

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université M'hamed Bougara de BOUMERDES



Département de Mathématique

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES DE ROBIN

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en Analyse Mathématique

par

Filali Manel

Soutenu le 14 Juillet 2021 devant le jury composé de

Seba Djamila	Prof	Univ.M.B Boumerdes	Président
Mechrouk Salima	MCA	Univ.M.B Boumerdes	Examinatrice
Karima LAOUBI	MCA	Univ.M.B Boumerdes	Encadreur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciement

En premier lieu je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Madame Laoubi Karima, je la remercie pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, je m'adresse toute ma gratitude à elle.

Je voudrais aussi remercie tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant nos études, ainsi que tous mes amies et collègues.

Je présente également mes remerciement aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté d'examiner mon travail.

En fin j'aimerais exprimer mes sincères reconnaissances envers mes très chers parents, mes soeurs et mon fiancé qui ont toujours été là pour moi, je les remercie pour leurs encouragements et leur soutien inconditionnel.



Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire étudie le problème spectral linéaire avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \delta < 2$. On donne d'abord une estimation sur la dérivée fractionnaire d'une fonction aux points extrêmes qui permet d'en déduire un principe du maximum pour le problème spectral linéaire avec les conditions aux limites de Robin. Ensuite, nous montrons une estimation des valeurs propres du problème fractionnaire pour obtenir l'existence des fonctions propres sous certaines hypothèses. Une estimation sur les solutions et un résultat d'unicité ont été établis pour le problème linéaire aux valeurs propres.

Mots clés : Équations différentielles rationnelles, principe du maximum, valeur propre, conditions aux limites de Robin.

Notation

Ensembles

\mathbb{R}

ensemble des nombres réels.

\mathbb{C}

ensemble des nombres complexes.

$C([a, b])$

l'espace des fonctions f continues sur $[a, b]$ à valeur réels.

Fonctions

$\Gamma(\alpha)$

La fonction Gamma.

Δ

opérateur laplacien.

Dérivée et intégrale

$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$

dérivée ordinaire par rapport à t d'ordre entier n .

I^α

intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

D_R^α

dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Table des matières

Introduction	4
1 Rappels et Préliminaires	7
1.1 Equations aux dérivées partielles	7
1.1.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?	7
1.1.2 Généralités sur les EDP	8
1.1.2.1 Classification des EDP	8
1.1.2.2 Ordre et linéarité d'une EDP	9
1.1.3 Conditions aux limites d'une EDP	9
1.1.3.1 Condition de Diriclet	10
1.1.3.2 Condition de Neuman	10
1.1.3.3 Condition de Robin	11
1.2 Principe du maximum	12
1.2.0.1 Principe du maximum	13
1.2.0.2 Principe du maximum fort	13
1.2.0.3 Principe du maximum faible	13
1.3 La théorie spectrale des opérateurs	13
1.4 Calcul fractionnaire	15

1.4.1	La fonction Gamma	15
1.4.2	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
1.4.3	Dérivation fractionnaire	17
1.4.3.1	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
1.4.4	Dérivée fractionnaire de Caputo	19
1.5	Espaces fonctionnels [7]	20
1.5.1	Espaces des fonctions continues	20
1.5.2	Espaces des fonction intégrables	20
1.5.3	Espace de Sobolev	21
1.5.3.1	Espace de Sobolev d'ordre 1	21
1.5.3.2	Espace de Sobolev d'ordre m	21
2	Principe du maximum	22
2.1	Estimation sur la dérivée de Riemann Liouville[9]	22
2.2	Le cas où $D_R^\delta x(t) \leq 0$	24
2.3	Principe de maximum	26
3	Application	27
3.1	Résultat d'unicité et fonctions propres	27
4	Problème linéaire spectral	30
4.1	Étude du problème linéaire spectral	30
5	Le cas où $D_R^\delta x(t) \geq 0$	34
	Conclusion	41
	Bibliographie	42

Introduction

Dans ce mémoire, on va étudier l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t) = \lambda\phi(t, x) \quad t \in [a, b] \quad (1)$$

avec les conditions aux limites de Robin

$$x(a) - \eta_1 x'(a) = 0 \text{ and } x(b) + \eta_2 x'(b) = 0, \quad \eta_1, \eta_2 \geq 0 \quad (2)$$

où $\phi(t, x)$ est une fonction régulière, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[a, b]$, $1 < \delta < 2$, et D_R^δ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre δ .

Ce problème a été étudié par Al-Refai et al dans [9] et [10] avec les dérivées fractionnaires de Caputo, Caputo-Fabrizio et Atangana-Baleanu. L'objectif principal de ce travail est d'étudier les solutions du problème ci-dessus lorsque la dérivée fractionnaire est de type Riemann-Liouville, en s'appuyant sur certains principes de maximum. Ces derniers sont des outils analytiques importants pour étudier les problèmes aux limites fractionnaires. Plusieurs problèmes d'existence et d'unicité pour les équations de diffusion fractionnaire linéaires et non linéaires ont été résolus par le principe du maximum.

Les conditions aux limites de Robin sont une combinaison pondérée des conditions aux limites de Dirichlet et des conditions aux limites de Neumann et apparaissent dans les problèmes d'électromagnétisme et en problèmes de chaleur.

Les problèmes de valeurs propres fractionnaires avec des conditions aux limites mixtes ont été utilisés au cours des dernières décennies, pour la modélisation de nombreux processus physiques et chimiques et en ingénierie.

Le travail présenté dans ce mémoire étudie le problème spectral linéaire avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \delta < 2$, il contient cinq chapitres répartis comme suit :

Chapitre I :

On commence tout d'abord au premier chapitre par présenter brièvement certaines notions utilisées tout le long de ce mémoire, à savoir équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites, principe du maximum, fonctions spéciales, espaces fonctionnels, quelques notions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs et en dernier la dérivation fractionnaire.

Chapitre II :

Le second chapitre est consacré à l'étude d'une estimation sur la dérivée fractionnaire d'une fonction aux points extrêmes qui permet d'en déduire un principe du maximum.

Chapitre III :

Dans le troisième chapitre, nous présentons un lemme de positivité pour une fonction négative croissante et obtenir un principe de maximum pour le problème des valeurs propres fractionnaires linéaires avec des conditions aux limites de Robin.

Chapitre IV :

Au chapitre quatre nous utilisons les résultats ci-dessus pour discuter un résultat d'unicité et une estimation sur la norme des solutions pour la même fonction négative croissante.

Chapitre V :

Ce chapitre résume le travail fait dans les deux derniers chapitres pour une fonction négatives décroissante.

Rappels et Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et théorèmes utiles le long de ce mémoire. (Voir [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])

1.1 Equations aux dérivées partielles

1.1.1 Qu'est-ce q'une EDP ?

Soit u une fonction de plusieurs variables indépendantes (x, y, \dots) en nombre fini. Une équation aux dérivées partielles (**EDP** en abrégé) pour la fonction u est une relation qui lie :

- Les variables indépendantes (x, y, \dots) .
- La fonction "inconnue" u .
- Un nombre fini de dérivées partielles de u .

$$\Rightarrow F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \dots\right) = 0$$

1.1.2 Généralités sur les EDP

1.1.2.1 Classification des EDP

On distingue trois grandes catégories d'EDP :

- Les équations de type **elliptique** qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps).

Le prototype d'équation elliptique est **l'équation de Laplace**

$$-\Delta u = f$$

d'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnée f .

- Les équations de type **parabolique**, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. **L'équation de la chaleur** en est un prototype :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f .

- Les équations de type **hyperbolique** qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

- **L'équation du transport**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'inconnue $u(x, t)$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

- **L'équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f .

D'ou vient le nom elliptique, parabolique, hyperbolique ?

Plaçons nous dans le cas particulier des équations de deuxième ordre dans \mathbb{R}^2 . L'inconnue est la fonction $u(x, y)$, qui satisfait l'équation

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Pour simplifier, on suppose les coefficients A, B, \dots, G constants. Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est dite hyperbolique.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est dite parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est dite elliptique.

1.1.2.2 Ordre et linéarité d'une EDP

Définition 1.1.1. On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles dans l'EDP.

Définition 1.1.2. Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément à la puissance 1 dans l'EDP, celle-ci est dite **linéaire**.

Exemple 1.1.1. Soit u une fonction de deux variables.

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ est une EDP linéaire de premier ordre.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ est une EDP non-linéaire de premier ordre.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ est une EDP non-linéaire de deuxième ordre.

1.1.3 Conditions aux limites d'une EDP

Se donner les conditions aux limites, c'est donner des renseignements sur la fonction u ou ses dérivées sur le bord du domaine. Ils peuvent être de différents types, voyons les principaux :

1.1.3.1 Condition de Diriclet

En mathématiques, une condition aux limites de **Dirichlet** est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine.

Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

où Δ est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$.

1.1.3.2 Condition de Neuman

En mathématiques, une condition aux limites de **Neumann** est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine.

Pour une équation différentielle, par exemple :

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$. La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{\text{grad}} y(x) \cdot \vec{n}(x)$$

1.1.3.3 Condition de Robin

En mathématique, une condition aux limites de **Robin** (ou de troisième type) est un type de condition aux limites. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine. Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Si Ω est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine, la condition aux limites de Robin est de la forme :

$$au + b \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où a , b et g sont des fonctions définies sur $\partial\Omega$. Ici, u est la solution définie dans Ω que l'on cherche à déterminer et $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale

extérieure sur le bord.

En dimension un, si, par exemple, $\Omega = [0, 1]$, la condition aux limites de Robin s'écrit sous la forme :

$$au(0) - bu'(0) = g(0),$$

$$au(1) + bu'(1) = g(1).$$

1.2 Principe du maximum

Définition 1.2.1. Le principe du maximum est une propriété des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, de type elliptique ou parabolique qui dit qu'une fonction solution d'une telle équation sur un domaine atteint son maximum sur la frontière du domaine. Cela nous amène à parler du principe du maximum des opérateurs elliptiques et celui des opérateurs paraboliques.

Définition 1.2.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , Soit L un opérateur du deuxième ordre :

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_i + c(x)$$

avec a_{ij} , b_i et c appartient à $C^0(\bar{\Omega})$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. On suppose aussi que $a_{ij} = a_{ji}$.

L'opérateur L est dit :

- **elliptique** dans Ω si pour tout $x \in \Omega$, $\exists \lambda(x) > 0$ tel que :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

- **strictement elliptique** dans Ω si pour tout $x \in \Omega$, $\exists \lambda > 0$ tel que :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

- **uniformément elliptique** dans Ω si pour tout $x \in \Omega$, $\exists \lambda, \Lambda > 0$ tel que :

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

1.2.0.1 Principe du maximum

Soit Ω un ouvert dans \mathbb{R}^n , L un opérateur elliptique avec $c(x) \leq 0$ dans Ω . Toute fonction $u \in C^2(\Omega)$ qui satisfait : $Lu > 0$ n'atteint pas un non-négatif maximum dans Ω .

1.2.0.2 Principe du maximum fort

Theorème 1.2.1. Supposons que Ω est un borné dans \mathbb{R}^n , L un opérateur strictement elliptique avec $c(x) \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$. Toute fonction $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ qui satisfait :

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est positive ou nulle dans $\bar{\Omega}$.

Theorème 1.2.2. Soit Ω un ouvert dans \mathbb{R}^n , L un opérateur strictement elliptique avec $c(x) \leq 0$. Si $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et $Lu \geq 0$ alors ; soit $u = \sup_{\Omega} u$ ou bien u n'atteint pas un non-négatif maximum.

1.2.0.3 Principe du maximum faible

Theorème 1.2.3. Supposons que Ω est un borné dans \mathbb{R}^n , L un opérateur strictement elliptique avec $c(x) \leq 0$. Si $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et $Lu \geq 0$, alors u atteint un non-négatif maximum sur $\partial\Omega$.

Pour plus de détails concernant le principe de maximum veuillez consulter les références [2] et [3].

1.3 La théorie spectrale des opérateurs

Nous allons rappeler, sans démonstration, quelques définitions et théorèmes généraux sur la théorie spectrale des opérateurs.

Soit E un espace de Banach et T un opérateur linéaire continu de E dans lui même. On notera I l'opérateur identité de E dans E .

Définition 1.3.1.

1. Ensemble résolvant de T l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T\lambda I \text{ est inversible}\}$$

Un élément de $\rho(T)$ est appelé valeur résolvante.

2. Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(T)$ de T au point λ par :

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

3. Le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T\lambda I \text{ non inversible}\}$$

C'est-à-dire $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Un élément de $\sigma(T)$ est une valeur spectrale de T .

4. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **une valeur propre** de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $V_p(T)$ donnés par

$$V_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \quad / \quad \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

Remarque 1.3.1.

1. Les définitions ci-dessus restent valables même si E n'est pas un Banach.
2. On a toujours $V_p(T) \subset \rho(T)$.

Proposition 1.3.1. (Identité de la résolvant). Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

Alors on a :

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

De plus, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda$ est dérivable sur $\rho(T)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2$$

Définition 1.3.2. (Rayon spectral) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, On définit le rayon spectral $r(T)$ de T par :

$$r(T) := \sup \{ |\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(T) \}$$

Si $\sigma(T) = \emptyset$, par convention, on pose $r(T) = 0$.

1.4 Calcul fractionnaire

1.4.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Cette fonction généralise le factoriel $n!$ et lui permet de prendre des valeurs non entier.

Définition 1.4.1. On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Lemme 1.4.1. La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^*

Propriété 1.4.1. Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

En effet, $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt$.

Pour $0 < a < b$ et en intègre par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-t} t^\alpha dt &= \left[-t^\alpha e^{-t} \right]_a^b + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{a^\alpha}{e^a} - \frac{b^\alpha}{e^b} + \alpha \int_a^b e^{-t} t^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Si $a \longrightarrow 0^+$ et $b \longrightarrow \infty$ on trouve :

$$\Gamma(\alpha + 1) = 0 - 0 + \alpha \Gamma(\alpha).$$

Propriété 1.4.2. La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Remarque 1.4.1. La fonction Gamma peut également être représentée par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n)}$$

1.4.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale :

$$I^{(1)}f(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$$

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau,$$

d'après le théorème du Fubini on trouve ;

$$I^{(2)}f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t - \tau)^{2-1} f(\tau)d\tau$$

En répétant la même opération n fois on obtient :

$$I^{(n)}f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} (t - \tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{(n - 1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \text{ pour tout entier } n.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n - 1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-entiers, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.4.2. Soit $\Omega = [a, b]$, un intervalle fini sur \mathbb{R} , f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la

fonction f de borne inférieure a est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad -\infty \leq a \leq t < +\infty$$

Où Γ est la fonction Gamma.

Cas particulier : $I^0 f(t) = f(t)$ (i.e I^0 est l'opérateur identité).

Proposition 1.4.1.

1.

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha, \beta > 0$$

2.

$$\frac{d}{dx} (I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha-1} f(x), \quad \alpha > 0$$

3.

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}$$

1.4.3 Dérivation fractionnaire

1.4.3.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre réel $\alpha > 0$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} avec $f \in H^2([a, b])$ est définie par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= D^n \{I_a^{n-\alpha} f(t)\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$ ($[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel).

Cas particuliers

1. $D_R^0 f(t) = D^1 \{I^1 f(t)\} = f(t)$ (i.e D_R^0 est l'opérateur identité).

2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n :

$$D_R^n f(t) = D^{n+1} I_f^{n+1-n}(t) = D^{n+1} I_{a^+}^1 f(t) = D^n f(t).$$

3. Si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$D_R^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau$$

Quelques propriétés

Les dérivées fractionnaires au sens de R-L ont les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et c_2 appartiennent à \mathbb{R} alors :

$D_R^\alpha(c_1 f + c_2 g)$ existe, et on a :

$$D_R^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 D_R^\alpha f(t) + c_2 D_R^\alpha g(t)$$

2. Soient $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Si les deux dérivées fractionnaires $D_R^\alpha f(t)$, $D_R^m f(t)$ existent, nous avons :

$$D_R^m D_R^\alpha f(t) = D_R^{\alpha+m} f(t)$$

Dérivées fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. La fonction constante $f(t) = C$.

Il suffit d'appliquer la définition (1.1)

$$\begin{aligned} D_R^\alpha C &= D^n \{I^{n-\alpha} C\} \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha} \end{aligned} \tag{1.2}$$

On a

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)(t-a)^{-\alpha} \tag{1.3}$$

et comme on a

$$\Gamma(n - \alpha + 1) = (n - \alpha)(n - \alpha - 1)\dots\Gamma(1 - \alpha) \quad (1.4)$$

Par substitution de (1.3) et (1.4) dans (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} D_R^\alpha C &= \frac{C(n - \alpha)(n - \alpha - 1)\dots(1 - \alpha)(t - a)^{-\alpha}}{(n - \alpha - 1)\dots(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)}(t - a)^{n - \alpha} \end{aligned}$$

Donc

$$D_R^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)}(t - a)^{n - \alpha}$$

C'est-à-dire que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une constante n'est pas nulle.

1.4.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Dans une modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de R-L mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires à la borne inférieure de l'intervalle. Caputo a utilisé une approche pour éviter ce problème. Pour $0 \leq n - 1 \leq \alpha < n$ et une fonction f de $H^2([a, b])$ telle que $\frac{d^n}{dt^n} f(t) \in L[a, b]$; La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction f est donnée par

$$D_c^\alpha f(t) = I^{n - \alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau$$

• La relation entre les dérivés de Riemann-Liouville et Caputo est donnée comme suit : supposons que f est une fonction telle que $D_R^\alpha f(t)$ et $D_c^\alpha f(t)$ existent, alors :

$$\begin{aligned} D_R^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{D_R^\alpha (t - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\ D_R^\alpha (t - a)^k &= \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha} \end{aligned}$$

Les deux dérivées sont égales dans le cas où $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

1.5 Espaces fonctionnels [7]

1.5.1 Espaces des fonctions continues

Définition 1.5.1. Soit $\Omega = [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonction continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_C := \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.5.2. Soit $\Omega = [a, b]$ et α tel que $0 < \alpha < 1$ On désigne par $C^\alpha(\Omega)$ l'espace :

$$C^\alpha(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad |f(t) - f(t-h)| = o(h^\alpha)\}$$

1.5.2 Espaces des fonction intégrables

Définition 1.5.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace L^p comme suit :

1. Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables sur Ω c'est-à-dire :

$$f \in L^p(\Omega) \iff \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \quad f \text{ mesurable}$$

2. Pour $p = +\infty$, l'espace L^∞ est l'espace des fonctions f tel que : f est mesurable et presque partout bornée sur Ω .

Theorème 1.5.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ définit par :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

2. Pour $p = +\infty$, l'espace L^∞ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définit par :

$$\|f\| := \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}$$

1.5.3 Espace de Sobolev

1.5.3.1 Espace de Sobolev d'ordre 1

Soit p un élément de $[1, +\infty]$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 noté $W^{1,p}$ (resp $H^1(\Omega)$ si $p = 2$) l'ensemble :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad / \quad \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée au sens de distribution.

- L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$u \mapsto \|u\| = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1, +\infty[\\ \max \left(\|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \quad 1 \leq i \leq n \right) & p = +\infty \end{cases}$$

est un espace de Banach.

1.5.3.2 Espace de Sobolev d'ordre m

Soit p un réel, $1 \leq p \leq +\infty$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et m un entier $m \geq 2$. On appelle espace de Sobolev d'ordre m noté $W^{m,p}$ (resp $H^m(\Omega)$ si $p = 2$) l'ensemble :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad / \quad \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega)\}$$

- L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\begin{cases} \|u\| = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1, +\infty[\\ \|u\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty & p = +\infty \end{cases}$$

$D^\alpha u$ la dérivée au sens de distribution.

Chapitre 2

Principe du maximum

Dans ce chapitre, on présente un résultat négatif qui sera utilisé dans la suite de ce mémoire. Pour ceci, on donne d'abord une estimation sur la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \delta < 2$.

2.1 Estimation sur la dérivée de Riemann Liouville[9]

Lemme 2.1.1. Soit une fonction $h \in C^{1-\alpha}[a, b]$ vérifiant

$$h(t) \geq 0, \quad t \in]a, t_1], \quad h(t_1) = 0, \quad a < t_1 < b$$

alors,

$$D_R^\alpha h(t_1) \leq 0 \quad 0 < \alpha < 1$$

Preuve du Lemme

Soit $r(t) = \int_0^t k(t-s)h(s)ds$ où $k(s) = s^{-\alpha}$. On a :

$$\begin{aligned} r(t_1 + \Delta t) - r(t_1) &= \int_0^{t_1 + \Delta t} k(t_1 + \Delta t - s)h(s)ds - \int_0^{t_1} k(t_1 - s)h(s)ds \\ &= \int_0^{t_1} k(t_1 + \Delta t - s)h(s)ds + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} k(t_1 + \Delta t - s)h(s)ds - \int_0^{t_1} k(t_1 - s)h(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{t_1} (k(t_1 + \Delta t - s) - k(t_1 - s)) h(s) ds + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} k(t_1 + \Delta t - s) h(s) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Prouvons maintenant que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_1 + \Delta t) - r(t_1)}{\Delta t} \leq 0 \quad (2.1)$$

On a $t_1 + \Delta t - s > t_1 - s$ (car $\Delta > 0$) ce qui implique $k(t_1 + \Delta t - s) < k(t_1 - s)$ (car k est décroissante).

On a aussi $h(t) \geq 0$ pour tout $t \in (a, b)$. Donc

$$I_1 = \int_0^{t_1} (k(t_1 + \Delta t - s) - k(t_1 - s)) h(s) ds \leq 0 \quad (2.2)$$

D'autre part $h(t)$ est continu sur $[t_1, t_1 + \Delta t]$. Puisque $h(t_1) = 0$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\Delta > 0$ tel que

$$|h(t)| \leq \epsilon(1 - \alpha), \quad \forall |t - t_1| < \Delta$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} k(t_1 + \Delta t - s) h(s) ds \leq \epsilon(1 - \alpha) \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} k(t_1 + \Delta t - s) ds \\ &= \epsilon(1 - \alpha) \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} (t_1 + \Delta t - s)^{-\alpha} ds = \epsilon(\Delta)^{1-\alpha} < \epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$I_2 \leq 0 \quad (2.3)$$

Combinant les équations (2.2) et (2.3) avec $\Delta t \rightarrow 0$ pour prouver le résultat dans l'équation (2.1).

l'objectif de cette section est de trouver une estimation sur la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \delta < 2$ en utilisant la dérivation classique si-dessus.

On a

$$D_R^\delta x(t) = \frac{d}{dt} D_0^{\delta-1} x(t)$$

alors pour $D_0^{\delta-1} x(t) \leq 0$, on distingue deux cas :

$$1. \frac{d}{dt_0} D_0^{\delta-1} x(t_0) = D_R^\delta x(t_0) \leq 0$$

$$2. \frac{d}{dt_0} D_0^{\delta-1} x(t_0) = D_R^\delta x(t_0) \geq 0$$

Le travail sera donc divisé en deux parties. Dans la première partie, on étudie le principe du maximum pour la fonction "dérivée de Riemann" négative croissante avec quelques applications.

La deuxième partie sera consacrée au cas où la dérivée de Riemann d'ordre $\delta - 1$ est négative décroissante. On commence par le premier cas.

2.2 Le cas où $D_R^\delta x(t) \leq 0$

Theorème 2.2.1. Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$, atteint son minimum en $t_0 \in (a, b)$ alors

$$D_R^\delta x(t_0) \leq \frac{(t_0 - 1)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} (\delta - 1) x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

Démonstration

Considérons la fonction $h(t) = x(t) - x(t_0)$. Il est clair que

$$h(t) \geq 0 \quad h(t_0) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

Calculons maintenant sa dérivée fractionnaire en sens du Riemann-Liouville

$$\begin{aligned} D_R^\delta h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2 - \delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} h(s) ds \quad 1 < \delta < 2 \\ &= \frac{d}{dt_0} \left(\frac{1}{\Gamma(2 - \delta)} \frac{d}{dt_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} h(s) ds \right) \quad 0 < \delta - 1 < 1 \\ &= \frac{d}{dt_0} D_R^{\delta-1} h(t_0) \quad 0 < \delta - 1 < 1 \end{aligned}$$

Comme la fonction h vérifie les conditions du lemme 2.1.1 et $0 < \delta - 1 < 1$

on a $D_R^{\delta-1}h(t_0) \leq 0$.

Donc pour tout $1 < \delta < 2$

$$\begin{aligned}
 D_R^\delta h(t_0) &\leq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0-s)^{1-\delta} h(s) ds &\leq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0-s)^{1-\delta} (x(s) - x(t_0)) ds &\leq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0-s)^{1-\delta} x(s) ds &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0-s)^{1-\delta} x(t_0) ds \\
 D_R^\delta x(t_0) &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} x(t_0) \left[\frac{1}{(2-\delta)} (t_0-s)^{2-\delta} \right]_a^{t_0} \\
 D_R^\delta x(t_0) &\leq -\frac{x(t_0)}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \left[\frac{1}{(2-\delta)} (t_0-s)^{2-\delta} \right]
 \end{aligned}$$

D'où le résultat ;

$$D_R^\delta x(t_0) \leq -\frac{(t_0-1)^{-\delta}}{\Gamma(2-\delta)} (1-\delta)x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

En appliquant des étapes analogues pour $-x$, nous avons le résultat suivant.

Theorème 2.2.2. Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$, atteint son maximum en $t_0 \in [a, b]$ alors

$$D_R^\delta x(t_0) \geq -\frac{(t_0-1)^{-\delta}}{\Gamma(2-\delta)} (\delta-1)x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

De plus, si $x(t) \leq 0$ on a $D_R^\delta x(t_0) \geq 0$.

considérons maintenant l'opérateur fractionnaire linéaire suivant :

$$(P_\delta x)x(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t), \quad t \in [a, b], \quad 1 < \delta < 2 \quad (2.4)$$

avec les conditions aux limites du Robin

$$J_1(x) = x(a) - \eta_1 x'(a) \quad J_2(x) = x(b) + \eta_2 x'(b) \quad (2.5)$$

Pour le problème (2.4) , (2.5) on a le résultat du principe du maximum suivant :

2.3 Principe de maximum

Lemme 2.3.1. Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ tel que

$$(P_\delta x)x(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t) \leq 0, \quad t \in [a, b] \quad (2.6)$$

$$J_1(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad J_2(x) \leq 0 \quad (2.7)$$

où $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C([a, b])$ et $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ alors

$$x(t) \leq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Preuve

Supposons par l'absurde que le résultat n'est pas vrai.

La fonction $x(t)$ atteint un maximum absolu en t_0 avec $x(t_0) > 0$ et $x'(t_0) = 0$.

D'après le théorème 2.2.2 on a :

$$\begin{aligned} (P_\delta x)(t_0) &= D_R^\delta x(t_0) + \varphi_1(t_0)x'(t_0) + \varphi_2(t_0)x(t_0) \\ &\geq -\frac{(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)}(\delta - 1)x(t_0) \\ &= x(t_0) \left[\varphi_2(t_0) - (\delta - 1)\frac{(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} \right] \end{aligned}$$

Comme

$$\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)}$$

alors $(P_\delta x)(t_0) > 0$ ce qui contredit l'inégalité fractionnaire (2.4).

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats du principe de maximum obtenus dans le chapitre précédent pour établir un résultat d'unicité.

3.1 Résultat d'unicité et fonctions propres

Theorème 3.1.1. Si $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ pour tout $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ et $t \in [a, b]$, le système (1) - (2) admet au plus une solution.

Preuve

Soit λ telle que $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$. Supposons qu'il existe deux solutions différentes x_1 et x_2 correspondant à λ et vérifiant le système (1) - (2). On a

$$D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t)x_1'(t) + \varphi_2(t)x_1(t) = \lambda \phi(t, x_1), \quad t \in [a, b] \quad (3.1)$$

$$D_R^\delta x_2(t) + \varphi_1(t)x_2'(t) + \varphi_2(t)x_2(t) = \lambda \phi(t, x_2), \quad t \in [a, b] \quad (3.2)$$

Soustrayons (3.2) de (3.1)

$$D_R^\delta (x_1 - x_2)(t) + \varphi_1(t)(x_1 - x_2)'(t) + \varphi_2(t)(x_1 - x_2)(t) = \lambda(\phi(t, x_1) - \phi(t, x_2)) \quad (3.3)$$

utilisons le théorème des accroissements finis

$$D_R^\delta(x_1-x_2)(t) + \varphi_1(t)(x_1-x_2)'(t) + \varphi_2(t)(x_1-x_2)(t) = \lambda \frac{\partial \phi(t, \zeta)}{\partial x}(x_1-x_2) \quad x_1 < \zeta < x_2$$

posons maintenant $\theta = x_1 - x_2$ pour obtenir

$$D_R^\delta \theta(t) + \varphi_1(t) \theta'(t) + \left[\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, \zeta)}{\partial x} \right] \theta(t) = 0 \quad x_1 < \zeta < x_2 \quad (3.4)$$

Comme θ vérifie les conditions (2) et $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ alors $\theta \leq 0$ selon le résultat du Lemme (2.3.1) .

Il est clair que (3.4) est vérifié pour $-\theta$, alors $-\theta \leq 0$. Nous avons donc $\theta = 0$

Corollaire 3.1.1. Considérons le problème spectral (1) - (2) avec $\phi(t, 0) = 0$. Si $\bar{x}(t) \neq 0$ est la fonction propre associée à la valeur propre $\bar{\lambda}$, nous avons les conditions suivants de l'existence d'une fonction propre

1. S'il existe une constante négative ς_1 telle que $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \leq \varsigma_1 < 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$ alors $\bar{\lambda} \leq \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$
2. S'il existe une constante positive ς_1 telle que $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \varsigma_1 > 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$ alors $\bar{\lambda} \geq \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$

Preuve

(1) Si $\bar{\lambda} > \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$, alors $\bar{\lambda} > \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$ pour tout $t \in [a, b]$. Comme $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} < 0$ on a $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} > 0$, alors selon le théorème (3.1.1) le problème spectral admet au plus une solution. Comme $\phi(t, 0) = 0$, il est clair que $x = 0$ vérifie le problème (1) - (2). On en déduit que l'unique solution du problème est la solution trivial ce qui contredit le fait que $\bar{x} \neq 0$.

(2) Dans ce cas, on suppose que $\bar{\lambda} < \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$, alors $\bar{\lambda} < \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$

pour tout $t \in [a, b]$. Comme

$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} < 0$ on a $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} > 0$, par la même procédure, nous concluons

que, le problème spectral n'a que la solution triviale qui est en contradiction avec le fait que $\bar{x} \neq 0$.

Problème linéaire spectral

4.1 Étude du problème linéaire spectral

Considérons le problème linéaire spectral suivant

$$(P_\delta x)(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t) = \lambda\phi(t), \quad t \in [a, b] \quad (4.1)$$

$$J_1(x) = x(a) - \eta_1 x'(a) = 0 \quad \text{et} \quad J_2(x) = x(b) - \eta_2 x'(b) = 0 \quad (4.2)$$

Lemme 4.1.1. Soient $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ deux fonction continue sur $[a, b]$ avec $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ et $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ une solution de

$$(P_\delta x)x(t) = \lambda\phi(t, x), \quad t \in [a, b], \quad 1 < \delta < 2$$

$$J_1(x) = 0 \quad J_2(x) = 0$$

Alors on a l'estimation suivante sur x

$$\|x\|_{[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \leq \widetilde{M} = \sup_{t \in [a,b]} \left\{ \frac{|\lambda\phi(t) + A|}{\varphi_2(t)} \right\} \quad (4.3)$$

$$-A = \inf_{t \in [a,b]} \left\{ \frac{1 - \delta}{\Gamma(2 - \delta)} t^{-\delta} \right\}, \quad 1 < \delta < 2$$

Preuve

Soit $\tilde{M} = \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{|\lambda\phi(t) + A}{\varphi_2(t)} \right\}$ alors

$$\tilde{M} \geq \left\{ \frac{|\lambda\phi(t) + A}{\varphi_2(t)} \right\}, \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\tilde{M}\varphi_2(t) - |\lambda||\phi(t)| - A \geq 0$$

donc

$$-\tilde{M}\varphi_2(t) + |\lambda||\phi(t)| + A \leq 0 \tag{4.4}$$

Soit

$$x_1(t) = -\tilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda}x(t)$$

on a

$$\begin{aligned} (P_\delta x_1)(t) &= D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t)x_1'(t) + \varphi_2(t)x_1(t) \\ &= D_R^\delta(-\tilde{M}) - \varphi_2(t)\tilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= -D_R^\delta(\tilde{M}) - \varphi_2(t)\tilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= -\tilde{M} \frac{1-\delta}{\Gamma(2-\delta)} t^{-\delta} - \varphi_2(t)\tilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &\leq - \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{1-\delta}{\Gamma(2-\delta)} ct^{-\delta} \right\} - \varphi_2(t)\tilde{M} + |\lambda|\phi(t), c \in \mathbb{R}_*^+ \\ &\leq A - \tilde{M}\varphi_2(t) + |\lambda|\phi(t) \\ &\leq A - \tilde{M}\varphi_2(t) + |\lambda||\phi(t)| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $J_1(x_1) = J_2(x_2) = -\tilde{M} \leq 0$, en utilisant le résultat prouvé dans le lemme 2.3.1, on obtient

$$x_1(t) \leq 0$$

Par conséquent

$$\frac{|\lambda|}{\lambda}x(t) \leq \tilde{M} \tag{4.5}$$

En appliquant les même étapes pour

$$x_2(t) = -\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}x(t)$$

on a :

$$\begin{aligned} (P_\delta x_1)(t) &= D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t)x_1'(t) + \varphi_2(t)x_1(t) \\ &= D_R^\delta(-\widetilde{M}) - \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= -D_R^\delta(\widetilde{M}) - \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= -\widetilde{M} \frac{1-\delta}{\Gamma(2-\delta)}t^{-\delta} - \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &\leq A - \widetilde{M}\varphi_2(t) - |\lambda|\phi(t) \\ &\leq A - \widetilde{M}\varphi_2(t) + |\lambda||\phi(t)| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

En appliquant les conditions (4.2)

$$J_1(x_1) = J_2(x_2) = -\widetilde{M} \leq 0$$

Utilisant maintenant le lemme (2.3.1) pour obtenir

$$x_2(t) \leq 0$$

Par conséquent

$$\frac{|\lambda|}{\lambda}x(t) \geq -\widetilde{M} \tag{4.6}$$

L'estimation (4.3) découle facilement de (4.5) et (4.6).

Lemme 4.1.2. Soient x_1, x_2 deux fonction de $C^{2-\delta}(a, b)$ qui vérifient le problème (4.1)-(4.2) c à d :

$$(P_\delta x_1)(t) = \lambda_1 \phi_1(t), \quad t \in [a, b] \quad 1 < \delta < 2 \tag{4.7}$$

$$J_1(x_1) = 0 \quad , \quad J_2(x_1) = 0 \tag{4.8}$$

et

$$(P_\delta x_2)(t) = \lambda_2 \phi_2(t), \quad t \in [a, b] \quad 1 < \delta < 2 \quad (4.9)$$

$$J_1(x_2) = 0 \quad , \quad J_2(x_2) = 0$$

où $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t) \in C([a, b])$ et $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$.

Si $\lambda_1 \phi_1(t) \geq \lambda_2 \phi_2(t)$, $\forall t \in [a, b]$, alors

$$x_1(t) \geq x_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

Preuve

Posons $\theta(t) = x_2(t) - x_1(t)$, $a \leq t \leq b$ et soustrayons (4.7) de (4.9)

$$\begin{aligned} (P_\delta \theta)(t) &= D_R^\delta \theta(t) + \varphi_1(t) \theta'(t) + \varphi_2(t) \theta(t) \\ &= \lambda_2 \phi_2(t) - \lambda_1 \phi_1(t) \leq 0 \end{aligned}$$

On a $J_1(\theta) = J_1(x_1 - x_2) = 0$ et $J_2(\theta) = J_2(x_1 - x_2) = 0$, d'après lemme (2.3.1) on trouve $\theta(t) \leq 0$, par suite

$$x_2(t) \leq x_1(t).$$

Chapitre 5

Le cas où $D_R^\delta x(t) \geq 0$

Ce chapitre résume le travail fait dans les deux derniers chapitres pour une fonction négatives décroissante.

Theorème 5.0.1 (Principe du minimum). Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$, atteint son minimum en $t_0 \in (a, b)$ alors

$$D_R^\delta x(t_0) \geq \frac{(t_0 - 1)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} (\delta - 1)x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

Démonstration

Considérons la fonction $h(t) = x(t) - x(t_0)$ pour $t \in (a, b)$ et on calcule sa dérivée au sens du Riemann-Liouville

$$\begin{aligned} D_R^\delta h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2 - \delta)} \frac{d^2}{dt_0^2} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} h(s) ds \quad 1 < \delta < 2 \\ &= \frac{d}{dt_0} \left(\frac{1}{\Gamma(2 - \delta)} \frac{d}{dt_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} h(s) ds \right) \quad 0 < \delta - 1 < 1 \\ &= \frac{d}{dt_0} D_0^{\delta-1} h(t_0) \quad 0 < \delta - 1 < 1 \end{aligned}$$

Comme la fonction h vérifie les condition du lemme 2.1.1

on a

$$D_0^{\delta-1} h(0) \leq 0$$

donc pour tout $1 < \delta < 2$

$$\begin{aligned}
 D_R^\delta h(t_0) &\geq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} h(s) ds &\geq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} (x(s) - x(t_0)) ds &\geq 0 \\
 \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} x(s) ds &\geq \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \int_a^{t_0} (t_0 - s)^{1-\delta} x(t_0) ds \\
 D_R^\delta x(t_0) &\geq \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} x(t_0) \left[\frac{1}{(2-\delta)} (t_0 - s)^{2-\delta} \right]_a^{t_0} \\
 D_R^\delta x(t_0) &\geq -\frac{x(t_0)}{\Gamma(2-\delta)} \frac{d^2}{d^2 t_0} \left[\frac{1}{(2-\delta)} (t_0 - s)^{2-\delta} \right]
 \end{aligned}$$

D'où le résultat ;

$$D_R^\delta x(t_0) \geq -\frac{(t_0 - 1)^{-\delta}}{\Gamma(2-\delta)} (1 - \delta)x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

En appliquant des étapes analogues pour x , nous avons le résultat suivant.

Theorème 5.0.2. Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$, atteint son maximum en $t_0 \in (a, b)$ alors

$$D_R^\delta x(t_0) \leq -\frac{(t_0 - 1)^{-\delta}}{\Gamma(2-\delta)} (\delta - 1)x(t_0) \quad 1 < \delta < 2$$

De plus, si $x(t) \geq 0$ on a $D_R^\delta x(t_0) \leq 0$.

considérons maintenant l'opérateur fractionnaire linéaire suivant :

$$(P_\delta x)x(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t), \quad t \in [a, b], \quad 1 < \delta < 2 \quad (5.1)$$

avec les conditions aux limites du Robin

$$J_1(x) = x(a) - \eta_1 x'(a) \quad J_2(x) = x(b) + \eta_2 x'(b) \quad (5.2)$$

Pour le problème (5.1) , (5.2) on a le résultat du **principe du maximum** suivant :

Lemme 5.0.1. Soit une fonction $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ tel que

$$(P_\delta x)x(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t) \geq 0, \quad t \in [a, b] \quad (5.3)$$

$$J_1(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad J_1(x) \geq 0 \quad (5.4)$$

où $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C([a, b])$ et $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ Alors

$$x(t) \leq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Application

Theorème 5.0.3. Si $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ pour tout $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ et $t \in [a, b]$, le système (1) - (2) admet au plus une solution.

Preuve

Soit λ telle que $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$. Supposons qu'il existe deux solutions différentes x_1 et x_2 correspondant à λ et vérifiant le système (1) - (2). On a

$$D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t)x_1'(t) + \varphi_2(t)x_1(t) = \lambda \phi(t, x_1), \quad t \in [a, b] \quad (5.5)$$

$$D_R^\delta x_2(t) + \varphi_1(t)x_2'(t) + \varphi_2(t)x_2(t) = \lambda \phi(t, x_2), \quad t \in [a, b] \quad (5.6)$$

Soustrayons (5.6) de (5.5)

$$D_R^\delta (x_1 - x_2)(t) + \varphi_1(t)(x_1 - x_2)'(t) + \varphi_2(t)(x_1 - x_2)(t) = \lambda(\phi(t, x_1) - \phi(t, x_2)) \quad (5.7)$$

utilisons le théorème des accroissements finis

$$D_R^\delta (x_1 - x_2)(t) + \varphi_1(t)(x_1 - x_2)'(t) + \varphi_2(t)(x_1 - x_2)(t) = \lambda \frac{\partial \phi(t, \zeta)}{\partial x} (x_1 - x_2) \quad x_1 < \zeta < x_2$$

posons maintenant $\theta = x_1 - x_2$ pour obtenir

$$D_R^\delta \theta(t) + \varphi_1(t)\theta'(t) + \left[\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, \zeta)}{\partial x} \right] \theta(t) = 0 \quad x_1 < \zeta < x_2 \quad (5.8)$$

Comme θ vérifie les condition (2) et $\varphi_2(t) - \lambda \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ alors $\theta \geq 0$ selon le résultat du Lemme (5.0.1) .

Il est clair que (5.8) est vérifié pour $-\theta$, alors $-\theta \geq 0$. Nous avons donc $\theta = 0$

Corollaire 5.0.1. Considérons le problème spectral (1) - (2) avec $\phi(t, 0) = 0$. Si la fonction propre $\bar{x}(t) \neq 0$ associée à la valeur propre $\bar{\lambda}$, nous avons les conditions suivants de l'existence d'une fonction propre

1. S'il existe une constante négative ς_1 telle que $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \leq \varsigma_1 < 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$ alors $\bar{\lambda} \leq \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$
2. S'il existe une constante positive ς_1 telle que $\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \geq \varsigma_1 > 0$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times C^{2-\delta}(a, b)$ alors $\bar{\lambda} \geq \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}} \right\}$

Problème linéaire spectrale

Considérons le problème linéaire spectral suivant

$$(P_\delta x)(t) = D_R^\delta x(t) + \varphi_1(t)x'(t) + \varphi_2(t)x(t) = \lambda \phi(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.9)$$

$$J_1(x) = x(a) - \eta_1 x'(a) = 0 \quad \text{et} \quad J_2(x) = x(b) - \eta_2 x'(b) = 0 \quad (5.10)$$

Lemme 5.0.2. Soit $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ deux fonction continue sur $[a, b]$ avec $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$ et $x \in C^{2-\delta}(a, b)$ soit une solution de

$$(P_\delta x)x(t) = \lambda \phi(t, x), \quad t \in [a, b], \quad 1 < \delta < 2$$

$$J_1(x) = 0 \quad J_2(x) = 0$$

Alors on a l'estimation suivante sur x

$$\|x\|_{[a, b]} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq \tilde{M} = \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{|\lambda \phi(t) + A|}{\varphi_2(t)} \right\} \quad (5.11)$$

$$-A = \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{1 - \delta}{\Gamma(2 - \delta)} t^{-\delta} \right\}, \quad 1 < \delta < 2$$

Preuve

Soit $\widetilde{M} = \sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{|\lambda \phi(t) + A}{\varphi_2(t)} \right\}$ alors

$$\widetilde{M} \geq \left\{ \frac{|\lambda \phi(t) + A}{\varphi_2(t)} \right\}, \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\widetilde{M} \varphi_2(t) - |\lambda| |\phi(t)| - A \geq 0$$

donc

$$-\widetilde{M} \varphi_2(t) + |\lambda| |\phi(t)| + A \leq 0 \tag{5.12}$$

Soit $x_1(t) = \widetilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda} x(t)$ on a

$$\begin{aligned} (P_\delta x_1)(t) &= D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t) x_1'(t) + \varphi_2(t) x_1(t) \\ &= D_R^\delta(\widetilde{M}) + \varphi_2(t) \widetilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda} (P_\delta x)(t) \\ &= D_R^\delta(\widetilde{M}) + \varphi_2(t) \widetilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda} (P_\delta x)(t) \\ &= \widetilde{M} \frac{1 - \delta}{\Gamma(2 - \delta)} t^{-\delta} + \varphi_2(t) \widetilde{M} + \frac{|\lambda|}{\lambda} (P_\delta x)(t) \\ &\geq \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{1 - \delta}{\Gamma(2 - \delta)} ct^{-\delta} \right\} + \varphi_2(t) \widetilde{M} + |\lambda| |\phi(t)|, \quad c \in \mathbb{R}_*^+ \\ &\geq \widetilde{M} \varphi_2(t) + |\lambda| |\phi(t)| - A \\ &\geq \widetilde{M} \varphi_2(t) + |\lambda| |\phi(t)| - a \quad \text{car } \phi(t) \geq -|\phi(t)| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$J_1(x_1) = J_2(x_2) = \widetilde{M} \geq 0$$

Utilisons le résultat prouvé dans le lemme 5.0.1 on obtient

$$x_1(t) \geq 0$$

Par conséquent

$$\frac{|\lambda|}{\lambda}x(t) \geq -\widetilde{M} \quad (5.13)$$

En appliquant des étapes analogues pour : $x_2(t) = \widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}x(t)$. On a

$$\begin{aligned} (P_\delta x_1)(t) &= D_R^\delta x_1(t) + \varphi_1(t)x_1'(t) + \varphi_2(t)x_1(t) \\ &= D_R^\delta(\widetilde{M}) + \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= D_R^\delta(\widetilde{M}) - \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &= \widetilde{M} \frac{1-\delta}{\Gamma(2-\delta)} t^{-\delta} - \varphi_2(t)\widetilde{M} - \frac{|\lambda|}{\lambda}(P_\delta x)(t) \\ &\geq -A + \widetilde{M}\varphi_2(t) - |\lambda|\phi(t) \end{aligned}$$

Nous avons deux cas :

- Si $\phi(t) > 0$, $\phi(t) = |\phi(t)|$, alors

$$(P_\delta x_1)(t) \geq -A + \widetilde{M}\varphi_2(t) - |\lambda|\phi(t) \geq 0$$

- Si $\phi(t) < 0$, $-\phi(t) = |\phi(t)|$ Par conséquent

$$(P_\delta x_1)(t) \geq -A + \widetilde{M}\varphi_2(t) + |\lambda|\phi(t) \geq -A + \widetilde{M}\varphi_2(t) - |\lambda|\phi(t) \geq 0$$

D'autre part les conditions (5.10) donne :

$$J_1(x_1) = J_2(x_2) = -\widetilde{M} \leq 0$$

En utilisant le lemme (5.0.1), on obtient

$$x_2(t) \leq 0$$

Par conséquent

$$\frac{|\lambda|}{\lambda}x(t) \geq -\widetilde{M} \quad (5.14)$$

L'estimation (5.11) découle facilement de (5.13) et (5.14).

Lemme 5.0.3. Soient x_1, x_2 deux fonction de $C^{2-\delta}(a, b)$ qui vérifient le problème (4.1)-(4.2) c à d :

$$(P_\delta x_1)(t) = \lambda_1 \phi_1(t), \quad t \in [a, b] \quad 1 < \delta < 2 \quad (5.15)$$

$$J_1(x_1) = 0 \quad , \quad J_2(x_1) = 0 \quad (5.16)$$

et

$$(P_\delta x_2)(t) = \lambda_2 \phi_2(t), \quad t \in [a, b] \quad 1 < \delta < 2 \quad (5.17)$$

$$J_1(x_2) = 0 \quad , \quad J_2(x_2) = 0$$

où $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t) \in C([a, b])$ et $\varphi_2(x) \geq \frac{(\delta - 1)(t_0 - a)^{-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)} > 0$.

Si $\lambda_1 \phi_1(t) \geq \lambda_2 \phi_2(t), \forall t \in [a, b]$, alors

$$x_1(t) \geq x_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

Preuve

Posons $\theta(t) = x_1(t) - x_2(t), a \leq t \leq b$ et soustrayons (5.15) de (5.17)

$$\begin{aligned} (P_\delta \theta)(t) &= D_R^\delta \theta(t) + \varphi_1(t) \theta'(t) + \varphi_2(t) \theta(t) \\ &= \lambda_1 \phi_1(t) - \lambda_2 \phi_2(t) \geq 0 \end{aligned}$$

On a $J_1(\theta) = J_1(x_1 - x_2) = 0$ et $J_2(\theta) = J_2(x_1 - x_2) = 0$, d'après lemme (5.0.1) on trouve $\theta(t) \geq 0$, par suite

$$x_1(t) \geq x_2(t).$$

Conclusion

Nous avons étudié analytiquement une classe de problèmes aux valeurs propres d'ordre fractionnaire $1 < \delta < 2$. Un principe du maximum a été construit pour le problème des valeurs propres linéaires en utilisant une estimation de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction à ses points extrêmes. Nous avons ensuite utilisé le principe du maximum obtenu pour établir un résultat d'unicité une estimation sur la norme de solution et un principe de comparaison pour le problème des valeurs propres linéaires.

Bibliographie

- [1] Claire David, Équations aux dérivées partielles , Cours et exercices 2eme éditions, Dunod, 2015.
- [2] Hervé Le Dret. Notes de CT EDP, université P.M.C, édition la science, Paris, 2020.
- [3] G.Sweers, Maximum principles, a start, 2000.
- [4] Mechrouk S, Fonctions spéciales et applications, Cours de Master d'analyse, 2019/2020.
- [5] S.Maingot et D.Manceau, Théorie spectrale, polycopié de CT
- [6] Laoubi K, opérateurs non borné et théorie spectrale, Cours de Master d'analyse, 2019/2020.
- [7] Lacroix.Sonrier(1998), Distribution et espace de sobolev, ISBN 2-7298-6823-2.
- [8] Fridjet.K et Soualah.S, Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, mémoire de Master, université Hamma Lakhder El Oued, 2017/2018.
- [9] M. Al-Refai, Maximum Principles for Nonlinear Fractional Differential Equations in a Reliable Space, Department of Mathematics, Yarmouk University, Irbid-Jordan, 2019.
- [10] M. Al-Refai. Basic results on nonlinear eigenvalue problems of fractional order. Electronic Journal of Differential Equations, 2012(191) :1-12, 2012.

