $L(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$ le sous-ensemble des sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants inclus dans le sous-espace \mathbf{y} . Ce sous-ensemble étant fermé pour l'addition, il possède un élément maximum défini par la propriété suivante.

Propriété 1.17 : Le sous-ensemble $L(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$ possède un élément maximal unique, noté

$$\mathbf{n}^\circ(\mathbf{Y}) = \sup L(A, \mathbf{b}, \mathbf{y}).$$

Le sous-espace $\mathbf{n}^\circ(\mathbf{Y})$ peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.14), encore appelé «Controlled Invariant Subspace Algorithm» [52].

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 = \mathbf{c} \\ \mathbf{n}_m = \mathbf{Y} \cap A^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{n}_{m-1}) \end{cases} \quad (1.14)$$

Pour la synthèse de lois de commande par découplage entrée-sortie, nous utiliserons un sous-ensemble particulier de sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants : le sous-ensemble des sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants inclus dans le noyau de la matrice de sortie, notée $L(A, \mathbf{b}, K)$.

L'élément maximal de ce sous-ensemble est communément noté $\mathbf{n}^\circ(\mathbf{Y}) = \sup L(A, \mathbf{b}, K)$. Il peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.14), avec $\mathbf{y} = K$.

Pratiquement, nous utiliserons l'orthogonal du sous-espace \mathbf{n}° . Ce sous-espace est obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.15) [1].

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0^\perp = 0 \\ \mathbf{n}_m^\perp = K^\perp + A^t(\mathbf{b} \cap \mathbf{n}_{m-1}^\perp) \end{cases} \quad (1.15)$$

Une propriété fondamentale établit un lien entre le sous-espace \mathbf{n}° et l'observabilité du système bouclé. Cette propriété est exprimée de la manière suivante.

Propriété 1.18 : Le sous-espace \mathbf{n}° est le plus grand sous-espace inobservable que l'on puisse construire par retour d'état.

\mathbf{n}° est donc le sous-espace des conditions initiales de toutes les trajectoires d'état annulatrices de la sortie en boucle fermée. Les dynamiques associées à ces trajectoires sont inobservables. Elles peuvent être stables ou non.

Les dynamiques stables sont associées à un second type de sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants : les sous-espaces stabilisables.

Définition 1.19 : W est un sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariant stabilisable si et seulement s'il existe un retour d'état $F \in F(A, B, W)$ vérifiant l'équation (1.16).

$$\mathbf{s}(W|A+BF|W) \subset C \quad (1.16)$$

Un sous-espace stabilisable W est donc un sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariants à partir duquel on peut construire un retour d'état $F \in F(A, B, W)$ tel que $(A+BF)$ soit stable sur W . Soit $L(A, \mathbf{b}, K)$ le sous-ensemble des sous-espaces stabilisables inclus dans le noyau de la matrice de sortie. Ce sous-ensemble vérifie la propriété suivante.

Propriété 1.20 : Le sous-ensemble $L(A, \mathbf{b}, K)$ possède un élément maximal unique, noté $\mathbf{n}_{stab}^\circ = \sup L(A, \mathbf{b}, K)$.

Il vérifie de plus l'équation (1.17).

$$\mathbf{n}_{stab}^\circ \subset \mathbf{n}^\circ \quad (1.17)$$

Parmi toutes les trajectoires annulatrices de la sortie, le sous-espace \mathbf{n}_{stab}° ne caractérise donc que celles dont les dynamiques sont stables. Il sera donc utilisé comme support à la synthèse de lois de commande garantissant simultanément le découplage et la stabilité du système bouclé.

Contrairement au cas précédent, aucun algorithme simple n'existe pour calculer formellement une base de sous-espace. Nous montrerons comment l'outil bond-graph fournit, dans certains cas, une alternative à ce problème de calcul.

Dans l'ensemble des trajectoires stables annulatrices de la sortie, deux types de dynamiques peuvent finalement être isolées : les dynamiques fixes et les dynamiques libres. Ces dernières sont associées à un troisième type de sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariants : les sous-espaces de commandabilité.

Définition 1.21 [33] [28] : R est un sous-espace de commandabilité si et seulement s'il existe des matrices F et G telles que R est l'espace commandable du système $(A+BF, BG)$.

Le sous-espace de commandabilité R est lié aux dynamiques du système bouclé comme le montre la propriété suivante.

Propriété 1.22 [28] : R est un sous-espace (A, \mathbf{b}) de commandabilité si et seulement si, pour tout choix de spectre \mathbf{L} , il existe un retour d'état F vérifiant les équations (1.18).

$$\begin{cases} F \subset F(A, B, R) \\ \mathbf{s}(R|A+BF|R) = \mathbf{L} \end{cases} \quad (1.18)$$

Un sous-espace (A, \mathbf{b}) de commandabilité R garantit donc que, quelles que soient deux valeurs du vecteur d'état $x_1 \in R$ et $x_2 \in R$, il existe une loi de commande permettant de passer de l'état x_1 à l'état x_2 , dans un temps fixé a priori, selon une trajectoire qui reste immergée dans R .

Soit $C(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$ le sous-ensemble des sous-espaces de commandabilité inclus dans le sous-espace \mathbf{y} . Ce sous-ensemble vérifie la propriété suivante.

Propriété 1.23 : *Le sous-ensemble $C(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$ possède un élément maximal unique, noté $R^\circ(\mathbf{y}) = \sup C(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$.*

Le sous-espace $R^\circ(\mathbf{y})$ peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.19). Cet algorithme est appelé « Controllability Subspace Algorithm » [52] ; il utilise le sous-espace $\mathbf{n}^\circ(\mathbf{y}) = \sup L(A, \mathbf{b}, \mathbf{y})$, plus grand sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariants contenu dans le sous-espace \mathbf{y} .

$$\begin{cases} R(\mathbf{y}) = 0 \\ R_m(\mathbf{y}) = \mathbf{n}^\circ(\mathbf{y}) \cap (AR_{m-1} + \mathbf{b}) \end{cases} \quad (1.19)$$

De manière usuelle, le plus grand sous-espace de commandabilité contenu dans le noyau de la matrice de sortie est noté $R^\circ = \sup C(A, \mathbf{b}, K)$. Il vérifie l'équation (1.20).

$$R^\circ \subset \mathbf{n}_{stab}^\circ \quad (1.20)$$

Ce sous-espace R° peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.19), où $\mathbf{n}^\circ(\mathbf{y}) = \mathbf{n}^\circ = \sup L(A, \mathbf{b}, K)$.

Finalement, les propriétés des trois sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants, \mathbf{n}° , \mathbf{n}_{stab}° et R° sont les suivantes.

Les trois sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants, \mathbf{n}° , \mathbf{n}_{stab}° et R° vérifient les relations d'inclusion données par l'équation (1.21).

$$R^\circ \subset \mathbf{n}_{stab}^\circ \subset \mathbf{n}^\circ \quad (1.21)$$

Chacun de ces sous-espaces caractérise toutes ou seulement une partie des trajectoires de l'espace d'état annultrices de la sortie :

- \mathbf{n}° : toutes.
- \mathbf{n}_{stab}° : celles dont les dynamiques sont stables.
- R° : celles dont les dynamiques sont librement assignables.
- $\mathbf{n}^\circ / R^\circ$: celles dont les dynamiques sont fixes.
- $\mathbf{n}_{stab}^\circ / R^\circ$: celles dont les dynamiques sont fixes et stables.

Ce travail fait appel à un dernier type de sous-espace invariants : les sous-espaces (K, A) -invariants où $K = \ker C$. Ces sous-espaces interviendront cependant de manière beaucoup moins directe que les sous-espaces (A, \mathbf{b}) -invariants. Aussi serons nous très brefs dans les rappels des définitions et propriétés relatifs à ces sous-espaces.

Définition 1.24 : *W est un sous-espace (K, A) -invariants si et seulement s'il vérifie l'équation (1.22).*

$$A(W \cap K) \subset W \quad (1.22)$$

Soit $\mathcal{S}(K, \mathcal{A}, \mathbf{b})$ le sous-ensemble des sous-espaces (K, \mathcal{A}) -invariants contenant le sous-espace \mathbf{b} . Ce sous-ensemble possède un élément minimal unique, noté $\mathcal{S}^\circ = \inf \mathcal{S}(K, \mathcal{A}, \mathbf{b})$.

Ce sous-espace \mathcal{S}° peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.23), appelé « Conditional Invariant Subspace Algorithm ».

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 = 0 \\ \mathcal{S}_m = \mathbf{b} + \mathcal{A}(K \cap \mathcal{S}_{m-1}) \end{cases} \quad (1.23)$$

Comme le montrent les algorithmes décrits par les équations (1.14) et (1.23), les sous-espaces \mathbf{n}° et \mathcal{S}° découlent de formulations duales. Ils sont par conséquent liés par la propriété suivante.

$$\left| \textbf{Propriété 1.25} : \sup L(\mathcal{A}, \mathbf{b}, K) = \left(\inf \mathcal{S}(\mathbf{b}^\perp, \mathcal{A}', K^\perp) \right)^\perp. \right.$$

Nous rappelons finalement deux propriétés liant les sous-espaces \mathbf{n}° et \mathcal{R}° et \mathcal{S}° .

$\left| \textbf{Propriété 1.26} : \text{Les sous-espaces } \mathbf{n}^\circ, \mathcal{R}^\circ \text{ et } \mathcal{S}^\circ \text{ vérifient l'équation (1.24)}. \right.$

$$\mathcal{R}^\circ = \mathbf{n}^\circ \cap \mathcal{S}^\circ \quad (1.24)$$

$\left| \textbf{Propriété 1.27} : \text{Pour un système inversible à droite, les sous-espaces } \mathbf{n}^\circ \text{ et } \mathcal{S}^\circ \text{ vérifient l'équation (1.25)}. \right.$

$$\mathbf{n}^\circ + \mathcal{S}^\circ = \mathbf{C} \quad (1.25)$$

1.3.3 Récapitulatif

Les notations par lesquelles sont décrits les sous-espaces utilisés dans la suite de ce travail sont finalement les suivantes.

$\mathbf{n}^\circ = \sup L(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker C)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariants inclus dans $\ker C$.

$\mathbf{n}_{stab}^\circ = \sup L(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker C)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariants stabilisable inclus dans $\ker C$.

$\mathcal{R}^\circ = \sup C(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker C)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariant de commandabilité inclus dans $\ker C$.

$\mathcal{S}^\circ = \inf \mathcal{S}(\ker C, \mathcal{A}, \mathbf{b})$: plus petit sous-espace $(\ker C, \mathcal{A})$ -invariant contenant \mathbf{b} .

$\mathbf{n}_i^\circ = \sup L(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariants inclus dans $\ker c_i$.

$\mathbf{n}_{i, stab}^\circ = \sup L(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariants stabilisable inclus dans $\ker c_i$.

$\mathcal{R}_i^\circ = \sup C(\mathcal{A}, \mathbf{b}, \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(\mathcal{A}, \mathbf{b})$ -invariant de commandabilité inclus dans $\ker c_i$.

$\mathcal{S}_i^\circ = \inf \mathcal{S}(\ker c_i, \mathcal{A}, \mathbf{b})$: plus petit sous-espace $(\ker c_i, \mathcal{A})$ -invariant contenant \mathbf{b} .

$\mathbf{G}_i^\circ = \sup L(A, \mathbf{b}, \ker \bar{C}_i)$: plus grand sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariants inclus dans $\ker \bar{C}_i$.

$\mathcal{W}_i^\circ = \sup C(A, \mathbf{b}, \ker \bar{C}_i)$: plus grand sous-espace (A, \mathbf{b}) -invariant de commandabilité inclus dans $\ker \bar{C}_i$.

1.4 Analyse des interactions

L'existence des interactions entre les variables d'entrées-sorties du système est la cause principale pour laquelle la synthèse et le fonctionnement du système en multiboucle (boucle par boucle) ne donne pas des résultats suffisants car un changement d'une variable d'entrée à pour conséquence des changements de plusieurs variables de sorties ; ce qui rend difficile le maintien des performances de chaque boucle. De plus, les performances d'une boucle de commande peuvent être fortement affectées par les paramètres des régulateurs des autres boucles [20] [26].

Dans le cadre général de la commande des systèmes multivariables une attention considérable a été accordée au concept d'analyse des interactions. Dans cette optique, on cherchera le plus souvent à compenser le système de sorte que :

- Chaque entrée affecte seulement une sortie ;
- La perturbation sur une sortie, les entrées étant nulles, n'affecte que cette seule sortie.

Deux grandes classes de méthodes d'analyse des interactions peuvent être définies :

- Méthodes utilisant la matrice de transfert du système.
- Méthodes utilisant la représentation d'état du système.

1.4.1 Méthodes utilisant la matrice de transfert du système

Dans cette partie, on considère que le système est décrit par une matrice de fonction de transfert $G(s)$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1}(s) & \cdots & g_{rm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

1.4.1.1 Méthodes du quotient d'interaction IQ

Le Quotient d'Interaction est la première méthode d'analyse des interactions proposée par Rijnsdorp en 1965 pour l'analyse des interactions dans un système multivariable. Rijnsdorp considère un système 2×2 et définit le **IQ** comme suit [21] :

$$K(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (1.27)$$

L'analyse des interactions repose sur le calcul de la valeur statique de $K(s)$:

$$k_s = \lim_{s \rightarrow 0} K(s). \quad (1.28)$$

En se basant sur la valeur de k_s , les conclusions de Rijnsdorp sur les interactions dans un système 2×2 sont résumées dans le *tableau 1.1*.

<i>Valeur statique de $K(s)$</i>	<i>Conclusion</i>
$k_s > 1$	Les interactions posent un problème d'instabilité
$-1 \leq k_s \leq \frac{1}{3}$	Faibles interactions entre les variables du système
$k_s \leq -1$ et $\frac{1}{3} \leq k_s \leq 1$	Fortes interactions entre les variables du système

Table 1.1 : *Interprétation de Quotient d'Interaction (méthode de Rijnsdorp).*

L'importance des hautes et moyennes fréquences dans les systèmes a conduit Kominek et Smith à proposer une extension dynamique pour le Quotient d'Interaction [21], car le **IQ** de Rijnsdorp néglige ces gammes de fréquences, ce qui convient à dire que le **IQ** de Rijnsdorp est valable seulement dans les cas des systèmes qui travaillent autour de la fréquence nulle.

La technique de Kominek et Smith consiste à représenter le lieu de Nyquist de $K(s)$ superposé d'un cercle de rayon égal à 1. La comparaison du module de $K(s)$ avec le rayon du cercle donne une information sur les interactions dans le système. Le *tableau 1.2* esquisse les cas possibles et leurs interprétations [21].

<i>Module de $K(s)$</i>	<i>Interprétation</i>
$ K(s) > 1$	Les interactions posent un problème d'instabilité
$ K(s) $ est proche de 1	Fortes interactions entre les variables du système
$ K(s) $ est proche de 0	Faibles interactions entre les variables du système

Table 1.2 : *Interprétation du Quotient d'Interaction (méthode de Kominek et Smith).*

1.4.1.2 Matrice des gains relatifs RGA

La méthode de la Matrice des Gains Relatifs développée par Bristol [31] [40] [42], en 1966, permet de dégager une configuration de commande avec un faible niveau d'interaction. Le calcul de la RGA est basé sur la matrice des gains statiques du système. Chaque élément de la RGA est déterminé par l'expression suivante :

$$\mathbf{I}_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, k \neq j}}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_k=0, k \neq i}}. \quad (1.30)$$

Le numérateur représente le gain statique en boucle ouverte entre u_j et y_i , et le dénominateur c'est le gain statique entre u_j et y_i lorsque les autres sorties sont contrôlées par des correcteurs

parfaits. Le gain relatif \mathbf{I}_{ij} indique si le gain d'une boucle ouverte $[u_j - y_i]$ change lorsque toutes les autres boucles sont fermées [31] [32].

1.4.1.3 Matrice des gains relatifs dynamique RDGA

La Matrice des Gains Relatifs (**RGA**) néglige les moyennes et les hautes fréquences qui peuvent être importantes dans certains systèmes tel qu'un turbo alternateur. En remplaçant le gain statique $K_{s_{ij}}$ par la fonction de transfert correspondante $g_{ij}(s)$; Witcheher, McAvoy et Bristol ont proposé une extension dynamique de la **RGA** appelée Matrice des Gains Relatifs Dynamique (**RDGA**) [21] [50] définie par :

$$RDGA = G(s) \cdot * \left[G^{-1}(s) \right]^T, \quad (1.31)$$

Avec :

$$RDGA = \left[\mathbf{I}_{ij}(s) : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.32)$$

L'examen des lieux de Nyquist des éléments $\mathbf{I}_{ij}(s)$ permet d'analyser les interactions existantes entre les variables du système et de déterminer la configuration de commande.

1.4.1.4 Matrice des gains dynamiques moyens ADGA

La méthode de la Matrice des Gains Dynamiques Moyens développée en 1979, par Gagnepain et Seborg [21], est basée sur le calcul de l'intégrale de la réponse indicielle en boucle ouverte de chaque élément $g_{ij}(s)$ sur un intervalle de temps bien déterminé. La ADGA est définie comme suit :

$$ADGA = I(\mathbf{q}) \cdot * \left[I^{-1}(\mathbf{q}) \right]^T, \quad (1.33)$$

Avec :

$$ADGA = \left[\mathbf{m}_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right], \quad (1.34)$$

$$I(\mathbf{q}) = \left[I_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.35)$$

Où :

$I(\mathbf{q})$: Est la matrice des gains moyens.

$\cdot *$: Est le produit de Hadamard.

1.4.1.5 Matrice dynamique relative RDA

Cette méthode proposée par Witcheher et McAvoy [15], repose sur la réponse indicielle en boucle ouverte du système. Elle consiste à calculer la matrice du potentiel dynamique $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ en utilisant la formule suivante :

$$\mathbf{f}_{ij}(\mathbf{q}) = \int_0^q L^{-1} \left(\frac{g_{ij}(s)}{s} \right) dt \quad (1.36)$$

La borne supérieure du domaine d'intégration \mathbf{q} est choisie entre 20% à 100% de la constante du temps dominante du système.

En remplaçant la matrice des gains statiques K_s par la matrice du potentiel dynamique $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, on construit la RDA dont les éléments sont donnés par l'expression suivante :

$$RDA = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \cdot * \left[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q}) \right]^T, \quad (1.37)$$

Avec :

$$RDA = \left[u_{ij}^* : i, j = 1, \dots, m \right] \quad (1.38)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \left[\mathbf{f}_{ij}(\mathbf{q}) : i, j = 1, \dots, m \right] \quad (1.39)$$

Où :

$\mathbf{f}(\mathbf{q})$: est la matrice du potentiel dynamique.

Une fois la RDA est générée, la configuration de commande à choisir est définie par les couples dont les éléments de la RDA correspondants sont très grands et positifs.

1.4.1.6 Méthodes basées sur le lieu de Nyquist DNA, INA

1.4.1.6.1 Matrice direct de Nyquist DNA

La Matrice Directe de Nyquist, [21] [32] est une méthode graphique dont le principe est le suivant :

- Construire le lieu de Nyquist de chaque élément $g_{ii}(s)$ de la diagonale de la matrice de transfert $G(s)$ pour \mathbf{w} variant de 0 à $+\infty$.
- Superposer chaque lieu avec les cercles de Gershgorin [39] obtenus pour \mathbf{w} variant de 0 à $+\infty$.

Les coordonnées du centre d'un cercle sont la partie réelle et imaginaire de $g_{ii}(j\mathbf{w})$ et le rayon $R_{ii}(\mathbf{w})$ du cercle est la somme des modules des éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne sauf le module de l'élément $g_{ii}(s)$ considéré. Le rayon $R_{ii}(\mathbf{w})$ est donné par la formule suivante :

$$R_{ii}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1, j \neq i}^m \left| g_{ji}(j\mathbf{w}) \right|. \quad (1.40)$$

1.4.1.6.2 Matrice inverse de Nyquist

Contrairement à la **DNA**, la Matrice Inverse de Nyquist utilise l'inverse de la matrice de transfert du système $G(s)$ désignée par $\widehat{G}(s)$. Le principe de **INA**, [32] est le suivant :

- Calculer $\widehat{G}(s)$ qui est l'inverse de $G(s)$, ($\widehat{G}(s) = G^{-1}(s)$).
- Construire le lieu de Nyquist de chaque élément $\widehat{g}_{ii}(s)$ de la diagonale de la matrice de transfert $\widehat{G}(s)$ pour \mathbf{w} variant de 0 à $+\infty$.

- Superposer chaque lieu avec les cercles de Gershgorin [39] obtenus pour \mathbf{w} variant de 0 à $+\infty$.

Les coordonnées du centre d'un cercle sont la partie réelle et imaginaire de $\widehat{g}_{ii}(\mathbf{j}\mathbf{w})$ et le rayon $\widehat{R}_{ii}(\mathbf{w})$ du cercle est la somme des modules des éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne sauf le module de l'élément $\widehat{g}_{ii}(s)$ considéré. Le rayon $\widehat{R}_{ii}(\mathbf{w})$ est donné par la formule suivante :

$$\widehat{R}_{ii}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1, j \neq i}^m \left| \widehat{g}_{ji}(\mathbf{j}\mathbf{w}) \right|. \quad (1.41)$$

1.4.1.7 Matrice des potentiels d'interaction

La méthode de la Matrice des Potentiels d'Interaction (IPM) développée en 1994 par Huang, Ohshima et Hashimoto [20], fournit des informations concernant la possibilité d'interaction d'une boucle avec d'autres boucles du système en boucle fermée. Cette méthode est développée sur la base de la théorie de commande par modèle interne d'un système multivariable. Elle permet de déterminer une configuration de commande avec un niveau d'interaction faible tout en garantissant la stabilité du système global. La sélection de la configuration convenable parmi les $m!$ Configurations possibles est basée sur le calcul de la IPM dont chaque élément est déterminé par l'intégrale double suivante [20] :

$$\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{\mathbf{p}(\mathbf{e}_f^* - \mathbf{e}_f^{\circ})} \int_{\mathbf{e}_f^{\circ}}^{\mathbf{e}_f^*} \int_0^{\infty} \left\| \frac{h_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})}{\mathbf{w}} \right\|_2^2 d\mathbf{w} d\mathbf{e}_f, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (1.42)$$

Avec :

$$h_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w}) = (1 - \mathbf{s}_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})) R_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w}) M_{ij}^{-1}(\mathbf{j}\mathbf{w}), \quad (1.43)$$

$$\mathbf{s}_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w}) = \frac{g_{ij+}(\mathbf{j}\mathbf{w}) f_i(\mathbf{j}\mathbf{w}) \mathbf{I}_{ij}^{-1}(\mathbf{j}\mathbf{w})}{1 + (\mathbf{I}_{ij}^{-1}(\mathbf{j}\mathbf{w}) - 1) g_{ij+}(\mathbf{j}\mathbf{w}) f_i(\mathbf{j}\mathbf{w})}, \quad (1.44)$$

$$IPM = \left[\mathbf{W}_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.45)$$

Où :

- $\|\cdot\|_2$: est la norme euclidienne du vecteur $h(\mathbf{j}\mathbf{w})$.
- $R_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})$: est le vecteur ligne obtenu par l'élimination de l'élément $g_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de transfert du système $G(\mathbf{j}\mathbf{w})$.
- $M_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})$: est la sous matrice de $G(\mathbf{j}\mathbf{w})$ obtenue par l'élimination de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de $G(\mathbf{j}\mathbf{w})$.
- $g_{ij+}(\mathbf{j}\mathbf{w})$: est la partie non inversible (contient les retards et les zéros instables) de l'élément $g_{ij}(\mathbf{j}\mathbf{w})$, avec le module de $g_{ij+}(\mathbf{j}\mathbf{w})$ pour $\mathbf{w} = 0$ doit être égal à 1.
- $f_i(\mathbf{j}\mathbf{w})$: est le filtre ajustable (premier ordre) assurant les performances désirées de chaque boucle de commande,

$$f_i(j\omega) = \frac{1}{e_f j\omega + 1}. \quad (1.46)$$

$I_{ij}(j\omega)$: est le gain dynamique relatif de la boucle $[u_j - y_i]$.

1.4.2 Méthode d'analyse utilisant la représentation d'état

La représentation par matrice de transfert $G(s)$ ne donne que les relations entre les entrées et les sorties d'un système sans mettre en évidence la structure interne de ce dernier, d'où des informations importantes pour une analyse fine et approfondie des interactions sont omises [22] [23]. Par contre la représentation d'état $S(A, B, C, D)$ tient compte des informations internes du système (la structure interne) qui n'apparaissent pas nécessairement sur la description par matrice de transfert. Cette constatation est renforcée par le fait qu'un système donné possède plusieurs représentations d'état, en plus il y a des systèmes qui possèdent une même représentation par matrice de transfert mais leurs structures internes sont complètement différentes [5] [6] [14].

La représentation d'état constitue une alternative intéressante pour l'analyse des interactions. Dans cette section nous allons présenter des méthodes d'analyse des interactions utilisant la représentation d'état tout en définissant des nouvelles notions couramment utilisées dans le domaine d'analyse des interactions.

1.4.2.1 Matrice des gains directs d'interactions statiques DGM (0)

La Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique développée par Johnston et Barton est basée sur la notion du gain statique direct entre une entrée et une sortie du système [23] [24]. Le principe de la méthode consiste en premier lieu à calculer la matrice des gains directs statique K_s^d , ensuite on utilise cette matrice pour générer la **DGM (0)** qui permet d'analyser les interactions entre les variables du système et de déterminer la meilleure configuration de commande.

Le calcul de la matrice K_s^d peut se faire par deux méthodes :

- Utilisation du graphe de fluence.
- Utilisation directe du modèle d'état.

1.4.2.2 Matrice des gains directs d'interactions dynamique DGM (w)

La méthode de la Matrice des Gains Directs d'Interactions Dynamique **DGM (w)** est une extension dynamique de la DGM (0) [24]. Pour déterminer la **DGM (w)** on calcul d'abord la matrice des gains directs dynamique $K_d^d(s)$ en suivant les mêmes étapes 1 et 2 décrites précédemment (utilisation du modèle d'état pour le calcul de la K_s^d) sauf que la i -ième ligne de la matrice $K_d^d(s)$ dans ce cas se détermine par l'expression suivante :

$$l_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i + D_i, \quad (1.48)$$

D'où la matrice des gains directs dynamique :

$$K_d^d(s) = \begin{bmatrix} l_1(s) \\ l_2(s) \\ \vdots \\ l_r(s) \end{bmatrix} = \left[K_{d_{ij}}^d(s) : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.49)$$

Les éléments de la **DGM (w)** sont déterminés par l'expression suivante :

$$d_{ij}(\mathbf{w}) = \frac{|K_{d_{ij}}^d(j\mathbf{w})|}{\sum_{k=1}^r |K_{d_{kj}}^d(j\mathbf{w})|}, \quad (1.50)$$

Alors :

$$DGM(?) = \left[d_{ij}(\mathbf{w}) : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.51)$$

La configuration définie par les couples correspondants aux éléments $d_{ij}(\mathbf{w})$ qui sont les plus proches de 1 dans la bande de fréquences dans laquelle le système travaille, représentent la meilleure configuration de commande dont les interactions entre les boucles de commande sont très faibles.

1.4.2.3 Matrice d'interaction dynamique directe DDM

Le principe de la DDM est basé sur le calcul de la matrice des gains directs dynamique $K_d^d(s)$, puis calculer la matrice des valeurs moyennes des sorties \bar{y}_d^d dont chaque élément $\bar{y}_{d_{ij}}^d$ est déterminé par l'expression mathématique suivante [23] :

$$\bar{y}_{d_{ij}}^d = \frac{1}{q} \int_0^q L^{-1} \left(\frac{K_{d_{ij}}^d(s)}{s} \right) dt, \quad (1.52)$$

Où :

q : est la plus grande constante du temps du système.

Le choix de la configuration de commande repose sur l'analyse des éléments de la matrice DDM trouvée. Les éléments de cette dernière sont déterminés par la formule suivante :

$$d_{ij}^* = \frac{|\bar{y}_{d_{ij}}^d|}{\sum_{k=1}^r |\bar{y}_{d_{kj}}^d|}, \quad (1.53)$$

D'où :

$$DDM = \left[d_{ij}^* : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (1.54)$$

La configuration de commande à choisir est celle définie par les couples ayant d_{ij}^* proche de 1.

1.4.2.4 Matrice d'effets directs SIA

Lorsqu'on effectue un changement de consigne d'une sortie y_i ou une perturbation affecte cette sortie, une commande u_j est générée (entrée assignée à y_j) pour maintenir la sortie y_i à son point de consigne. Au même temps toutes les sorties y_k ($k = 1, \dots, m; k \neq i$) doivent être maintenues à leurs points de consignes, par manipulation des entrées u_l ($l = 1, \dots, m; l \neq j$).

L'analyse des interactions par la Matrice d'Effets Directs proposée par Johnston a pour principe de décomposer le gain en boucle fermée entre une entrée u_j et une sortie y_i en trois composantes [22] :

- a. Effet direct ;
- b. Effet d'interaction sorties-sortie;
- c. Effet d'interaction entrées-sortie.

1.4.2.5 Matrice des gains dynamiques relatifs DRGA

La Matrice des Gains Dynamiques Relatifs (**DRGA**) a été proposée par Tung et Edgar [47], elle est aussi une extension dynamique de la Matrice des Gains Relatifs (**RGA**). Le calcul de cette matrice est basé sur l'utilisation du modèle d'état du système contrairement à l'extension intuitive introduite par Bristol qui utilise la matrice de transfert du système.

Considérons un système dynamique linéaire donnée par son modèle d'état,

$$\dot{x} = A x + B u, \quad (1.55)$$

$$y = C x. \quad (1.56)$$

Le système doit être commandable et observable. Considérons un changement de vecteur de consignes v qui passe de zéro à v° et le vecteur de commande nécessaire pour positionner le vecteur de sorties y à cette nouvelle valeur de consigne est u° .

En régime permanent,

$$0 = A x^\circ + B u^\circ. \quad (1.57)$$

Supposons que le système est stable, la résolution de l'équation (1.57) par rapport à x° donne :

$$x^\circ = (-A)^{-1} B u^\circ, \quad (1.58)$$

Alors,

$$y^\circ = C x^\circ, \quad (1.59)$$

$$y^\circ = C (-A)^{-1} B u^\circ. \quad (1.60)$$

Cette dernière équation donne,

$$u^\circ = [C (-A)^{-1} B]^{-1} y^\circ. \quad (1.61)$$

En prenant les conditions initiales nulles, la réponse de la sortie dans le domaine de Laplace sera :

$$y(s) = C x(s), \quad (1.62)$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} B \frac{u}{s}, \quad (1.63)$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} B [C (-A)^{-1} B]^{-1} \frac{y}{s}, \quad (1.64)$$

$$y(s) = G(s) K_s^{-1} \frac{y}{s} = G(s) \mathbf{G} \frac{y}{s}. \quad (1.65)$$

Sous forme matricielle $y(s)$ sera :

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1m} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & & \mathbf{G}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_{m1} & \mathbf{G}_{m2} & \cdots & \mathbf{G}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^\circ \\ y_2^\circ \\ \vdots \\ y_m^\circ \end{bmatrix} \frac{1}{s}, \quad (1.66)$$

D'où :

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m g_{ik}(s) \mathbf{G}_{kj} \right) \frac{y_j^\circ}{s}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.67)$$

Maintenant considérons un changement d'un échelon y_i° de la sortie y_i seulement, dans ce cas la réponse de y_i sera :

$$y_i(s) = \left(\sum_{k=1}^m g_{ik}(s) \mathbf{G}_{ki} \right) \frac{y_i^\circ}{s}, \quad (1.68)$$

Dans cette dernière équation le $k^{i\text{ème}}$ terme dans la somme est l'effet du $k^{i\text{ème}}$ régulateur sur la sortie y_i . À partir de l'équation (1.68), on définit la nouvelle Matrice des Gains Dynamiques Relatifs **DRGA** suivante :

$$DRGA = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11}^*(s) & \cdots & \mathbf{I}_{1m}^*(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{I}_{m1}^*(s) & \cdots & \mathbf{I}_{mm}^*(s) \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

Où :

$$\mathbf{I}_{ij}^*(s) = \frac{g_{ij}(s) \mathbf{G}_{ji}}{s}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (1.70)$$

Pour que l'entrée u_j commande la sortie y_i sans avoir d'effets sur d'autres sorties y_k ($k \neq i$), il faut que l'élément $\mathbf{I}_{ij}^*(s)$ correspondant au couple $[u_j - y_i]$ dans la **DRGA**, doit être l'élément dominant dans la $i^{\text{ème}}$ ligne.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principaux concepts permettant la représentation et l'analyse des interactions dans les systèmes multivariables. Nous avons également précisé l'intérêt de ces notions dans un objectif de commande basée sur la non interaction entrée-sortie, à travers un rapide historique des principales contributions apportées par la communauté scientifique.

Dans le chapitre suivant, nous présentons la méthodologie bond-graph et les méthodes, déjà réalisées, destinés à caractériser graphiquement les propriétés d'un système multivariables à partir de son modèle bond-graph.

Chapitre II

Méthodologie Bond-Graph

Représentation intermédiaire entre le niveau mathématique et le niveau technologique, l'outil bond-graph est un formalisme graphique de modélisation des systèmes physiques. Né aux États-Unis en 1960 [34], il a motivé depuis de nombreuses vocations. L'Europe accueille en particulier des spécialistes de renom, dont les contributions concernent des applications à vocation tant industrielle que scientifique [7] [25]. En Algérie, l'étude de cet outil est dans ses premiers pas.

L'outil bond-graph est aujourd'hui plus qu'un outil de modélisation. Il devient un outil puissant d'analyse, au service duquel émergent des méthodologies prometteuses [7] [12].

Dans ce chapitre, nous présentons ainsi la méthodologie bond-graph à la fois comme un outil de modélisation et d'analyse. Nous définissons dans un premier temps les concepts élémentaires autour desquels est construit le langage bond-graph. Puis nous rappelons l'intérêt de ce formalisme pour l'analyse des systèmes. Dans une optique de commande, nous décrivons enfin des méthodes permettant de caractériser la structure d'un système à partir de son modèle bond-graph.

2.1 Le langage bond-graph

La première partie de ce chapitre vise à rappeler les principales définitions nécessaires pour lire et manipuler un modèle bond-graph.

Nous présentons tout d'abord les différents éléments constitutifs d'un modèle bond-graph, en lien avec leur signification physique [25]. Puis nous rappelons la notion de chemin causal, qui occupe une place centrale dans la suite de ce travail. Nous décrivons enfin brièvement des techniques permettant de déduire d'un modèle bond-graph sa représentation d'état.

2.1.1 Éléments et causalité

Un modèle bond-graph est un modèle graphique décrivant les échanges de puissance au sein d'un système physique. Ce modèle est construit à l'aide de liens de puissance, connectant entre eux un ensemble de composants via une structure de jonction.

Les liens de puissance modélisent cheminement de la puissance au sein du système. Ils sont représentés par des demi-flèches dont le sens indique le sens de parcours conventionnel positif de la puissance. Deux variables, dites variables de puissance, sont associées à chaque lien : l'effort $e(t)$ et le flux $f(t)$. Elles permettent de définir la puissance $P(t)$ véhiculée par le lien, comme l'indique l'équation (2.1).

$$P(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (2.1)$$

A partir de ces deux variables de puissance sont définies deux variables d'énergie : le moment généralisé $p(t)$ et le déplacement généralisé $q(t)$. Ces deux variables sont exprimées conformément aux équations (2.2) et (2.3).

$$p(t) = \int e(t) dt \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int f(t) dt \quad (2.3)$$

Le sens physique de chacune de ces quatre variables généralisées est déterminé par le domaine physique du phénomène modélisé. A titre d'exemple, en mécanique de translation, l'effort $e(t)$ est une force et le flux $f(t)$ est une vitesse; en hydraulique, l'effort $e(t)$ est une pression et le flux $f(t)$ est un débit volumique. Plus de détails sont fournis en annexe A.3, concernant le sens physique de chaque variable généralisée.

Sur le modèle, la puissance véhiculée par les liens est distribuée à des composants. Ces composants décrivent les phénomènes physiques retenus dans la phase de définition des hypothèses de modélisation. Trois d'entre eux décrivent des phénomènes passifs: (C, I, R); les deux autres, (S_e, S_f), décrivent des phénomènes actifs.

L'élément C est un élément dynamique de type capacitif. Il permet de modéliser les phénomènes de stockage d'énergie caractérisés par une relation entre l'effort $e(t)$ et l'intégrale du flux $f(t)$: ressort, condensateur, réservoir, ... Pour un phénomène linéaire, la loi générique décrivant un élément capacitif est donnée par l'équation (2.4), où C est un coefficient caractéristique du phénomène modélisé.

$$e(t) - \frac{1}{C} \int f(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

L'élément I est un élément dynamique de type inertiel. Il permet de modéliser les phénomènes de stockage d'énergie caractérisés par une relation entre le flux $f(t)$ et l'intégrale de l'effort $e(t)$; masse, inductance, inertie d'un fluide, Pour un phénomène linéaire, la loi générique décrivant un élément inertiel est donnée par l'équation (2.5) où I est un coefficient caractéristique du phénomène modélisé.

$$f(t) - \frac{1}{I} \int e(t) dt = 0 \quad (2.5)$$

L'élément R est un élément statique de type résistif. Il permet de modéliser les phénomènes de dissipation d'énergie, caractérisés par une relation entre l'effort $e(t)$ et le flux $f(t)$; frottement, résistance, restriction hydraulique, ... Pour un phénomène, la loi générique décrivant un élément résistif est donnée par l'équation (2.6), où R est un coefficient caractéristique du phénomène modélisé.

$$e(t) - R f(t) = 0 \quad (2.6)$$

Les deux derniers éléments, (S_e, S_f), modélisent des phénomènes actifs ; ils représentent des sources de puissance. L'élément S_e est une source d'effort : force de pesanteur, générateur de tension, ... L'élément S_f est une source de flux : vitesse appliquée, de courant, ... Pour chacune de ces deux sources, la grandeur appliquée - effort $e(t)$ ou flux $f(t)$ - est indépendante de la grandeur induite - flux $f(t)$ ou effort $e(t)$.

Ajoutons que ces efforts et flux sont captés, sur le modèle bond-graph, par l'intermédiaire de détecteurs (De, Df). L'élément De est un détecteur d'effort. L'élément Df est un détecteur de flux.

Ces éléments mesurent des signaux. Les liens qui les relient au reste du modèle ne transmettent par conséquent aucune puissance.

C'est finalement au travers d'une structure de jonction que la puissance est distribuée aux composants. Cette structure, conservative de puissance, permet de connecter entre elles les différentes parties du modèle. Elle est composée des éléments $(TF, GY, 0, 1)$. Les éléments TF et GY modélisent par exemple des mécanismes cinématiques (levier, pignons, ...) ou des changements de domaine physique. Les éléments $0, 1$ respectivement décrivent des jonctions d'effort et de flux- communs. Une description plus détaillée sur ces éléments de jonction est donnée en annexe A .2.

Le modèle obtenu à ce stade ne permet pas de préciser comment, pour la simulation, les différentes variables sont organisées entre elles. Cette information est fournie par un élément supplémentaire porté sur chaque lien de puissance : le trait causal.

Imaginons deux sous-systèmes couplés A et B , tels que le sous-système A fournit de la puissance au sous-système B . le sous-système A peut appliquer au sous-système B un effort ou un flux. S'il applique un effort (une force, par exemple), le sous-système B lui renvoie un flux (une vitesse, par exemple) - *figure 2.1*. S'il applique un flux, le sous-système B lui renvoie un effort - *figure 2.2*. La position du trait causal sur le lien de puissance permet de différencier ces deux cas ; par convention, le trait causal est placé près de l'élément pour lequel l'effort est une donnée. Le flux est alors une donnée pour l'élément opposé.

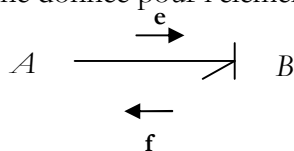


Figure 2.1 : A applique un effort au B

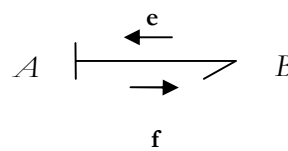


Figure 2.2 : A applique un flux B .

Quelques règles régissent l'affectation de la causalité sur le modèle bond-graph.

La causalité des éléments dynamiques est choisie, de préférence, de telle sorte que la variable de sortie soit obtenue, à partir de la variable d'entrée, par intégration plutôt que par dérivation. Les éléments dynamiques sont alors dits en 'causalité intégrale'.

Pour un élément C , ce choix correspond à la configuration flux entrant-effort sortant. Il est représenté par la *figure 2.3*.

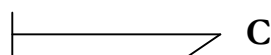


Figure 2.3: Élément C en causalité intégrale.

Ce choix revient à écrire l'équation (2.4) sous la forme suivante -équation (2.7) :

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.7)$$

Pour un élément I en causalité intégrale correspond une configuration effort entrant-flux sortant, *figure 2.4*.

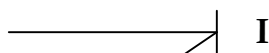


Figure 2.4: Élément I en causalité intégrale.

Ce choix de causalité revient à écrire l'équation (2.5) sous la forme suivante -équation (2.8) :

$$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t) dt \quad (2.8)$$

Par le choix inverse de causalité, les variables de sortie sont obtenues en dérivant les variables d'entrée. Dans ce cas, les éléments dynamiques sont dits 'en causalité dérivée'.

Le gain complexe -ou transmittance- d'un élément C en causalité intégrale est déduit de l'équation (2.7). Il est donné par l'équation (2.9).

$$\frac{E(s)}{F(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (2.9)$$

De la même manière, nous déduisons de l'équation (2.8) l'expression du gain complexe d'un élément I en causalité intégrale. Cette expression est donnée par l'équation (2.10).

$$\frac{F(s)}{E(s)} = \frac{1}{Is} \quad (2.10)$$

Remarque 2.1 : *Le gain d'un élément dynamique en causalité dérivée est égal à l'inverse de son gain en causalité intégrale.*

La causalité des éléments R linéaires peut être affectée librement : parmi les deux formes causales, aucun choix n'est préféré a priori. L'équation (2.6) montre que le gain d'un élément R est constant : suivant l'affectation causale adoptée, ce gain vaut R ou $1/R$.

La causalité affectée aux sources est par contre obligatoire. Elle est déterminée par le type de source à utiliser -effort ou flux. Dans tous les cas, la grandeur imposée par la source est une donnée pour le reste du modèle.

Remarque 2.2 : *Une source d'effort et une source de flux, ou un détecteur d'effort et un détecteur de flux, sont deux éléments duaux. Transformer l'un en l'autre -et inversement- est une manipulation causale particulière appelée dualisation.*

Enfin, des principes systématiques réglementent l'affectation de la causalité pour les éléments de jonction. En particulier, pour les jonctions 0 : 'un seul trait causal près de la jonction 0'; pour les jonctions 1 : 'un seul trait causal sans lien près de la jonction 1'. Des règles similaires permettent d'affecter la causalité des éléments TF et GY : 'position symétrique du trait causal sur les liens connectés à un élément TF '; 'position antisymétrique du trait causal sur les liens connectés à un élément GY '.

Les différentes formes causales que peuvent adopter chaque composant et chaque élément de jonction sont finalement résumées dans le tableau 2.1.

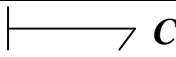
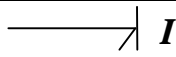
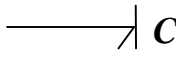
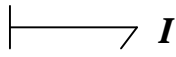
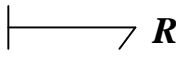
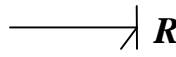
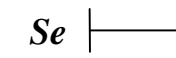
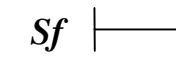
Causalité	Éléments Bond-graph	
Intégrale	 C	 I
Dérivée	 C	 I
Arbitraire	 R	 R
Obligatoire	Se 	Sf 

Tableau 2.1: *Causalité*

Sur le modèle bond-graph, la représentation graphique de ces informations causales permet de construire des chemins. Ces chemins sont appelés chemins causaux.

2.1.2 Chemin causal

Les principales définitions relatives à la notion de chemin causal sont :

Définition 2.3 : Soient deux ensembles J_1 et J_2 composés des éléments suivants : $J_1 = \{C, I, R, S_o, S_f\}$ et $J_2 = \{C, I, R, S_o, S_f\}$. Un chemin causal entre un élément de l'ensemble J_1 et un élément de l'ensemble J_2 est une alternance de lien de puissance, d'éléments de jonction et de composants telle que : une causalité complète et correcte est affectée à l'ensemble de la séquence ; deux liens connectés en un même noeud ont des

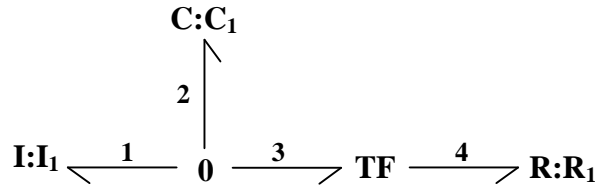


Figure 2.5: Chemin causal

affectations causales opposées.

Sur le modèle présenté en figure 2.5, un chemin causal lie l'élément dynamique I_1 à l'élément résistif R_1 . Ce chemin emprunte les liens 1, 2, 3 et 4.

La notion de chemin causal sur un modèle bond-graph est voisine de celle de chemin sur un modèle digraphe. Cependant, sur un modèle de type digraphe, un chemin ne peut être défini entre des éléments résistifs. D'autre part, ce chemin ne peut pas contenir d'éléments dynamiques en causalité dérivée.

La définition 2.4 permet d'introduire le concept de boucle causale.

Définition 2.4 : Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de l'ensemble (C, I, R) . Ce chemin part de la sortie d'un composant. Il rejoint l'entrée de ce composant sans parcourir le même lien en suivant la même variable plus d'une fois.

Remarque 2.5 : Une boucle causale ne traversant aucun composant -élément dynamique ou résistif- est appelée boucle de causalité.

Dans la suite de ce travail, la notion de boucle causale n'occupe pas une place essentielle, Par contre, nous utilisons largement le concept de chemin causal, à travers deux grandeurs qui en sont caractéristiques : sa longueur et son gain.

Définition 2.6 : Soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, R, S_o, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, R, D_o, D_f\}$. Soit N_d respectivement N_r le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale -respectivement en causalité dérivée- traversés par ce chemin. Si $N_d = 0$, la longueur de ce chemin vaut N_r , plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique. Si $N_d \neq 0$, nous introduisons la notion de longueur généralisée du chemin causal. Cette longueur généralisée vaut $(N_r - N_d)$, plus un si le chemin relie une source ou élément dynamique à un élément dynamique. Cette longueur généralisée peut donc éventuellement être négative.

Signalons que la longueur généralisée d'un chemin causal est appelée 'ordre du chemin causal' [12]. Par analogie avec le vocabulaire employé pour décrire les chemins d'un modèle digraphe, nous conservons la terminologie 'longueur'.

Le gain d'un chemin causal est calculé à partir des gains des éléments qu'il traverse, comme l'exprime la définition suivante.

Définition 2.7 : le gain G_c d'un chemin causal est calculé conformément à l'équation (2.11).

$$G_c = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \prod_{gc} \quad (2.11)$$

- n_0 , respectivement n_1 , représente le nombre de changements d'orientation des liens de puissance aux jonctions 0 lorsque l'on suit la variable flux respectivement aux jonctions 1 lorsque l'on suit la variable effort.
- $m_j, r_k, 1/m_j, 1/r_k$ représente les modules des éléments de jonction TF et GY rencontrés en parcourant le chemin causal, compte tenu de la causalité qui leur affectée.
- \prod_{gc} représente le produit des gains des composants traversés par le chemin causal.

D'une manière similaire, le gain G_b d'une boucle causale est calculé selon l'équation (2.12). Les notations n_0 et n_1 sont identiques à celles utilisées pour la définition 2.7; \prod_{gc} représente le produit des gains des composants traversés par la boucle.

$$G_b = (-1)^{n_0+n_1} \left(m_j^2 \text{ ou } \frac{1}{m_j^2} \right) \left(r_k^2 \text{ ou } \frac{1}{r_k^2} \right) \prod_{gb} \quad (2.12)$$

Remarque 2.8 : Une boucle de causalité dont le gain $+1$ est dite non-solvable. Pour ce choix particulier de causalité, il est impossible d'écrire explicitement une solution aux relations liant les variables du modèle bond-graph [37]. Ces cas de figure sont autant que possible à éviter.

Rappelons finalement la définition de chemins causaux différents.

Définition 2.9 : Deux chemins causaux sont différents s'ils n'ont en commun aucun élément dynamique en causalité intégrale.

Des chemins causaux différents sur le modèle bond-graph représentent par conséquent des chemins disjoints sur le modèle digraphe associé.

Grâce à l'ensemble de ces informations causales, les différentes variables du modèle sont structurées d'une manière propice au calcul d'une représentation d'état.

2.2 Les bases de contrôle par bond-graph

2.2.1 Représentation d'état

Les propriétés élémentaires de la représentation d'état associée à un modèle bond-graph sont illustrées dans cette partie.

Cette représentation est déduite du modèle affecté d'une causalité intégrale préférentielle. Les variables d'état utilisées pour construire cette représentation d'état sont les variables d'énergie liées aux éléments dynamiques : le moment généralisé $p(t)$ pour un élément I —équation (2.2)— et le déplacement généralisé $q(t)$ pour un élément C —équation (2.3). Chacune de ces variables n'est statiquement indépendante que si elle est associée à un élément dynamique en causalité intégrale. L'ordre de la représentation d'état est donc donné sur le modèle bond-graph intégral, par le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.

Deux méthodes permettent de déterminer explicitement la représentation d'état à partir du modèle bond-graph.

La première consiste à écrire les lois constitutives de la structure de jonction et des composants, pour expliciter 'à la main' les dérivées des variables d'état.

La seconde méthode consiste à déduire la représentation d'état d'une représentation vectorielle des différentes variables du modèle. Cette méthode n'est pas utilisée dans la suite de ce travail.

A titre d'exemple, considérons le modèle bond-graph décrit par la *figure 2.6*. Ce modèle possède une source d'entrée E , un détecteur de sortie D et trois éléments dynamiques en causalité intégrale.

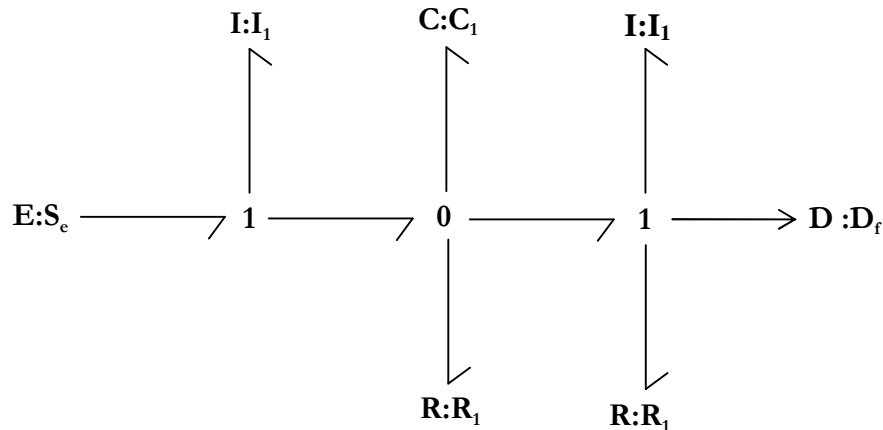


Figure 2.6 : Modèle bond-graph d'un système monovariante.

La représentation d'état qui lui est associée est donnée par l'équation (2.13), où le vecteur d'état est $x(t) = [p_{I_1}(t) \ p_{I_2}(t) \ q_{C_1}(t)]$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Les expressions formelles des matrices A , B et C sont données par l'équation (2.14).

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{I_2} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{-1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Signalons que la structure de la matrice d'état A déduite d'un modèle bond-graph est toujours symétrique par rapport à la diagonale. Le modèle digraphe associé à un modèle bond-graph est donc fortement connexe.

Si le modèle ne possède aucun élément dynamique en causalité dérivée, le calcul du gain de certains chemins causaux permet d'établir l'expression formelle du produit entre les matrices A , B et C [36].

Notons en effet S_j la j^{me} source d'entrée et D_i le i^{me} détecteur de sortie du modèle bond-graph en causalité intégrale. Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante.

Propriété 2.10 [36] : Pour $k \geq 0$, $[c_i A^k B^j] = \sum G_{k+1}(S_j, D_i)$, où le coefficient $G_{k+1}(S_j, D_i)$ représente le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k+1)$ entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

Les transmittances directes éventuelles sont représentées, dans l'équation d'état, par la matrice D . Les coefficients de cette matrice sont déterminés, à partir du modèle bond-graph, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 2.11 [36] : Soit d_{ij} le coefficient de transmission directe entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i , $d_{ij} = \sum G_0(S_j, D_i)$, où $G_0(S_j, D_i)$ représente le gain d'un chemin causal de longueur nulle entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

La mise en œuvre de ces calculs sera illustrée en section 3.2.3.

2.2.2 Rang de la matrice d'état

Lors de la phase d'analyse pour le calcul de lois de commande, il est souvent nécessaire d'effectuer le calcul de rang de matrices. La causalité sur le modèle bond-graph permet de définir des rangs de matrices qui sont proches de la valeur du rang obtenu par calcul formel. Ce rang est appelé rang bond-graph et noté rang-BG [44]. Ce rang est obtenu par manipulations causales sur le modèle bond-graph.

Pour les modèles bond-graph, l'étude du rang de la matrice d'état A correspond à la détermination du nombre de valeurs propres nulles de A .

Définition 2.12 : Le rang bond-graph de la matrice d'état, noté rang-BG (A), associée à un modèle bond-graph est donné par la différence entre le nombre d'éléments I et C en causalité intégrale du modèle bond graph BGI, noté n , et le nombre d'éléments dynamique I et C en causalité dérivée du modèle bond-graph BGD, noté t .

Signalons que le calcul de ce rang bond-graph ne suppose pas l'indépendance a priori des coefficients de la matrice d'état A . Précisons également que l'expression 'rang plein' qui sera utilisée dans la suite de travail signifie 'rang bond-graph'.

Si l'ensemble des éléments dynamiques du modèle peut être affecté d'une causalité dérivée, on parle de modèle de rang plein. Dans ce cas, conformément à la définition 2.12, la matrice d'état A est inversible. La représentation mathématique associé au modèle bond-graph en causalité dérivée est alors donnée par l'équation (2.15).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{-1}\dot{x}(t) - A^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CA^{-1}\dot{x}(t) - CA^{-1}Bu(t) \end{cases} \quad (2.51)$$

2.2.3 Commandabilité en état

La propriété de commandabilité en état du modèle bond-graph est déduite de la valeur du rang de la matrice $[A \setminus B]$. Comme dans le cas précédent, ce rang est calculé à partir de l'entier q , défini sur le modèle bond-graph de la manière suivante.

Définition 2.18 [44] : q est le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsque :

- La causalité dérivée est imposée au modèle bond-graph.
- Toutes les dualisations des sources d'entrée ont été tentées pour éliminer les causalités intégrales restantes –remarque 2.2- sans toutefois introduire de boucle de causalité non solvable.

Le rang de la matrice $[A \setminus B]$ est donc calculé conformément à la propriété suivante.

Propriété 2.19 [44] : *Considérons la matrice $[A \setminus B]$ dont le rang bond-graph est noté rang-BG $[A \setminus B]$. Rang-BG $[A \setminus B]$ vérifie l'équation (2.17).*

A partir de travaux réalisés par Lin [27], ce résultat a permis de mettre en évidence une condition nécessaire et suffisante de commandabilité des modèles bond-graph. Cette condition est rappelée par le théorème suivant.

Théorème 2.20 [44] : *Un modèle bond-graph est commandable si :*

- Rang-BG $[A \setminus B] = n$.
- Chaque élément dynamique en causalité intégrale du modèle bond-graph en causalité intégrale est causalement lié au moins à une source d'entrée.

Les théorèmes 2.16 et 2.20 permettent ainsi de déterminer le nombre de sources d'entrée nécessaires pour rendre le système commandable -ce nombre est égal à t - et les positions souhaitables de ces sources.

Des manipulations causales semblables –mise en causalité dérivée et dualisations de détecteurs de sortie- permettent aussi de calculer le rang de la matrice $[A \setminus C]$. Une condition nécessaire d'observabilité est ainsi déduite, duale de celle rappelée par le théorème 2.20. Plus de détails de ces procédures dans [44].

2.2.4 Inversibilité

Contrairement aux propriétés précédentes, l'inversibilité structurelle n'est pas déduite de la mise en causalité dérivée du modèle bond-graph. Elle est caractérisée, sur le modèle bond-graph en causalité intégrale, via l'étude des chemins causaux entrée-sortie différents – définition 2.9. Dans le cas d'un modèle possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie, une condition suffisante d'inversibilité a été proposée par [36]. Elle est rappelée par le théorème suivant.

Théorème 2.21 [36] : *Considérons un modèle bond-graph ayant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. S'il existe, sur ce modèle, un unique choix de p chemins causaux différents entre les sources d'entrée et les détecteurs de sortie, alors le modèle est inversible.*

Dans le cas où plusieurs choix de chemins causaux différents existent, conformément à la propriété 1.12, la matrice de transfert est inversible si et seulement si le déterminant de sa matrice système est non nul.

Grâce à l'utilisation de l'algèbre de Grassmann, une technique graphique a été proposée pour calculer l'expression formelle de ce déterminant [45]. Cette technique repose sur la notion de modèle bond-graph réduit, exprimée par la définition suivante.

Définition 2.22 : *Soit un modèle bond-graph possédant une famille de chemins causaux différents. Le modèle bond-graph réduit est le modèle bond-graph obtenu en éliminant tous les éléments dynamiques en causalité intégrale contenue dans cette famille de chemins causaux différents.*

Signalons que les éléments du modèle bond-graph réduit ne doivent avoir subi aucun changement de causalité. Les éléments provoquant des conflits de causalité doivent donc en être enlevés.

L'expression formelle du déterminant de la matrice système est ainsi obtenue de la manière suivante.

Propriété 2.23 [36] : Soit $P(s)$ la matrice système associé à un modèle bond-graph possédant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Le déterminant de la matrice $P(s)$ vérifie l'équation (2.18).

$$\det [P(s)] = \sum_{i=1}^q (-1)^{\mathbf{s}_i} \left\{ \left(\prod_p G \right)_i (P_t)_i \right\} \quad (2.18)$$

q est le nombre de familles possible de p chemins causaux entrée-sortie différents. Pour chaque famille i : $\left(\prod_p G \right)_i$ est le produit des termes constants des gains des p chemins causaux entrée-sortie différents ; $(P_t)_i$ est le polynôme caractéristique du modèle bond-graph réduit ; \mathbf{s}_i est le nombre de permutations nécessaire pour ordonner les sortie dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand on suit les p chemins causaux entrée-sortie différents dans l'ordre du vecteur d'entée initial.

Précisons que modèle bond-graph réduit dont $(P_t)_i$ est un polynôme caractéristique construit en éliminant du modèle initial tous les éléments dynamiques traversés par la $i^{\text{ème}}$ famille de p chemins causaux entrée-sortie différents. Les demi-flèches et éléments de structure de jonction générant alors un conflit de causalité doivent également être ôtés. Les éléments résistifs pour lesquels ces manipulations imposent un changement de causalité doivent être aussi éliminés.

Nous utilisons également cette règle pour déterminer l'expression formelle des zéros invariants d'un système modélisé par bond-graph. Un exemple sera présenté à cette occasion en section 2.3.1.

Enfin, si le nombre de sources d'entrée m est différent du nombre de détecteurs de sortie p , une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.24 : Un modèle bond-graph possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie est inversible à gauche ou à droite si et seulement s'il existe un ensemble de $\min(m, p)$ chemins causaux entrée-sortie différents.

Nous rappelons à présent des méthodes graphiques similaires, destinées à exhiber les structures finie et infinie d'un modèle bond-graph.

2.3 Étude structurelle

La structure d'un système est l'image de son architecture. A ce titre, elle définit le cadre des stratégies de commande possibles. Dans cette optique, à l'aide des outils algébriques et géométriques précédents, nous décrivons à présent les éléments structurels utiles pour la suite de ce travail.

Les techniques permettant de caractériser la structure finie de modèles de type bond-graph ont été proposées par [46]. A cet effet, l'utilisation de l'algèbre de Grassmann a permis d'exprimer graphiquement sur le modèle des manipulations algébriques opérées sur la matrice système [45]. Des manipulations graphiques analogues ont par ailleurs été présentées dans [44] et [46], pour caractériser la structure à l'infini d'un système à partir de sa représentation bond-graph. Ces

techniques ont été dérivées de celles initialement proposées pour l'étude des modèles de type digraphe [12].

2.3.1 Structure finie

Dans cette section, nous citons tout d'abord la méthode de détermination graphique des zéros invariants d'un modèle bond-graph linéaire. Cette méthode est ensuite illustrée par un exemple.

Conformément aux résultats cités en [51], les zéros invariants d'un système sont les zéros de sa matrice système $P(s)$. Pour un système possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie, ces zéros sont en outre les racines du déterminant de la matrice système. Dans ce cas, la propriété 2.23 nous permet de déterminer le nombre et l'expression formelle des zéros invariants d'un système à partir de son modèle bond-graph.

Propriété 2.25 [46] : *Considérons un modèle bond-graph ayant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Le nombre de zéros invariants de ce modèle est égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale modèle bond-graph réduit obtenu en éliminant les p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts.*

L'expression formelle ces zéros invariants est obtenue en calculant les racines du déterminant de la matrice système. Ce calcul est réalisé conformément à la propriété 2.23. Nous l'illustrons par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph décrit par la figure 2.7. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques en causalité intégrale.

Phase 1 : calcul du nombre de zéros invariants

Deux familles existent, de deux chemins causaux entrée-sortie différents. La première famille est constituée des chemins $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$.

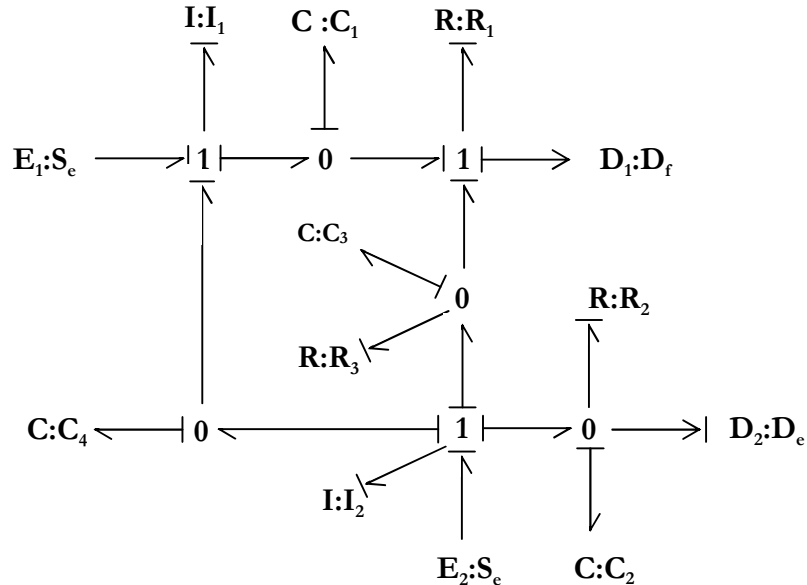


Figure 2.7 : Modèle bond-graph d'un système multivariable.

La seconde famille est constituée des chemins $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$.

Les deux plus courts chemins causaux entrée-sortie, sont ceux qui composent la première famille. Ils traversent quatre éléments dynamiques en causalité intégrale. Selon la propriété 2.25, le modèle possède donc deux zéros invariants.

Phase 2 : calcul de l'expression formelle des zéros invariants

L'expression symbolique de ces zéros invariants est déduite du calcul du déterminant de la matrice système. Conformément à la propriété 2.23, ce calcul nécessite l'étude du modèle bond-graph réduit associé à chaque famille de chemins causaux entrée-sortie différents, définition 2.22.

Deux modèles bond-graph réduits existent dans notre cas. Ils sont décrits par les figures 2.8 et 2.9.

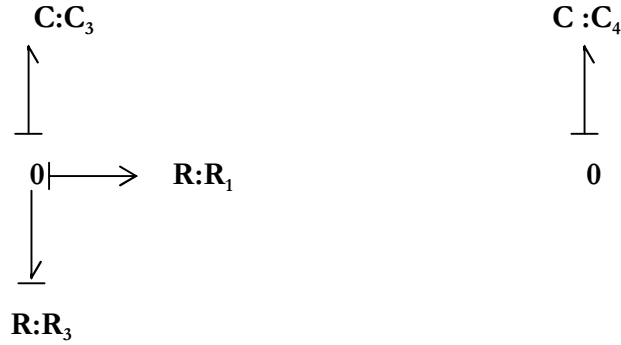


Figure 2.8 : *Modèle bond-graph réduit.*

Pour chacun d'entre eux, les grandeurs associées s_i , $(\prod_2 G)$ et P_t définies par la propriété 2.23 sont consignées dans le tableau 2.2.

I	s_i	$(\prod_2 G)$	P_t
1	0	$\frac{1}{I_1 C_1 R_1} \cdot \frac{1}{I_2 C_2}$	$s \cdot \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \cdot \frac{1}{I_2 C_3} \right)$
2	0	$\frac{1}{I_1 C_1 R_1^2 C_3} \cdot \frac{1}{I_2 C_2}$	S

Tableau 2.2 : *Grandeurs associées aux modèles bond-graph réduits*

Ces grandeurs permettent de calculer l'expression symbolique du déterminant de la matrice système. Cette expression est donnée par l'équation (2.19).

$$\det [P(s)] = \frac{1}{I_1 I_2 R_1 C_1 C_2} \cdot s \cdot \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \quad (2.19)$$

Les zéros invariants du modèle sont les racines de ce polynôme. Leurs expressions sont données par l'équation (2.20).

$$\begin{cases} s = 0 \\ s = \frac{-1}{R_3 C_3} \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans certains cas, le nombre de zéros invariants nuls peut être directement mis en évidence. En effet, pour chaque famille de p chemins causaux entrée-sortie différents, si la matrice d'état du modèle bond-graph réduit est de rang non maximal, le déterminant de la matrice système peut être factorisé par une puissance de s . Cette puissance est égale au nombre de zéros invariants nuls du système.

Ce cas de figure est cependant peu fréquent. Généralement un zéro invariant nul provient de simplifications entre termes du déterminant de la matrice système, et c'est le cas pour l'exemple précédent, Seul le calcul effectif de ce déterminant permet alors de détecter la présence de zéros invariants nuls.

Une technique graphique sera présentée, au chapitre 3, pour déterminer sans calcul le nombre de zéros invariants nuls.

Le principe de calcul du déterminant de la matrice système, peut d'autre part être étendue pour déterminer graphiquement les zéros invariants nuls de modèles bond-graph possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m \neq p$. Cette technique sera également présentée au chapitre 4, en lien avec l'étude des caractéristiques dynamiques du modèle découplé [4].

2.3.2 Structure infinie

Dans cette section, nous rappelons les méthodes graphiques permettant de caractériser la structure infinie d'un système à partir de son modèle bond-graph. Ces méthodes sont ensuite illustrées par un exemple.

La structure à l'infini d'un système linéaire est composée de deux listes d'entiers : la liste $\{n'_i\}$ des ordres des zéros à l'infini globaux et la liste $\{n_i\}$ des ordres des zéros à l'infini en ligne [12]. La notion de longueur de chemin causal entrée-sortie – définition 2.6 – permet de déterminer graphiquement les valeurs de ces entiers sur le modèle bond-graph.

Propriété 2.26 [46]: *L'ordre n_i du zéro infini en ligne associé à la variable de sortie $y_i(t)$ est égal à la longueur du plus court chemin causal existant entre le détecteur de sortie considéré et l'ensemble des sources d'entrée.*

Une méthode similaire permet de déterminer graphiquement le nombre des zéros à l'infini globaux. Comme le rappelle la propriété suivante, cette méthode fait appel à la notion de chemins causaux différents – propriété 2.9.

Propriété 2.27 [46] : *Le nombre des zéros à l'infini globaux d'un système représenté par un modèle bond-graph est égal au nombre maximal de chemins causaux entrée-sortie différents.*

Les ordres des zéros à l'infini globaux sont d'autre part calculés selon l'algorithme rappelé par la propriété suivante.

Propriété 2.28 [46] : *Les ordres des zéros à l'infini globaux vérifient l'équation (2.21), où L_k est la somme des longueurs des k plus courts chemins causaux entrée-sortie différents.*

$$\begin{cases} n'_1 = L_1 \\ n'_k = L_k - L_{k-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque 2.29 : *Conformément aux propriétés 2.10 et 2.28, la matrice Ω introduite par la structure infini est par conséquent la matrice des termes constants des gains des p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts.*

Les méthodes de calcul définies par les propriétés 2.26, 2.27 et 2.28 sont illustrées par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph présenté en *figure 2.10*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques en causalité intégrale. Nous en calculons les ordres des zéros à l'infini en ligne et globaux.

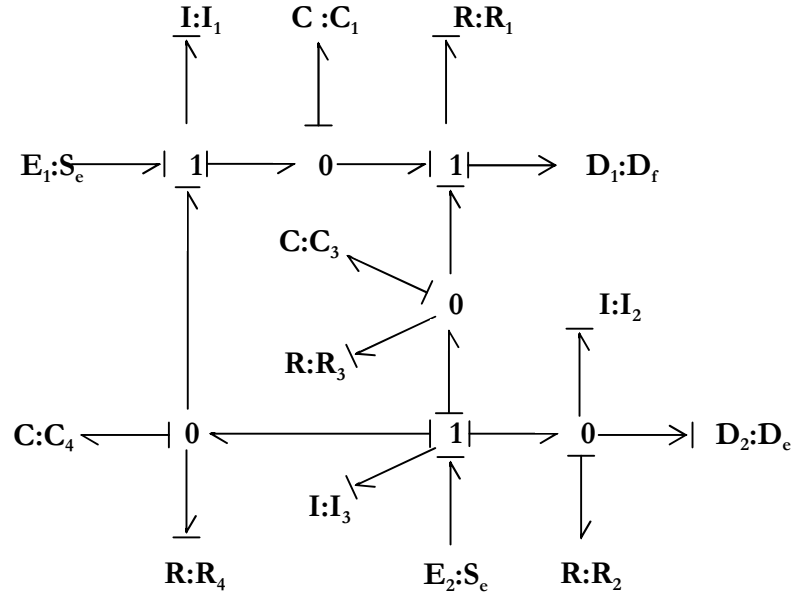


Figure 2.10 : Modèle bond-graph d'un système multivariable.

Phase 1 : calcul des ordres des zéros infinis en ligne

Deux possibilités de chemins causaux les plus courts du détecteur D_1 vers les sources d'entrée apparaissent. Ces chemins rejoignent soit la source d'entrée $E_1 - D_1 \rightarrow C_1 \rightarrow I_1 \rightarrow E_1$ - soit $E_2 - D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. La longueur de chacun de ces deux chemins vaut 2 - définition 2.6. L'ordre n_1 du zéro infini en ligne associé à la sortie $y_1(t)$ vaut par conséquent $n_1=2$.

Le chemin le plus court du détecteur D_2 vers les sources d'entrée est $D_2 \rightarrow R_2 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. La longueur de ce chemin vaut 1 - définition 2.6. L'ordre n_2 du zéro infini en ligne associé à la sortie $y_2(t)$ vaut par conséquent $n_2=1$ propriété 2.26.

Phase 2 : calcul des ordres des zéros infinis globaux.

Ce modèle possède le choix de deux chemins causaux entrée-sortie différents : $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$ ou $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$ - définition 2.9. Selon la propriété 2.27, il possède donc deux zéros infinis globaux, dont les ordres respectifs sont donnés par les entiers n'_1 et n'_2 .

L'entier n'_1 est égal à la longueur du chemin causal le plus court entre le détecteur de sortie D_1 et les sources d'entrée - propriété 2.28. Ce chemin est $D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. Sa longueur vaut $L_1=1$. L'ordre du premier zéro infini global vaut donc $n'_1=1$.

Selon l'algorithme (2.21), la détermination de l'entier n'_2 nécessite le calcul des longueurs des deux chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$. La longueur vaut $L_2=3$. L'ordre n'_2 du second zéro infini global vaut par conséquent $n'_2 = 2$.

2.3.3 Structure infinie et transmissions directes

Dans cette section, nous précisons la méthode de calcul des entiers $\{n'_i\}$ pour le cas de modèle possédant des transmissions directes. Nous illustrons cette méthode par un exemple.

Si le modèle possède des transmissions directes, au moins un des entiers n'_i est nul. Cela veut dire qu'au moins une des lignes de la matrice \mathbf{W} [12] est dans ce cas donnée par une des lignes de matrice de transmission directe D . la plus part du temps, il existe alors plusieurs choix p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts. Il arrive dans ce cas fréquemment que les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts d'au moins deux détecteurs de sortie vers l'ensembles des sources d'entrée soient proportionnels. La matrice \mathbf{W} n'est donc pas inversible et l'indépendance entre l'ensemble des variables d'entrée et l'ensemble des dérivées des variables de sortie n'est plus vérifiée [12].

Dans ce cas, les entiers calculés par l'algorithme (2.21) ne sont donc pas égaux aux ordres des zéros à l'infini globaux du système. Au moins une des variables de sortie $y_i(t)$ doit en effet être dérivée plus que n'_i fois pour que les variables d'entrée apparaissent de manière globalement indépendante dans l'ensemble des dérivées des variables de sortie.

En calculant les ordres des zéros à l'infini globaux par l'algorithme (2.21), il faut donc également vérifier que les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts ne sont pas proportionnels.

Nous illustrons ce cas de figure par l'exemple suivant.

Considérons modèle bond-graph présenté en *figure 2.11*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et deux éléments dynamiques en causalité intégrale. Nous en calculons les ordres des zéros infinis globaux.

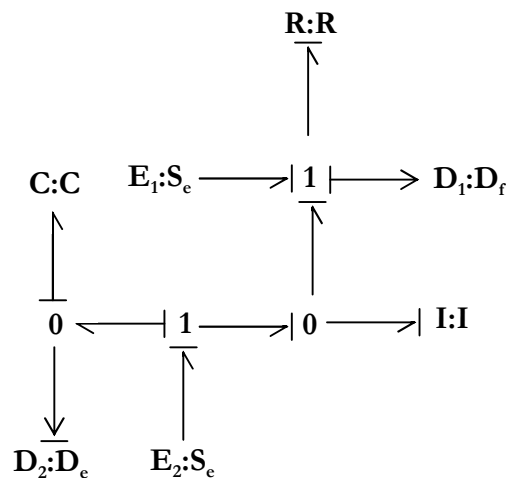


Figure 2.11 : *Calcul des zéros invariants*

En application de la propriété 2.28. L'ordre du premier zéro infini global vaut $n'_1 = 1$. Le modèle possède en effet deux transmissions directes, correspondant aux chemins causaux entrée-sortie $E_1 \rightarrow R \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow R \rightarrow D_2$. L'ordre du second zéro infini global n'_2 est calculé à partir des longueurs des plus courts chemins causaux entrée-sortie différents. Deux couples existent, de chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts, $E_1 \rightarrow R \rightarrow D_1$, $E_2 \rightarrow R \rightarrow C \rightarrow D_2$ et $E_1 \rightarrow R \rightarrow C \rightarrow D_2$, $E_2 \rightarrow R \rightarrow D_1$. Les longueurs de ces chemins valent respectivement $\{0,1\}$ et $\{1,0\}$. La propriété 2.28 permet ainsi de déduire pour n'_2 la valeur $n'_2 = 1$.

Or les variables d'entrée et de sortie du modèle vérifient les équations (2.22).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \cdot u(s) + \mathbf{W}' \cdot u(s) \\ \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}'(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R \left(RC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)} & \frac{-\left(\frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)}{R \left(RC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)} \\ \frac{-\left(\frac{I}{s} + \frac{R}{Is^2} \right)}{RC \left(RC + \frac{I}{s} + \frac{R}{Is^2} \right)} & \frac{-\left(\frac{I}{s} - \frac{R^2 C}{Is} + \frac{R}{Is^2} \right)}{\left(RC + \frac{I}{s} + \frac{R}{Is^2} \right)} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

L'expression de la matrice \mathbf{W} est obtenue de manière immédiate à partir du modèle bond-graph. En effet, les coefficients de sa première ligne sont égaux aux gains des chemins causaux de longueur nulle des sources d'entrée vers le détecteur de sortie D_1 – propriété 2.11. De même, les coefficients de sa seconde ligne sont égaux aux termes constants des gains des chemins causaux de longueur un des sources d'entrée vers le détecteur de sortie D_2 – propriété 2.10.

Cette matrice \mathbf{W} n'est pas inversible : termes constants des gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts de chaque détecteur de sortie vers l'ensemble des sources d'entrée sont en effet proportionnels. Les zéros infinis globale du modèle ne sont pas donnés par le couple $\{0,1\}$ [12].

En dérivant une seconde fois la variable $y_2(t)$, les équations (2.22) deviennent les suivantes – équations (2.23) :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ s^2 y_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{W}_1 \cdot u(s) + \mathbf{W}'_1 \cdot u(s) \\ \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{-1}{(RC)^2} & \left\{ \frac{-1}{(RC)^2} + \frac{1}{IC} \right\} \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}'_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R \left(RIC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)} & \frac{-\left(\frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)}{R \left(RIC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2} \right)} \\ \frac{RC^2 + \left(\frac{RC}{s} + \frac{I}{s^2} + \frac{R}{Is^3} \right)}{RC^2 \left(\frac{RC}{s} + \frac{I}{s^2} + \frac{R}{Is^3} \right)} & \frac{\left(1 + \frac{R}{Is} \right) - \left(\frac{I}{IC} - \frac{1}{(RC)^2} \right) \left(\frac{RC}{s} + \frac{I}{s^2} + \frac{R}{Is^3} \right)}{\left(\frac{RC}{s} + \frac{I}{s^2} + \frac{R}{Is^3} \right)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

La première ligne de la matrice \mathbf{W}_1 est identique à la première ligne de la matrice \mathbf{W} . Les coefficients de la seconde ligne de la matrice \mathbf{W}_1 , sont égaux aux termes constants des gains des chemins causaux de longueur deux des sources d'entrée vers le détecteur de sortie D_2 – propriété 2.10.

La matrice \mathbf{W}_1 est inversible. L'élément dynamique I casse en effet la proportionnalité entre les gains des chemins causaux entrée-sortie de longueurs zéro et deux. Les ordres des zéros infinis globaux du modèle ont donc finalement pour valeur respectives $n'_1 = 0$ et $n'_2 = 2$.

2.3.4 Structure essentielle

La structure essentielle est composée d'une liste, notée $\{n_{ie}\}$, d'entiers appelés ordres d'essentialité [1]. L'ordre d'essentialité associé à la variable $y_i(t)$ est calculé à partir des zéros infinis globaux du système initial et zéros infinis globaux du système privé de la sortie considérée. Les procédures graphiques par lesquelles sont déterminés les ordres des zéros infinis globaux permettent donc également de calculer les ordres d'essentialité d'un système représenté par son modèle bond-graph.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné des concepts élémentaires relatifs à la méthodologie bond-graph. Nous avons en particulier présenté des fondements de ce formalisme pour la modélisation des systèmes physiques. Nous avons également souligné les principaux résultats permettant de caractériser graphiquement des propriétés structurelles d'un système à partir de son modèle bond-graph.

L'ensemble de ces méthodes constitue le point de départ de nos travaux concernant la commande par découplage entrée-sortie des modèles bond-graph. L'étude des solutions de commande par retour d'état est présentée dans les chapitres suivants.

Chapitre III

Analyse et commande

Le modèle bond graph se situe entre le système physique et les modèles mathématiques classiques. La démarche habituelle des utilisateurs de cet outil consiste à considérer le modèle bond graph comme un modèle de connaissance pour la simulation. Le modèle bond graph peut être considéré comme un modèle à part entière, constituant un outil d'aide à l'analyse et à l'étude de lois de commande. En particulier, l'analyse permet lors de la conception, aussi bien du processus que de la stratégie de commande associée, de faire un retour sur le modèle afin d'optimiser les performances.

Dans ce chapitre sont présentés nos résultats relatifs à la commande par découplage entrée-sortie de systèmes représentés par un modèle bond-graph. Ces résultats concernent les modèles bond-graph linéaires possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Parmi ces résultats, les contributions les plus importantes s'appliquent aux modèles dont la matrice d'état \mathcal{A} est inversible -modèles de rang plein. Ce cas de figure se présente pour la plupart des modèles physiques non simplifiés.

Nous définissons d'abord des méthodes graphiques d'analyse. A partir du modèle bond-graph du système en boucle ouverte, il s'agit de pouvoir donner une réponse à la question suivante : existe-il un retour d'état statique régulier permettant de concevoir un modèle découplé stable ? Les procédures présentées s'appliquent aux modèles dont la matrice d'état est de rang quelconque -section 3.2.1 et 3.2.5- ou seulement de rang plein -section 3.2.3.

Nous nous plaçons ensuite dans une optique de commande. L'objectif est alors de calculer l'expression formelle des retours d'état statiques réguliers dont nous venons de montrer l'existence. A partir de supports géométriques, nous montrons ainsi en quoi la méthodologie bond-graph est un outil d'aide à la synthèse de lois de commande par découplage entrée-sortie. Les méthodes graphiques proposées s'appliquent ici aux modèles dont la matrice d'état est de rang plein.

3.1 Commande des systèmes multivariables

Dans cette partie, nous présentons, brièvement, les différentes méthodes utilisées pour la commande des systèmes multivariables. On distingue deux grandes classes :

3.1.1 Méthodes fréquentielle

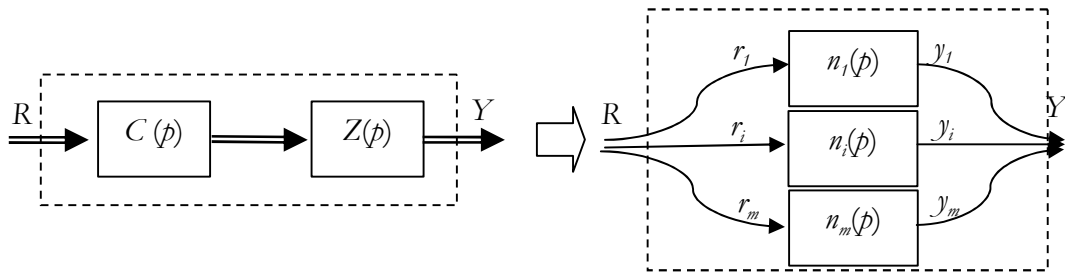
3.1.1.1 Commande directe boucle par boucle

La méthode de commande directe boucle par boucle consiste à négliger les interactions z_{ij} donc à considérer le système comme constitué de m sous-systèmes monoentrée-monosortie en parallèle.

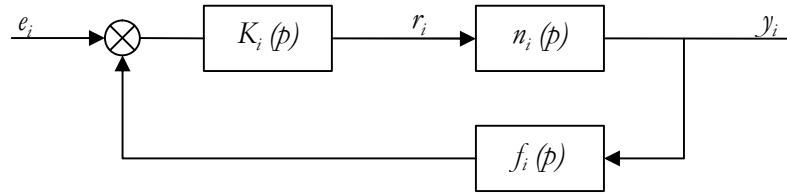
3.1.1.2 Commande par découplage

Pour se ramener aux méthodes usuelles de décomposition SISO (Single Input Single Output), on pourrait envisager également de déterminer dans un premier temps un correcteur matriciel $C(p)$ tel que la cascade constituée par le correcteur et le processus soit caractérisée par une matrice de transfert $N(p) = Z(p) C(p)$ diagonale. Le nouveau système, vu entre les entrées r_i et les sorties y_i du processus, est alors équivalent à m sous-systèmes monoentrée-monosortie (figure 3.1a).

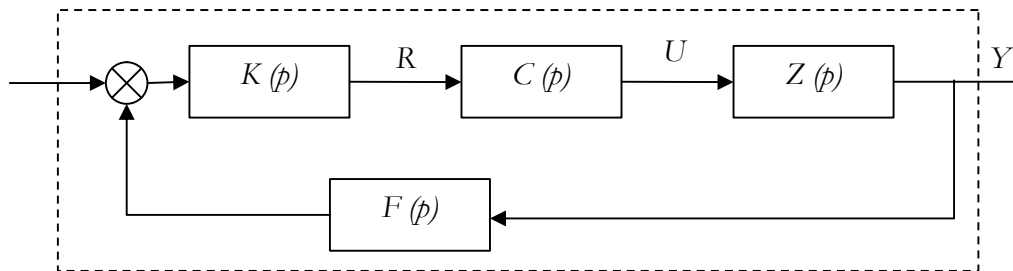
Chacun de ces sous-systèmes peut être compensé simplement (puisqu'il est SISO) en le rebouclant à travers un nouveau correcteur, soit dans la branche directe $K_i(p)$, soit dans la branche routeur $f_i(p)$, la fonction de transfert résultante étant alors (figure 3.1b) :



a). introduction d'un correcteur de diagonalisation $C(p)$



b). compensation de chaque sous-système



c). résultat global

Figure 3.1 : Commande par découplage.

$$\frac{y_i}{e_i} = \frac{k_i n_i}{1 + k_i n_i f_i} \quad (3.1)$$

le système global en boucle fermée a alors la structure indiquée sur la figure 3.1c où K et F sont des matrices diagonales d'éléments $k_i(p)$ et $f_i(p)$, la matrice de transfert résultante étant définie par :

$$Y(p) = [(I + ZCKF)^{-1} ZCK] E(p) \quad (3.2)$$

3.1.1.3 Commande par dominance diagonale

Au lieu de déterminer le correcteur C comme précédemment, tel que ZC soit diagonale, on essaye de le déterminer sous la forme la plus simple possible, de telle sorte que la matrice $\hat{N} = (ZC)^{-1} = \hat{C}\hat{Z}$ soit presque 'découplée' (où "à dominance diagonale"), c'est-à-dire telle que :

$$|\hat{n}_{ii}(p)| > \sum_{j \neq i} |\hat{n}_{ij}(p)| \quad (3.3)$$

En effet, dans ce cas, la stabilité et les performances du système global peuvent être déduites de celles de chacune des boucles.

3.1.2 Méthodes temporelles

3.1.2.1 Commande optimale

Les techniques de commande optimale linéaire et quadratique, malgré leurs limitations [14], figurent parmi les méthodes les plus anciennes et les plus puissantes utilisées en commande des

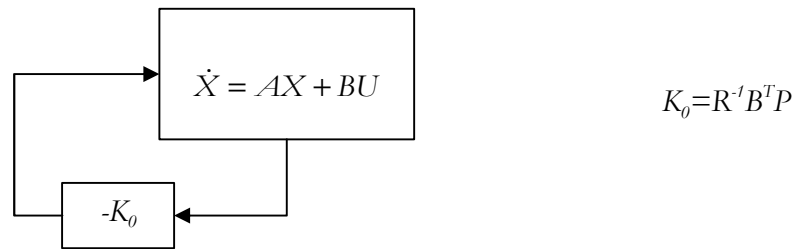


Figure 3.2 : Correcteur d'état optimal

systèmes multivariables.

Étant donné le système (figure 3.2) :

$$\dot{X} = AX + BU$$

Avec une condition initiale $X(t_0) = X_0$, on cherche la commande minimisant sur un horizon infini un critère quadratique :

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (3.4)$$

Où R et Q sont des matrices, respectivement définie positive et définie semi-positive.

On montre que la commande U optimale est définie par :

$$U = -R^{-1} B^T P X = -K_0 X \quad (3.5)$$

Où P est une matrice (n, n) symétrique, qui est l'unique solution définie semi-positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3.6)$$

Sous les deux conditions que, d'une part, la paire (AB) est stabilisable et que, d'autre, la paire (MA) est détectable avec $Q = M^T M$, le système en boucle fermée est défini par :

$$\dot{X} = (A - BK_0)X$$

Et $A - BK_0$ est une matrice stable.

3.1.2.2 Placement des pôles par retour d'état

Stabilité et rapidité étant deux objectifs essentiels recherchés (même s'il ne sont pas les seuls), le premier problème que l'on peut se poser est celui de chercher un *correcteur d'état* :

$$U = E - KX$$

Tel que le système bouclé, défini par la matrice dynamique $A - BK$ ait ses modes, c'est-à-dire ses valeurs propres, dans une région donnée du plan complexe.

En fait, pour traiter le problème mathématiquement, le lecteur trouve plus de détail à [10].

3.1.2.3 Placement des vecteurs propres

Étant donné un système d'ordre n , gouvernable,

$$\dot{X} = AX + BU$$

commandé par retour d'état $U = E - KX$, on a vu que dans le cas multivariables, la matrice K étant de dimension $m \times n$, on dispose de mn degrés de liberté alors que n seulement sont nécessaires pour fixer complètement l'équation caractéristique de $A - BK$, en boucle fermée. Dans la méthode précédente les degrés restants ont été en quelque sorte sacrifiés, car on ne se préoccupait que d'un simple placement de pôles.

Or, si le placement de pôles est en lui-même important (il garantit la stabilité, un amortissement minimum, une rapidité minimale), il est clair qu'on voudrait pouvoir utiliser ces degrés de liberté restants pour agir sur la façon dont les modes sont excités, par les consignes ou les perturbations, sur le contenu des états et des sorties.

À ce titre, on voit l'importance fondamentale des vecteurs propres, à droite et à gauche.

Soit plus généralement le système :

$$\dot{X} = Ax + BU + Gh; Y = CX$$

Et la loi de commande :

$$U = HE - KX$$

Où

- B est la matrice d'application de la commande U ,
- G la matrice d'application d'un bruit d'état h ,
- E le vecteur de consigne.

Le système en boucle fermée a pour équations :

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= (A - BK)X + BHE + Gh = A_f X + BHE + Gh \\ Y &= CX \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Soit \mathbf{I}_i une valeur propre de $A-BK=A_f$ et v^j et u_i^T les vecteurs propres, à droite et à gauche, définie par :

$$A v^j = \mathbf{I}_j v^j \quad u_i^T A_f = \mathbf{I}_i u_i^T$$

Le problème donc est de trouver un correcteur K , permettant de fixer les modes en boucle fermée, et en même temps de satisfaire, si possible, les structures souhaitées des vecteurs propres associés.

3.1.2.4 Commande découplante

La technique précédente de placement de vecteurs propres permet –tout en assurant qu'en boucle fermée les modes sont en positions désirées- d'intervenir sur le contenu de états et sorties et sur la façon dont les modes sont excités. On peut aller plus loin en cherchant un *correcteur qui découple totalement le système* au sens entrées-sorties.

L'utilisation des techniques d'état s'avère spécialement importante ici, d'une part parce qu'elle permet de garder trace des inobservabilités éventuellement apparaissant par suite des contraintes imposées au problème, d'autre part parce qu'elle permet éventuellement de généraliser les méthodes proposées aux systèmes non linéaires [10].

3.2 Outils pour l'analyse

Dans cette partie, nous proposons des méthodes graphiques d'analyse destinées à apporter une réponse à la question suivante : le modèle bond-graph peut-être découplé avec stabilité par retour d'état statique régulier ? Les résultats rappelés aux chapitres précédents montrent que cette propriété dépend des zéros invariants du modèle en boucle ouverte.

Pour caractériser la stabilité du modèle découplé, l'idée la plus intuitive consiste à caractériser ses modes fixes [52]. S'ils sont tous stables, un modèle découplé stable peut être obtenu [18]. Nous proposons ainsi une procédure graphique de détermination formelle des zéros invariants de chaque modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$. Les zéros invariants du modèle global carré étant connus - section 2.3.1- nous déduisons l'expression symbolique de ses modes fixes. Cette procédure graphique ne suppose aucune hypothèse particulière concernant le rang de la matrice d'état du modèle.

Dans ce travail, l'étude de l'ensemble des zéros invariants n'est cependant pas nécessaire. La stabilité du modèle découplé peut en effet être déduite de l'étude des seuls zéros invariants instables du modèle en boucle ouverte [30]. Nous proposons donc, dans un second temps, une méthode graphique visant à déterminer directement le nombre des zéros invariants nuls du modèle. Cette méthode repose sur des manipulations causales. Elle ne s'applique qu'aux modèles bond-graph dont la matrice d'état est inversible. Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante de stabilité du modèle découplé dans le cas – très fréquent – où le modèle bond-graph ne possède pas de zéros invariants strictement instables.

Nous présentons enfin les perspectives envisagées pour l'étude des modèles bond-graph dont la matrice d'état n'est pas inversible. Nous examinons en particulier le cas des modèles gouvernables mais non observables. Pour cette classe de modèles, la notion de zéro-système généralise celle de zéro invariant utilisée. En particulier, les zéros déterminés graphiquement sur le modèle sont à présent les zéros-système, contenant l'ensemble des zéros invariants. Nous exposons donc une méthode graphique de détermination des zéros-système nuls. Nous en déduisons une procédure graphique de calcul du nombre de zéros invariants nuls.

3.2.1 Zéros invariants des modèles lignes

Nous proposons dans cette section une méthode de détermination graphique des zéros invariants associés à chaque modèle ligne $\sum(c_i, A, B)$ [4]. Cette méthode s'applique quelles que soient les propriétés de commandabilité et d'observabilité du modèle.

Soit $P_i(s)$ -équation (3.8)- la matrice système associée au sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$.

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -c_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Cette matrice possède $(n+1)$ lignes et $(n+m)$ colonnes. L'ordre maximum de ses mineurs vaut donc $(n+1)$. Les notations relatives à ces mineurs sont précisées par la définition suivante.

Définition 3.1 : $D_{n+1}^{i,j}(s)$ représente le i^{me} mineur d'ordre maximum de la matrice $P_i(s)$.
 $D_{n+1}^i(s)$ représente le plus grand commun diviseur de tous les mineurs $D_{n+1}^{i,j}(s)$.

Les zéros invariants du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ sont les racines de $D_{n+1}^i(s)$. L'objectif est ainsi d'établir l'expression formelle de chaque mineur $D_{n+1}^{i,j}(s)$. Les racines communes à chacun de ces mineurs seront les zéros invariants du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$.

Considérons donc la matrice $M_{n+1}^i(s)$ construite en enlevant $(m-1)$ colonnes de la matrice $P_i(s)$. Le mineur $D_{n+1}^{i,j}(s)$ est obtenu, à partir de cette matrice, comme le montre l'équation (3.9).

$$D_{n+1}^{i,j}(s) = \det[M_{n+1}^i(s)] \quad (3.9)$$

Pour éliminer $(m-1)$ colonnes de la matrice $P_i(s)$, il faut tout d'abord enlever de la matrice B un nombre de colonnes égal à M tel que $0 < M < (m-1)$. Ces colonnes sont notées $\{B^1, \dots, B^M\}$. Il s'agit ensuite d'enlever $N = (m-1-M)$ colonnes du reste de la matrice $P_i(s)$. Ces colonnes sont notées $\{A^1, \dots, A^N\}$. Pour éliminer ces colonnes $\{A^1, \dots, A^N\}$, l'idée est d'ajouter à la matrice $P_i(s)$ N lignes $\{L_1, \dots, L_N\}$ telles que le seul terme non nul de chaque ligne L_i soit celui qui appartient également à la colonnes A_i à éliminer. En effet, notons $P_i^j(s)$ la matrice ainsi construite -figure 3.3.

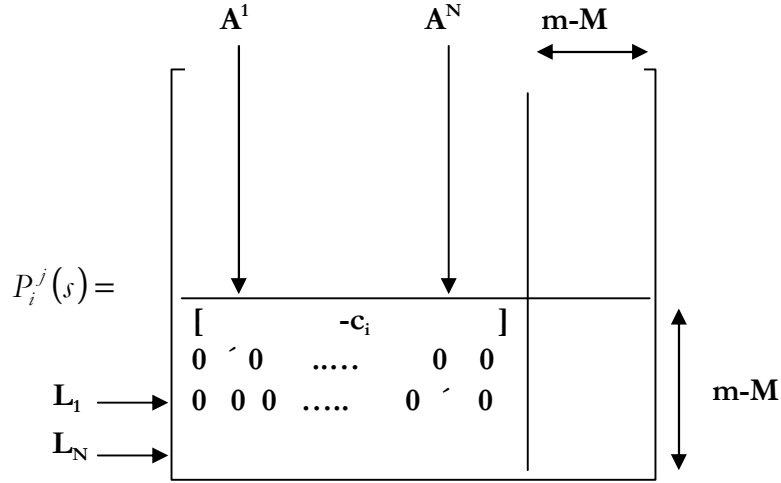


Figure 3.3 : matrice $P_i^j(s)$.

Cette matrice possède $(n+m-M)$ lignes et $(n+m-M)$ colonnes. Le développement de son déterminant par rapport aux N dernières lignes permet d'exprimer le mineur $D_{n+i}^{j,j}(s)$. Cette expression est donnée par l'équation (3.10), où le coefficient K est une constante multiplicative.

$$\det [P_i^j(s)] = K D_{n+i}^{j,j}(s) \quad (3.10)$$

Précisons que si $M=0$, aucune colonne n'est enlevée de la matrice B ; si $M=(m-1)$, toutes les colonnes enlevées de la matrice $P_i(s)$ proviennent par contre de la matrice B .

Ces manipulations algébriques opérées sur la matrice $P_i(s)$ sont à présent traduites en manipulations graphiques. A cet effet, différents modèles bond-graph doivent être construits à partir du modèle bond-graph initial. Les notations utilisées pour les représenter sont précisées par les définitions suivantes :

Définition 3.2 : Le modèle bond-graph du sous-système $\sum(c_i, A, B)$ est noté BG_i . Il est obtenu en enlevant du modèle bond-graph initial tous les détecteurs de sortie sauf le i^{me} .

Ce modèle sert de support à la construction des modèles bond-graph BG_{iM} et BG_{iM}^j .

Définition 3.3 : le modèle bond-graph BG_{iM} est obtenu en ôtant du modèle bond-graph BG_i M sources d'entrée et en plaçant $N=(m-1-M)$ détecteurs de sortie sur N éléments dynamiques en causalité intégrale distincts.

A un couple de valeurs (M, N) donné correspondent plusieurs modèles BG_{iM} . Nous les distinguons grâce à la notation suivante.

Définition 3.4 : Le modèle bond-graph BG_{iM}^j représente la j^{me} configuration entrées-sorties possible du modèle BG_{iM} .

A partir du modèle bond-graph BG_i , et pour chaque valeur M comprise entre 0 et $(m-1)$, nous appliquons la procédure suivante.

1. Construction de chaque modèle bond-graph BG_{iM}^j .
2. Calcul du déterminant de chaque matrice système associée.

Conformément aux définitions 3.3 et 3.4, chaque modèle BG_{iM}^j possède en effet un nombre égal de source d'entrée et de détecteurs de sortie. Ce nombre vaut $(m-M)$. La matrice système associée est la matrice $P_i^j(s)$ décrite par la *figure 3.3*. A une constante multiplicative près, son déterminant est égal au mineur $D_{n+1}^{i,j}(s)$ -équation (3.10). L'expression formelle de ce déterminant est obtenue en appliquant au modèle bond-graph BG_{iM}^j la règle graphique rappelée par la propriété 2.23. Nous déduisons ainsi l'expression symbolique des racines du mineur $D_{n+1}^{i,j}(s)$. Les zéros invariants du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ sont finalement les racines communes à tous les mineurs $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$.

Remarque 3.5 : Si deux mineurs $D_{n+1}^{i_1}(s)$ et $D_{n+1}^{i_2}(s)$ n'ont aucun facteur commun, alors le PGCD, des mineurs d'ordre $(n+1)$ de la matrice $P_i(s)$, est constant. Dans ce cas, le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède donc aucun zéro invariant. Dans un souci de rapidité, nous chercherons autant que possible à identifier en premier lieu ces cas de figure.

Notons enfin que cette méthode permet également de déterminer l'expression symbolique des zéros invariants de modèles non carrés possédant plus d'une variable de sortie.

3.2.2 Application

Dans cette section, nous illustrons par une application la procédure présentée dans la section précédente [4].

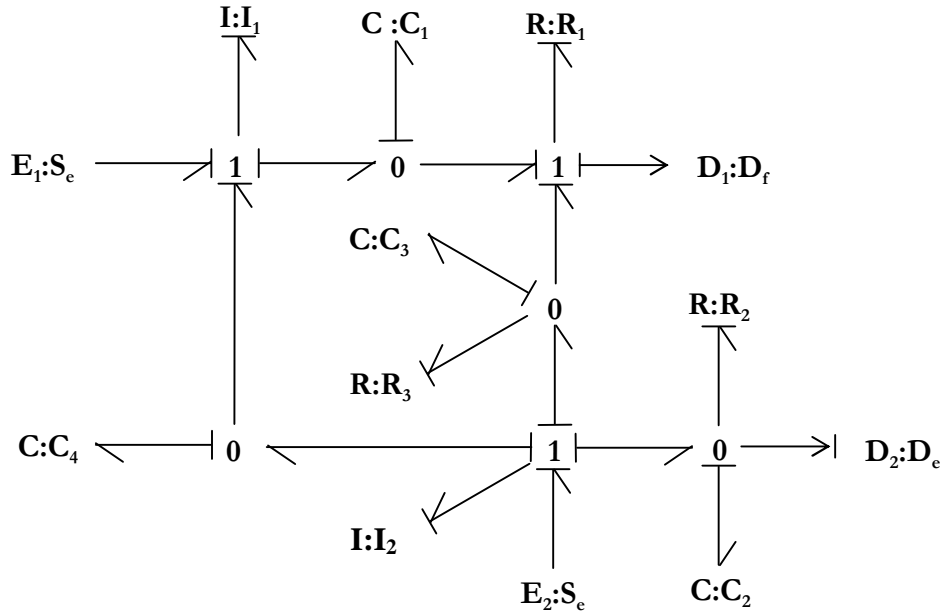


Figure 3.4 : *Système multivariable 2X2.*

Considérons le modèle bond-graph présenté en *figure 3.4*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein – théorème 2.16 – et découplable par retour d'état statique régulier.

Ce modèle possèdent deux zéros invariants, dont le calcul à été détaillé en section 2.3.1. Ces zéros invariants ont pour expression $s=0$ et $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$. Nous déterminons l'expression symbolique des zéros invariants associés à chaque sous-système ligne. Nous détaillons plus particulièrement l'étude du second sous-système ligne. Nous en déduisons l'expression symbolique des modes fixes du modèle.

Soit la *figure 3.5* le modèle bond-graph BG_2 – définition 3.2 – associé au sous-système ligne $\sum(c_2, A, B)$.

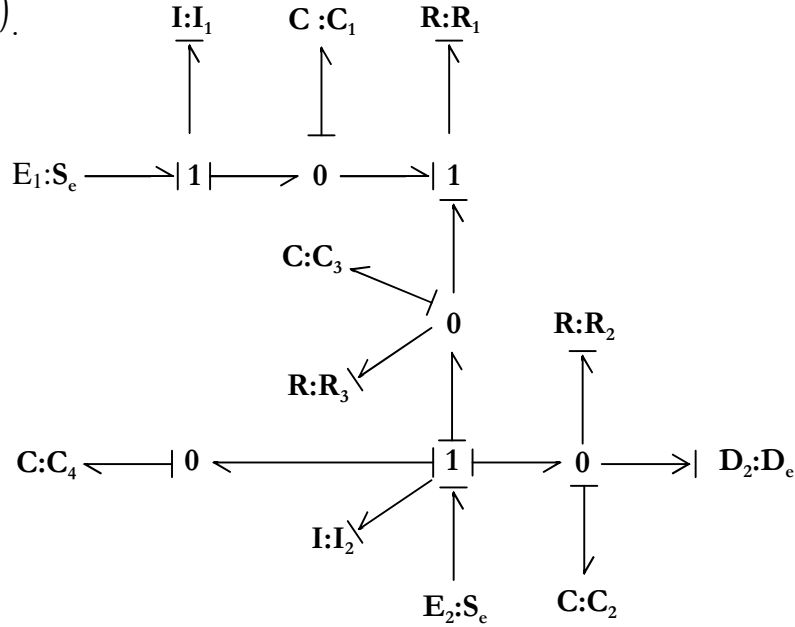


Figure 3.5 : modèle bond-graph BG_2 .

La matrice système $P_2(s)$ associée à ce modèle possède sept lignes et huit colonnes. Son j^{me} mineur d'ordre 7 est noté $D_7^{2,j}(s)$ - définition 3.1. Pour le calculer, nous devons supprimer une colonne de la matrice $P_2(s)$. Nous choisissons d'exprimer d'abord les mineurs d'ordre 7 calculés en conservant les deux colonnes de la matrice B .

Ce premier choix impose pour M et N les valeurs $M_j=0$ et $N_j=1$. Il faut par conséquent utiliser un détecteur de sortie fictif D_0 . A chacune des positions possibles de ce détecteur de sortie correspond un modèle bond-graph $BG_{2M_j}^j$ -définition 3.4. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$ et deux détecteurs de sortie $\{D_0, D_2\}$. Le déterminant de sa matrice système est égal, à une constante près, au mineur $D_7^{2,j}(s)$ - équation (3.10).

Plaçons dans un premier temps le détecteur de sortie D_0 sur l'élément C_j . Le modèle bond-graph obtenu est noté $BG_{2M_j}^j$. Il est représenté sur la *figure 3.6*.

La matrice système associée à ce modèle est notée $P_2^j(s)$ - *figure 3.3*. L'expression symbolique de son déterminant est obtenue en appliquant au modèle $BG_{2M_j}^j$ la règle rappelée par la propriété 2.23. Cette règle repose sur l'étude des chemins causaux entrée-sortie différents.

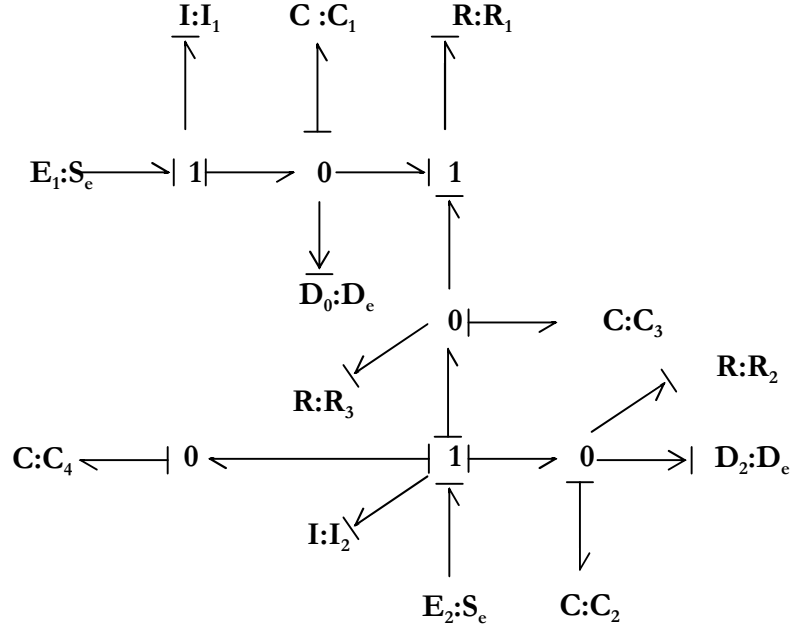


Figure 3.6 : Modèle bond-graph $BG_{2M_1}^1$.

Sur le modèle $BG_{2M_1}^1$, une seule famille de deux chemins causaux entrée-sortie différents existe. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_0$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$. L'expression symbolique du déterminant de la matrice système $P_2'(s)$ en est déduite. Cette expression est donnée par l'équation (3.11).

$$\det [P_2'(s)] = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2} s \left(s + \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \quad (3.11)$$

Le premier mineur d'ordre 7 de la matrice $P_2(s)$ vérifie donc l'équation (3.12), où K_1 est une constante multiplicative.

$$\mathbf{D}_7^{2,1}(s) = K_1 \det [P_2'(s)] \quad (3.12)$$

Plaçons maintenant le détecteur de sortie D_0 sur l'élément C_4 . Le modèle bond-graph obtenu est noté $BG_{2M_1}^2$. Il est représenté sur la figure 3.7.

Ce modèle ne possède qu'une seule famille de deux chemins causaux entrée-sortie différents. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_4 \rightarrow D_0$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$. Conformément à la propriété 2.23, nous en déduisons l'expression symbolique du déterminant de la matrice système $P_2^2(s)$. Cette expression est donnée par les équations (3.13).

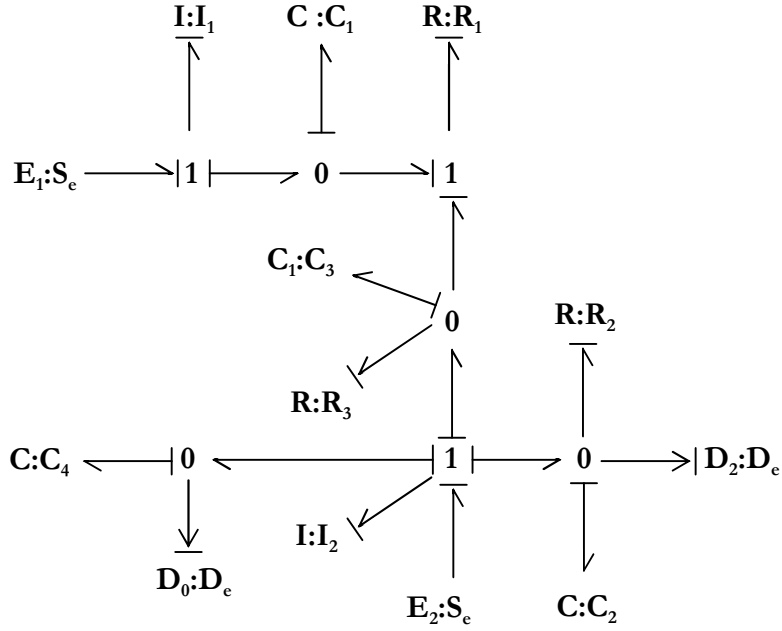


Figure 3.7 : Modèle bond-graph $BG_{2M_1}^2$.

$$\begin{cases} \det [P_2'(s)] = Q(s) + R(s) \\ Q(s) = \frac{-1}{I_1 I_2 C_2 C_4} \left(s + \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \\ R(s) = \frac{1}{R_1^2 I_1 I_2 C_1 C_2 C_3 C_4} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le second mineur d'ordre 7 de la matrice $P_2(s)$ vérifie donc l'équation (3.14), où K_2 est une constante multiplicative.

$$\mathbf{D}_7^{2,2}(s) = K_2 \det [P_2^2(s)] \quad (3.14)$$

Les mineurs $\mathbf{D}_7^{2,1}(s)$ et $\mathbf{D}_7^{2,2}(s)$ donnés par les équations (3.12) et (3.14) n'ont aucun facteur commun. Le PGCD des mineurs d'ordre 7 de la matrice $P_2(s)$ est donc constant. Par conséquent le sous-système ligne $\sum(c_2, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant – remarque 3.5.

L'étude du sous-système ligne $\sum(c_1, A, B)$ est menée de manière tout à fait similaire [4]. Elle conduit à la conclusion suivante : le sous-système ligne $\sum(c_1, A, B)$ ne possède également aucun zéro invariant.

Les modes fixes du modèle présenté en figure 3.4 sont ses deux zéros invariants. L'un d'entre eux étant nul, nous en déduisons la conclusion suivante : aucun retour d'état statique régulier ne peut découpler ce modèle tout en garantissant la stabilité du modèle découplé.

Supposons néanmoins qu'il existe une loi de commande (F_0, G_0) vérifiant la propriété suivante.

Propriété 3.6 : La loi de commande (F_0, G_0) est un retour d'état statique régulier. Par action de cette loi de commande, le nombre de modes non assignables du modèle découplé est supérieur ou égal au nombre des modes fixes. Tous ces modes non assignables sont cependant strictement stables.

Si l'objectif est de minimiser le nombre de modes non assignables du modèle découplé, une telle solution de commande n'est pas systématiquement la meilleure. Si l'objectif est "uniquement" de concevoir par bouclage un modèle découplé stable, cette loi de commande est une solution possible : [30] établit une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette loi de commande (F_ρ, G_ρ) . Cette condition repose non pas sur l'étude de tous les zéros invariants du modèle en boucle ouverte mais seulement sur l'étude de ses zéros invariants instables. Or l'expérience montre que les modes instables d'un modèle découplé obtenu à partir d'un modèle bond-graph sont la plupart du temps des modes nuls.

Nous présentons donc dans la section 3.2.3 une méthode graphique simple permettant de déterminer le nombre zéros invariants nuls d'un système à partir de son modèle bond-graph. À l'aide de cette méthode, nous déduisons une condition nécessaire et suffisante graphique d'existence de la loi de commande (F_ρ, G_ρ) décrite par la propriété 3.6. Ces méthodes découlent de l'étude du modèle bond-graph affecté d'une causalité dérivée.

3.2.3 Nombre de zéros invariants nuls

Les résultats présentés dans cette section concernent les modèles bond-graph dont la matrice d'état A est inversible – modèles de rang plein (section 2.2.2).

Pour cette classe de modèles, nous proposons une méthode graphique de détermination du nombre des zéros invariants nuls.

Ces résultats sont présentés en trois phases. Nous définissons tout d'abord deux notions nouvelles : la longueur et le gain d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée – première phase. Nous calculons ensuite la structure infinie de ce modèle en causalité dérivée – seconde phase. Nous en déduisons enfin le nombre des zéros invariants nuls du modèle en causalité intégrale – troisième phase.

1. Chemin causal et causalité dérivée

Considérons un modèle bond-graph de rang plein. Affecté d'une causalité intégrale préférentielle, il est noté *BGI*. Affecté d'une causalité dérivée préférentielle, il est noté *BGD*. La représentation mathématique associée au modèle bond-graph *BGD* est rappelée par les équations (3.15).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{-1}\dot{x}(t) - A^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CA^{-1}\dot{x}(t) - CA^{-1}Bu(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Sur ce modèle *BGD*, nous définissons tout d'abord la nouvelle notion de longueur d'un chemin causal.

Définition 3.7 : *Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée *BGD*, soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, S_e, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, D_e, D_f\}$. Soit N_d le nombre des éléments dynamiques en causalité dérivée traversés par ce chemin. La longueur de ce chemin vaut alors N_ρ plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique.*

Le gain de chemin causal est calculé, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée, comme l'est le gain d'un chemin causal sur modèle bond-graph en causalité intégrale. La règle de calcul de ce gain est rappelée par la définition 2.7. Elle repose sur l'expression des gains des éléments traversés par le chemin. En causalité intégrale et en causalité dérivée, ces expressions sont données par les équations (2.9), (2.10) et par la remarque 2.1.

Notons à présent du modèle BGD tous les détecteurs de sortie sauf le i^{me} . Le modèle bond-graph obtenu est noté BGD_i . La représentation mathématique qui lui est associée est donnée par les équations (3.16).

$$\begin{cases} x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1} Bu(t) \\ y_i(t) = c_i A^{-1} \dot{x}(t) - c_i A^{-1} Bu(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

Sur ce modèle BGD_i , le calcul du gain de certains chemins causaux permet de déterminer l'expression formelle du produit entre les matrices A^{-1} , B et c_i . Cette propriété est similaire à celle établie pour le modèle bond-graph en causalité intégrale – section 2.2.1.

Soient S_j la j^{me} source d'entrée du modèle bond-graph BGD_i et D_i son i^{me} détecteur de sortie. L'expression de $y_i(t)$ donnée par les équations (3.16) permet de déduire de manière immédiate la propriété suivante.

Propriété 3.8 [1] [2]: Pour $k \geq 1$, $[c_i A^{-k} B^j] = -\sum G_{k-1}(S_j, D_i)$ où le coefficient $G_{k-1}(S_j, D_i)$ représente, sur le modèle BGD_i , le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k-1)$ entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

Enfin, nous introduisons la notion de chemins causaux différents sur le modèle bond-graph BGD . Cette notion est décrite par la propriété suivante, duale de la propriété 2.9.

Propriété 3.9: Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, deux chemins causaux sont différents s'ils n'ont en commun aucun élément dynamique en causalité dérivée.

Pour déterminer le nombre des zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale BGI , nous étudions, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée BGD , les chemins causaux entrée-sortie les plus courts.

2. Nombre de zéros invariants nuls

Le nombre des zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum(c_i, A, B)$ est calculé conformément au théorème suivant.

Théorème 3.15 [1] [2]: Soit n_{id} l'ordre du zéro infini associé modèle bond-graph en causalité dérivée BGD_i . Le nombre de zéros invariants nuls du modèle $\sum(c_i, A, B)$ est alors égal à n_{id} .

De même, nous utilisons les entiers n'_{id} pour calculer le nombre des zéros invariants nuls du modèle global $\sum(C, A, B)$.

Théorème 3.16 [1] [2]: Soient $\{n'_{id}, \dots, n'_{pd}\}$ les ordres des zéros à l'infini globaux du modèle bond-graph en causalité dérivée BGD . Le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale BGI est égal à $\sum_{k=1}^p n'_{kd}$.

Les théorèmes 3.15 et 3.16 proposent donc des méthodes entièrement graphiques pour calculer le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph. A l'aide d'algorithmes utilisés jusqu'à présent pour l'étude des modèles bond-graph en causalité intégrale, ils exploitent des informations structurelles contenues dans le modèle bond-graph en causalité dérivée

préférentielle. A partir de ces résultats, nous déduisons une condition nécessaire et suffisante graphique d'existence de la loi de commande (F_ϕ, G_0) introduite par la propriété 3.6. Cette condition repose sur [30]. Elle est énoncée par le théorème suivant.

Théorème 3.17 [1] [2] : Soit $\Sigma(C, A, B)$ un système carré p entrées- p sorties, de rang plein et ne possédant aucun zéro invariant strictement instable. Soit $\{n_i\}$ - respectivement $\{n'_i\}$ - la structure à l'infini en ligne – respectivement globale – de son modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle. Soit $\{n_{id}\}$ - respectivement $\{n'_{id}\}$ - la structure à l'infini en ligne – respectivement globale – de son modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. Une solution stable existe au problème du découplage statique régulier de $\Sigma(C, A, B)$ si et seulement si les entiers n_i, n'_i, n_{id} et n'_{id} vérifient les équations (3.17).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_i \\ \sum_{i=1}^p n'_{id} = \sum_{i=1}^p n_{id} \end{cases} \quad (3.17)$$

Compte tenu des résultats énoncés par les théorèmes 3.15 et 3.16, la preuve de ce théorème est immédiate. Nous déduisons finalement des équations (3.17) la propriété suivante.

Propriété 3.18 : Soit un modèle bond-graph carré, de rang plein et ne possédant aucun zéro invariant strictement instable. L'étude de sa découplabilité statique régulière et l'étude de la stabilité du modèle découplé sont réalisées de manière duale, respectivement sur les modèles en causalité intégrale préférentielle et en causalité dérivée préférentielle.

Les résultats proposés dans cette section sont illustrés par une application que nous présentons dans la section suivante.

3.2.4 Application

Dans cette section, nous déterminons graphiquement le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle bond-graph de rang plein. Nous en déduisons que ce modèle est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

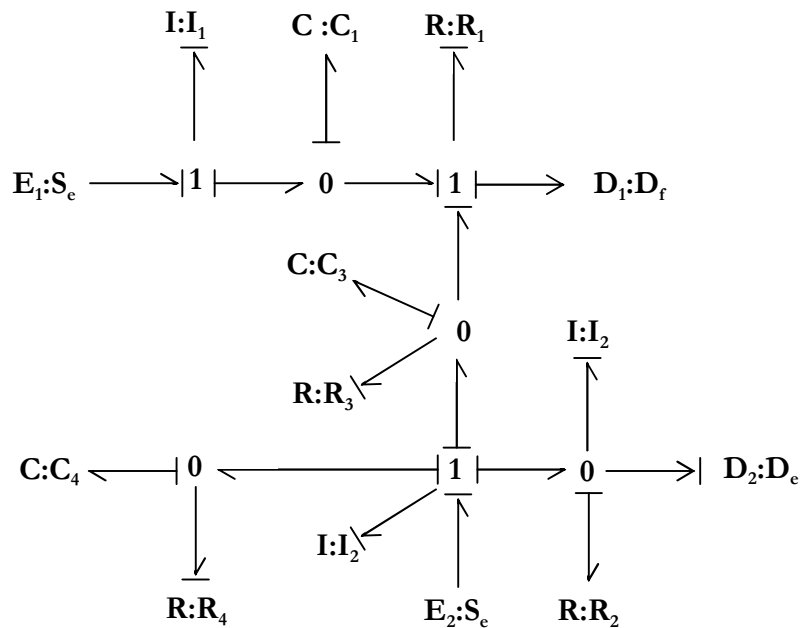


Figure 3.8 : modèle bond-graph BG1.

Considérons le modèle bond-graph présenté en *figure 3.8* et noté *BG1*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein – théorème 2.16 – et découplable par retour d'état statique régulier.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques de ce modèle. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit par la *figure 3.9*.

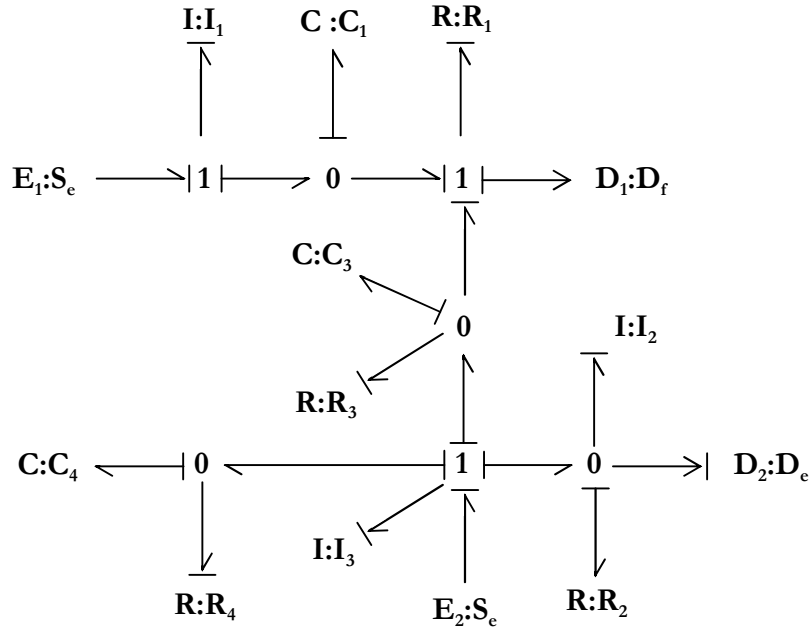


Figure 3.9 : Modèle bond-graph BG2.

Phase 1 : détermination du nombre total de zéros invariants.

Quatre couples de chemins causaux entrée-sortie, différents, existent sur le modèle bond-graph *BG1*. Pour chacun d'entre eux, le premier chemin relie la source d'entrée E_1 au détecteur de sortie D_1 et le second chemin relie la source d'entrée E_2 au détecteur de sortie D_2 .

La famille de chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts est $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$, $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$. Le modèle bond-graph réduit construit à partir de cette famille possède donc trois éléments dynamiques en causalité intégrale – définition 2.22.

Conformément à la propriété 2.25, le modèle bond-graph *BG1* possède trois zéros invariants. Certains d'entre eux peuvent être nuls : l'étude de la structure infinie du modèle bond-graph *BG2* permet d'en déterminer le nombre.

Phase 2 : détermination du nombre de zéros invariants nuls.

Le modèle bond-graph *BG2* possède des transmissions directes. En effet, les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée ne traversent aucun élément dynamique an causalité dérivée. L'ensemble de ces chemins est noté C_{c1} . Selon les définitions 3.7 et 3.13, l'entier n'_{1d} a donc pour valeur $n'_{1d} = 0$.

Les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée ont pour longueur un – définition 3.7. L'ensemble de ces chemins est noté C_{c2} . Selon la remarque 3.14,

avant de donner à l'entier n'_{2d} la valeur $n'_{2d} = 1$, il nous faut nous assurer que les termes constants des gains des éléments de l'ensemble C_{i2} ne sont pas proportionnels aux gains des éléments de l'ensemble C_{ei} . Ceci est garanti par la présence de l'élément résistif R_4 qui permet de construire le chemin $D_2 \rightarrow I_2 \rightarrow R_4 \rightarrow E_2$. Conformément à la définition 3.13 et à la remarque 3.14, l'entier n'_{2d} a donc pour valeur $n'_{2d} = 1$.

Nous déduisons par conséquent du théorème 3.16 que le modèle bond-graph $BG1$ possède un zéro invariant nul.

Phase 3 : calcul des zéros invariants non nuls.

L'expression formelle des deux zéros invariants non nuls est déterminée conformément à la propriété. Ce type de calcul a déjà été exposé – section 2.3.1. Il repose sur l'étude de chaque couple de chemins causaux entrée-sortie différents. Il permet de montrer que les deux zéros

invariants non nuls du modèle bond-graph $BG1$ ont pour expressions $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$.

Les trois zéros invariants du modèle bond-graph $BG1$ ont donc pour expression $s=0$, $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$. Aucun d'entre eux n'est strictement instable. Conformément au théorème 3.17, l'étude des structures infinies en ligne du modèle bond-graph $BG2$ nous permet dans ce cas de savoir si le modèle bond-graph $BG1$ peut être découplé statiquement avec stabilité.

Phase 4 : détermination du nombre de zéros invariants non nuls associés à chaque sous-système ligne.

Sur le modèle bond-graph $BG2$, les chemins causaux les plus courts de chaque détecteur de sortie vers les sources d'entrée sont respectivement $D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow E_1$ et $D_2 \rightarrow I_2 \rightarrow R_4 \rightarrow E_2$. Conformément à la définition 3.7, les longueurs respectives de ces chemins valent zéro et un. La propriété 3.11 permet de déduire pour les entiers n_{1d} et n_{2d} les valeurs $n_{1d} = 0$ et $n_{2d} = 1$.

Phase 5 : conclusion.

Le théorème 3.17 permet ainsi de tirer la conclusion suivante : un retour d'état statique régulier existe, permettant de découpler le modèle bond-graph $BG1$ tout en garantissant la stabilité du modèle découplé. Cette solution de commande, ainsi que les propriétés dynamiques du modèle découplé correspondant, seront définis dans la section suivante de ce chapitre.

A titre de remarque, notons que le modèle bond-graph $BG1$ privé de l'élément résistif R_4 est également découplable par retour d'état statique régulier. Mais aucun modèle découplé stable ne peut être conçu par cette stratégie de commande. En effet, sur le modèle bond-graph $BG2$, la proportionnalité entre les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts impose de nouvelles valeurs pour les entiers n'_{1d} et n'_{2d} : $n'_{1d} = 0$ et $n'_{2d} = 2$ -remarque 3.14. Les entiers n_{1d} et n_{2d} restant inchangés, les équations (3.12) ne sont donc plus vérifiées. Le théorème 3.17 nous permet ainsi de tirer la conclusion suivante : le modèle bond-graph $BG1$ privé de l'élément résistif R_4 ne peut pas être découplé avec stabilité par un retour d'état statique régulier.

Si le modèle possède des zéros invariants strictement instables, la structure infinie du modèle en causalité dérivée ne permet pas de caractériser la stabilité du modèle découplé. Nous utilisons

dans ce cas la procédure présentée en section 3.2.1. Nous déterminons ainsi "à la main" l'expression symbolique des zéros invariants strictement instables du modèle. S'ils sont tous également des zéros invariants en ligne, il existe une solution statique régulière au problème du découplage avec stabilité. Sinon, le découplage statique avec stabilité est impossible [30].

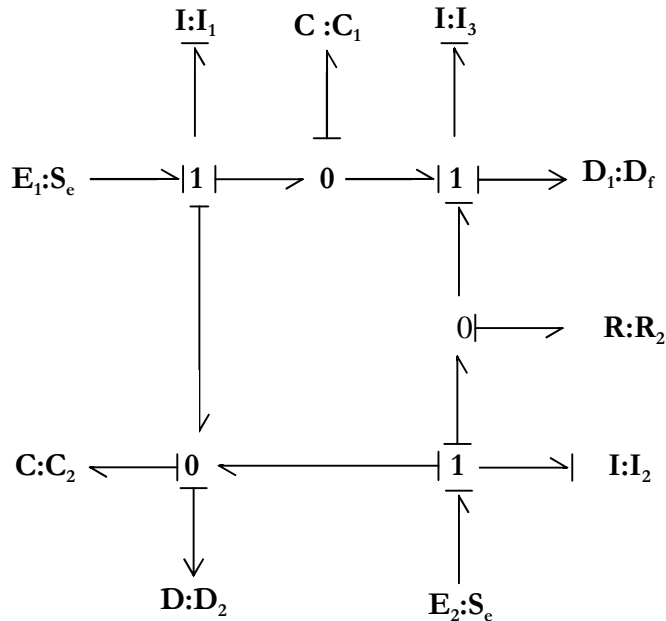


Figure 3.10

Ce dernier cas est illustré par l'application du modèle bond-graph présenté en *figure 3.10*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et cinq éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein – théorème 2.16 – et découplable par retour d'état statique régulier.

Des développements similaires à ceux que nous venons d'expliciter montrent que ce modèle

possède un seul zéro invariant, dont la valeur est $s = \frac{+1}{R_2 C_2}$, propriété 2.23. Les sous-systèmes ligne ne possédant aucun zéro invariant, le zéro invariant du modèle global est mode fixe. Strictement instable, il rend impossible toute solution de découplage avec stabilité par retour d'état statique régulier [18].

3.2.5 Extension à l'étude des zéros-système nuls

Cette section concerne l'étude des modèles bond-graph minimaux : la matrice d'état A n'est pas inversible et le modèle est gouvernable mais non observable. Ces modèles possèdent en outre autant de variables d'entrée que de variables de sortie. Pour cette classe de modèles, l'objectif est de caractériser graphiquement le nombre de zéros invariants nuls globaux et en ligne, liés à l'étude de la stabilité du modèle découplé [30].

Pourquoi ce problème doit-il être examiné ? La non minimalité du modèle complique à présent la détermination du nombre de zéros invariants nuls de chaque modèle ligne. Deux ensembles de zéros, identiques jusqu'à présent, sont en effet maintenant à distinguer : les zéros invariants et les zéros-système, le premier ensemble étant inclus dans le second. La définition des zéros-système [38] incite à penser que les zéros déterminés graphiquement sont les zéros-système. La problématique est alors la suivante : comment étendre les résultats précédents – théorèmes 3.15 et 3.16 – pour déterminer graphiquement le nombre de zéros-système nuls ? Comment identifier ceux d'entre eux qui sont des zéros invariants ?

Les résultats proposés dans cette section sont pour l'instant des perspectives, non encore démontrées de manière rigoureuse. Nous les présentons en trois phases. Nous définissons tout d'abord la notion de longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle – première phase. Nous proposons ensuite une procédure graphique de détermination des zéros-système – seconde phase. Cette procédure est enfin utilisée pour déterminer graphiquement le nombre des zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum(c_i, A, B)$ – troisième phase.

1. longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle

Si la matrice d'état A n'est pas inversible, la définition 3.7 -longueur d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle -n'est plus valable. Comme pour le modèle en causalité intégrale, nous introduisons donc la notion de longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle.

Définition 3.19 [3] : Soit un modèle bond-graph dont la matrice d'état A est quelconque. Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, S_e, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, D_e, D_f\}$. Soit N_d – respectivement N_i – le nombre d'éléments dynamiques en causalité dérivée – respectivement en causalité intégrale – traversés par ce chemin. La longueur généralisée de ce chemin vaut alors $(N_d - N_i)$, plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique.

Cette définition nous permet de généraliser la notion d'ordre du i^{me} zéro infini en ligne du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle.

Propriété 3.20 [3] : Soit un modèle bond-graph dont la matrice d'état A est quelconque. n_{id} l'ordre du i^{me} zéro infini en ligne du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. n_{id} est alors égal à la longueur généralisée du plus court chemin causal entre le i^{me} détecteur de sortie et l'ensemble des sources d'entrée du modèle en causalité dérivée préférentielle.

Cette propriété est à présent utilisée pour déterminer graphiquement le nombre de zéro-système nuls d'un modèle bond-graph.

2. Nombre de zéro-système nuls

Pour un modèle bond-graph monovariante, les zéros-système correspondent aux zéros invariants. Le nombre de zéro-système nuls est alors déterminé conformément à la propriété suivante.

Propriété 3.21 [3] : Soit n_{sz} le nombre de zéros-système nuls d'un modèle bond-graph monovariante. Soit q le nombre de ses pôles nuls. Soit n_d l'ordre du zéro infini du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. n_{sz} vérifie l'équation (3.18).

$$n_{sz} = n_d + q \quad (3.18)$$

Cette propriété est illustrée par l'application suivante.

Considérons le modèle bond-graph $BG1$, présenté en figure 3.11. Ce modèle possède une source d'entrée E , un détecteur de sortie D et deux éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

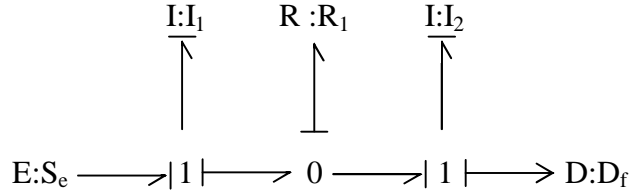


Figure 3.11 : *Modèle bond-graph BG1.*

Imposons à ce modèle une causalité dérivée. Le modèle ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit en *figure 3.12*.

Les deux éléments dynamiques de ce modèle ne peuvent pas être simultanément affectés d'une causalité dérivée : l'un d'entre eux conserve une causalité intégrale. Le rang de la matrice d'état du modèle *BG1* est donc égal à un – théorème 2.16. Ce modèle possède donc un pôle nul –

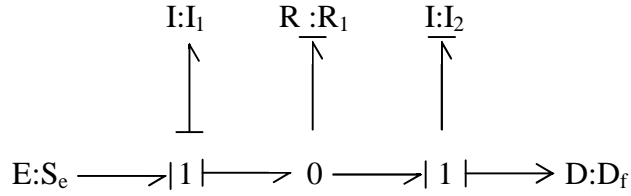


Figure 3.12 : *Modèle bond-graph BG1.*

propriété 2.17 : $q=1$.

Sur le modèle *BG2*, la longueur généralisée du plus court chemin causal entrée-sortie définit la valeur de l'entrée n_d : $n_d = -1$ -propriété 3.20. La propriété 3.21 permet alors d'affirmer que le modèle *BG1* ne possède aucun zéro invariant nul.

Cette propriété doit pouvoir être étendue pour l'étude des modèles multivariables. Dans ce cas, nous n'identifions plus le nombre de zéros-système nuls. A travers la propriété suivante, nous présentons ce résultat comme une intuition non encore validée effectivement.

Propriété 3.22 [3] : Soit n'_{sz} le nombre de zéros-système nuls d'un modèle bond-graph multivariables. Soit q le nombre de ses pôles nuls. Les ordres des zéros infinis globaux du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle sont enfin notés $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$. n'_{sz} vérifie alors l'équation (3.19).

$$n'_{sz} = q + \sum_{k=1}^p n'_{kd} \quad (3.19)$$

Rappelons que si le modèle possède autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie, l'entier n'_{sz} exprimé par la propriété 3.22 définit également le nombre de zéros invariants nuls du modèle. Signalons d'autre part que les propriétés 3.21 et 3.22 sont valables y compris dans le cas général où aucune représentation d'état n'existe pour décrire le modèle [3].

A l'aide de la propriété 3.22, nous proposons finalement une méthode graphique de calcul du nombre de zéros invariants nuls du modèle ligne commandable mais non observable $\sum(c_i, A, B)$.

3. Nombre de zéros invariants nuls en ligne

Conformément à la propriété 3.22, nous déterminons tout d'abord le nombre de zéros-système nuls du modèle $\sum(c_i, A, B)$. Il s'agit ensuite d'identifier, parmi ces zéros-système, ceux qui sont également des zéros invariants. A cet effet, nous utilisons la propriété suivante, corrélant les notions de zéro découplant et de zéro invariant.

Propriété 3.23 [48]: *Si un zéro découplant de sortie – mode non observable – peut être rendu zéro découplant d'entrée – mode non gouvernable – par injection de sortie, alors ce zéro découplant de sortie est un zéro invariant.*

Un zéro découplant de sortie qui peut être rendu zéro découplant d'entrée par injection de sortie est finalement identifié graphiquement par la propriété suivante.

Propriété 3.24 [3]: *Considérons le système ligne $\sum(c_i, A, B)$. Un zéro découplant de sortie peut être rendu zéro découplant d'entrée par injection de sortie si et seulement si, sur le modèle en causalité dérivée préférentielle, la dualisation du détecteur de sortie augmente le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.*

Une procédure tout à fait similaire – dualisation des sources d'entrée – doit permettre de déterminer le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle non commandable. Ce résultat serait par exemple utile pour l'étude du rejet de perturbations quand le modèle n'est pas commandable par les seules entrées de commande.

Nous illustrons à présents ces résultats à travers cette application.

3.2.6 Application

Dans cette section, nous calculons le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle bond-graph gouvernable mais non observable. Considérons le modèle bond-graph présenté en *figure* 3.13 et noté *BG1*. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Imposons à ce modèle la causalité dérivée. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit par la *figure* 3.14.

Sur ce modèle, deux éléments dynamiques conservent une causalité intégrale: I_1 et I_3 , par exemple. Le rang de la matrice d'état du modèle *BG1* est donc égal à quatre – théorème 2.16.

La dualisation des deux sources d'entrée du modèle *BG2* permet d'affecter à ces deux éléments dynamiques une causalité dérivée. Selon le théorème 2.20, le modèle *BG1* est structurellement gouvernable.

D'une manière similaire – dualisation des détecteurs de sortie – on montre que le rang de la matrice d'observabilité est égal à cinq – section 2.2.3. Le modèle *BG1* n'est pas observable: il possède un zéro découplant de sortie nul. En outre, ce zéro découplant de sortie nul est aussi un zéro invariant nul car le modèle *BG1* est carré.

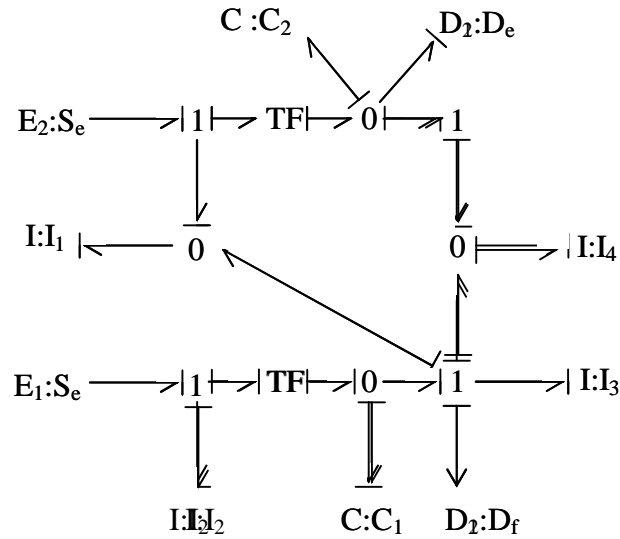


Figure 3.13 : *Modèle bond-graph BG2.*

Nous détaillons à présent le calcul du nombre des zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum(c_2, A, B)$. Ce calcul est réalisé en deux étapes. Nous déterminons d'abord le nombre de zéros-système nuls du modèle. Nous identifions ensuite ceux qui sont également des zéros invariants. Le modèle bond-graph associé au modèle $\sum(c_2, A, B)$ est obtenu en enlevant du modèle $BG1$ le détecteur de sortie D_f . Nous obtenons ainsi le modèle $BG3$ – *figure 3.15*.

Imposons à ce modèle la causalité dérivée. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté $BG4$. Il est décrit par la *figure 3.16*.

Le calcul du nombre des zéros-système nuls du modèle $BG3$ est réalisé conformément à la propriété 3.22.

Le rang de la matrice d'état du modèle $BG3$ est bien sûr toujours égal à quatre. Le modèle $BG3$ possède donc deux pôles nuls : $q=2$ – propriété 2.17.

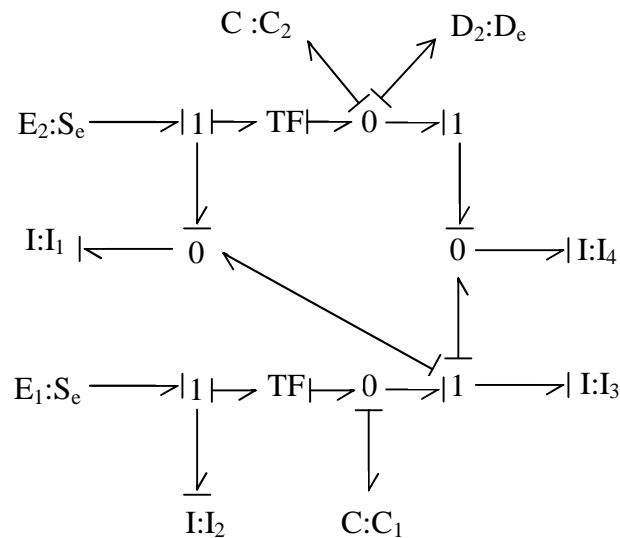


Figure 3.15 : *modèle bond-graph BG3.*

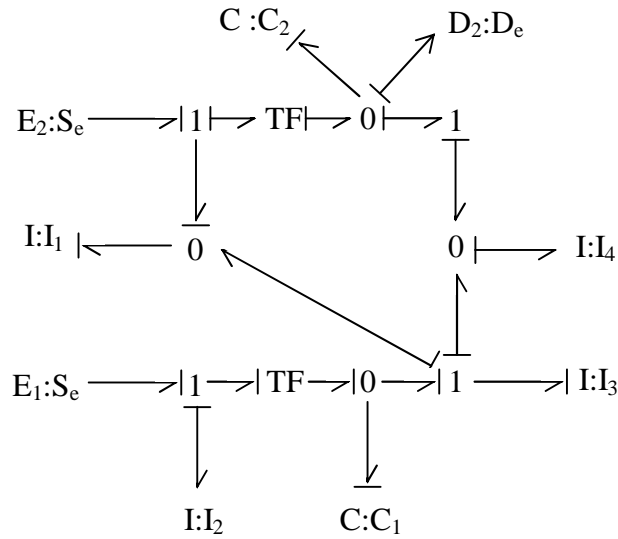


Figure 3.16 : Modèle bond-graph $BG4$.

D'autre part, l'entier n'_{2d} a pour valeur $n'_{2d} = 0$. En effet, sur le modèle $BG4$, l'un des plus courts chemins causaux de sortie D_2 vers L'ensemble des sources d'entrée est $D_2 \textcircled{R} I_4 \textcircled{R} I_3 \textcircled{R} E_2$ (E_1). La longueur généralisée de ce chemin vaut zéro - définition 3.19.

La propriété 3.22 permet par conséquent de déduire la conclusion suivante : le modèle $\mathcal{S}(c_2, A, B)$ possède deux zéros-système nuls. Ce sont ses deux zéros découplants de sortie nuls.

Nous déterminons à présent le nombre de zéros-système nuls qui sont également des zéros invariants. A cet effet, nous appliquons la propriété 3.24.

Sur le modèle $BG4$, la dualisation du détecteur de sortie D_2 n'impose une causalité intégrale qu'à un seul élément dynamique supplémentaire : l'élément I_4 . Parmi les deux zéros-système du modèle $\mathcal{S}(c_2, A, B)$, un seul est donc un zéro invariant. Ce modèle possède par conséquent un zéro invariant nul.

Une étude tout à fait identique permet finalement de montrer que le modèle $\mathcal{S}(c_1, A, B)$ possède un zéro-système nul, qui n'est cependant pas un zéro invariant.

3.3 Outils pour la commande

Dans cette partie, nous déterminons l'expression formelle de retours d'état statique réguliers $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ assurant le découplage entrée-sortie du modèle. Ces expressions sont obtenues grâce à l'utilisation conjointe de l'approche géométrique et du formalisme bond-graph.

Dans un contexte géométrique, synthétiser une loi de commande consiste tout d'abord à identifier des sous-espaces de l'espace d'état dont les propriétés sont adéquates pour l'objectif de commande visé [53]. Il s'agit ensuite d'en caractériser les expressions symboliques sous la forme la plus adaptée au calcul –simple- de la loi de commande.

Ainsi, nous rappelons dans un premier temps les techniques de synthèse sur lesquelles sont fondés nos travaux. Ces techniques sont dérivées de celles utilisées pour le rejet de perturbations. Elles reposent sur la notion centrale de sous-espace de découplage [8] [18]. Nous proposons en particulier deux choix de sous-espaces de découplage : $v_i^* = \text{sup} \ell(A, B; \ker c_i)$ puis

$\mathcal{V}_{istab}^* = \text{sup } \ell^-(A, B; \ker c_i)$ section 1.3.3. Nous rappelons les propriétés induites par les lois de commande correspondantes sur le modèle découplé.

Puis nous montrons comment le formalisme bond-graph permet de déterminer l'expression symbolique de ces sous-espaces de découplage. Dans cette optique, nous proposons des méthodes graphiques fondées sur les notions de longueur et gain de chemin causaux. Les expressions formelles obtenues sont directement utilisées pour calculer l'expression symbolique des lois de commande et de la matrice de transfert du modèle découplé.

Ces techniques sont finalement mises en œuvre sur une application.

3.3.1 Découplage et rejet de perturbations

Dans cette section, nous rappelons des techniques de calcul de retours d'état statiques réguliers pour le découplage entrée-sortie des systèmes carrés. Ces méthodes utilisent des outils géométriques. Elles sont dérivées de techniques de synthèse de lois de commande par rejet de perturbations pour les systèmes monovariabiles

Considérons le système monovariable décrit par l'équation (3.20), où $d(\cdot) \hat{\mathbf{I}} D \hat{\mathbf{I}} R^q$ représente le vecteur de perturbations.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (3.20)$$

Découpler la variable de sortie $y(t)$ du vecteur de perturbations $d(t)$ consiste à trouver une loi de commande qui rend la variable de sortie du système bouclé in affectée par le vecteur de perturbations. Cet objectif n'est réalisable que si le système en boucle ouverte satisfait certaines conditions. Des outils géométriques ont permis de caractériser simplement ces conditions. Elles sont rappelées par le théorème suivant

Théorème 3.25 [41] : *La variable de sortie $y(t)$ du système (3.20) peut être découplée du vecteur de perturbations $d(t)$ si et seulement si il existe un sous-espace (A, B) invariant D vérifiant l'équation (3.20). D est alors appelé sous-espace de découplage de la perturbation $d(t)$.*

$$\text{Im } E \hat{\mathbf{I}} D \hat{\mathbf{I}} \mathbf{n}^* \hat{\mathbf{I}} \ker c \quad (3.21)$$

Le plus grand sous-espace de découplage est $\mathcal{V}_i^* = \text{sup } \ell(A, B; \ker c_i)$ -Propriété 1.17. Tous, ou seulement certains de ces sous-espaces de découplage doivent être rendus $(A + BF)$ -invariants par le bouclage F utilisé pour réaliser le rejet de la perturbation -équation (3.22).

$$(A + BF) D \hat{\mathbf{I}} D \quad (3.22)$$

Ce rejet peut donc être effectué à condition que la perturbation soit contenue dans un espace caché de la sortie -équation (3.21). Sous l'action d'une loi de commande judicieusement choisie, cet espace est invariant -équation (3.22). La perturbation y restera donc «enfermée» et n'affectera pas la sortie du système bouclé.

Ce système bouclé est décrit par l'équation (3.23) où $\mathbf{n}(t)$ représente la variable d'entrée de consigne.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + B\mathbf{n}(t) + Ed(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

La matrice de retour d'état F est calculée conformément à la propriété suivante.

Propriété 3.26 [8] : *Considérons un système monovariante décrit par l'équation (3.20) et vérifiant le théorème 3.25. Soient $n_0 \geq 1$ l'ordre de son zéro infini. Les bouclages F qui rendent $(A + BF)$ -invariant tout sous-espace de découplage D sont calculés selon les équations (3.24).*

$$\begin{cases} cA^{(n_0-1)}(A + BF) = b \\ b.D = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Cette propriété définit le rôle essentiel du sous espace de découplage vis à vis des propriétés dynamiques du système bouclé. Ce lien est introduit par la matrice b . Selon les équations (3.24). La matrice b est une matrice ligne telle que le vecteur b^t est une combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace D^\wedge . Cette combinaison linéaire est exprimée via des paramètres qui seront les degrés de liberté introduits par la loi de commande dans le système bouclé. Conformément aux équations (3.24), le nombre de ces degrés de liberté est égal à $\dim D^\wedge$. Concevoir la structure de la loi de commande consiste par conséquent à trouver le sous-espace de découplage adapté aux caractéristiques dynamiques souhaitées en boucle fermée.

Selon le théorème 3.25 le plus grand sous-espace de découplage possible est le sous-espace $v_i^* = \sup \ell(A, B; \ker c_i)$ -propriété 1.17. Cette solution minimise le nombre de degrés de liberté apportés par la loi de commande -équations (3.24). De ce point de vue, une alternative plus intéressante peut être apportée par le sous-espace $v_{stab}^* \subset v^*$ propriété 1.20. Sous certaines conditions, ce sous-espace peut en effet être utilisé pour garantir la stabilité du système bouclé. Ce résultat est rappelé par le théorème suivant.

Théorème 3.27 [51] : *Supposons que le système (3.20) soit stabilisable. Sa variable de sortie $y(t)$ peut alors être découplée du vecteur de perturbations $d(t)$ tout en garantissant la stabilité du système bouclé si et seulement si l'équation (3.25) est vérifiée.*

$$Im E \subset v_{stab}^* \subset v^* \quad (3.25)$$

Utilisons dans ce cas le sous-espace v_{stab}^* comme support au calcul de la matrice de retour d'état F -propriété 3.26. Conformément aux notations définies en section 1.3.1, cette matrice F vérifie alors la propriété suivante.

Propriété 3.28 [8] : *Dans le cas monovariante, toute matrice de retour d'état F telle que $(A + BF)u_{stab}^* \subset u_{stab}^*$ vérifié l'équation (3.26).*

$$s(v_{stab}^* / A + BF / v_{stab}^*) \subset C_- \quad (3.26)$$

Remarque 3.29 : *À des fins didactiques, nous avons utilisé les théorèmes 3.25 et 3.27 dans un contexte monovariante. Ils sont en fait également valables pour des systèmes multivariante.*

Ces résultats relatifs au rejet de perturbation pour les systèmes monovariante sont à présent étendus aux systèmes multivariante carrés statiquement découplable. Une méthode est ainsi rappelée, permettant de déterminer l'expression formelle de lois de commande par découplage entrée-sortie.

Considérons le système multivariable décrit par l'équation (3.27). Ce système possède p variables d'entrées et p variables de sortie. De plus, il est supposé découplable par retour d'état statique régulier.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

Le système découplé par un retour d'état statique régulier $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ est décrit par l'équation (3.28), où $v(t)$ représente le vecteur d'entrées de consignes.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.28)$$

Notons $\bar{v}_i(t)$ le vecteur $v(t)$ privé de sa i^{me} composante. Notons également (BG) la i^{me} colonne de la matrice (BG) et E_i la matrice (BG) privé de sa i^{me} colonne. Décomposons ainsi le système (3.28) en p sous-systèmes monovariabiles $\sum (c_i, (A + BF), BG^i)$, pour chacun desquels le vecteur $\bar{v}_i(t)$ est vu comme un vecteur de perturbations -équation (3.29).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BG^i v_i(t) + E_i \bar{v}_i(t) \\ y_i(t) = c_i x(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Le système (3.28) étant découplé, la variable de sortie $y_i(t)$ du système (3.28) est découplé du vecteur de perturbations $\bar{v}_i(t)$ pour $i = 1, \dots, p$ simultanément. Le théorème 3.25 permet alors de déduire la propriété suivante.

Propriété 3.30 [18] [8] : *A chaque variable de sortie $y_i(t)$ du système découplé (3.28) sont associés des sous-espaces $(A + BF)$ invariant l'équation (3.30). Ces sous-espaces sont appelés sous-espaces de découplage associés à la variable de sortie $y_i(t)$.*

$$Im E_i \subset D_i \subset V_i^* \subset ker c_i, i = 1, \dots, p \quad (3.30)$$

Le plus grand sous-espace de découplage est $v_i^* = \sup \ell(A, B; ker c_i)$ section 1.3.3.

Ainsi pour les p sous-systèmes monovariabiles (3.29) simultanément, la loi de commande

$u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ construit la perturbation $\bar{v}_i(t)$ de telle sorte qu'elle soit incluse dans un sous-espace de découplage existant D_i - équation (3.30). Ce sous-espace est rendu $(A + BF)$ -invariant : la perturbation $\bar{v}_i(t)$ restera donc "enfermée".

Les propriétés 3.26 et 3.30 permettent par conséquent de déduire une règle de calcul des lois de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ découplant le système (3.27) cette règle est exprimée par la propriété suivante.

Propriété 3.31 [8] : Soit un système carré découplable par retour d'état statique régulier. Soient Ω sa matrice de découplage et $\{h_i\}$ sa structure à l'infini en ligne. Soit $\{D_i\}$ une famille de supports géométriques solution pour le problème du découplage. L'ensemble des matrices $\{F, G\}$ telles que la loi de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ découple le système est alors calculé selon les équations (3.31).

$$\begin{cases} b_i \cdot D_i = 0, i = 1, \dots, p \\ \mathbf{WF} = [b_i - c_i \mathcal{A}^{n_i}]_{i=1, \dots, p} \\ \mathbf{WG} = \text{diag}[g_i]_{i=1, \dots, p} \end{cases} \quad (3.31)$$

Cette propriété définit ainsi une méthode de calcul des matrices F et G à partir d'une famille de sous-espaces de découplage solution.

Les coefficients $g_i, i = 1, \dots, p$, sont des paramètres librement assignables, destinés à régler les gains statiques du système bouclé. D'autre part, comme dans le cas monovarié, chaque matrice ligne b_i est obtenue par combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace D_i^\perp . Elle introduit par conséquent dans la loi de commande un nombre de degrés de liberté égal à $\dim D_i^\perp$. Le choix des sous-espaces de découplage permet donc de fixer le nombre total de degrés de liberté introduits par la loi de commande. Il permet en particulier d'assurer la stabilité du système découplé, si le découplage avec stabilité est possible.

Nous utilisons dans ce cas deux ensembles de sous-espace plage : $\{v_1^*, \dots, v_p^*\}$ puis $\{v_{1stab}^*, \dots, v_{pstab}^*\}$. Ces stratégies déterminent les propriétés dynamiques du système découplé, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 3.32 [51] [30] : Considérons un système carré, gouvernable et découplable par retour d'état statique régulier. En choisissant $\{v_1^*, \dots, v_p^*\}$ comme ensemble de sous-espace de découplage, les modes non assignables du système découplé sont tous les zéros invariants du système en boucle ouverte. Supposons de plus que le découplage avec stabilité soit possible. En choisissant $\{v_{1stab}^*, \dots, v_{pstab}^*\}$ comme ensemble de sous-espaces de découplage, les modes non assignables du système découplé sont alors tous les zéros invariants strictement stables du système en boucle ouverte.

Selon la propriété 3.31 pour calculer la loi de commande associée à une famille de sous-espaces de découplage $\{D_1, \dots, D_p\}$ il faut connaître l'expression formelle des sous-espaces $\{D_1^\perp, \dots, D_p^\perp\}$. Nous montrons dans la section suivante, comment le formalisme bond-graph permet d'établir graphiquement l'expression symbolique des bases des sous-espaces $v_i^{*\perp}$ et $v_{istab}^{*\perp}$.

3.3.2 Sous-espaces de découplage

Dans cette section, nous calculons l'expression formelle des bases des sous-espaces $v_i^{*\perp}$ et $v_{istab}^{*\perp}$. Ces expressions sont déduites de l'étude des modèles bond-graph en causalités intégrale et dérivée.

Les modèles bond-graph étudiés sont de rang plein – théorème 2.16. De plus en causalité intégrale préférentielle, tous leurs éléments dynamiques sont affectés d'une causalité intégrale.

L'équation (1.31) donne l'expression d'une base du sous-espace $v_i^{*\perp}$ cette expression est rappelée par l'équation (3.32) où n_i est l'ordre du zéro infini associé à la variable de sortie $y_i(t)$.

$$v_i^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-1})^t \right\} \quad n_i \geq 1 \quad (3.32)$$

L'expression formelle de chaque vecteur de cette base est obtenue par l'étude du modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle. Notons en effet X^j le j^{me} vecteur de base de l'espace d'état. Notons également D_i le i^{me} détecteur de sortie du modèle bond-graph en causalité intégrale et DE_j son j^{me} élément dynamique en causalité intégrale. Le gain de cet élément est noté $g(DE_j)$. Il

vaut $\frac{1}{I}$ pour un élément I et $\frac{1}{C}$ pour un élément C . Nous pouvons alors rappeler la propriété suivante.

Propriété 3.34 [36] : Pour $k \geq 0$, $[c_i A^k] X^j = \sum G_k(DE_j, D_i) \times g(DE_j)$ où $G_k(DE_j, D_i)$ est le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur k entre l'élément dynamique DE_j et le détecteur de sortie D_i .

La j^{me} composante du vecteur $(c_i A^k)^t$, $k = 0, \dots, n_i-1$ exprimé par l'équation (3.32), est égale au coefficient $[c_i A^k] X^j$. Son expression formelle est donc déterminée, sur le modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle, conformément à la propriété 3.34.

Considérons à présent le modèle bond-graph affecté d'une causalité dérivée préférentielle. Otons de ce modèle tous les détecteurs de sortie sauf le i^{me} . Le modèle bond-graph obtenu est noté BGD_i -section 3.2.3. La représentation mathématique qui lui est associée est donnée par les équations (3.33).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1} B u(t) \\ y_i(t) = c_i A^{-1} \dot{x}(t) - c_i A^{-1} B u(t) \end{cases} \quad (3.33)$$

Soit n_{id} l'ordre du zéro infini associé au modèle bond-graph BGD_i -propriété 3.11. A l'aide de cet entier, nous définissons le sous-espace $V_{id}^{*\perp}$, dont une base est donnée par l'équation (3.34).

$$V_{id}^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i A^{-1})^t, \dots, (c_i A^{-n_{id}})^t \right\} \quad n_{id} \geq 1 \quad (3.34)$$

L'expression formelle de chaque vecteur de cette base est obtenue par l'étude du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i . Notons en effet \tilde{X}^j le j^{me} vecteur de base de l'espace "d'état" associé au modèle BGD_i -section 2.2.2. DE_{jd} représente son j^{me} élément dynamique en causalité dérivée et D_i son i^{me} détecteur de sortie. L'expression de $y_i(t)$ donnée par les équations (3.33) permet de déduire de manière immédiate la propriété suivante.

Propriété 3.35 [2]: Pour $k \geq 1$, $[c_i A^{-k}] \tilde{X}^j = \sum G_{k-1}(DE_{jd}, D_i)$ où le coefficient $G_{k-1}(DE_{jd}, D_i)$ représente, sur le modèle bond-graph BGD_i , la terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k-1)$ entre l'élément dynamique DE_{jd} et le détecteur de sortie D_i .

La j^{me} composant du vecteur $(c_i A^{-k})^t$, $k = 1, \dots, n_{id}$, exprimé par l'équation (3.34), est égale au coefficient $[c_i A^{-k}] \tilde{X}^j$. Son expression formelle est donc déterminée, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i , conformément à la propriété 3.35.

Comme le montrent les propriétés 3.34 et 3.35 les sous-espaces $V_i^{*\perp}$ et $V_{id}^{*\perp}$ sont calculés, sur les modèles bond-graph en causalités intégrale et dérivée par un algorithme. Identique. Conformément aux équations (3.32) et (3.34) ils vérifient d'autre part la propriété suivante.

Propriété 3.36 [2] : Les dimensions des sous-espaces $v_i^{*\perp}$ et $v_{id}^{*\perp}$ vérifient les équations (3.35).

$$\begin{cases} \dim(v_i^{*\perp}) = n_i \\ \dim(v_{id}^{*\perp}) = n_{id} \end{cases} \quad (3.35)$$

Dans le cas où sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, une base du sous-système $v_{istab}^{*\perp}$ est finalement exprimée à partir des bases des sous-espaces $v_i^{*\perp}$ et $v_{id}^{*\perp}$. Cette expression est donnée par la propriété suivante.

Propriété 3.37 : Si le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, une base du sous-espace $v_{istab}^{*\perp}$ est exprimée en fonction des sous-espaces $v_i^{*\perp}$ et $v_{id}^{*\perp}$ conformément à l'équation (3.36).

$$v_{istab}^{*\perp} = v_i^{*\perp} \oplus v_{id}^{*\perp} \quad (3.36)$$

La propriété 3.37 appelle quelques commentaires. Si le modèle global ne possède pas de zéros invariants strictement instables, les modèles en ligne n'en possèdent pas non plus. Dans ce cas, si une solution stable existe -théorème 3.17- un retour d'état calculé à partir des sous-espaces $v_{istab}^{*\perp}$ propriétés 3.32, 3.31 et 3.37 permet de rendre le modèle découplé stable : les sous-espaces $v_{id}^{*\perp}$ ont apporté les degrés de liberté nécessaire pour éliminer de l'ensemble des modes non assignables en boucle fermée, les zéros invariants nuls globaux.

Par contre, si le modèle global possède des zéros invariants strictement instables, un modèle découplé stable ne peut être obtenu que si ces zéros invariants strictement instables sont aussi zéros invariants des modèles en ligne. Dans ce cas, il doit exister un ensemble de sous-espaces $\{J_p, \dots, J_p\}$ permettant d'apporter le nombre de degrés de liberté nécessaire pour éliminer, de l'ensemble des modes non assignables en boucle fermée, les zéros invariants globaux strictement instables. Une intuition nous incite à penser que les sous-espaces de découpage $V_{istab}^*, i = 1, \dots, p$ pourraient alors vérifier l'équation (3.37).

$$V_{istab}^* = V_i^{*\perp} \oplus V_{id}^{*\perp} \oplus J_i^\perp \quad (3.37)$$

Dans cette équation, les sous-espaces $(J_i^\perp, \dots, J_p^\perp)$ caractérisent les zéros invariants strictement instables des modèles en ligne au même titre que les sous-espaces $(v_{id}^{*\perp}, \dots, v_{pd}^{*\perp})$ en caractérisent les zéros invariants nuls -théorème 3.15 et propriété 3.36. Le formalisme bond-graph ne permet malheureusement pas encore de valider cette intuition.

3.3.3 Application

Dans cette section, nous illustrons par une application les techniques de calcul de lois de commande présentées dans la section précédente.

Cette application est traitée en deux étapes. Dans un premier temps, nous choisissons comme sous-espace de découplage les deux sous-espaces $\{v_i^*\}_{i=1,\dots,p}$. Le modèle découplé ainsi obtenu est instable –phase1. Nous calculons donc une seconde loi de commande, utilisant comme supports géométriques les sous-espaces $\{v_{istab}^*\}_{i=1,\dots,p}$. Le modèle découplé obtenu est ainsi rendu stable –phase2.

Le modèle bond-graph présenté dans cette section est identique à celui étudié en section 3.2.4. Ce modèle est décrit par la *figure* 3.17 et noté *BG1*. Il possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

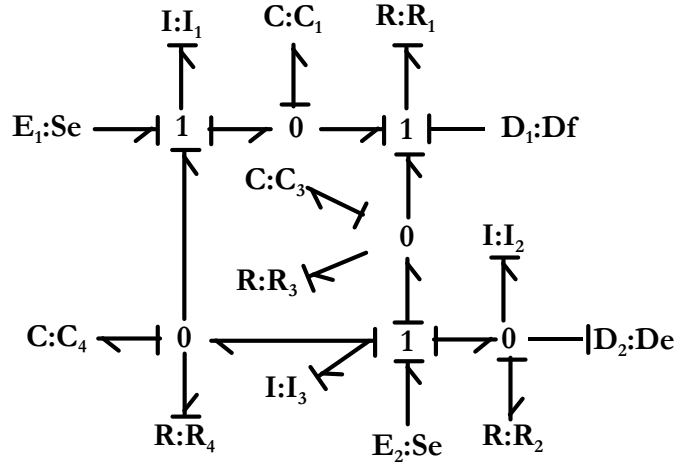


Figure 3.17 : Modèle bond-graph BG1.

Le vecteur d'état associé à ce modèle est par conséquent donné par l'équation (3.38) –section 2.2.1

$$x(t) = [P_{i_1}(t) P_{i_2}(t) P_{i_3}(t) q_{c_1}(t) q_{c_3}(t) q_{c_4}(t)]^T \quad (3.38)$$

Le modèle bond-graph *BG1* est de rang plein -théorème 2.16- et découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier -théorème 3.17. Il possède de plus trois zéros invariants, dont les

expressions sont $s = 0$, $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$ -section 3.2.4.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques du modèle bond-graph *BG1*. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit par la *figure* 3.18.

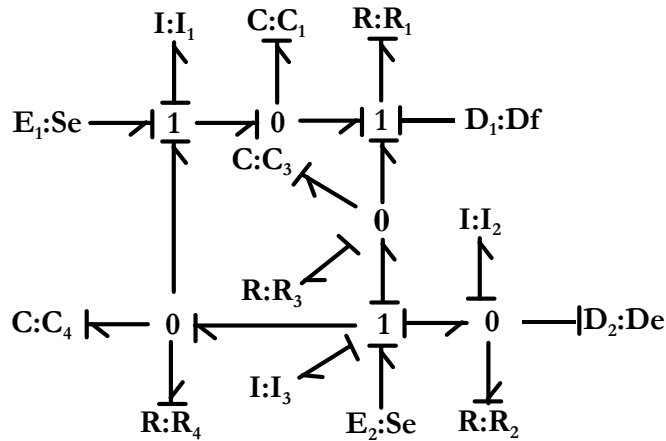


Figure 3.18 : Modèle bond-graph BG2.

Phase 1 : découplage par les sous-espaces (v_1^*, v_2^*)

Les ordres des zéros infinis en ligne du modèle bond-graph $BG1$ valent respectivement $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$ -propriété 3.26. Conformément à l'équation (3.32) les sous-espaces $(v_1^{*\perp}, v_2^{*\perp})$ vérifiant par conséquent l'équation (3.39).

$$\begin{cases} v_1^{*\perp} = \text{vect}\{(c_1)^t, (c_1 A)^t\} \\ v_2^{*\perp} = \text{vect}\{(c_2)^t\} \end{cases} \quad (3.39)$$

Nous détaillons le calcul de la base du sous-espaces $v_i^{*\perp}$. Ce calcul est réalisé en appliquant la propriété 3.34 au modèle bond-graph $BG1$.

L'expression symbolique du vecteur $(c_1)^t$ est obtenue par l'étude de chemins causaux de longueur zéro des éléments dynamiques en causalité intégrale vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins causaux n'existent qu'à partir des éléments dynamique C_1 et C_3 ; ce sont les chemins

$C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $C_3 \rightarrow R_3 \rightarrow D_1$. Les gains de ces chemins sont tous les deux égaux à $\frac{1}{R_1}$ -définition 2.7. Conformément à la propriété 3.34, le vecteur $(c_1)^t$ a donc pour expression –équation (3.40) :

$$(c_1)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Selon cette même propriété, l'expression symbolique du vecteur $(c_1 A)^t$ est obtenue par l'étude des chemins causaux de longueur un des éléments dynamique en causalité intégrale vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins causaux n'existent qu'à partir des éléments dynamiques I_1, I_3, C_1 et C_3 .

Examinons par exemple les chemins causaux de longueur un allant de l'élément dynamique C_1 vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins sont $C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow R_3 \rightarrow D_1$.

Leurs gains valent respectivement $\frac{-1}{R_1^2 C_1}$ et $\frac{-1}{R_1^2 C_3}$. Soit X^t le quatrième vecteur de base de l'espace d'état –équation (3.38). Conformément à la propriété 3.34, le coefficient $[c_1 A]X^t$ a donc pour expression – équation (3.41).

$$[c_1 A]X^t = \frac{-1}{R_1 C_1} \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} \right) \quad (3.41)$$

Nous calculons ainsi l'expression symbolique de chaque composante du vecteur $(c_1 A)^t$. Nous en déduisons l'expression d'une base du sous-espace $v_i^{*\perp}$ équation (3.42).

$$v_1^{*\perp} = \text{vect} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} \frac{-1}{R_1 C_3} \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} \right) \\ \frac{1}{R_1 C_3} \frac{-1}{R_1 C_3} \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} \frac{1}{R_3 C_3} \right) \\ 0 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

De la même manière, nous déterminons l'expression symbolique d'une base du sous-espace $v_2^{*\perp}$ équation (3.43).

$$v_2^{*\perp} = \text{vect} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -R_2 \\ I_2 \\ \frac{R_2}{I_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Puis, à partir des équations (3.42) et (3.43), nous calculons l'expression formelle de la loi de commande utilisant les sous-espaces (v_1^*, v_2^*) comme sous-espaces de découplage. Ce calcul est réalisé conformément à la propriété 3.31.

Les sous-espaces $\{v_1^*, v_2^*\}$ vérifient l'équation (3.44).

$$\dim(v_1^{*\perp}) + \dim(v_2^{*\perp}) = 3 \quad (3.44)$$

Nous savons donc, avant d'effectuer tout calcul, que ce choix de sous-espaces de découplage apporte trois degrés de liberté en boucle fermée – propriété 3.31. Ces trois degrés de liberté serviront à assigner trois des pôles du système découplé. Le modèle étant d'ordre six, trois pôles du système bouclé ne pourront donc pas être assignés librement. Ces trois pôles sont les trois zéros invariants du modèle bond-graph en boucle ouverte *BG1* -propriété 3.32.

La matrice ligne b_i utilisée pour le calcul, $i=1, 2$, est obtenue par combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace $v_i^{*\perp}$, $i=1, 2$, -propriété 3.31, équations (3.42) et (3.43). De ce calcul est déduite l'expression formelle de la matrice de transfert $T_{BF}(s)$ en boucle fermée. Cette expression est donnée par l'équation (3.45).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{(s^2 - p_1^1 s - p_0^1)} & 0 \\ 0 & \frac{g_2}{(s - p_0^2)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Cette matrice est diagonale. De plus, comme prévu, elle est d'ordre trois. Les coefficients g_1 et g_2 sont des paramètres introduits par la loi de commande pour régler les gains statiques du système bouclé. Les coefficients p_0^1 , p_1^1 et p_0^2 sont les règles de liberté introduites dans la loi de commande respectivement par les sous-espaces de découplage v_1^* et v_2^* -propriété 3.31.

D'autre part, l'expression formelle du polynôme caractéristique en boucle fermée $P_{BF}(s)$ est donnée par l'équation (3.46).

$$P_{BF}(s) = s \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(s + \frac{1}{R_4 C_4} \right) (s - p_0^2) (s^2 - p_1^1 s - p_0^1) \quad (3.46)$$

Cette équation confirme le fait que les trois modes non assignables du modèle découplé sont les trois zéros invariants du modèle bond-graph en boucle ouverte $BG1$. L'un d'entre eux étant nul, le modèle découplé est instable. Nous calculons par conséquent une seconde loi de commande, destinée à assurer la stabilité du modèle découplé.

Phase 2 : découplage par les sous-espaces $\{v_{1stab}^*, v_{2stab}^*\}$.

Le modèle bond-graph $BG1$ est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier – section 3.2.4. Selon la propriété 3.32, les sous-espaces $\{v_{1stab}^*, v_{2stab}^*\}$ sont donc des supports géométriques garantissant la stabilité du modèle découplé. D'autre part, le modèle $BG1$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable. Les sous-espaces de découplage $\{v_{1stab}^*, v_{2stab}^*\}$ peuvent donc être calculés conformément à la propriété 3.37.

Les ordres des zéros infinis du modèle bond-graph $BG2$ ont respectivement pour valeurs $n_{1d} = 0$ et $n_{2d} = 1$ -propriété 3.11. Selon l'équation (3.34). Une base des sous-espaces $v_{1d}^{*\perp}$ et $v_{2d}^{*\perp}$ est donc donnée par l'équation (3.47).

$$\begin{cases} V_{1d}^{*\perp} = 0 \\ V_{2d}^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_2 A^{-1})^y \right\} \end{cases} \quad (3.47)$$

L'expression symbolique de la base du sous-espace $v_{2d}^{*\perp}$ est calculée en appliquant la propriété 3.35 au modèle bond-graph $BG2$. Cette propriété indique en effet que l'expression formelle du vecteur $(c_2 A^{-1})^y$ est obtenue par l'étude des chemins causaux de longueur zéro des éléments dynamiques en causalité dérivée vers le détecteur de sortie D_2 . Un tel chemin causal n'existe qu'à partir de l'élément dynamique I_2 . Il rejoint directement le détecteur de sortie D_2 . Le gain de ce chemin causal vaut $+1$ -section 3.2.3. Conformément à la propriété 3.35, le vecteur $(c_2 A^{-1})^y$ a donc pour expression –équation (3.48).

$$(c_2 A^{-1})^y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.48)$$

L'expression d'une base du sous-espace $v_{2d}^{*\perp}$ est donc donnée par l'équation (3.49).

$$v_{2d}^{*\perp} = vect \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

La propriété 3.37 et l'équation (3.47) nous permettent donc de déduire l'équation (3.50)

$$v_{1stab}^{*\perp} = v_1^{*\perp} \quad (3.50)$$

De plus, compte tenu des équations (3.43) et (3.49), nous pouvons également écrire – équation (3.51) :

$$v_{2stab}^{*\perp} = vect \begin{cases} 0 & 0 \\ -\frac{R_2}{I_2} & 1 \\ \frac{R_2}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

A partir de ces équations, nous calculons l'expression formelle de la loi de commande utilisant les sous-espaces $\{v_{1stab}^*, v_{2stab}^*\}$ comme sous-espaces de découplage -propriété 3.31. Ces sous-espaces vérifiant l'équation (3.52).

$$dim(v_{1stab}^{*\perp}) + dim(v_{2stab}^{*\perp}) = 4 \quad (3.52)$$

La propriété 3.31 permet donc de déduire que ce choix de sous-espaces de découplage apporte quatre degrés de liberté. Par rapport à la solution de commande précédente, nous disposerons donc d'un degré de liberté supplémentaire – équation (3.44). Ce degré de liberté est introduit par le sous-espace $v_{2d}^{*\perp}$. Il permet de rendre observable et gouvernable le mode nul en boucle fermée générée par la solution de commande précédente. Les modes non assignables du nouveau modèle

découplé seront donc les deux zéros invariants strictement stables $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$ du modèle bond-graph en boucle ouverte *BG1* -propriété 3.32.

La loi de commande est calculée à partir des matrices lignes h_1 et h_2 , obtenues par combinaison linéaire des vecteurs de base des sous-espaces respectifs $v_{1stab}^{*\perp}$ et $v_{2stab}^{*\perp}$ -propriété 3.31, équation (3.50) et (3.51). Nous en déduisons l'expression formelle de la nouvelle matrice de transfert en boucle fermée $T_{BF}(s)$. Cette expression est donnée par l'équation (3.53).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{(s^2 - p_1' s - p_0')} & 0 \\ 0 & \frac{g_2 s}{(s^2 - p_1^2 s - p_d^2)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Cette matrice est diagonale et, comme prévu, d'ordre quatre. Le degré de liberté supplémentaire apporté par rapport à la solution de commande précédente – équation (3.45) – est le coefficient p_d^2 . Remarquons que le mode nul en boucle fermée qu'il permet de rendre observable et gouvernable devient un zéro de la fonction de transfert correspondante – équation (3.53).

L'expression symbolique du nouveau polynôme caractéristique en boucle fermée est donnée par l'équation (3.54).

$$P_{BF}(s) = s \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(s + \frac{1}{R_4 C_4} \right) (s^2 - p_0^2 s - p_d^2) (s^2 - p_1' s - p_0') \quad (3.54)$$

Cette équation montre que seuls modes non assignables du modèle découplé sont désormais les deux zéros invariants strictement stables du modèle bond-graph en boucle ouverte BG1. Le modèle découplé est donc à présent stable.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre sont exposés nos résultats concernant le découplage entrée-sortie des modèles bond-graph possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie.

Nous avons tout d'abord présenté des méthodes graphiques d'analyse destinées à apporter une réponse à la question suivante : existe-t-il un retour d'état statique régulier permettant de concevoir un modèle découplé stable ? Répondre à cette question nécessite de connaître la structure des zéros invariants du modèle. Nous avons caractérisé cette structure grâce à des procédures applicables aux modèles dont la matrice d'état est de rang quelconque -sections 3.2.1 et 3.2.5- ou seulement de rang plein – section 3.2.3.

A partir de supports géométriques, nous avons ensuite proposé des méthodes graphiques de synthèse de lois de commande. En particulier, nous avons déterminé l'expression formelle de retours d'état statique réguliers assurant à la fois la non interaction et la stabilité du modèle bouclé, quand le problème est soluble. Ces méthodes sont applicables aux modèles dont la matrice d'état est de rang plein.

Chapitre IV

Application

Dans ce chapitre, nous illustrons certaines des procédures présentées au cours des chapitres précédents. Il s'agit en particulier de montrer comment le formalisme bond-graph permet d'orienter la conception d'une architecture de commande dans un objectif de contrôle donné.

Nous nous intéressons à des modèles de distillation, pour lesquels l'objectif est de contrôler chaque variable séparément. Ces modèles décrivent un procédé très utilisé dans l'industrie qui permet de séparer les constituants d'un mélange, en se basant sur le fait que leurs températures d'ébullition sont différentes.

Nous présentons tout d'abord le modèle multivariable considéré, en suite on présente les modèles bond-graphs de chaque sous-système constituant la colonne de distillation. Nous étudions alors le modèle simplifié associé en particulier aux trois aspects majeurs de modèle de la distillation hydraulique, thermique et chimique. A partir de ce modèle, nous construisons des lois de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie de certains variables de perturbation d'entrée. Nous présentons enfin des résultats de simulation donnent le sens physique de notre étude.

4.1 Description du processus

Dans cette partie, nous présentons brièvement trois modèles multivariables du process. Le schéma de principe est décrit par la *figure 4.1*.

La colonne de distillation montrée sur le schéma (*figure 4.1*) est une colonne simple et typique destinée pour la séparation de deux produits [41]. La colonne a 40 plateaux théoriques et sépare un mélange binaire avec la volatilité relative de 1,5 dans des produits de la pureté 99%. Il est relativement facile de changer les paramètres des modèles et de simuler une autre colonne.

La notation la plus importante est récapitulée dans le tableau 4.1. Nous employons l'index i pour noter le nombre de plateau, et nous numérotions les plateaux du fond ($i = 1$) jusqu'au haut ($i = N_{tot}$) de la colonne. On note par B le résidu inférieur de produit et par D le distillat. Nous employons l'index j pour noter les composants; $j = L$ se rapporte au composant léger, et à $j = H$ au composant lourd. Souvent il n'y a aucun index composant, puis ceci se rapporte habituellement au composant léger.

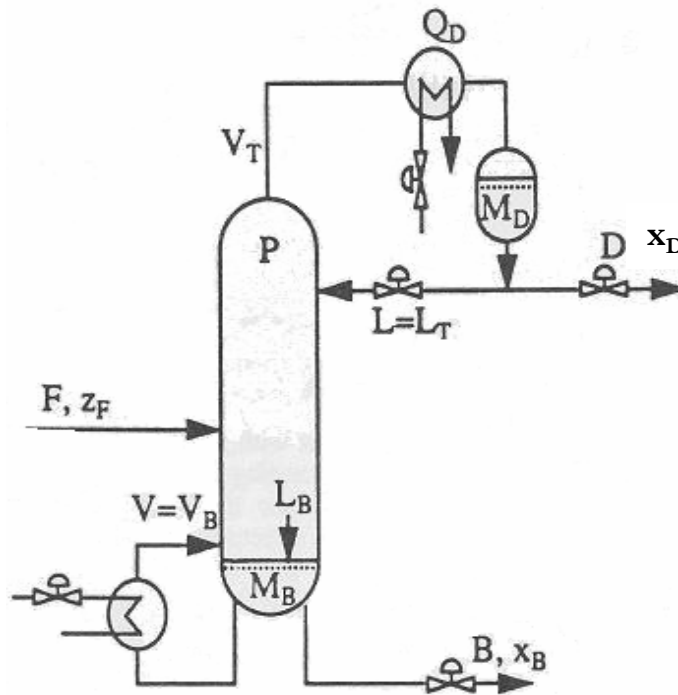


Figure 4.1 : Colonne de distillation typique.

Paramètre	Désignation	Unité
F	Débit d'alimentation	[Kmol/min]
z_F	Composition d'alimentation	[mole fraction]
q_F	fraction de liquide en alimentation	1
D et B	Flux d'acheminement de distillat et de résidu	[kmol/min]
x_D et x_B	Composition de distillat et de résidu	[Kmol/min]
$L=L_T=L_N$	Débit de reflux	[Kmol/min]
$V=V_B=V_I$	Débit de la vapeur injectée	[Kmol/min]
N	Le numéro théorique des plateaux comprenant le rebouilleur	
$N_{tot}=N+1$	Le nombre total des plateaux comprenant le condenseur	
I	Plateau n°. (1=fond, N_F =plateau d'alimentation)	
L_i et V_i	Débit de liquide et de vapeur de plateau i	[Kmol/min]
x_i et y_i	Composition de liquide et de vapeur dans le plateau i	[mole fraction]
a	le coefficient de volatilité relative entre les composants léger et lourd	
t_L	Constante de temps de flux dynamique de liquide en chaque plateau	[min]

Tableau 4.1 : Notation.

4.2 Modèles de la colonne de distillation

4.2.1 Hypothèses de modélisation

Nous allons modéliser l'échange énergétique dans la colonne dans ses trois formes : énergie hydraulique, modèle chimique et l'énergie thermique. Les hypothèses de modélisation adoptées sont les suivantes :

- L'eau et la vapeur sont saturées. Les propriétés thermodynamiques sont calculées en équilibre thermodynamique (justifié par le fait qu'il se produit une bonne homogénéisation de l'écoulement eau – vapeur),
- Les pressions, températures et potentiels chimiques du liquide et de la vapeur sont toujours identiques,
- Le coefficient de volatilité relative est constant. Dans ce cas, l'équilibre vapeur-liquide entre n'importe quels deux composants est donné par [41] :

$$\mathbf{a} = \frac{y_L/x_L}{y_H/x_H} = \frac{y_L/y_H}{x_L/x_H} \quad (4.1)$$

Où α est indépendant de la composition (et pratiquement aussi de la pression). Cette hypothèse se tient bien pour la séparation des composants semblables, par exemple, pour des alcools ou pour des hydrocarbures. Évidemment, cette hypothèse ne se tient pas pour les mélanges non idéaux tels que des azéotropes. Pour *les mélanges binaires* (4.1) revient :

$$\mathbf{a} = \frac{y/(1-y)}{x/(1-x)} \Rightarrow y = \frac{\mathbf{a}x}{1+(\mathbf{a}-1)x} \quad (4.2)$$

- Débit molaire constant. Dans ce cas, les débits molaires du liquide et vapeur au long de la colonne ne varient pas d'un plateau à l'autre, c à d, s'il n'y a aucun enlèvement de matière entre le plateau i et $i+1$, alors l'équilibre

$$L_i = L_{i+1}, \quad V_i = V_{i+1} \quad (4.3)$$

Encore, cette hypothèse tient habituellement bien pour les composants semblables si leurs températures de la vaporisation ne diffèrent pas trop,

- Le mélange est à une pression uniforme i.e. on néglige l'effet des tensions superficielles des bulles de la vapeur d'eau,
- La colonne de distillation a une capacité thermique et subit des pertes par conduction vers l'extérieur.

4.2.2 Modèle classique

Les équations d'équilibre et de transfert de chaleur, sont utilisées dans la modélisation de cette colonne de distillation. Le modèle classique est constitué par des équations différentielles qui représentent les différentes étapes de fonctionnement de la colonne [35].

Le système d'équation qui représente les opérations de la colonne de distillation est :

- *Condenseur :*

$$\dot{x} = \frac{(y_n - x_d)v_r}{M_r} \quad (4.4)$$

- *Au niveau des plateaux :*

$$\dot{x}_n = \frac{1}{M_n} [L_r(x_d - x_n) + V_r(y_{n-1} - y_n)] \quad (4.5)$$

- *Au niveau du plateau d'alimentation :*

$$\dot{x} = \frac{1}{M_f} [L_r x_{f+1} + L_s x_f + V_s v_{f-1} - V_s v_f + F_{\alpha_r}] \quad (4.6)$$

- *Au niveau de la section d'épuisement :*

$$\dot{x} = \frac{1}{M_i} (L_s (x_{i+1} - x_i) + V_s (v_{i-1} - v_i)) \quad (4.7)$$

- *Au niveau de rebouilleur :*

$$\dot{x}_b = \frac{1}{M_0} [L_s x_1 - B x_b - V_s y_b] \quad (4.8)$$

$$\dot{P}_c = \left(\frac{1.123}{V_c} \right) (Q_{ss} - Q_c) \quad (4.10)$$

$$\dot{V}_s = \frac{U_0 A_0}{I_0 M_w C_{pw}} [q_c - q_0 - M_w C_{pw} \frac{\partial T_0}{\partial x_b} \dot{x}_b] \quad (4.9)$$

$$y_n = \frac{\mathbf{a} x_n}{1 + (\mathbf{a} - 1) x_n} \quad (4.10)$$

D'un point de vue commande, une colonne de distillation binaire avec une alimentation donnée, a cinq degrés de liberté (cinq débits être ajustés; L , V , V_T , D et B). À l'état d'équilibre, la pression est considérée constante et les niveaux dans le condenseur et le rebouilleur sont contrôlés parfaitement. Ce qui ramène le nombre de degrés de liberté à deux. En l'occurrence les deux compositions en haut et en bas x_D et x_B (ou un autre indicateur de composition, comme la température de plateau).

L'effet de petits changements des deux degrés de liberté restants peut être obtenu en linéarisant le modèle. Par exemple, avec " LV -configuration " nous avons L et V comme degrés de liberté (variables indépendantes), et nous pouvons écrire à l'équilibre

$$dx_D = g_{11} dL + g_{12} dV \quad (4.11)$$

$$dx_B = g_{21} dL + g_{22} dV \quad (4.12)$$

Où $g_{11} = (\partial x_D / \partial L)_V$ représente l'effet des petites variations dans L sur x_D avec V constant, etc. dans la forme des matrices nous écrivons

$$\begin{pmatrix} dx_D \\ dx_B \end{pmatrix} = G^{LV} \begin{pmatrix} dL \\ dV \end{pmatrix}, \quad G^{LV} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

le modèle mathématique de cette colonne est donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

tel que

$$X = \begin{bmatrix} x_D \\ x_B \end{bmatrix}; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{x}_B \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0051 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0737 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1829 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4620 & 0.9895 \\ 0 & 0 & 0 & -0.9895 & -0.4620 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.6290 & 0.624 \\ 0.0550 & -0.1720 \\ 0.0300 & -0.1080 \\ -0.1860 & -0.1390 \\ -1.2300 & -0.0560 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.7223 & -0.5170 & 0.3386 & -0.0163 & 0.1121 \\ -0.8913 & 0.4728 & 0.9876 & 0.8425 & 0.2186 \end{bmatrix}$$

4.2.2.1 Simulation

Nous présentons ici les résultats de simulation pour la colonne à partir de son modèle classique. Les réponses transitoires de x_D et x_B par rapport à un changement dans le débit d'alimentation en boucle ouverte sont données par la *figure 4.2*.

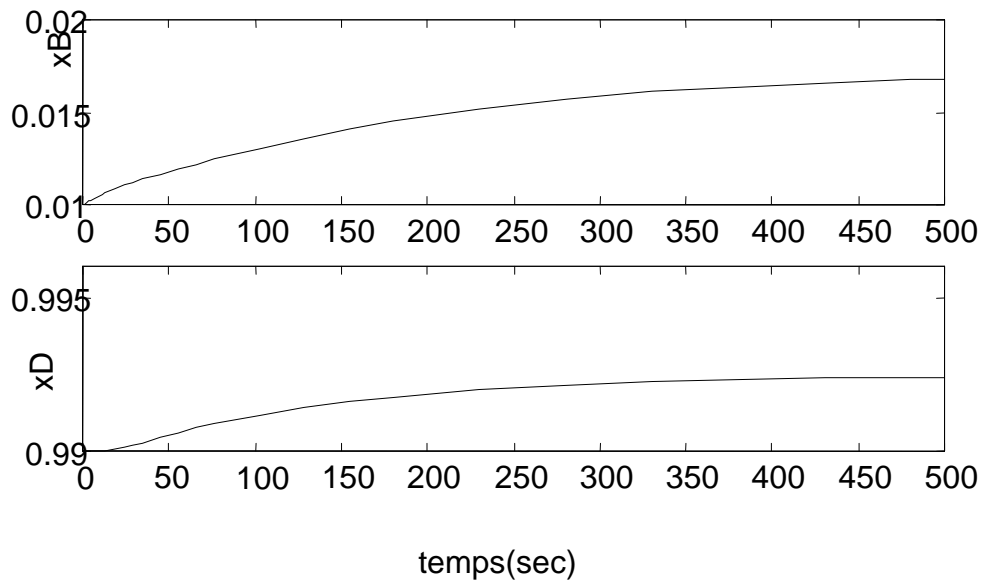


Figure 4.2 : *Composition de distillat et de résidu.*

4.2.3 La non linéarité

Pour des petites variations, le modèle linéaire et le modèle non-linéaire donne la même réponse, par contre pour des variations importantes la différence est remarquable.

La *figure 4.3* représente la réponse de la composition du distillat en variant L , la variable V est constante. En comparant la réponse linéaire (ligne discontinue) avec celles non-linéaire pour des changements allant de 0.01% à 50% (ligne continue). Pour un temps de simulation de 30 min, on constate qu'effectivement pour des petits changements autour d'un régime de fonctionnement, le comportement de notre système est linéaire.

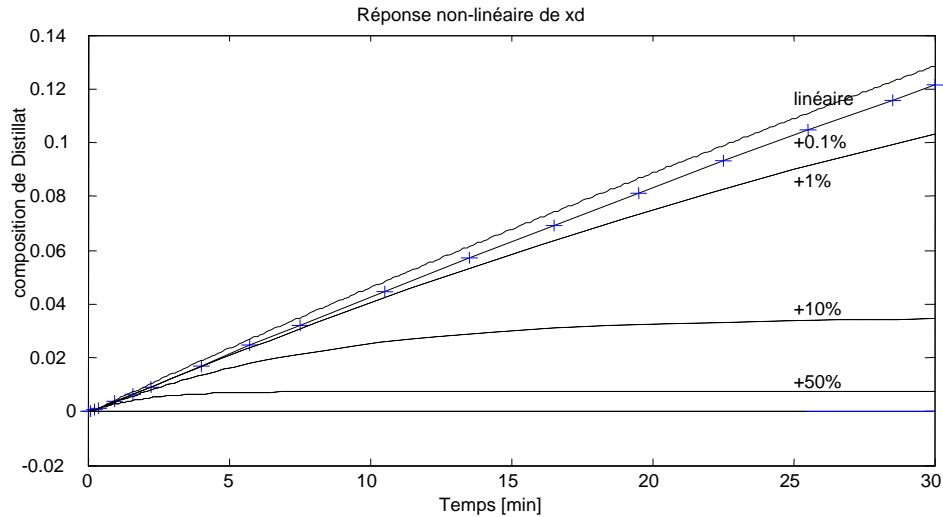


Figure 4.3 : *Comparaison entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire.*

4.2.4 L'effet de la variation de débit d'alimentation

Dans la *figure 4.4*, nous montrons la réponse des compositions de distillat et de résidu pour une augmentation de 1% dans le débit d'alimentation F (1 à 1.01 [kmol/min]). La ligne discontinue montre la réponse d'une colonne non contrôlée (OL) avec tous les variables (L , V , D , et B) constantes. Nous comparons cette réponse avec quatre configurations qui sont LV , DV , LB et $(L/D)(V/B)$.

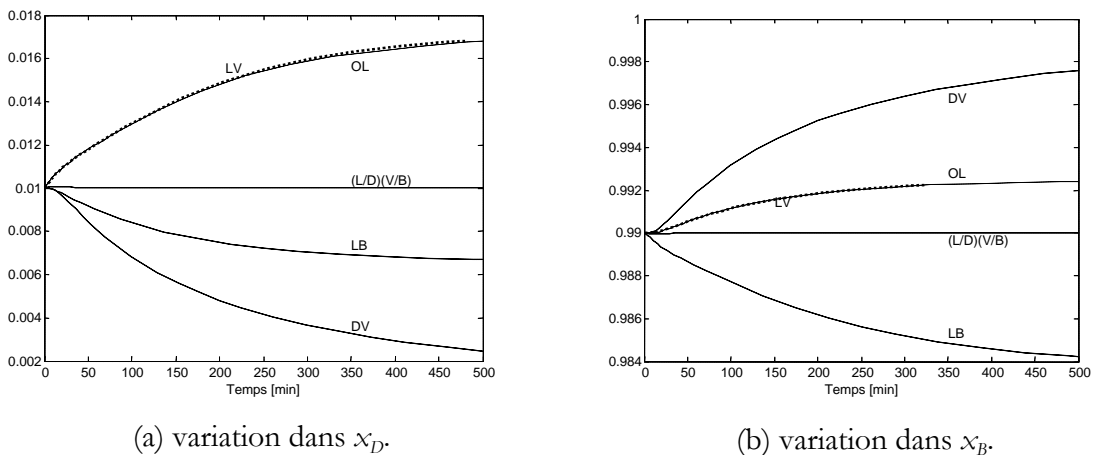


Figure 4.4 : *Réponses à une augmentation de 1% dans F pour différents configuration.*

4.3 Analyse des interactions

Pour analyser les interactions dans notre système nous utilisons la matrice directe de Nyquist (DNA) décrite dans la section 1.4.1.6.1. Les figures 4.5 et 4.6 donnent respectivement la matrice directe de Nyquist et les éléments de la diagonale superposés par les cercles de Gershogin [42].

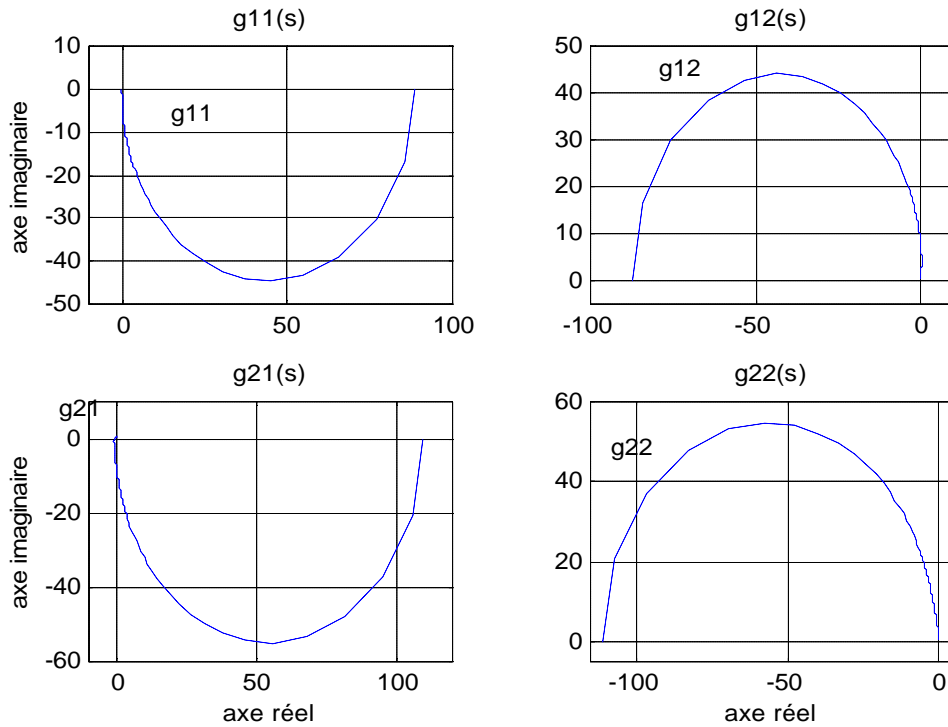


Figure 4.5 : Matrice direct de Nyquist de La colonne.

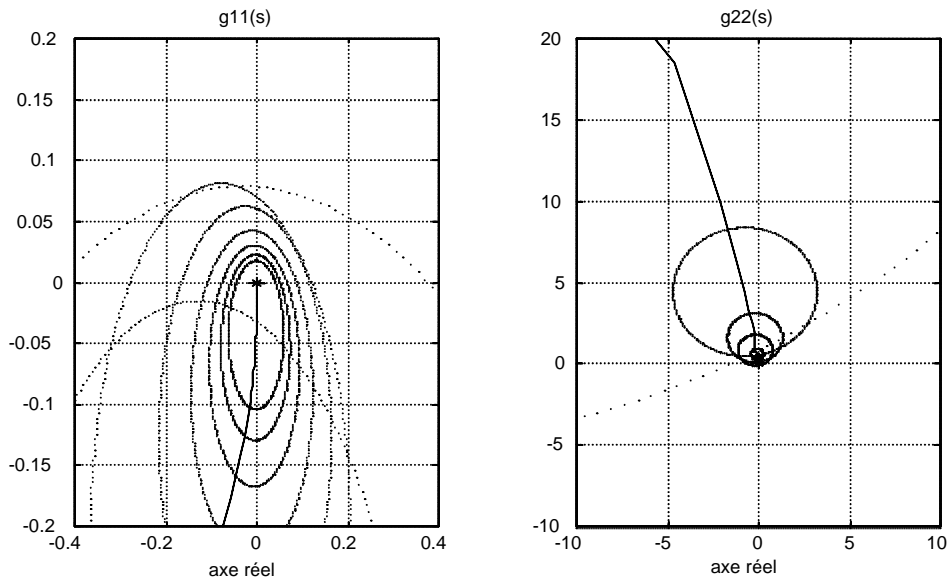


Figure 4.6 : Les éléments de la diagonale superposés de cercles de Gershogin.

À partir de la matrice directe de Nyquist de cette colonne, figure 4.5, on constate que les lieux de transfert $g_{12}(s)$ et $g_{21}(s)$ sont important, cela montre que l'interaction existe dans cette colonne.

La superposition des cercles de Gershogin correspondant à $g_{11}(s)$ et $g_{22}(s)$, figure 4.6, montre l'importance de l'effet d'interaction entre les deux boucles de compositions à commander.

Pour montrer l'effet de chaque boucle sur l'autre boucle, nous simulons l'évolution des sorties de chaque boucle pour deux scénarios de commandes :

1. Nous commandons x_B par V , les deux boucles (x_B-V) et (x_D-L) sont fermées et le cas lorsque (x_B-V) est fermée et l'autre boucle (x_D-L) est ouverte (figure 4.7).

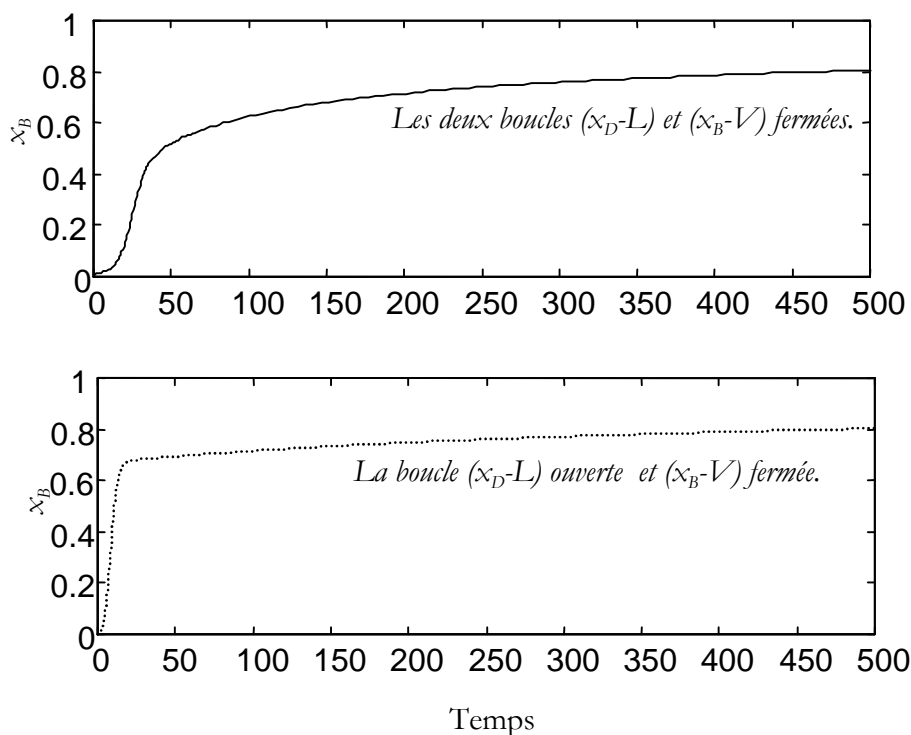


Figure 4.7 : Réponses transitoires de résidu commandé par V .

2. Nous commandons x_D par L , les deux boucles (x_B-V) et (x_D-L) fermées et le cas lorsque (x_B-V) est ouverte et la boucle (x_D-L) fermée (figure 4.8).

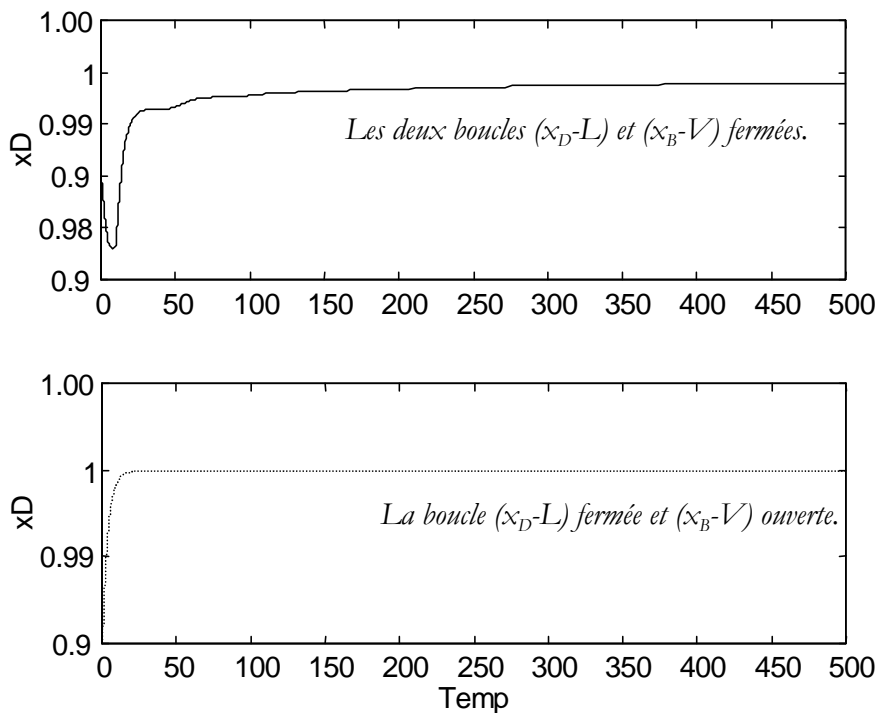


Figure 4.8 : Réponses transitoires de distillat commandé par L .

Les régulateurs utilisés sont des régulateurs PI dont les paramètres sont donnés par les formules suivantes :

$$k_1(s) = 26.1 \frac{1+3.76s}{3.76s} (x_D - L) \quad ; \quad k_2(s) = -37.5 \frac{1+3.31s}{3.31s} (x_B - V)$$

La simulation en utilisant Matlab donne les réponses transitoires représentées par les figures 4.7 et 4.8. Les programmes de simulation utilisés dans cette partie sont donnés en Annexe A.5.

L'analyse de ces réponses pour les deux scénarios de commande (une boucle fermée et l'autre ouverte, et pour le cas des deux boucles fermées) montre que cette colonne est interactif.

4.3.1 Matrice des gains relatifs RGA

Les propriétés de commande des diverses configurations peuvent être rigoureusement différentes, ceci est montré en étudiant les interactions entre les entrées et les sorties, comme exprimé par la matrice des gains relatifs (RGA) [42]. Le gain relatif I_{ij} exprime comment le gain g_{ij} varie quand nous fermons l'autre boucle(s). Par exemple, considérez l'effet de variation L sur x_D avec LV -configuration. Sans la commande, V est constant ($dV = 0$), et l'effet est $dx_D = g_{11}dL$, voir (4.11). Supposez maintenant que nous présentons la commande de retour d'état dans l'autre boucle, c.-à-d. nous ajustons V pour maintenir x_B constant. Le gain relatif correspondant est alors;

$$I_{11} = \frac{dx_D}{d\hat{x}_D} = \frac{g_{11}}{g_{11} - g_{12}(g_{21}/g_{22})} \quad (4.14)$$

L'expression semblable s'applique aux autres gains relatifs. Une des propriétés de la RGA est que les lignes et les colonnes somme toujours à 1, ainsi les éléments de la RGA sont donnés par la matrice suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 1 - I_{11} \\ 1 - I_{11} & I_{11} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

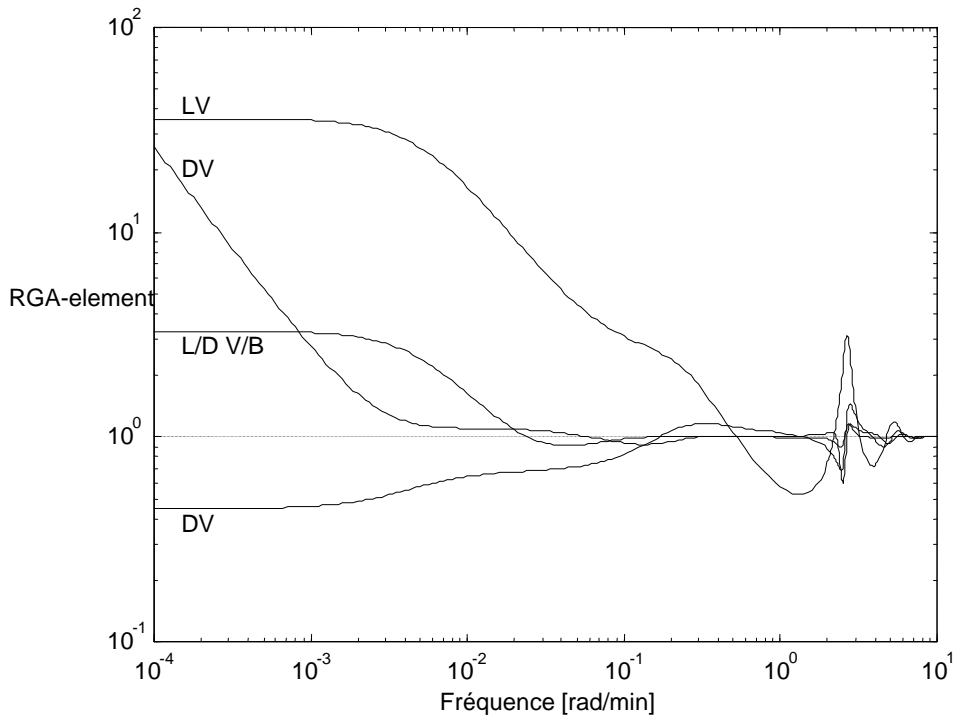


Figure 4.9 : RGA en fonction de la fréquence pour les 4 configurations.

La réponse en fréquence de la RGA est facilement évaluée à partir de modèle linéaire. De la matrice de transfert $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ avec $s=j\omega$, nous pouvons calculer les gains en fréquence de la RGA pour les différentes configurations.

La *figure 4.9* montre les éléments diagonaux en fréquence de la matrice RGA pour les quatre configurations. En général, pour avoir une interaction faible les valeurs de la RGA doivent être proche de 1. Dans ce cas, on couple des variables des entrées-sorties aux valeurs de la RGA qui sont positives et proche de 1.

4.4 Modèle bond-graph

Le process de distillation est caractérisé par la mise en œuvre de plusieurs phénomènes de nature diverses (hydraulique, thermodynamique, chimique). La modélisation d'un tel système nécessite alors une approche unifiée de modélisation permettant de présenter tous les phénomènes de stockage et de dissipation d'énergie dans le système. Du point de vue de l'automatique, les variables d'état sont clairement représentées et le modèle d'état (non linéaire) est directement déduit du bond-graph.

4.4.1 Bond-graph à mots

Le bond-graph à mots (Word bond-graph en anglais) [9] représente le niveau technologique de

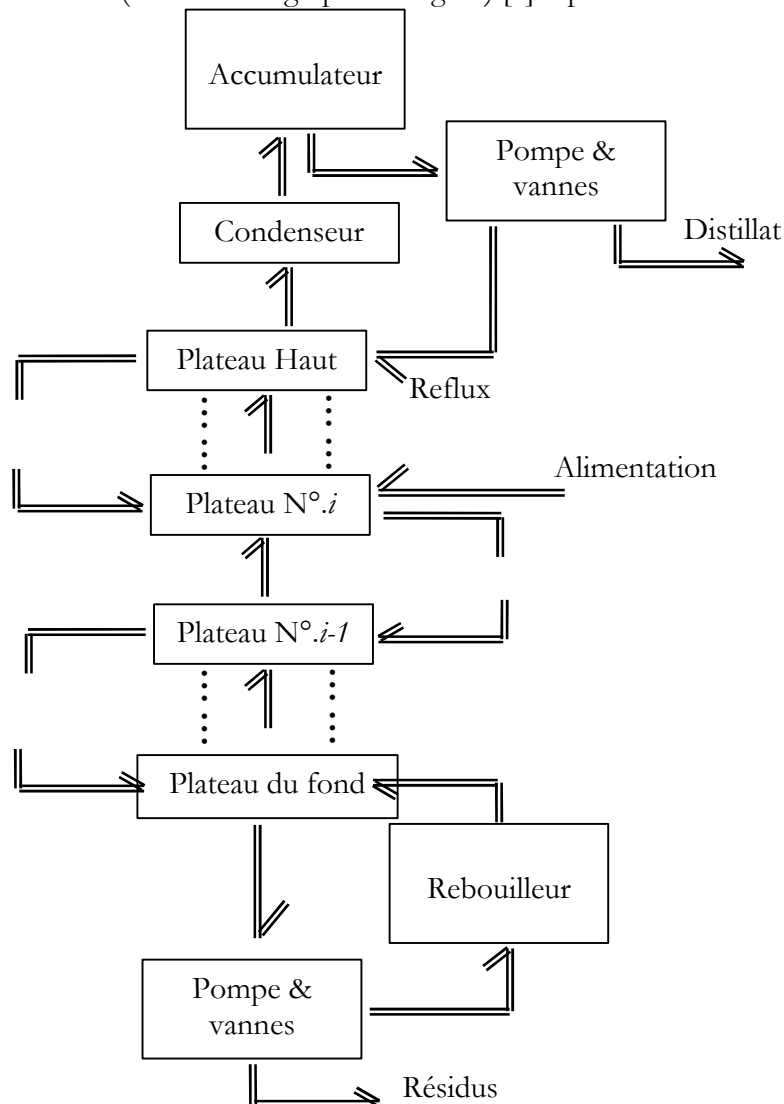


Figure 4.10: *Bond-graph à mots de la colonne.*

la modélisation. Ce niveau de modélisation consiste à construire l'architecture du système par l'assemblage des différents sous-systèmes. Les éléments de base sont des processus technologique simple (condenseur, accumulateur, conduite, ...). On décompose le système global en sous-systèmes simples. Le bond-graph à mots est donné par la *figure 4.10*.

4.4.2 Modèle Hydraulique

Le modèle bond-graph pour le transfert de l'énergie hydraulique est donné par la *figure 4.11* il présente les flux de deux fluides. Les deux éléments *Fw* et *C* sont des éléments de stockage de l'énergie correspondant aux équations de Francis [35]. Les éléments de la jonction *1* représentent les équations de Bernoulli avec des éléments d'inertie. La jonction *0* représente le transfert d'énergie hydraulique dans un plateau entre liquide et vapeur.

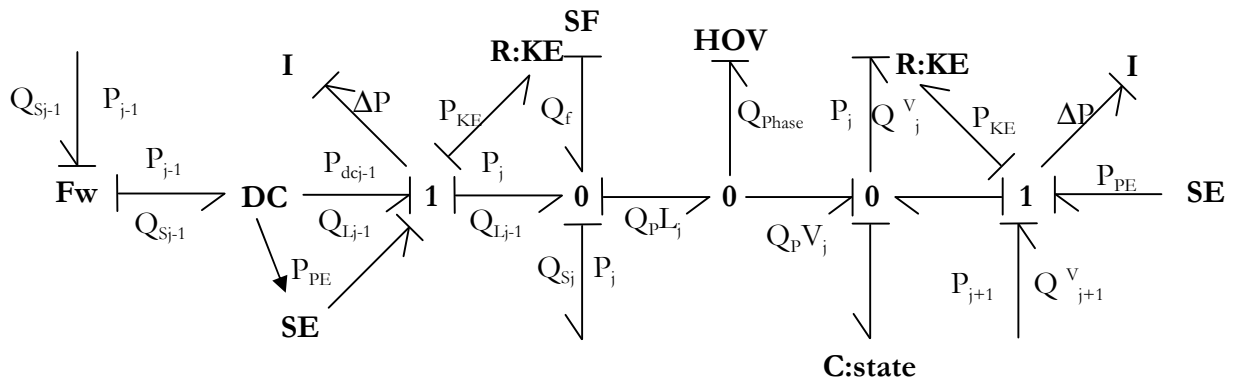


Figure 4.11: *Modèle bond-graph BGM1.*

4.4.3 Modèle Chimique

La nature exacte du modèle chimique est connue seulement empiriquement. La *figure 4.12* présente la forme du modèle chimique [35]. Dans le modèle classique les potentiels chimiques sont supposés égaux, éliminant la jonction *1* centrale. La masse de vapeur est supposée négligeable. Au delà de la jonction, l'écoulement de la masse n'est pas conduit par le potentiel chimique, mais par l'énergie hydraulique représentée par l'élément *R*. L'élément *HOV* détermine le débit de la charge, mais la relation exacte n'est pas encore connue [35].

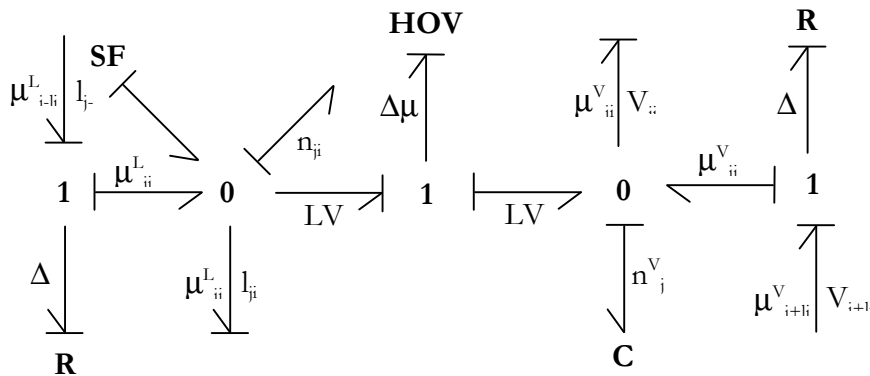


Figure 4.12 *Modèle bond-graph BGM2.*

4.4.4 Transfert d'énergie thermique

Le modèle thermique est mieux connu, comme le montre la *figure 4.13*. Les éléments *RS* sont liés au débit volumique du fluide. L'élément de centre *HOV* combine la température de vaporisation et la convection du débit de la charge. La température de la vaporisation et l'entropie de la vapeur se produisent à la température du liquide (une masse de vaporisation) ou à la

température de la vapeur (une masse de condensation). L'entropie se dirige le sens du flux de la charge. Le flux de la charge dans les deux directions dépend de différence de potentiel chimique.

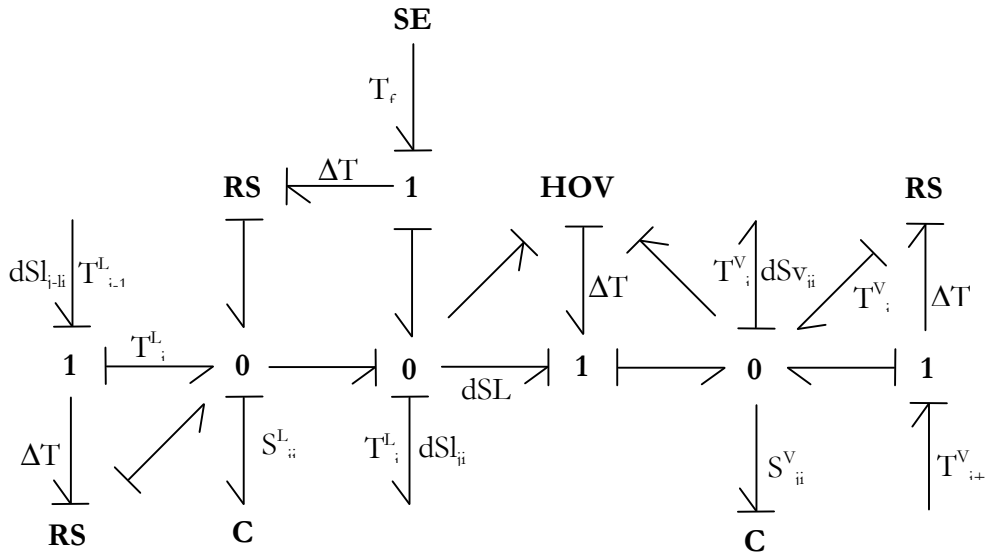


Figure 4.13 : *Modèle bond-graph BGM3.*

4.5 Découplabilité et rejet de perturbations

Dans cette partie, nous présentons des résultats concernant le découplage et la commande par rejet de perturbations du modèle bond-graph.

Nous considérons le modèle décrit par la *figure 4.14* qui le modèle réduit de BGM1 et noté *BG1*. Ce modèle possède une entrée de commande $\{E_1\}$ représentée par la source de flux modulée *MSf*, quatre éléments dynamiques, tous affectée d'une causalité intégrale et un détecteur de sortie $\{D_1\}$. Ce détecteur représente la variable à commander, la composition de distillat x_D obtenu après une distillation. Le capteur $\{D_2\}$ mesure la composition de résidu au fond de la colonne. Cette mesure permettra de reconstruire l'état du système, utilisée pour la commande. Le modèle *BG1* possède enfin deux sources d'entrée de perturbation $\{E_2, E_3\}$. La source d'entrée E_2 modélise le débit d'alimentation et la source E_3 représente la composition molaire de la charge.

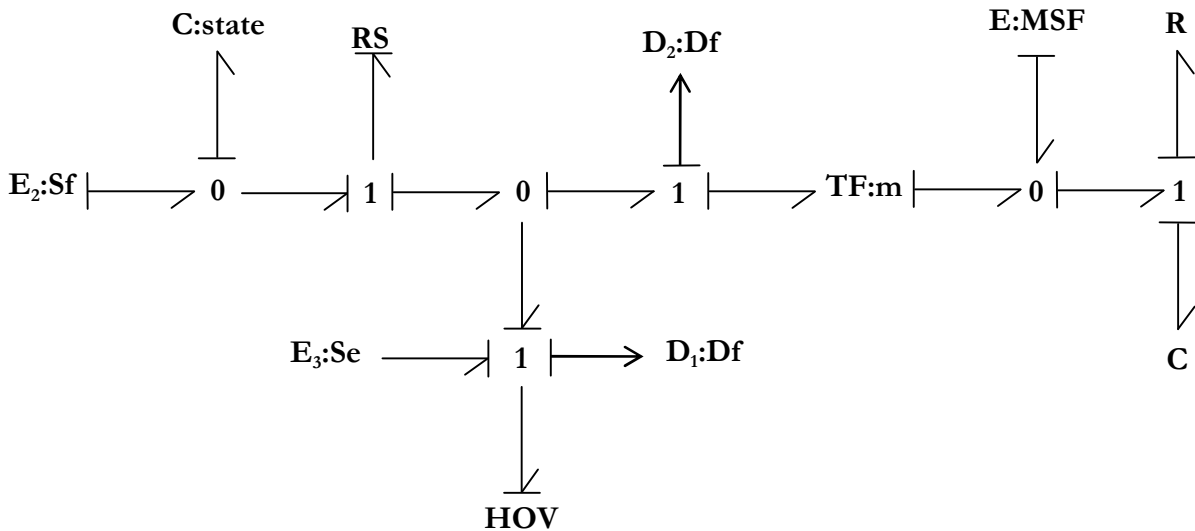


Figure 4.14 : *Modèle bond-graph BG1.*

En éliminant du modèle BG1 les sources d'entrées E_2 et E_3 , nous obtenons le modèle "non perturbé" noté BG2, voir *figure 4.15*.

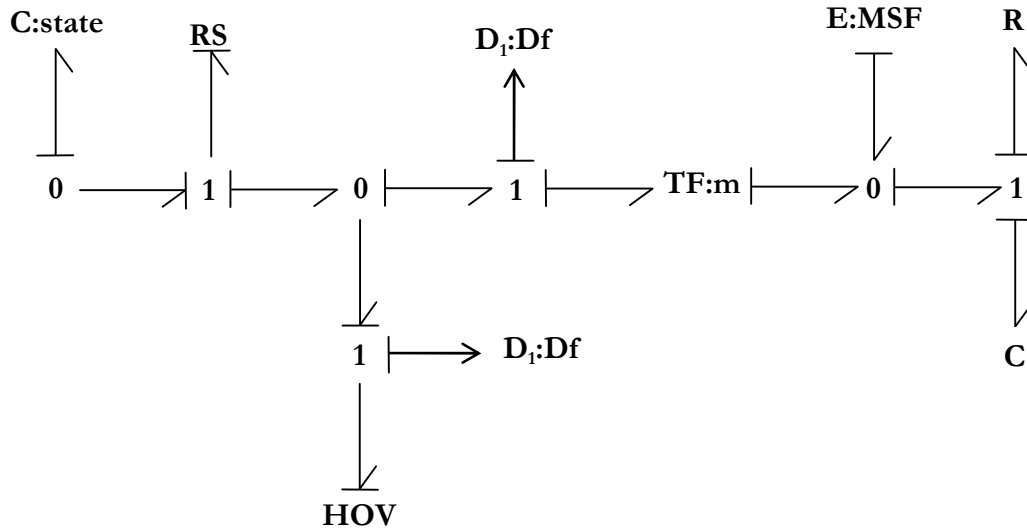


Figure 4.15 : Modèle bond-graph BG2.

La forme de la représentation d'état déduite du modèle BG1 est donnée par l'équation (4.16).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + P_2 d_2(t) + P_3 d_3(t) \\ y(t) = c_1 x(t) \end{cases} \quad (4.16)$$

$u(t) = [L, V]$ sont les variables d'entrée de commande, le débit de reflux et le débit de la vapeur injectée. $y(t) = [x_D, x_B]$ sont les variables de sortie à commander, composition de distillat et de résidu. $x(t)$ est le vecteur de variables d'état. $d_2(t)$ et $d_3(t)$ sont des variables d'entrée de perturbation respectivement associées aux sources d'entrées E_2 et E_3 . Le modèle doit être structurellement observable avec le capteur D_2 . On peut vérifier graphiquement que cette propriété est satisfaite. Section 2.2.3.

Dans ce contexte, l'objectif est de construire, si possible, des lois de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie des variables d'entrée de perturbation.

4.5.1 Rejet de perturbations

Une loi de commande du type $u(t) = Fx(t)$ ne permet pas de découpler la perturbation $d_3(t)$ de la variable de sortie $y(t)$. En effet sur le modèle BG1, les sources d'entrées E_2 et E_3 sont situées à la même distance du détecteur de sortie D_1 . La condition nécessaire et suffisante de rejet de la perturbation $d_3(t)$ exprimé par le théorème 3.25 n'est donc pas vérifiée.

Par contre, moyennant la mesure de la perturbation, l'objectif de découplage peut être atteint. La loi de commande à utiliser dans ce cas est de la forme $u(t) = Fx(t) + Gd_3(t)$ [29].

4.5.2 Étude du modèle initial

Dans cette section, nous calculons l'expression symbolique d'une loi par retour d'état statique découplant la variable de sortie $y(t)$ du modèle BG1 de la variable d'entrée de perturbation $d_2(t)$. Nous caractérisons tout d'abord la solubilité du problème de rejet de perturbation, **phase 1**. Nous déterminons ensuite l'expression formelle des pôles du modèle bouclé, **phase 2**. Nous donnons enfin l'expression symbolique d'une loi de commande, **phase 3**.

Phase 1 : découplabilité du modèle BG1.

Sur le modèle BG1, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 est $D_1 \textcircled{R} HOV \textcircled{R} R \textcircled{R} E_1$. La longueur de ce chemin causal est égale à un, définition 2.6. Cette longueur définit la valeur de l'ordre n_1 du zéro du modèle : $n_1=1$.

D'autre part, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_2 est $D_1 \textcircled{R} HOV \textcircled{R} R \textcircled{R} RS \textcircled{R} Cstate \textcircled{R} E_2$. La longueur de ce chemin causal est égale à trois.

La comparaison des longueurs de ces deux chemins causaux permet de tirer la conclusion suivante : le signal de commande parvient de détecteur de sortie avant le signal de perturbation. La condition nécessaire et suffisante de rejet de perturbation $d_2(t)$ exprimée par le théorème 3.25 est donc vérifiée. La variable de sortie $y(t)$ peut ainsi être découplée de la variable de perturbation $d_2(t)$ par une loi de commande du type $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où $v(t)$ est la variable d'entrée de consigne. Cette loi de commande utilise comme support géométrique le sous-espace V^* .

L'entier n_1 étant égal à un, la loi de commande apporte un degré de liberté en boucle fermée. Parmi les quatre modes du modèle bouclé, un seul pourra donc être assigné librement. Nous caractérisons à présent l'expression formelle des trois autres pôles du modèle bouclé.

Phase 2 : structure finie du modèle BG2.

La valeur de ces pôles est fixée. Ces modes sont en effet les trois zéros invariants du modèle "non perturbé" en boucle ouverte BG2.

L'étude du modèle BG2 en causalité dérivée permet tout d'abord de montrer qu'aucun de ces zéros invariants n'est nul. Notons en effet BG3 le modèle BG2 affecté d'une causalité dérivée, figure 4.16.

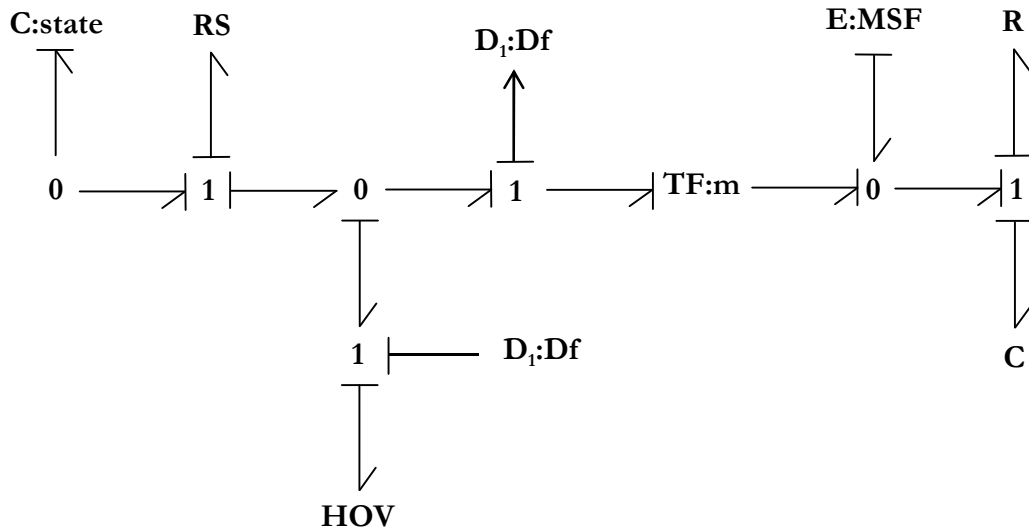


Figure4.16 : Modèle bond-graph BG3.

Sur ce modèle, le plus court chemin causal du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 ne traverse aucun élément dynamique. Selon la propriété 3.11, l'ordre n_{1d} du zéro infini du modèle BG3 vaut par conséquent zéro ($n_{1d} = 0$). Le théorème 3.15 permet ainsi de déduire que le modèle BG2 ne possède aucun zéro invariant nul.

L'expression formelle des zéros invariants est alors obtenue en appliquant la propriété 2.23 au modèle BG2. Ces zéros invariants sont les racines du polynôme $Q(s)$ donné par l'équation (4.17).

$$\mathcal{Q}(s) = \left(s + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot \left(s^2 + \frac{1}{HOV \cdot C} \right) \quad (4.17)$$

Remarquons que ces zéros invariants sont également les modes fixes du modèle bouclé. En effet, les techniques présentées en section 3.1.1 permettent de montrer sans calcul que le modèle *BG1* privé de la source d'entrée E_3 ne possède aucun zéro invariant, détecteur fictif sur l'élément dynamique C . Les modes fixes du modèle bouclé sont par conséquent tous les zéros invariants du modèle *BG2* [29].

Phase 3 : loi de commande et modèle bouclé

Nous donnons enfin l'expression symbolique d'une loi de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie $y(t)$ de la variable d'entrée de perturbation $d_2(t)$.

Cette loi s'écrit $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où $v(t)$ est la variable d'entrée de consigne en boucle fermée. Les expressions formelles des matrices \mathbf{F} et \mathbf{G} sont calculées conformément à la propriété 3.31.

Le degré de liberté apporté par cette loi de commande est le paramètre p_j . Il permet de placer un pôle du modèle bouclé. Le coefficient g est en outre destiné à régler le gain statique du modèle bouclé.

La matrice de transfert de ce modèle bouclé est la matrice $T_{BF}(s)$ vérifiant l'équation (4.18).

$$\begin{cases} T_{BF}(s) = [T_{BF}^1(s)T_{BF}^2(s)] \\ y(s) = T_{BF}^1(s)v(s) + T_{BF}^2(s)d_2(s) \end{cases} \quad (4.18)$$

Les expressions formelles des fonctions de transfert $T_{BF}^1(s)$ et $T_{BF}^2(s)$ sont déduits de l'expression de loi de commande.

4.5.3 Découplage et rejet de perturbation

Pour valider notre procédure nous utilisons deux boucles individuelles, comme décrit aux modèles bond-graphs *BG1*, *BG2* et *BG3*. La première boucle est pour le haut (x_D - L) et la deuxième pour le fond (x_B - V). La *figure 4.17* montre les éléments de la RGA en fréquence.

La *figure 4.18* montre les différents tests de comportement des compositions x_D et x_B en injectant une variation de 0.2 à la charge d'alimentation F aux instants 10 et 100. À l'instant 200 on injecte une variation de 0.99 à 0.995 à la variation de la consigne x_D .

Nous remarquons que le système de commande a réagi correctement pour le rejet des perturbations à la charge d'alimentation F et a donné un comportement dynamique acceptable dans x_D .

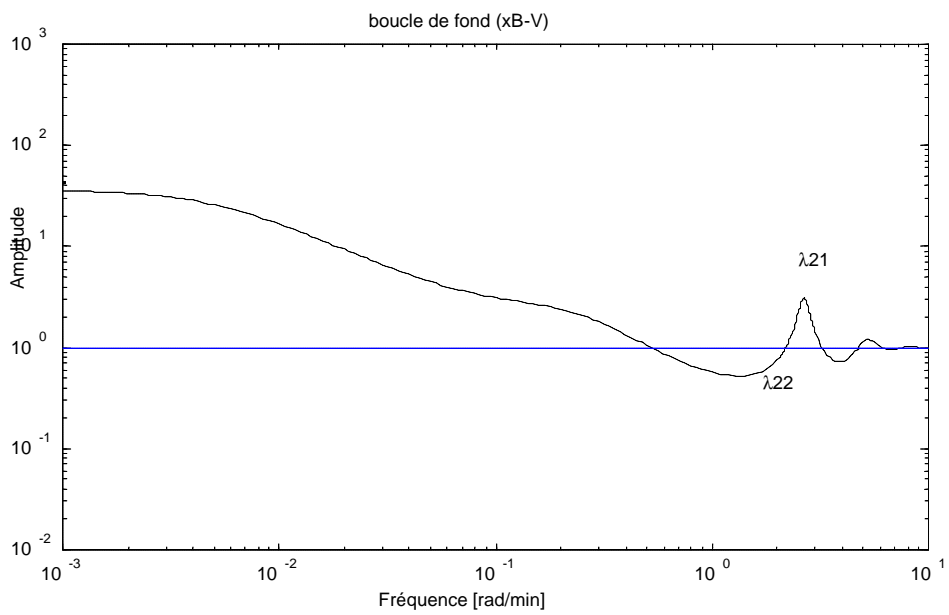
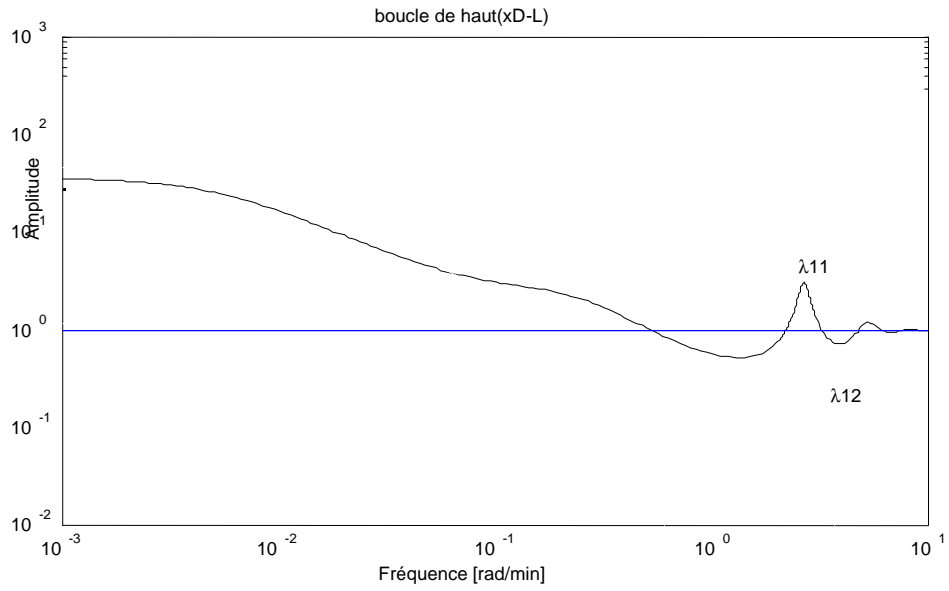


Figure 4.17 : *Éléments de la RGA (λ_{21} , λ_{22}).*

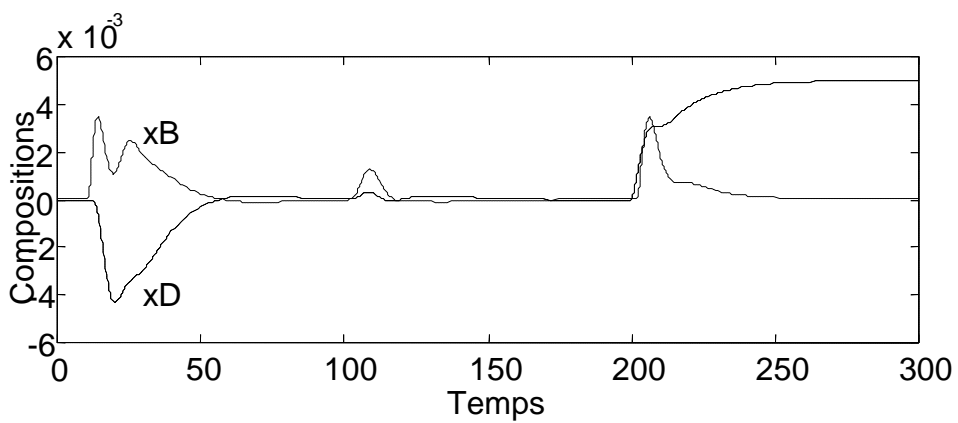


Figure 4.18 : *Simulations en boucle fermée.*

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré l'intérêt de l'analyse des interactions d'un modèle bond-graph dans une démarche de conception d'architecture de commande. Nous avons également l'expression de retour d'état permettant d'atteindre un objectif donné, rejet de perturbations, placement de pôles.

Ces lois de commande sont exprimées de manière symbolique en fonction des paramètres du modèle. Certains de ces paramètres peuvent varier dans des proportions importantes, une identification en temps réel de ces paramètres permettrait alors de recalculer les valeurs numériques des paramètres de la loi de commande.

En outre, ces lois de commande sont des retours d'état statiques. Elles nécessitent par conséquent de pouvoir mesurer les états du système. Si certains d'entre eux ne sont pas mesurables, un observateur doit être intégré dans la boucle de commande pour reconstituer les états à partir de la mesure des sorties. Des techniques de contrôle par retour de sortie permettraient de s'affranchir de cette reconstitution. Ces techniques sont actuellement à l'étude par la communauté des automaticiens.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé des outils méthodologiques d'aide à la conception d'architecture de commande pour des systèmes multivariables modélisés par bond-graph.

L'outil bond-graph, relativement récent, est encore peu utilisé de manière systématique dans le monde industriel. Le principal frein est dû à la phase incontournable d'apprentissage du symbolisme. Les bond-graphs demandent un effort d'apprentissage pour en acquérir la maîtrise, comme tout langage, même informatique. Mais la difficulté n'est pas dans le langage, elle est dans sa mise en œuvre, elle est dans la physique.

Notre contribution concerne l'étude de découplage entre les variables d'entrée et les variables de sortie dans un environnement multivariable en préservant la stabilité. Cette propriété dépend des zéros invariants du modèle.

Nous avons ainsi tout d'abord mis en évidence l'intérêt du modèle bond-graph en causalité dérivée pour déterminer le nombre de zéros invariants nuls. Les procédures proposées à cet effet sont entièrement graphiques et ne nécessitent aucun calcul. Elles permettent, dans la plupart des cas, de savoir si le modèle considéré peut être découplé avec stabilité par retour d'état.

De plus, nous avons montré comment identifier, grâce à ces procédures, les éléments du modèle en boucle ouverte dont dépend la stabilité du modèle découplé. Si nécessaire, le modèle peut ainsi être modifié de manière à rendre possible la stratégie de commande envisagée, prise en compte la facilité de modification du placement des actionneurs ou capteurs par exemple.

Enfin, nous avons proposé une méthode visant à déterminer l'expression formelle de loi de commande garantissant la non interaction et la stabilité du modèle bouclé. Cette méthode repose sur l'utilisation conjointe d'outils géométrique et du formalisme bond-graph.

Les résultats présentés dans ce mémoire ne constituent cependant qu'une première approche pour la résolution des problèmes de commande des systèmes multivariables par découplage entrée-sortie en utilisant les bond-graphs.

Concernant les techniques de découplage par retour d'état, au moins trois questions importantes restent en effet sans réponse. Les deux premières concernent les modèles bond-graph dont la matrice d'état est de rang plein. Ces questions sont les suivantes:

Comment déterminer spécifiquement le nombre et l'expression formelle des zéros invariants strictement instables? S'ils ne sont pas des modes fixes, comment caractériser l'expression formelle des sous-espaces de découplage correspondants?

Pour les modèles possédant plus de variables d'entrée que de variables de sortie, comment généraliser la méthode de calcul des lois de commande fondée sur la notion de sous-espace de découplage? Le formalisme bond-graph permet-il, en particulier, de caractériser et d'exploiter de manière simple un sous-espace de commandabilité?

La troisième interrogation concerne les modèles bond-graph non observable ou non commandable, dont la matrice d'état n'est pas inversible. Pour cette classe de modèles, les

intuitions présentées pour décrire la structure des zéros-système peuvent-elles être validées? Pour calculer l'expression symbolique des lois de commande, comment s'affranchir de la non-observabilité de la matrice d'état?

Une extension majeure à donner à ce travail concerne enfin la commande des modèles bond-graphs par retour de sortie. Ce type de loi de commande trouve en effet une application immédiate dans le cas où la mesure des variables d'état du système est impossible. Par une approche purement géométrique, des travaux importants ont déjà été réalisés. Le formalisme bond-graph présente très certainement un intérêt dans cette démarche, que des travaux ultérieurs devront identifier.

Pour terminer, rappelons que ces méthodes s'inscrivent dans une perspective de réduction des temps de conception de nouveaux composants et organes physiques. A cet effet, un outil informatique d'analyse est en cours de développement au sein de notre équipe. Il vise à permettre un accès très rapide à l'ensemble des propriétés du modèle bond-graph.

Une partie de ce travail a fait l'objet d'un article "Analyse des Interactions dans un Système Multivariable par Bond-graphs" au IMPAC-2002, 2nd Instrumentation and Measurement in Petroleum Conference, October 21-22, 2002, IAP/SH proceeding. Boumerdès.

Bibliographie

- [1] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph for modelling and control: structural analysis tools for the design of input-output decoupling state feedbacks. International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation, Phoenix, Arizona, USA, pp. 103-128.
- [2] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph modelling and geometric approach: input-output decoupling with stability. IFAC Conference on Control of Industrial Systems, Belfort, France, pp. 317-322.
- [3] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). On the finite and infinite structures of bond-graph models. IEEE conference on Systems, Man and Cybernetics, Orlando, Florida, USA, pp. 2472-2477.
- [4] Bertrand, J. M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1996). Détermination graphique des modes fixes de systèmes physiques modélisés par bond-graph. AGT'96, Tours, France, pp. 147-150.
- [5] Borne, P., G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard et I. Zambettakis (1992). Modélisation et Identification des Processus. Tome 1, éditions Technip.
- [6] Borne, P., G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard et I. Zambettakis (1993). Analyse et Régulation des Processus Industriels. Tome 1, éditions Technip.
- [7] Breedveld, P. C., R. C. Rosenberg and T. Zhou (1991). Bibliography of bond-graph theory and application. Journal of the Franklin Institute, vol. 328, N° 5/6, pp. 1067-1109.
- [8] Claude, D. (1992). Automatique –Cours de Maîtrise. Service de Publications Paris Onze édition, Université Paris Sud, Orsay, France.
- [9] Dauphin-Tanguy, G. (*sous la direction de*) (2000). Les bond-graphs. HERMES Science Europe Ltd, Paris, France.
- [10] Dion, J. M. (1983). Feedback blocks decoupling and infinite structure of linear systems. International Journal of Control, vol. 37, N° 3, pp. 521-533.
- [11] Dion, J.M. et C. Commault (1982). Smith-McMillan factorizations at infinity of rational matrix functions and their control interpretation. Systems & Control Letters, vol. 1, N° 5, pp. 312-320.
- [12] Falb, P. L. et W. A. Wolowich (1967). Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-12, pp. 651-659.
- [13] Fossard, A. (1997). Systèmes Multientrées-Multisorties. Technique de l'ingénieur, traité Mesures et Contrôle, No. 139, R 7 220.
- [14] Fossard, A. et C. Gueguen (1972). Commande des Systèmes Multidimensionnels. éditions Dunod.
- [15] Gagnepain, J. P. and D. E. Seborg (1982). Analysis of Process Interactions with Applications to Multiloop Control System Design. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev, vol. 21, No. 1, pp. 5-11.

- [16] Gawthrop, P. J. (1997). Control system configuration: inversion and bi-causal bond-graphs. International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation, Phoenix, Arizona, USA, pp. 97-102.
- [17] Gilbert, E. G. (1996). The decoupling of multivariable systems by state feedback. SIAM Journal of Control and Optimisation, vol. 7, pp. 50-63.
- [18] Grizzle, J. W. et A. Isidori (1989). Block noninteracting control with stability via static feedback. Mathematics of Control, Signals, and Systems, vol. 2, pp. 315-341.
- [19] Hautus, M. L. J. (1975). The formal Laplace transform for smith linear systems. Mathematical systems theory, Udine. Lecture notes in economics and mathematical systems, vol. 131, Springer Verlag.
- [20] Huang, H. P., M. Ohshima and I. Hashimoto (1994). Dynamic Interaction and Multiloop Control System Design. J. Proc. Cont, vol. 4, N^o. 1, pp. 15-27.
- [21] Jensen, N., D. G. Fisher and S. L. Shah (1986). Interaction Analysis in Multivariable Control Systems. AIChE Journal, vol. 32, No. 6, pp. 959-969.
- [22] Johnston, R. D. (1990). Steady-State Closed-Loop Structural Interaction Analysis. Int. J. Control, vol. 52, No. 6, pp. 1351-1369.
- [23] Johnston, R. D. and G. W. Barton (1985). Structural Interaction Analysis. Int. J. control, vol. 41, pp. 1005-1013.
- [24] Johnston, R. D. and W. Barton (1984). Quantification of Interactions in Control Systems. The Twelfth Australian Chemical Engineering Conference, Melbourne, pp. 735-742.
- [25] Karnopp, D. C., D. L. Margolis et R. C. Rosenberg (1990). System dynamics: a unified approach. John Wiley & Sons, Inc.
- [26] Khellasi, A. (1990). Control Loop Interaction in Process Systems. P. R. Symposium 10-11 April 1990, University of Nottingham, England.
- [27] Lin, C. T. (1974). Structural Controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, pp. 201-208.
- [28] Malabre, M. (1993). Approche géométrique : outils de base. Colloque \sum_{∞}^{+} : Commande des Systèmes Linéaires -Approche Structurale, Nantes, France.
- [29] Malabre, M. et J.C. Martinez Garcia (1993). The modified disturbance rejection problem with stability: a structural approach. European Control Conference, Groningen, the Netherlands, pp. 1119-1124.
- [30] Marinez Garcia, J. C. et M. Malabre (1995). Simultaneous disturbance rejection and regular row by row decoupling with stability: a geometric approach. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-40, N^o. 2, pp. 365-369.
- [31] Marlin, T. E. (1995). Process Control, Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance. McGraw-Hill International Editions.
- [32] McAvoy, T. J. (1983). Interaction Analysis. Instrument Society of America.
- [33] Morse, A. S. et W. M. Wonham (1971). Status of noninteracting control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, N^o. 6, pp. 568-581.
- [34] Paynter, H. M. (1960). Analysis design of engineering systems. Cambridge, Mass. MIT Press.
- [35] Perry, RH. and CH. Chilton (1976). Chemical Engineer's Book, fifth edition. McGraw-Hill Book Co, New York, USA.

- [36] Rahmani, A. (1993). Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche bond-graph. Thèse de doctorat. Université de Lille I.
- [37] Rosenberg, R. C. et A. N. Andry (1979). Solvability and bond-graph junction structures with loops. IEEE Transactions on Circuit and Systems, vol. CAS-26, N° 2, pp. 130-137.
- [38] Rosenbrock, H. H. (1970) State space and multivariable theory. Nelson, London, England.
- [39] Rosenbrock, H. H. (1974). Computer Aided Control System Design. Academic Press, New York.
- [40] Rotella, F. et P. Borne (1995). Théorie et Pratique du Calcul Matriciel. Éditions Technip.
- [41] Skogestad, S. (1997). Dynamics and control of distillation columns: a tutorial introduction. Distillation and Absorption 1997 conference, Maastricht, The Netherlands, 8-10 September 1997.
- [42] Skogestad, S. and I. Postlethwaite (1998). Multivariable Feedback Control, Analysis and Design. John Wiley & Sons.
- [43] Sueur, C. (1990). Contribution à la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques par une approche bond-graph. Application aux systèmes polyarticulés plans à segments flexibles. Thèse de doctorat. Université de Lille I.
- [44] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1991). Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems. Journal of the Franklin Institute, vol. 328, N° 1, pp. 55-70.
- [45] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1992). Grassmann algebra and bond-graph modelling. Journal of Franklin Institute, vol. 329, N° 6, pp. 1129-1146.
- [46] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1992). Poles and zeros of multivariable linear systems: a bond-graph approach. In: Bond Graphs for Engineers (P.C. Breedveld and G. Dauphin-Tanguy (ed.)), pp. 211-228. Elsevier Science Publishers.
- [47] Tung, L. S. and T. F. Edgar (1981). Analysis of Control-Output Interactions in Dynamic Systems. AIChE Journal, vol. 27, No. 4, pp. 690-693.
- [48] Van der weiden, A. J. J. et O. H. Bosgra (1982). Analyse structurelle des systèmes linéaires multivariables strictement propres et non propres (théorie et applications). Dans : Outils et Modèles Mathématique pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal, pp. 115-202. éditions du C.N.R.S.
- [49] Verghese, G. C. (1978). Infinite frequency behaviour of generalized dynamical systems. PhD thesis, Electrical Engineering Department, Stanford University.
- [50] Weller, S. R. and G. C. Goodwin (1996). Controller Design for Partial Decoupling of Linear Multivariable Systems. Int. J. Control, vol. 63, No. 3, pp. 535-556.
- [51] Wonham, W. M. (1985). Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer Verlag, third edition, New York, USA.
- [52] Wonham, W. M. et A. S. Morse (1970). Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach. SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 8, N° 1, pp. 1-18.
- [53] Wonham, W. M. (1979). Geometric state-space theory in linear multivariable control: a status report, Automatica, vol. 15, pp. 5-13.
- [54] Maidi, A. (2001). Analyse des interactions dans les systèmes à grandes échelle : application à la commande multiboucle des systèmes fortement couplés. Mémoire de magister. Université de Boumerdès.

Annexes

A.1. Variables généralisées

Dans cette annexe figure un tableau décrivant le sens physique possible de chacune des quatre variables généralisées –section 2.1.1.

	effort $e(t)$	flux $f(t)$	moment généralisé $p(t)$	déplacement généralisé $q(t)$
mécanique translation	force	vitesse	moment	déplacement
mécanique rotation	couple	Vitesse angulaire	moment angulaire	angle
hydraulique	pression	débit volumique	impulsion	volume
acoustique	pression	vitesse volumique	moment	volume
électrique	tension	courant	flux magnétique	charge
chimique	potentiel chimique	flux molaire	-	masse molaire
thermodynamique	température	flux entropique	-	entropie

Tableau A.1: variables généralisées.

A.2. Composants et éléments de jonction

Le tableau figurant dans cette annexe décrit les jonctions élémentaires nécessaires à la construction d'un modèle bond-graph –section 2.1.1.

élément bond-graph	nom	relation élémentaire
$\begin{array}{c} \frac{e_1}{f_1} \nearrow \mathbf{TF:m} \frac{e_2}{f_2} \nearrow \end{array}$	transformateur	$\begin{array}{l} e_1(t) - m e_2(t) = 0 \\ f_2(t) - m f_1(t) = 0 \end{array}$
$\begin{array}{c} \frac{e_1}{f_1} \nearrow \mathbf{GY:r} \frac{e_2}{f_2} \nearrow \end{array}$	gyrateur	$\begin{array}{l} e_1(t) - r f_2(t) = 0 \\ e_2(t) - r f_1(t) = 0 \end{array}$
$\begin{array}{c} \frac{e_1}{f_1} \nearrow \mathbf{0} \frac{e_n}{f_n} \nearrow \end{array}$	jonction 0	$\begin{array}{l} e_1(t) = \dots = e_n(t) \\ \sum_{i=1}^n f_i(t) = 0 \end{array}$
$\begin{array}{c} \frac{e_1}{f_1} \nearrow \mathbf{1} \frac{e_n}{f_n} \nearrow \end{array}$	jonction 1	$\begin{array}{l} f_1(t) = \dots = f_n(t) \\ \sum_{i=1}^n e_i(t) = 0 \end{array}$

Tableau A.2: éléments de jonction.

A.3. Lien d'information

Dans cette annexe figure la description de la notion de lien d'information utilisée en chapitre 2.

Un lien d'information est un capteur qui mesure une grandeur physique – effort ou flux – pour moduler une source d'entrée. Sur une jonction 0, la grandeur mesurée est un effort. Sur une jonction 1, la grandeur mesurée est un flux. La source d'entrée modulée par cette grandeur est communément appelée source modulée ou encore source commandée.

Un lien d'information est représenté par une flèche doublée d'un trait causal. Le trait causal sert uniquement à rappeler la nature de la grandeur physique mesurée. Il ne traduit aucune information structurelle relative au modèle. Par contre la flèche indique le sens dans lequel le lien peut être parcouru : il ne peut être causalement parcouru que dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche, suivant l'expression consacrée "remonter le lien".

La justification est la suivante.

Remonter un chemin causal revient à chercher les variables dont dépend la variable étudiée. Considérons par exemple le modèle bond-graph suivant – *figure A.1.*

Le détecteur de sortie D mesure l'effort e_c . Cet effort est imposé par l'élément C . il est calculé à partir du flux f_c . Ce flux est lui même imposé par l'élément dynamique I et calculé à partir d'un effort e_I . Or cet effort n'est imposé par la source E . en effet, le lien d'information transmet un signal et non une puissance : il mesure ici un flux et renvoi un effort nul. L'effort e_I ne dépend donc pas de la grandeur délivrée par la source d'entrée E . le chemin causal venant du détecteur de sortie D et traversant les éléments dynamiques C et I ne peut donc pas être poursuivi en suivant le lien dans le sens de la flèche.

Inversement, considérons le modèle bond-graph décrit par la *figure A.2.*

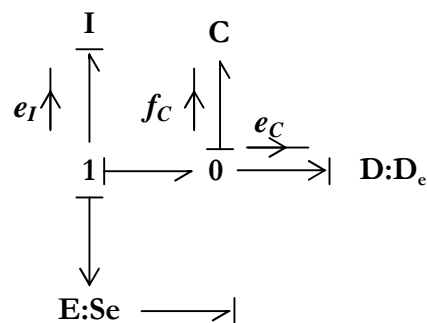


Figure A.1.

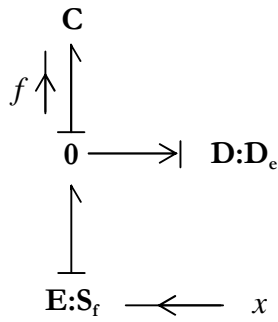


Figure A.2.

Le détecteur de sortie D mesure l'effort e . cet effort est imposé par l'élément dynamique C . il est calculé à partir du flux f . ce flux est imposé par la source d'entrée E , elle même commandée par la grandeur x . Le flux f dépend donc de la variable x . Le chemin causal partant du détecteur de sortie D et traversant l'élément dynamique C peut donc être poursuivi à travers la source d'entrée E en remontant le lien d'information.

Cette analyse est également valable si le lien d'information est placé sur le modèle bond-graph en causalité dérivée. Dans ce cas également, le lien d'information ne peut donc être causalement parcouru que dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche.

A.4. Retour d'état et stabilité

Cette annexe concerne les méthodes présentées en chapitre 4. Nous montrons que les liens d'information placés sur le modèle bond-graph en causalité dérivée correspondent à retour d'état sur le modèle bond-graph en causalité intégrale.

Considérons un modèle bond-graph de rang plein possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m \neq p$. Ce modèle est découplable par retour d'état statique régulier en utilisant p entrées de commande parmi les m disponibles. Le vecteur constitué des p variables d'entrées correspondantes est noté $u_2(t)$. Notons $u_1(t)$ le vecteur rassemblant les $(m-p)$ variables d'entrée restantes.

La représentation d'état associé à ce modèle bond-graph est donnée par l'équation (A.1).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t) \quad (\text{A.1})$$

En causalité dérivée, il est décrit par l'équation (A.2).

$$x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1} B_1 u_1(t) - A^{-1} B_2 u_2(t) \quad (\text{A.2})$$

Sur ce modèle causalité dérivée, nous construisons $(m-p)$ liens d'information entre $(m-p)$ jonctions et $(m-p)$ sources d'entrées associées au vecteur $u_1(t)$ - un lien par source d'entrée. Ces liens sont conçus de telle sorte à vérifier le théorème 3.17. Conformément à l'annexe A.3. Ces liens transmettent des mesures prélevées sur le modèle bond-graph en dérivée. Ces mesures sont les dérivées de certains de certaines variables d'état du modèle en causalité intégrale. Elles sont bouclées sur les entrées de commandes associées au vecteur $u_1(t)$ par l'intermédiaire d'une matrice F_d vérifiant l'équation (A.3).

$$u_1(t) = F_d x(t) \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas général, ces variables vérifient l'équation (A.4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u_2(t) \quad (\text{A.4})$$

Les équations (A.3), (A.4) et (A.1) permettent alors de déduire l'équation d'état du modèle bouclé. Cette expression est donnée par l'équation (A.5).

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 F_d A) x(t) + (B_1 F_d B_2 + B_2) u_2(t) \quad (\text{A.5})$$

Cette équation montre que le retour d'état réalisé par les liens d'information sur le modèle bond-graph en causalité dérivée - équation (A.3) - correspond à un bouclage sur l'état du modèle bond-graph en causalité intégrale. La matrice de retour d'état F_i , utilisée à cet effet vérifie l'équation (A.6).

$$F_i = F_d \mathcal{A} \quad (\text{A.6})$$

Remarquons que dans le cas général décrit par l'équation (A.4), les variables mesurées sur le modèle en dérivée sont associées à des éléments dynamiques directement liés aux sources d'entrée $u_2(t)$ sur modèle en causalité intégrale. Dans ce cas, la matrice de commande du modèle bouclé n'est pas B_2 mais $(B_1 F_d B_2 + B_2)$ - l'équation (A.5).

Graphiquement, cela traduit le fait que des chemins directs ont été créés, sur le modèle en causalité intégrale, entre des sources d'entrée associées au vecteur $u_1(t)$ et des sources d'entrée associées au vecteur $u_2(t)$. La structure infinie du modèle en causalité intégrale - liée aux entrées de commande du vecteur $u_2(t)$ - a par conséquent pu être modifiée, rendant ce modèle non découplable par retour d'état statique régulier.

Dans la pratique, ce cas général est peu fréquent. Il se présente généralement quand, sur le modèle en causalité intégrale, les sources d'entrée associées au vecteur $u_2(t)$ attaquent non pas des éléments dynamiques mais des éléments résistifs. La puissance fournie par les sources d'entrée est alors dissipée dans ces éléments résistifs, ce qui rend ce type de configuration peu attractif.

Nous considérons donc que, dans la majorité des cas, l'équation (A.4) est en fait simplifiée de la manière suivante - équation (A.7).

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) \quad (\text{A.7})$$

L'équation d'état du modèle bouclé est alors fournie par l'équation (A.8).

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{A} + B_1 F_d \mathcal{A})x(t) + B_2 u_2(t) \quad (\text{A.8})$$

Ce modèle bouclé possède p variables d'entrée et p variables de sortie. Il est découplable avec stabilité par retour d'état ses entrées de commande - vecteur $u_2(t)$ - peuvent donc à présent être utilisées pour découpler le modèle.

A.5 Programmes Matlab

Dans cette annexe, nous présentons les programmes Matlab utilisés pour la simulation dans le chapitre 4.

1. Programme de modèle

```
function xprime=colamod(t,X,U)
% colamod - This is a nonlinear model of a distillation column with
%           NT-1 theoretical stages including a reboiler (stage 1) plus a
%           total condenser ("stage" NT). The liquid flow dynamics are
%           modelled by a simple linear relationship.
%           Model assumptions: Two components (binary separation); constant
%           relative volatility; no vapor holdup; one feed and two products;
%           constant molar flows (same vapor flow on all stages);
%           total condenser
%
%           The model is based on column A in Skogestad and Postlethwaite
%           (1996). The model has 82 states.
%
% Inputs:   t       - time in [min].
%           X       - State, the first 41 states are compositions of light
%                   component A with reboiler/bottom stage as X(1) and
%                   condenser as X(41). State X(42) is holdup in reboiler/
%                   bottom stage and X(82) is hold-up in condenser.
%           U(1)    - reflux L,
%           U(2)    - boilup V,
%           U(3)    - top or distillate product flow D,
%           U(4)    - bottom product flow B,
%           U(5)    - feed rate F,
%           U(6)    - feed composition, zF.
%           U(7)    - feed liquid fraction, qF.
%
% Outputs:  xprime - vector with time derivative of all the states

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%-----
% The following data need to be changed for a new column.
% These data are for "column A".
% Number of stages (including reboiler and total condenser):
    NT=41;
% Location of feed stage (stages are counted from the bottom):
    NF=21;
% Relative volatility
    alpha=1.5;
% Nominal liquid holdups
    M0(1)=0.5;           % Nominal reboiler holdup (kmol)
    i=2:NT-1; M0(i)=0.5*ones(1,NT-2); % Nominal stage (tray) holdups (kmol)
    M0(NT)=0.5;         % Nominal condenser holdup (kmol)
% Data for linearized liquid flow dynamics (does not apply to reboiler and
condenser):
    taul=0.063;         % time constant for liquid dynamics (min)
    F0=1;               % Nominal feed rate (kmol/min)
    qF0 = 1;           % Nominal fraction of liquid in feed
    L0=2.70629;        % Nominal reflux flow (from steady-state data)
    L0b=L0 + qF0*F0;   % Nominal liquid flow below feed (kmol/min)
    lambda=0;          % Effect of vapor flow on liquid flow ("K2-effect")
    V0=3.20629;V0t=V0+(1-qF0)*F0;% Nominal vapor flows - only needed if
lambda is nonzero
```

```

% End data which need to be changed
%-----

% Splitting the states
x=X(1:NT)'; % Liquid composition from btm to top
M=X(NT+1:2*NT)'; % Liquid hold up from btm to top

% Inputs and disturbances
LT = U(1); % Reflux
VB = U(2); % Boilup
D = U(3); % Distillate
B = U(4); % Bottoms

F = U(5); % Feedrate
zF = U(6); % Feed composition
qF = U(7); % Feed liquid fraction

% THE MODEL

% Vapor-liquid equilibria
i=1:NT-1;
y(i)=alpha*x(i)./(1+(alpha-1)*x(i));
% Total condenser
y(NT)=x(NT);

% Vapor Flows assuming constant molar flows
i=1:NT-1;
V(i)=VB*ones(1,NT-1);
i=NF:NT-1;
V(i)=V(i) + (1-qF)*F;

% Liquid flows assuming linearized tray hydraulics with time constant tau1
% Also includes coefficient lambda for effect of vapor flow ("K2-effect").
i=2:NF;
L(i) = L0b + (M(i)-M0(i))./tau1 + lambda.*(V(i-1)-V0);
i=NF+1:NT-1;
L(i) = L0 + (M(i)-M0(i))./tau1 + lambda.*(V(i-1)-V0t);
L(NT)=LT;

% Time derivatives from material balances for
% 1) total holdup and 2) component holdup

% Column
i=2:NT-1;
dMdt(i) = L(i+1) - L(i) + V(i-1) - V(i);
dMxdt(i)= L(i+1).*x(i+1) - L(i).*x(i) + V(i-1).*y(i-1) - V(i).*y(i);

% Correction for feed at the feed stage
% The feed is assumed to be mixed into the feed stage
dMdt(NF) = dMdt(NF) + F;
dMxdt(NF)= dMxdt(NF) + F*zF;

% Reboiler (assumed to be an equilibrium stage)
dMdt(1) = L(2) - V(1) - B;
dMxdt(1)= L(2)*x(2) - V(1)*y(1) - B*x(1);

% Total condenser (no equilibrium stage)
dMdt(NT) = V(NT-1) - LT - D;
dMxdt(NT)= V(NT-1)*y(NT-1) - LT*x(NT) - D*x(NT);

% Compute the derivative for the mole fractions from d(Mx) = x dM + M dx
i=1:NT;
dxdt(i) = (dMxdt(i) - x(i).*dMdt(i))./M(i);

```



```
% Output
xprime=[dxdt';dMdt'];
```

2. Programmes des données initiales

```
% Generate steady-state data for column A
% Saves data in file cola_init.mat

% Do this by simulating 20000 min with stabilized LV-model:

clear all
[t,x]=ode15s('cola_lv',[0 20000],0.5*ones(1,82));
%Xinit = x(sel(size(x),1,1),:);
lengthx=size(x); Xinit = x(lengthx(1),:);

% Nominal inputs
LT=2.70629; % Reflux
VB=3.20629; % Boilup
D=0.5; % Distillate
B=0.5; % Bottoms
F=1.0; % Feedrate
zF=0.5; % Feed composition
qF=1.0; % Feed liquid fraction
Uinit = [ LT VB D B F zF qF]';

clear x; clear t; clear LT; clear VB; clear D; clear B;
clear F; clear zF; clear qF;

save cola_init % saves in cola_init.m
```

3. Programme pour la configuration LV

```
function xprime=cola_lv(t,X)
% sample usage: [t,x]=ode15s('cola_lv',[0 5000],0.5*ones(1,82));
%
% cola_lv - Subroutine for simulation with LV-configuration.
% It calls the model colamod, and
% includes control of condenser and reboiler level
% using two P-controllers with the LV-configuration.
%
% Inputs are reflux (LT) and boilup (VB). Disturbances
% are feedrate and feed composition. These are set by directly
% altering 'cola_lv.m'. Outputs are liquid composition and
% liquid hold up for stages 1 through NT, given in x.

% Number of stages in the column
NT=41;

% Inputs and disturbances
LT=2.70629; % Reflux
VB=3.20629; % Boilup
F=1.0 + 0.00; % Feedrate
zF=0.5; % Feed composition
qF=1.0; % Feed liquid fraction

% P-Controllers for control of reboiler and condenser hold up.
KcB=10; KcD=10; % controller gains
```

```

MDs=0.5; MBs=0.5;           % Nominal holdups - these are rather small
Ds=0.5; Bs=0.5;           % Nominal flows
MB=X(NT+1); MD=X(2*NT); % Actual reboiler and condenser holdup
D=Ds+(MD-MDs)*KcD;       % Distillate flow
B=Bs+(MB-MBs)*KcB;       % Bottoms flow

% Store all inputs and disturbances
U(1)=LT; U(2)=VB; U(3)=D; U(4)=B; U(5)=F; U(6)=zF; U(7)=qF;

xprime=colamod(t,X,U);

```

4.Programme qui génère le modèle simulink

```

function [sys,x0] = colas(t,x,u,flag)
%
% Simulink interface to colamod.m
%
% Inputs:      t      - time in [min].
%              X      - State, the first 41 states are compositions of light
%                      component A with reboiler/bottom stage as X(1) and
%                      condenser as X(41). State X(42) is holdup in reboiler/
%                      bottom stage and X(82) is hold-up in condenser.
%              U(1)   - reflux L,
%              U(2)   - boilup V,
%              U(3)   - top or distillate product flow D,
%              U(4)   - bottom product flow B,
%              U(5)   - feed rate F,
%              U(6)   - feed composition, zF.
%              U(7)   - liquid feed fraction, qF.
%
% Outputs:     sys and x0 as described in the SIMULINK manual.
%              when flag is 0 sys contains sizes and x0 contains
%              initial condition.
%              when flag is 1, sys contains the derivatives,
%              and when flag is 3 sys contains outputs;
%              y(1)   - top composition,
%              y(2)   - bottom composition,
%              y(3)   - condenser holdup,
%              y(4)   - reboiler holdup,
%              y(5:45) - tray composition, y(5) is reboiler y(45) is top.

NT = 41;

if abs(flag) == 1
    % Return state derivatives.
    sys = colamod(t,x,u);
elseif abs(flag) == 3
    % Return system outputs.
    sys(1,1) = x(NT);           % Top composition.
    sys(2,1) = x(1);           % Bottom composition.
    sys(3,1) = x(2*NT);        % Holdup in condenser.
    sys(4,1) = x(NT+1);        % Holdup in reboiler.
    sys(5:NT+4,1) = x(1:NT);   % Compositions.
elseif flag == 0
    % Initialize the system
    load cola_init
    x0 = Xinit;
    sys = [2*NT, 0, NT+4, 7, 0, 0];
else
    sys = [];
end

```