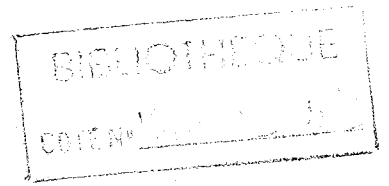


# INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE

BOUMERDES



## MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

PRESENTE PAR : BOUSSAID Mohammed

TITRE :

MODELISATION DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE COUCHE  
RECTANGULAIRE - RESOLUTION PAR LA METHODE A.D.I ALLIEE  
AUX METHODES HERMITIENNES COMPACTES

DEVANT LE JURY :

MM: KALACHE Djamel  
BOUHADF Mustapha  
AMARA Mohamed  
AMAUCHE Mustapha  
RABHI Ahmed

Maître de Conférences  
Professeur  
Professeur  
Maître de Conférences  
Chargé de Cours

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Le 20 FEVRIER 1993

N° 01 / 93

# INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE

BOUMERDES

## MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

PRESENTE PAR : BOUSSAID Mohammed

TITRE :

MODELISATION DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE COUCHE  
RECTANGULAIRE - RESOLUTION PAR LA METHODE A.D.I ALLIEE  
AUX METHODES HERMITIENNES COMPACTES

DEVANT LE JURY :

MM: KALACHE Djamel  
BOUHADEF Mustapha  
AMARA Mohamed  
AMAUCHE Mustapha  
RABHI Ahmed

Maître de Conférences  
Professeur  
Professeur  
Maître de Conférences  
Chargé de Cours

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Le 20 FEVRIER 1993

N° 01 / 93

*A ma famille*

## REMERCIEMENTS

*J'adresse mes remerciements respectueux à Monsieur le Professeur **BOUHAEF Mustapha** pour m'avoir fait confiance et pour m'avoir suivi et prodigué des conseils très utiles, pour la réalisation de ce travail.*

*Mes remerciements vont aussi à Monsieur **KALACHE DJAMEL** de l'Institut de physique de Bab Ezzouar qui a bien voulu accepter la présidence du jury.*

*Je voudrais remercier aussi Monsieur le Professeur **AMARA Mohamed** de l'Institut de Mathématiques de l'U.S.T.H.B pour avoir accepté de faire partie du jury.*

*Je remercie vivement Monsieur **AMAUCHE Mustapha** de l'Institut de Physique de l'U.S.T.H.B pour sa participation au jury.*

*Je tiens à remercier Monsieur **RABHI Ahmed** de l'Institut National de Genie Mécanique de Boumerdès qui a accepté d'être membre du Jury.*

*Que Monsieur **BOUMHRAT Mohamed** trouve ici l'expression de ma profonde gratitude de m'avoir constamment encouragé dans mon travail.*

*Mes remerciements vont de même à Monsieur **HOCINE Fayçal** Directeur général de l'IN.G.M pour m'avoir permis de mener à bien mon travail à l'Institut.*

*Que Messieurs **DJERRADA Abderrahmane** responsable de la Post Graduation à l'Institut et **HABACHOU Rachid** Directeur des études de l'IN.G.M acceptent mes plus vifs remerciements pour leur entière disponibilité.*

*Que soient aussi remerciés MM<sup>e</sup> **BENSEFIA, HEDEILI, CHIKH, AIT HAMOUDA** pour m'avoir aidé de diverses manières et même supportés quelquefois.*

S O M M A I R E

I- NOMENCLATURE.	-03-
1- PRESENTATION DU SUJET ET OBJECTIFS VISES.	-04-
2- ETAT DES CONNAISSANCES SUR LE SUJET ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.	-05-
3- ETUDE THEORIQUE DU PROBLEME. 3.1 But du travail. 3.2 Equations phénoménologiques régissant le problème. 3.3 Les hypothèses simplificatrices. 3.4 La formulation. 3.5 Adimensionnements et transformations. 3.6 Méthodes de résolutions.	-11-
4- RESOLUTION PAR DIFFERENCES FINIES ( METHODE CLASSIQUE ). 4.1 Les équations. 4.2 Discrétisation et algorithme. 4.3 Discussion sur le choix des $\omega$ et difficultés d'obtention des grands nombres de Rayleigh. 4.4 Résultats et conclusions partielles.	-17-
5- METHODE DES DIRECTIONS ALTERNEES ( A.D.I ). 5.1 Exposé de la méthode. 5.2 Mise en oeuvre sur un problème simple de conduction bidimensionnelle. 5.3 Problème elliptique et stationnarisation. 5.4 Méthodes Hermitiennes compactes et A.D.I pour la résolution de l'équation de Poisson. 5.5 Application au problème de la cavité. 5.6 Algorithme pour un pas de temps réel. 5.7 Résultats et conclusions partiels. 5.8 Amélioration des performances- décentrement. 5.9 Résultats et commentaires. 5.10 Comparaison des deux méthodes. 5.11 A propos du transfert thermique.	-32-
6. PARTIE EXPERIMENTALE. 6.1 Méthodes expérimentales applicables à notre problème .. 6.2 Méthode expérimentale utilisée. 6.2.1 Présentation-avantages et inconvénients ( forts écarts de températures ). 6.6 Résultats et conclusions.	-122-

<b>7. CONCLUSION.</b>	<b>-127-</b>
<b>ANNEXE 1: Les relations discrètes.</b>	<b>-128-</b>
<b>ANNEXE 2: Transformation pour obtenir la formulation <math>\psi - \omega</math>.</b>	
<b>ANNEXE 3: Adimensionnement des équations.</b>	
<b>ANNEXE 4: Discrétisation des E.D.P et des condtions aux limites.</b>	
<b>ANNEXE 5: Expressions des coefficients après décentrement.</b>	
<b>ANNEXE 6: Relations hermitiennes compactes.</b>	
<b>ANNEXE 7: Algorithme de thomas.</b>	
<b>ANNEXE 8: Quelques erreurs introduites par les différences finies.</b>	
<b>ANNEXE 9: Bibliographie.</b>	

## I- NOMENCLATURE.

L, H	: Dimensions de la couche en m.	
T	: Température en °C.	
T <sub>1</sub>	: Température sur la paroi de gauche de la cavité en °C.	
T <sub>2</sub>	: Température sur la paroi de droite de la cavité en °C.	
t	: Temps en s.	
V	: Vitesse en m/s.	
u,v	: Composantes selon x et selon y de la vitesse en m/s.	
g	: constante de gravité en m/s <sup>2</sup> .	
p	: Chaleur massique à pression constante en J/kg°C.	
Al	: Allongement de la couche H/l.	
h	: Coefficient de convection en W/m <sup>2</sup> °C.	
i	: Enthalpie du fluide en J/kg.	
p	: pression en N/m <sup>2</sup> .	
F <sub>o</sub>	: Forces extérieures par unité de volume N/m <sup>3</sup> .	
R <sub>1,2,3</sub>	: Résidus.	
Ω <sub>1,2,3</sub>	: Coefficients de relaxation.	
Nu	: Nombre de Nusselt.	
Pr	: Nombre de Prandtl	(ν/a).
Gr	: Nombre de Grashoff	(gβδθL <sup>3</sup> /ν <sup>2</sup> ).
Ra	: Nombre de Rayleigh	Gr*Pr.

### Lettres grecs:

β	: Coefficient d'expansion volumique en K <sup>-1</sup> .
φ	: Angle d'inclinaison de la couche en radians.
τ	: Temps fictif adimensionnel.
ρ	: masse volumique du fluide (kg/m <sup>3</sup> ).
θ	: Température sans dimension.
ω	: Fonction tourbillon en (s <sup>-1</sup> ).
ψ	: Fonction de courant en (m <sup>2</sup> /s).
ν	: Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s).
μ	: viscosité dynamique (kgm/s).
Φ	: frottements visqueux en (W/m <sup>3</sup> ).
λ	: conductivité thermique (W/m°C).

### Superscripts:

+	: Valeurs sans dimensions (ces croix sont omises à la suite de leurs apparitions).
n	: indice de temps réel.
k	: indice de temps fictif.

### Subscripts:

i,j	: indice d'espace selon x et selon y.
-----	---------------------------------------

1

**PRESENTATION DU SUJET ET OBJECTIFS VISES**

# 1. PRESENTATION DU SUJET ET OBJECTIFS VISES:

## 1.1 Introduction:

Nos connaissances en convection sont intimement liées à nos connaissances en mécanique des fluides.

En convection forcée, les équations d'écoulement ( Navier-Stockes plus l'équation de continuité ) sont en général indépendantes de la température, ce qui conduit à résoudre d'abord le problème de l'écoulement puis seulement le problème thermique.

La difficulté importante qui surgit en convection libre est le fait que le mouvement est généré par des différences de températures ( et donc de masses volumiques ) qui apparaissent au sein du fluide, ce qui implique un couplage des équations du transport de la quantité de mouvement ( ou du tourbillon ) à l'équation de la chaleur par la température et les vitesses du fluide. Il faut donc résoudre simultanément toutes les équations.

Depuis l'avènement de l'ordinateur et son perfectionnement constant un grand nombre de problèmes de convection sont résolus. ( Les plus gros ordinateurs sont employés à résoudre des problèmes d'aérodynamique et de mécanique des fluides notamment ).

Le problème du transfert de chaleur par convection naturelle ( et même forcée ) dans une couche rectangulaire a été étudié et continue à l'être, non seulement parcequ'il constitue un problème test pour la mise en oeuvre de différentes méthodes numériques, mais aussi pour son importance pratique dans le bâtiment, les cavités isolantes, les capteurs solaires, l'automobile, les systèmes poreux, la métallurgie, l'électronique...

Il s'agit de résoudre ce problème en proposant un algorithme performant permettant d'obtenir des résultats au delà de ceux habituellement obtenus, de comparer les résultats obtenus avec une méthode classique déjà largement éprouvée d'une part et avec des résultats expérimentaux d'autre part, de mieux connaître le comportement du fluide confiné et enfin proposer une corrélation donnant le nombre de Nusselt et permettant à l'ingénieur d'évaluer rapidement le flux de chaleur échangé.

**ETAT DES CONNAISSANCES ET BIBLIOGRAPHIE**

## 2. Etat des connaissances sur le sujet et bibliographie:

- Beaucoup de travaux ont été effectués sur les écoulements en cavités rectangulaires.

Les premières études concernant la couche datent des années 60. L'objectif n'a pas changé depuis, il s'agit de connaître les configurations de températures et de vitesses et de proposer des corrélations permettant d'évaluer le transfert de chaleur dans des couches de profil carrée ou rectangulaire ( et même parfois le profil a la forme d'un parallélogramme ), contenant un fluide qui peut être de nature quelconque ( Gaz ou liquide ), la couche pouvant être inclinée , verticale ou horizontale.

Les nombreuses études sur la couche se sont occupées d'une partie ou de la totalité de ces objectifs, mais pour chacun de ces travaux, une limite survenait soit sur le plan de la méthode numérique employée, soit parce que les calculateurs n'étaient pas suffisamment puissants ...

Nous essayons dans ce qui suit de présenter une progression dans la connaissance de ce problème à travers la bibliographie que nous avons pu réunir de diverses façons et notamment par le biais de la banque de données PASCAL se trouvant à l'INSA de Lyon ( France ), lors d'un de mes passages dans cette école:

- E. R. G. Eckert et W. O. Carlson ( 1961 ) [ 1 ] se trouvent être parmi les tout premiers à avoir travaillé sur la couche, leurs résultats furent cependant plutôt **expérimentaux**.

Néanmoins les résultats de ces mesures ont permis de conclure notamment que la turbulence apparaissait à la suite d'**oscillations périodiques** de la vitesse et de la température ( en réalité d'autres paramètres tel le nombre de Nusselt ), nous confirmons par les résultats du modèle que nous avons élaboré, cette importante observation ( voir paragraphe 5.9).

Cela leur a permis de tracer en fonction de  $Al$  et  $Ra$  une limite entre le domaine laminaire et le domaine turbulent, mais aussi une limite entre la conduction pure et la convection laminaire, ce que nous faisons au paragraphe 4.

-De Vahl Davis 1967 , [ 2 ] a permis par la méthode des différences finies classiques de résoudre les équations phénoménologiques en régime permanent, et d'obtenir des résultats intéressants pour des nombres de  $Ra$  de l'ordre de  $10 E +05$  à  $10 E +06$ .

En effet pour:  $Al = 1$  ( couche carrée ) et pour des fluides ayant des nombres de  $Pr$  allant de 0.1 à 1000, il a pu obtenir des résultats pour des nombres de  $Ra$  allant à  $2.10 E +5$ .

Pour des couches de  $al = 5$  le  $Ra$  maximum qu'il a obtenu est de  $1.5 10 E +6$  ( nous expliquerons pourquoi cela est possible pour des couches allongées au paragraphe 5.9 ).

La méthode numérique utilisée est "la méthode des différences finies" avec un maillage de  $11 \times 11$  points .

La formulation qu'il a utilisée est celle des  $\psi - \omega$  ( fonction de courant-tourbillon ). Les cavités ayant une position verticale.

il est considéré à juste titre, comme le grand spécialiste de la couche.

- De Vahl Davis a fait évoluer le problème de la couche en publiant plusieurs autres travaux, en collaboration avec d'autres auteurs, notamment avec Mc Grégor et Emery [ 3 ], dans ce cas des nombres de  $Ra > 10E +6$  ont été franchis tout en ne dépassant pas  $10 E +7$ .

- Heitz et Westwater [ 4 ] ont résolu par différences finies le système d'équations phénoménologiques et n'ont pu obtenir guère plus de  $10E +6$ , nous avons d'ailleurs adopté dans la première partie de notre travail une démarche similaire. Les résultats obtenus ont tout de même permis de délimiter pour l'eau comme fluide confiné, la frontière entre la conduction pure et la convection laminaire. Aucune corrélation permettant d'évaluer le transfert convectif n'a été proposé dans ce travail.

- J.T. Han [ 5 ] a résolu le problème de la couche verticale par différences finies classiques, en régime permanent et a mis l'accent sur les difficultés d'obtenir numériquement de grands écarts de température ( grands  $Ra$  ) et montra que la divergence des calculs provenait surtout de l'équation du transport des tourbillons, il préconisa alors une sous relaxation du système aux tourbillons avec  $\omega = 0.1$  pour les noeuds intérieurs et 0.3 pour les noeuds limites. Ce qui permit d'obtenir des  $Ra \approx 10E +6$ . Nous avons adopté au chapitre 4 des coefficients inspirés de cette démarche.

- Citons aussi les articles de W.J. Elder en 1965, [ 6 ] et de Rubel et Landis en 1970, [ 7 ], qui se rapportent au domaine laminaire, donc des  $Ra$  faibles et des couches verticales, et celui de J.A. Mynett et Duxbury en 1974 [ 8 ].

- Certains travaux utilisent l'effet stabilisateur d'un nombre de Pr élevé sur les solutions numériques pour avancer des résultats ou le  $Ra$  est supérieur à  $10 E +6$  [ 3 ] par exemple.

- De Vahl Davis voir ref. [ 9 ] a aussi proposé en 1977, en compagnie de G.D. Mallinson des résultats pour des couches en trois dimensions.

D'autres auteurs beaucoup plus récemment ont aussi travaillé sur ce problème et certains ont pu obtenir des résultats appréciables, citons:

- Inard molle et Simoneau [ 10 ] ont travaillé dans le domaine du bâtiment pour les notions de confort et de température résultante.

La méthode adoptée pour résoudre les équations est celle des volumes de contrôle à maillage décalé développée par Patankar.

Le maillage utilisé est de  $50 \times 50$ . L'article parle de nombres de Ra de  $10^E + 10$  pour des cavités verticales naturellement ( bâtiment ), ce qui est fort appréciable.

Ajoutons en outre que beaucoup de travaux expérimentaux ont été réalisés dans ce domaine, les mesures concernant surtout les températures.

Toujours dans le bâtiment, on peut ajouter la thèse d'Abdel Hedi beghidja [ 11 ].

Ces travaux couplent parfois l'effet du rayonnement des murs, mais les résultats dépassent rarement des Ra de  $10^E + 6$ .

- J. A. Lange et A. Bejan [ 12 ] 1991 ont obtenu grâce à la méthode des volumes finis de contrôle décrite par Patankar des résultats comparables aux nôtres, pour des Ra de  $10^E + 2$  à  $10^E + 11$  et des Pr de 0.1 à 10. La discrétisation était du type à pas variables (  $S_{i+1} = S_i + \alpha \Delta$  ) avec un maillage de  $52 \times 52$ . Les maillages adoptés allaient de  $26 \times 26$  à  $104 \times 104$ .

L'étude présente un caractère plutôt numérique, et le temps de calcul moyen sur microvax est de l'ordre de 1000s et de l'ordre de 500s sur mini ordinateur. Nous avons obtenu sur microvax des temps de calculs nettement plus faibles pour des Ra faibles à modérés ( jusqu'à  $2 \times 10^E + 6$  ) mais du même ordre et plus pour des Ra importants.

- J. Safi [ 13 ] 1987 a obtenu des résultats très appréciables pour des Ra  $\approx 10^E + 8$  par la méthode des directions alternées alliée aux relations hermitiennes compactes. La formulation des équations est du type  $\psi - \omega$ . Son travail s'est néanmoins limité au côté numérique du problème. C'est tout de même cette démarche que nous avons adoptée dans notre travail et qui nous a permis de relever le niveau des nombres de Ra.

- Jae Min Hyun et Bum Seog Choi 1990 [ 14 ] : Résolvent les équations en question par une méthode aux différences mais pour des cavités de forme parallélogramme d'allongements différents et d'inclinaisons systématiques allant de 0 à  $60^\circ$ .

La formulation est du type  $\psi - \omega$  et le maillage de  $33 \times 33$  pour un  $Al = 1$ . Les résultats sont donnés pour des Ra de l'ordre de  $10^E + 7$ . L'article met en évidence la zone entre la transition et l'écoulement permanent. L'application concernait les diodes thermiques.

- Léonardi et Reizes 1979 [ 15 ] : Donnent des résultats ne dépassant pas Ra =  $10^E + 6$  avec comme particularité le fait de tenir compte de propriétés physiques variant ( en fonction de la température et de la pression ) et comparaison avec des résultats classiques qui considèrent ces mêmes propriétés comme constantes.

Citons aussi dans le même ordre d'idée Polezhaev en 1967 [ 16 ] qui a travaillé le cas des fluides compressibles en bidimensionnel et instationnaire.

- P. Lequerre en 1987 [ 17 ] et Haldewang 1986 ont pu donner des résultats pour des  $Ra \approx 10^E + 9$  par les méthodes spectrales Chebyshev. Le travail est là aussi d'ordre numérique et ne s'occupe pas du côté énergétique. Voir aussi [ 18 ].

- Chenoweth D.R et Paolucci S. en 1986 [ 19 ].

- Zienkiewicz Marshall et Heinrich en 1980 [ 20 ] ont résolu les équations de la cavité en formulation vitesse-pression par la méthode des éléments finis et ont pu obtenir des résultats pour des  $Ra \approx 10^E + 7$ , comme la tentative était surtout la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis sur un problème de mécanique des fluides, la partie thermique a été éclipsee.

- On ajoutera divers autres articles qui nous ont permis d'avoir une idée précise sur l'étude de la convection naturelle dans une couche rectangulaire et qui sont ceux de:

\* H. benhadid 1989, ref. [ 21 ] et [ 22 ] qui s'est préoccupé des mouvements convectifs au sein de fluides à faibles nombres de Prandtl.

\* David W. Lawson ref. [ 23 ] s'est occupé de la convection induite par un feu dans une cavité type pièce de maison.

\* Chiang et Goldstein ref. [ 24 ] qui ont étudié la convection naturelle dans des couches horizontales en proposant des résultats pour de grands  $Ra$ .

Il faut dire que très peu de résultats vont franchement au delà de  $Ra > 10^E + 6$  ou  $10^E + 7$ , à notre connaissance, et en étant optimiste, seul une dizaine de résultats dont le notre sont disponibles dans le domaine des Rayleigh importants ( $Ra \approx 10^E + 11$ ).

#### Remarques sur les résultats rencontrés dans la littérature:

- Il faut remarquer que les travaux, notamment les anciens ont souvent consisté à résoudre les équations phénoménologiques dans leurs formes indépendantes du temps, ce qui d'ailleurs fût le frein principal à l'obtention de résultats pour des nombres de  $Ra$  importants, en effet au chapitre 5 nous montrons qu'au delà d'une limite qu'on essaiera de préciser, que les résultats sont tout simplement instationnaires et par conséquent ne pouvant être obtenus que par des équations évolutives.

- Parmi les travaux ayant obtenu des résultats pour des  $Ra > 10^E + 6$ , plusieurs méthodes ont été adoptées:

\* Des méthodes très coûteuses qui sont les méthodes spectrales et la méthode aux éléments finis

\* Des méthodes plus faciles à mettre en oeuvre et qui sont les méthodes aux différences et principalement les A.D.I alliées aux méthodes hermitiennes compactes.

- Sur le plan de l'évaluation du transfert thermique, de nombreuses correlations du type  $Nu = f ( Ra, Pr, Al )$  ont été proposées. Elles se basent soit sur les résultats expérimentaux soit sur les résultats numériques obtenus par les différents modèles, applicables bien entendu à des domaines donnés de  $Pr$  ( nombre caractérisant la nature du fluide ), de Rayleigh ( $Ra$ ), d'allongements ( $Al$ ) et d'inclinaisons des couches ( $\varphi$ ).

Nous avons dans le présent travail essayé d'apporter notre contribution en proposant une corrélation qui s'applique au domaine des  $1 < Al < 20$  et des  $100 < Ra < 10^6$  voir la fin du chapitre 5.

Dans ce qui suit nous résumons dans un tableau quelques unes des correlations proposées pour évaluer le transfert convectif au travers d'une couche.

# RESUME DES PRINCIPALES CORRELATIONS

AUTEURS	CORRELATIONS	DOMAINE DE VALIDITE
De Graaf et Van Der Held	$Nu = 1$ $Nu = .0384 Gr_L^{.37}$ $Nu = .0317 Gr_L^{.37}$	$Gr < 7 \cdot 10^3$ $10^4 < Gr < 8 \cdot 10^4$ $Gr > 2 \cdot 10^5$
Muller et Reiher	$Nu = 1$ $Nu = .18 A^{-1/9} Gr_L^{1/4}$ $Nu = .065 A^{-1/9} Gr_L^{1/4}$	$Gr < 2 \cdot 10^3$ $2 \cdot 10^4 < Gr < 2 \cdot 10^5$ $Gr > 2 \cdot 10^5$
Eckert et Carlson	Ecoulement laminaire asymptotique  $Nu = 1 + \frac{1}{A} \left[ .00292 Gr^{.857} - .00144 Gr^{.175} \right]$ $Nu = .119 A^{-.1} Gr_L^{.3}$	$2 < A < 40$ Pr = .71  $A > \frac{Gr^{2.75}}{5.6 \cdot 10^8}$ $19 < A < 70$ Pr = .71 $Gr < 10^5$
Newell et schmidt	$Nu = .0547 Gr_L^{.397}$ $Nu = .155 A^{-.265} Gr_L^{.315}$	$A = 1$ Pr = .733 $4 \cdot 10^3 < Gr < 1.4 \cdot 10^5$ $A = 20$ $8 \cdot 10^3 < Gr < 4 \cdot 10^4$ et $19 < A < 70$ $8 \cdot 10^3 < Gr < 4 \cdot 10^4$
Aranovitch	$Nu = 1 + 1.89 \cdot 10^{-4} Gr_L A^{-3/4}$ $Nu = .114 A^{-1/4} Gr_L^{1/3}$	$Gr < 1.32 \cdot 10^3$ $Gr > 1.32 \cdot 10^3$ $19 < A < 70$
Jannot et Mazeas	Ecoulement pleinement turbulent. $Nu = .075 Gr_L^{.315}$	$10^5 < Gr < 10^{11}$ $3.5 < A < 100$ $.6 < Pr < .8$
Globe	$Nu = .049 Ra^{1/3} Pr^{.074}$	$.02 < Pr < 10000$ $5 \cdot 10^4 < Ra < 2.5 \cdot 10^8$
Mc Grégor	$Nu = .42 Ra^{1/4} Pr^{.012} A^{-.3}$ Turbulent $Nu = .046 Ra^{1/3}$	$1 < Pr < 20000$ $10^4 < Ra < 10^7$ $10 < A < 40$ $10^6 < Ra < 10^9$ $10 < A < 40$

3

**ETUDE THEORIQUE DU PROBLEME**

### 3- Etude theorique du problème:

#### 3.1 But du travail:

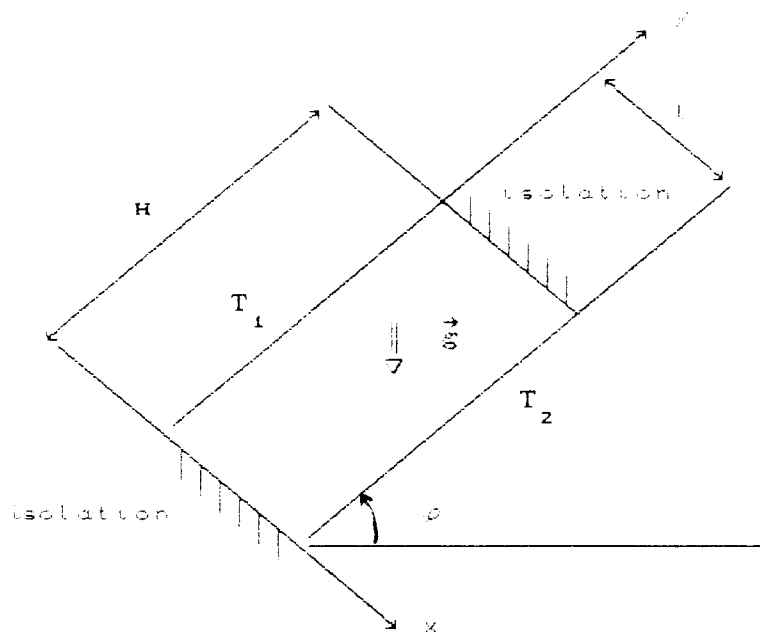


fig. 3.1

Il s'agit de déterminer les quantités de chaleur transférées à travers la couche rectangulaire fig. 3.1 et ce pour différents allongements  $AL$ , différents écarts de température  $\Delta T$ , différentes natures de fluides et différentes inclinaisons.

Pour cela il faudra connaître la nature et le type d'écoulement à l'intérieur de la couche en déterminant le champ des vitesses et le champ des pressions, ainsi que le comportement thermique en déterminant le champ des températures.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour résoudre un problème de convection [ 27 ]:

- Analyse dimensionnelle alliée aux expériences.
- Etude approchée des équations de la couche limite ( méthodes intégrales ).
- Analogie avec d'autres phénomènes de transport.
- Résolution ( numérique ou analytique ) des équations phénoménologiques.

C'est la dernière méthode que nous adoptons ici.

#### 3.2 Les équations phénoménologiques:

Les équations régissant le transport de masse de chaleur et de quantités de mouvements s'écrivent de façon tout à fait générale comme suit [ 28 ], [ 29 ], [ 30 ], [ 31 ], [ 32 ].

b- Les équations de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overline{\text{grad}} p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F}_e \quad (3.2)$$

c- L'équation de la chaleur:

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dP}{dt} + \dot{q} + \text{div} (\lambda \overline{\text{grad}} T) \quad (3.3)$$

d- Les conditions aux limites:

d1- Conditions mécaniques:

Sur les parois les vitesses sont nulles.  $u = v = 0$ .

d2- Conditions thermiques:

- En  $x = 0$  et  $x = 1$  les températures sont imposées (conditions de Dirichlet).

$$T(x=0) = T_1 \text{ et } T(x=1) = T_2. \quad 3.5$$

- En  $y = 0$  et en  $y = H$  les parois sont thermiquement isolées (conditions de Neumann).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0 \text{ et } y=H} = 0 \quad 3.6$$

### 3.3 Les hypothèses simplificatrices:

Les équations (3.1), (3.2), (3.3) précédentes ne sont jamais résolues sous cette forme, elles sont souvent transformées en fonction du problème et en leur faisant subir des hypothèses simplificatrices.

Les hypothèses simplificatrices, classique pour notre problème sont les suivantes:

a- Les variations de pression étant très faibles en convection libre on négligera toute dérivée par rapport à la pression.

$$\frac{\partial}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{comme } i = C_p dT \Rightarrow \frac{di}{dt} = C_p \frac{dT}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$= 0$$

b- La génération de chaleur par frottement visqueux dans l'équation de la chaleur est très faible à cause des faibles vitesses, on peut donc le négliger devant la conduction.

$$\frac{dP}{dt} + \mathbb{E} \ll \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T)$$

c- Les forces extérieures se réduisent aux forces de volume.

$$\vec{F}_s = -\rho g \overrightarrow{\text{grad}} z \quad (\text{force de pesanteur par unité de volume}).$$

d- Le fluide est considéré comme incompressible mais dilatable.

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_1)]$$

↳ température de référence  
paroi froide.

e- Les propriétés physiques du fluide sont considérées comme constantes.

f- La masse volumique du fluide est considérée constante partout dans les équations sauf au niveau du terme générateur du mouvement où on tient compte de sa variation en fonction de la température. Cette hypothèse très connue en convection naturelle est l'hypothèse de Boussinesq qui permet de réduire la difficulté de résolution de façon sensible.

### 3.4 La formulation:

Deux formulations pour les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité sont possibles:

- \* La formulation vitesse-pression voir équations (3.1), (3.2), (3.3).
- \* La formulation tourbillon-fonction de courant (3.8), (3.9), (3.10).

Les deux formulations ont des avantages et des inconvénients:

- Pour la formulation v-p:

l'inconvénient est l'obligation de trouver une expression préalable de la pression en fonction de la vitesse pour pouvoir déterminer le système.

- Pour la formulation  $\psi - \omega$ :

l'inconvénient est la difficulté d'obtenir des conditions aux limites pour le tourbillon  $\omega$ .

On préfère souvent utiliser la formulation  $\psi - \omega$  à cause de l'élimination du terme de pression et de la réduction du nombre

d'équations à résoudre ( de 2 à 1 pour Navier-stokes et pour un problème en deux dimensions voir annexe 2 ).

La fonction de courant  $\psi$ , qui est définie comme suit:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 3.7$$

et la fonction tourbillon  $\omega$  qui est définie comme:

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{V})$$

ou en bidimensionnel

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

sont introduites dans les équations phénoménologiques ( 3.1 ), ( 3.2 ) et ( 3.3 ) permettent d'obtenir un nouveau système d'équations, tous calculs faits on a:

Equations du transport des tourbillons:

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad 3.8$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \sin\varphi + \frac{\partial T}{\partial y} \cos\varphi \quad 3.9$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T \quad 3.10$$

### 3.5 Adimensionnement et transformations:

On adimensionne les équations phénoménologiques 3.8, 9 et 10. en vue de faire ressortir les nombres sans dimensions Gr, Pr, Nu qui caractérisent respectivement l'écoulement en convection naturelle, les propriétés physiques du fluide et l'intensité transfert convectif, et d'obtenir les résultats généraux qui permettent les similitudes.

On peut adopter pour cela plusieurs références notamment celles relatives à l'adimensionnement des termes dépendants du temps. Dans ce mémoire nous avons adopté ce qui suit:

Longueur de référence: l ou H de la cellule.

Temps de référence :  $l^2/\nu$

Température de référence:  $T_1$  et  $T_2$  des parois.

Pour le détail des calculs voir annexe (2).

L'équation du transport des tourbillons, s'écrit toutes transformations faites comme suit:

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t} + u^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial x} + v^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial y} = \nabla^2 \omega^+ + \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \varphi \right] Gr \quad 3.11$$

de même pour l'équation de la chaleur qui s'écrit:

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t} + u^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial x} + v^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial y} = \nabla^2 \theta^+ \frac{1}{Pr} \quad 3.12$$

Pour la formulation en  $\omega - \psi$  voir par exemple Kettleborough [ 29 ] et Hiroshi [ 30 ].

On omettra par la suite les + pour alléger l'écriture.

Les conditions aux limites sont elles aussi adimensionnées:

- Conditions mécaniques:

Conditions sur la fonction de courant

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \quad \forall y \text{ on a } \psi = 0 \\ y = 0 \text{ et } y = Al \quad \forall x \text{ on a } \psi = 0 \end{array} \right\} \quad 3.13$$

Conditions d'adhérences

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \quad \forall y \text{ on a } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y = 0 \text{ et } y = Al \quad \forall x \text{ on a } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad 3.14$$

Conditions sur le tourbillon ( elles sont obtenues à partir de l'équation de Poisson ):

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \quad \forall y \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ y = 0 \text{ et } y = Al \quad \forall x \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{array} \right\} \quad 3.15$$

- Conditions thermiques:

Conditions de température imposée ( Dirichlet ):

$$x = 0 \quad \forall y \text{ on a } \theta = \theta_1 \quad x = 1 \quad \forall y \text{ on a } \theta = \theta_2 \quad 3.16$$

Conditions d'isolation ( Neumann ):

$$y = 0 \quad \forall x \quad \text{on a} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad y = Al \quad \forall x \quad \text{on a} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad 3.17$$

### 3.6 Méthodes de résolution:

Nous avons résolu les équations précédentes de deux manières différentes:

- Premièrement en adoptant une méthode classique du type différences finies pour la discrétisation des équations ce qui permet d'obtenir trois systèmes d'équations couplés par la température et par la fonction de courant et résolus ( les systèmes ) par une méthode itérative du type Gauss-Seidel-relaxation. Cette méthode a été initialement la plus souvent utilisée pour sa simplicité, mais aussi à cause des moyens peu puissants qui étaient disponibles elle a été notamment utilisée avec succès par De Vahl Davis [ 2 ], Heitz et Westwater [ 4 ] et J.T.Han [ 5 ].

- Deuxièmement par une méthode dite des directions alternées ( A.D.I. ) alliée aux méthodes hermitiennes compactes d'ordre 4 pour résoudre le plus précisément possible l'équation de Poisson.

Cette méthode a été utilisée avec succès par M.J. Safi [ 13 ] pour le problème de la couche verticale, et par Daube et Ta Phuoc Loc [ 33 ] pour les écoulements non confinés autour de profils tels cylindres et aubes de turbomachines et par Delmas et Ha Minh [ 35 ] pour l'écoulement et le transfert de matière autour d'une sphère.

4

**RESOLUTION PAR DIFFERENCES FINIES**

#### 4. RESOLUTION PAR DIFFERENCES FINIES CLASSIQUES:

##### 4.1 Les équations:

Pour faciliter les calculs nous avons supprimé les termes dépendant du temps pour n'obtenir que le régime permanent, les équations 3.11 à 3.17 dans ce cas deviennent:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nabla^2 \omega + Gr \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \varphi \right) \quad 4.1$$

de même pour l'équation de la chaleur qui s'écrit:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta \frac{1}{Pr} \quad 4.2$$

Ajoutons à cela les conditions aux limites:

Conditions d'adhérence:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \text{ on a } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y = 0 \text{ et } y = Al \forall x \text{ on a } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad 4.3$$

Conditions sur le tourbillon: Des considérations du type couche limite en association avec l'équation de Poisson permettent d'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ y = 0 \text{ et } y = Al \forall x \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{array} \right\} \quad 4.4$$

Conditions de température imposée ( Dirichlet ):

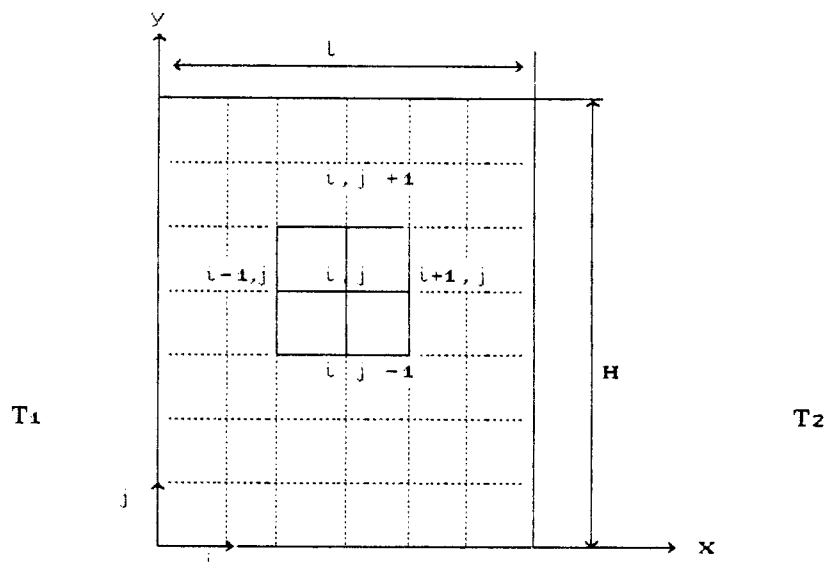
$$x = 0 \forall y \text{ on a } \theta = \theta_1 \quad x = 1 \forall y \text{ on a } \theta = \theta_2 \quad 4.5$$

Conditions d'isolation ( Neumann ):

$$y = 0 \forall x \text{ on a } \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad y = Al \forall x \text{ on a } \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad 4.6$$

##### 4.2. Algorithme:

Les équations ci-dessus 4.1 à 4.6 sont discrétisées par différences finies ( centrées pour les dérivées premières figure 4.1 ), le détail de la discrétisation est donné en annexe ( 2 ), et l'ordre de grandeur de la précision globale est de  $O(\Delta x^2)$ .



-L'équation de Poisson:

$$\psi_{i,j} = \frac{A^2 \Delta x^2}{2(1+A^2)} \left[ \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} + \frac{1}{A^2} \left( \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} \right) + \Delta x^2 \omega_{i,j} \right] \quad 4.7$$

-L'équation aux tourbillons :

$$\omega_{i,j} = \frac{A^2 \Delta x^2}{2(1+A^2)} \left[ \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2} \text{Gr} \sin \varphi \Delta x + \frac{\theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j}}{2} \text{Gr} \cos \varphi \Delta x \right] \quad 4.8$$

$$+ \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{4A} \right) \left( \omega_{i-1,j} - \omega_{i+1,j} \right) - \left( \frac{\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j}}{4A} \right) \left( \omega_{i,j-1} - \omega_{i,j+1} \right)$$

$$+ \left( \frac{\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}}{A^2} \right) + \left( \frac{\omega_{i-1,j} - \omega_{i+1,j}}{A^2} \right) \quad 4.9$$

-L'équation de la chaleur:

$$\theta_{i,j} = \left[ \text{Pr} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{4A} \right) \left( \theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j} \right) - \text{Pr} \left( \frac{\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j}}{4A} \right) \right]$$

$$\left[ \left( \theta_{i,j-1} - \theta_{i,j+1} \right) + \left( \frac{\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}}{4A} \right) + \left( \frac{\theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j}}{A^2} \right) \right] \quad 4.10$$

-Les conditions aux limites:

La fonction de courant:

$$\psi_{i,0} = \psi_{i,n} = \psi_{0,j} = \psi_{n,j} = 0 \quad 4.11$$

Les tourbillons:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i,0} &= - \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2\Delta y^2} & \omega_{0,j} &= - \frac{8\psi_{1,j} - \psi_{2,j}}{2\Delta x^2} \\ \omega_{i,0} &= - \frac{8\psi_{i,n} - \psi_{i,n-1}}{2\Delta y^2} & \omega_{n,j} &= - \frac{8\psi_{n,j} - \psi_{n-1,j}}{2\Delta x^2} \end{aligned} \right\} \quad 4.12$$

Les températures:

$$\theta_{i,0} = 0 \quad \theta_{i,n+1} = 1 \quad 4.13$$

$$\theta_{0,j} = \frac{4\theta_{1,j} - \theta_{2,j}}{3} \quad \text{et} \quad \theta_{n+1,j} = \frac{4\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}}{3} \quad 4.14$$

Les systèmes obtenus sont conditionnés de façon à être résolus par une méthode de Gauss-Seidel et/ou relaxation. L'algorithme est le suivant:

$$\begin{cases} \psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^k + \Omega_1 R_1 \\ \theta_{i,j}^{k+1} = \theta_{i,j}^k + \Omega_2 R_2 \\ \omega_{i,j}^{k+1} = \omega_{i,j}^k + \Omega_3 R_3 \end{cases}$$

4.15

L'ordre dans lequel les équations ont été résolues est important, en effet la fonction  $\omega$  subissant de fortes variations entraîne la divergence de la solution si la fonction de courant n'a pas été préalablement calculée.

$k$  est le numéro de l'itération et  $R_1, R_2, R_3$  sont les résidus. Voir annexe ( 4 ) pour les expressions de  $R_1, R_2$  et  $R_3$ .

#### 4.3 Discussion sur le choix des $\Omega$ et difficultés d'obtenir de grands Ra:

La méthode de relaxation que l'on a adoptée implique de choisir les valeurs de  $\Omega$  qui, rappelons le, sont comprises entre 0 et 2. Lorsque  $\Omega > 1$  on a accélération de la convergence ( ou surrelaxation ) lorsque  $\Omega < 1$  on a sous-relaxation et la convergence est plus lente.

Pour notre problème et pour des nombre de Ra modestes ( entre  $10^E + 2$  et  $10^E + 3$  et même un peu plus, on peut accélérer la convergence des systèmes en adoptant  $\Omega_1$  et  $\Omega_2 > 1$  et  $\Omega_3 = 1$ .

Pour des nombres de Ra modérés à importants les systèmes ne convergent pas avec n'importe quel  $\Omega$  et notamment pour  $\Omega_3$ .

En effet la plus grande difficulté réside au niveau de l'équation du transport des tourbillons à cause :

-De la variation rapide de la fonction  $\omega$  en fonction des itérations ( ou en fonction du temps pour un système évolutif ).

- Des conditions aux limites appliquées à l'équation aux tourbillons qui sont exclusivement dépendantes de la précision obtenue sur la fonction de courant.

Pour cela on a adopté Gauss-Seidel sur  $\psi$  et sur  $\theta$  (  $\Omega = 1$  ) et la sous relaxation sur  $\omega$ , et selon le nombre de Ra on a pris des  $\Omega < 1$ , ce qui permet de modérer l'évolution de  $\omega$ .

Pour des Ra limites on a pris  $\Omega_3 = 0.1$  pour les noeuds intérieurs au domaine et  $\Omega_3 = 0.3$  pour les noeuds limites. Ces valeurs ont été adoptées par J.T. Han [ 5 ].

On a réussi, grâce à un choix judicieux des  $\Omega$ , à obtenir la convergence pour des Ra de l'ordre de  $10 E +6$  et un  $Al = 1$ . Au delà, la convergence est très lente et les temps de calcul deviennent prohibitifs, même lorsque l'on perd en précision globale, souvent il y'a tout simplement divergence des calculs.

Citons aussi qu'il existe des méthodes et algorithmes qui permettent de calculer les coefficients de relaxation  $\Omega$  optimums qui permettent de donner des résultats en un temps minimum voir par exemple [ 42 ] pour des équations linéaires.

En ce qui nous concerne nous n'avons pas cherché à déterminer les  $\Omega$  optimums parce qu'il existe très peu de renseignements pour des systèmes d'équations non linéaires tels que les nôtres que l'on met plus de temps à les rechercher qu'à obtenir des résultats et enfin qu'il faut un nouveau triplet à chaque fois que l'on change de paramètre ( Ra, Al, Pr ).

#### 4.4 Résultats et conclusions partiels:

Notons que le programme CLASNAT.FOR établi selon l'algorithme précédent ( 4.15 ) permet aussi d'obtenir des résultats pour des couches:

- Verticales d'allongement : de 1 à 20
- Verticales d'allongement: < 1
- Inclinées: (  $0 < \varphi < 180$  ).

Nous avons tracé des iso-fonctions de courant et des isothermes l'intérieur de couches différentes soumises à des sollicitations différentes et contenant différentes natures de fluides à l'aide du programme de tracage ISOTRAC utilisant les fichiers FORTRAN obtenus par CLASNAT sur microvax-vt220.

Pour comprendre comment se fait l'écoulement à l'intérieur de la cavité, nous avons tracé plusieurs types de courbes:

- Les iso-fonctions de courant.
- Les vitesses  $v$  ascensionnelles au milieu de la couche selon l'axe des  $x$ .

Pour le comportement thermique, nous avons tracé:

- Les isothermes.
- La répartition des températures au milieu de la couche selon l'axe des  $x$ .

L'analyse des différentes courbes et résultats numériques obtenus nous mène à déduire qu'il existe 3 cas:

1er cas:

- L'observation des courbes figures 4.1 a et 4.3 a et b établies pour des couches d'allongement 1 et 6 et soumises à des Grashoff de 1000 qui représentent des iso-fonctions de courant, montrent que l'écoulement est à rouleau unique.

- Les vitesses ascendantes ( voir courbes 4.7 a et 4.7 b ) pour les Ra cités sont très faibles ( de l'ordre de 1 cm/s au plus ).

- Les isothermes représentées figures 4.2 a et 4.4 a sont dans ce cas des droites parallèles ou presque.

La répartition des températures ( voir courbes 4.5 a et 4.6 a ) selon les x est une droite croissante de 0 à 1.

Ces quelques observations nous permettent d'affirmer que la chaleur se transmet par conduction seulement, le nombre de Nusselt étant égal à 1, ce régime est appelé pseudo-conduction.

2ème cas:

- L'observation des iso-fonctions de courant montre que selon l'allongement, il se développe un écoulement à un ou deux rouleaux ( voir figures 4.1 c ) ce pour des nombres de Ra modérés  $\approx 10 E +4$  à  $10 E +5$ .

- Les vitesses v selon l'axe des x ( voir courbes 4.7 a et 4.7 b ) pour ces nombres de Ra montrent une symétrie par rapport au centre de la couche et des extrémums aux environs du premier et du dernier quart de la couche.

- Pour le profil des températures ( courbes 4.5 b et c et 4.6 b et c ) nous pouvons observer que selon la valeur de Al et pour des Ra de  $10 E +4$  on se trouve dans une phase intermédiaire qui n'est ni le régime de pseudo-conduction ni celui des couches limites séparées. C'est le régime de transition.

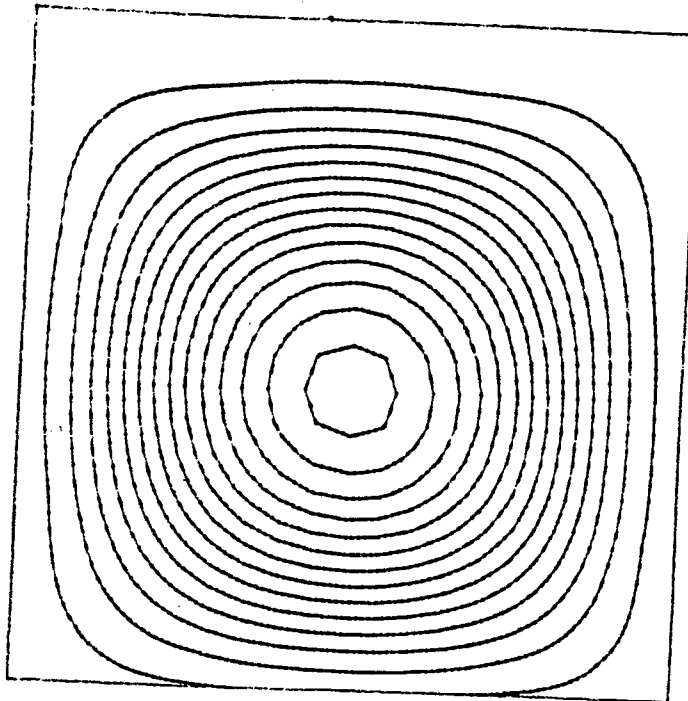
3ème cas:

- Les iso-fonctions de courant montrent des écoulements à deux rouleaux bien distincts ( voir figure 4.1 d ).

- Les vitesses sont relativement importantes ( de l'ordre de 5cm/s ), la symétrie par rapport au milieu de la couche persiste encore, il apparaît de plus un noyau central quasiment immobile ( voir figure 4.7 a et b ).

- Les isothermes ( voir figures 4.2 d et 4.4 b ) sont très prononcées.

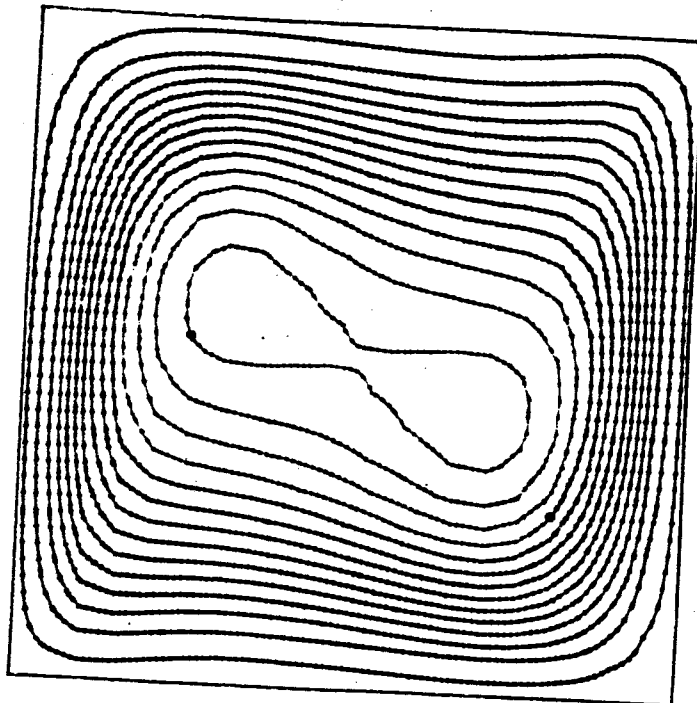
- Le profil des températures selon les x, et au milieu de la couche, présente une bande centrale constante et intermédiaire entre 0 et 1, ce qui prouve que le régime est à couches limites séparées ( voir figure 4.6 d ).



Gr=1E3 - Pr=7 -  $\psi$   
 A1=1 - ISO-COURANT

- 4.301957E-02
- .1290557
- .2150928
- .30113
- .3871872
- .4732043
- .5592415
- .6452788
- .7313157
- .8173528
- .90339
- .9894271
- 1.075464
- 1.161502

Fig. 4.1 a



Re=10E4 - Pr=7  $\psi=90$   
 iso-courant

- .2193332
- .5548888
- 1.081688
- 1.528333
- 1.984888
- 2.401685
- 2.858332
- 3.274888
- 3.711685
- 4.148331
- 4.564888
- 5.021684
- 5.458331
- 5.884887

Fig. 4.1 b.

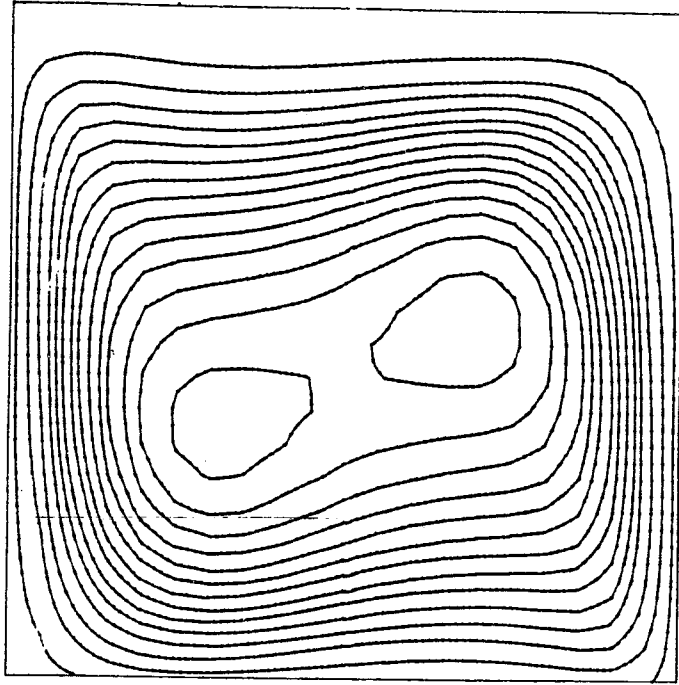


Fig. 4.1 c

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=E  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 .4423919  
 1.327175  
 2.211959  
 3.096743  
 3.981526  
 4.86631  
 5.751084  
 6.635976  
 7.52066  
 8.405443  
 8.290227  
 10.17501  
 11.05979  
 11.94458

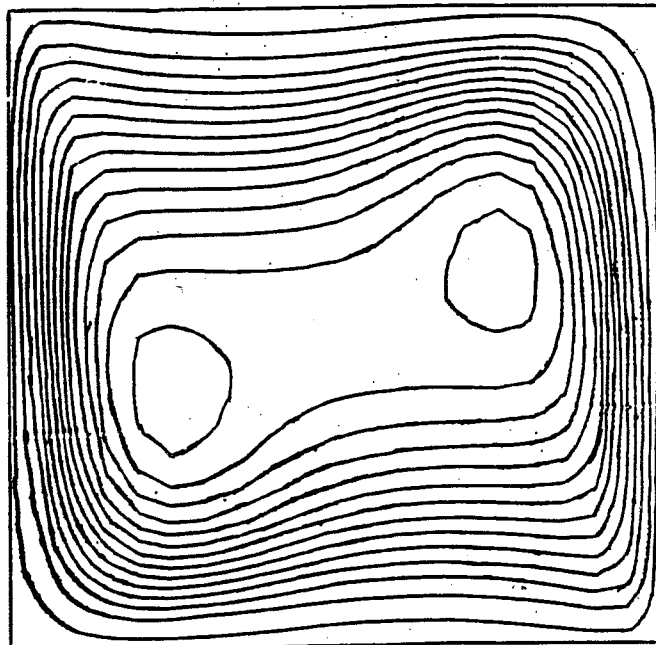
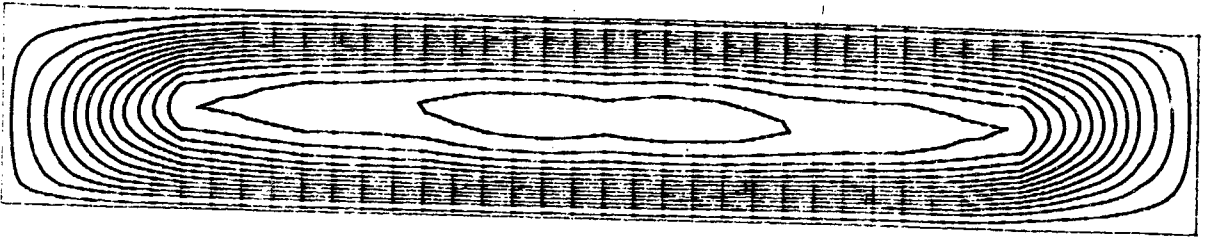


Fig. 4.1 d

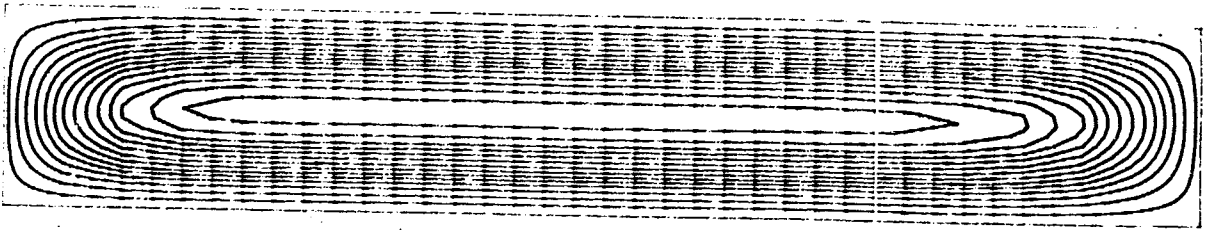
Re=10E5 - Pr=.7  
 iso-courant  
 .9530398  
 2.856119  
 4.765198  
 6.671278  
 8.577358  
 10.48344  
 12.38952  
 14.29559  
 16.20167  
 18.10775  
 20.01383  
 21.91991  
 23.82599  
 25.73207



Ca=1E5 -Pr=7 -phi=90  
 A1=6 -ISO-COURANTS

- 1. 865317
- 5. 595951
- 9. 326584
- 13. 05722
- 16. 78785
- 20. 51848
- 24. 24912
- 27. 87975
- 31. 71038
- 35. 44102
- 39. 17185
- 42. 90229
- 46. 63293
- 50. 36355

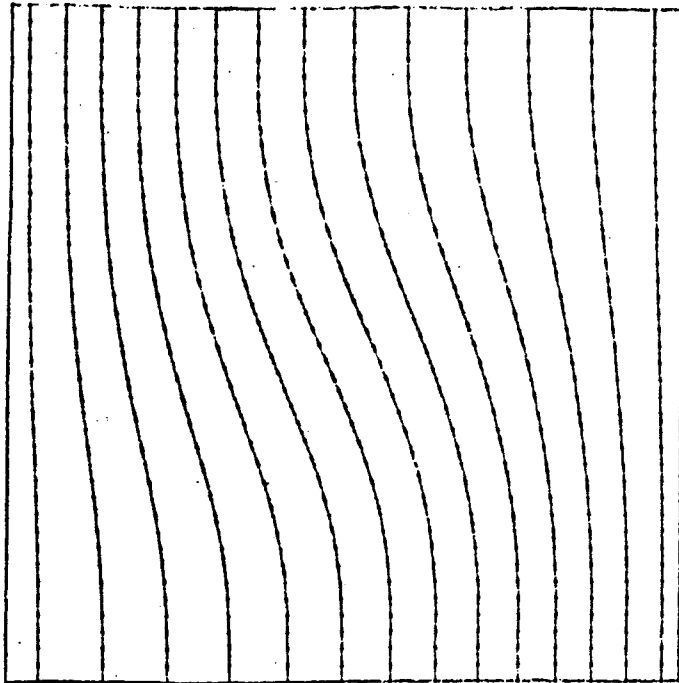
FIG. 4.3 a



Ca=1E3 -Pr=7 -phi=90  
 A1=6 -ISO-COURANTS

- . 0902775
- . 2708325
- . 4513875
- . 6319425
- . 8124976
- . 9930525
- 1. 173608
- 1. 354163
- 1. 534718
- 1. 715273
- 1. 895828
- 2. 076382
- 2. 256938
- 2. 437493

FIG. 4.3 b



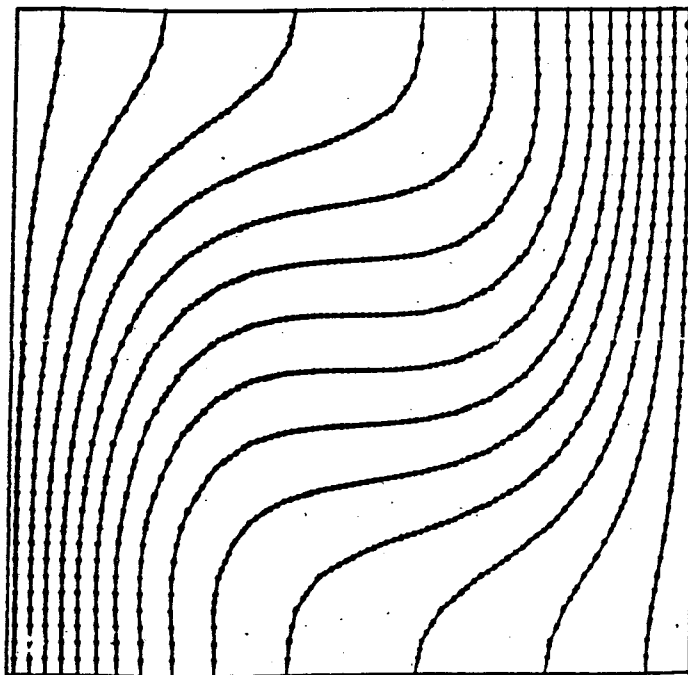
Re=1E3 - Pr=7 - phi=0

A1=1 - ISOTHERMES

3.571428E-02  
 .1071428  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3828571  
 .4842857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8828571  
 .8842858

Fig. 4.2 a

Fig. 4.2 b



Re=10E4 - Pr=7

isothermes

3.571428E-02  
 .1071428  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3828571  
 .4842857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8828571  
 .8842858

AL=1E3 -Pr=.7 -phi=.90  
AL=6 -ISO-TEMPERATURES

3.571429E-02  
.1071429  
.1785714  
.25  
.3214286  
.3928571  
.4642857  
.5357143  
.6071429  
.6785714  
.75  
.8214286  
.8928571  
.9642858

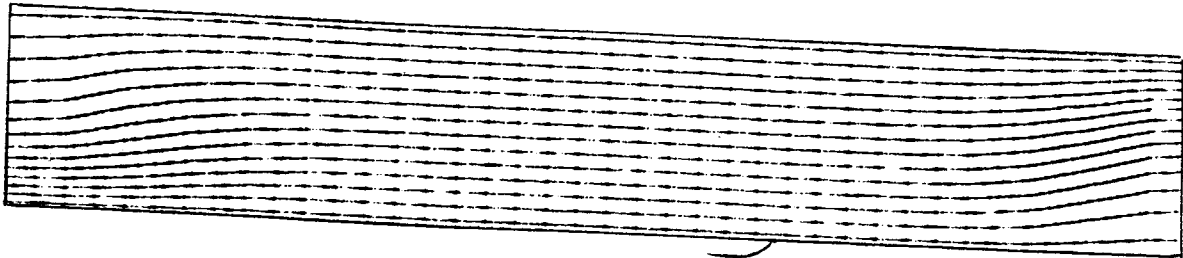


Fig. 4.4 a

AL=1E3 -Pr=.7 -phi=.90  
AL=6 -ISOTHERMES

3.571429E-02  
.1071429  
.1785714  
.25  
.3214286  
.3928571  
.4642857  
.5357143  
.6071429  
.6785714  
.75  
.8214286  
.8928571  
.9642858

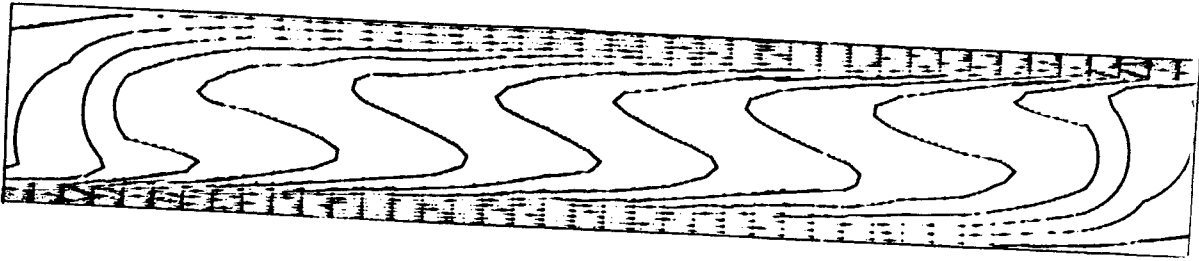


Fig. 4.4 b

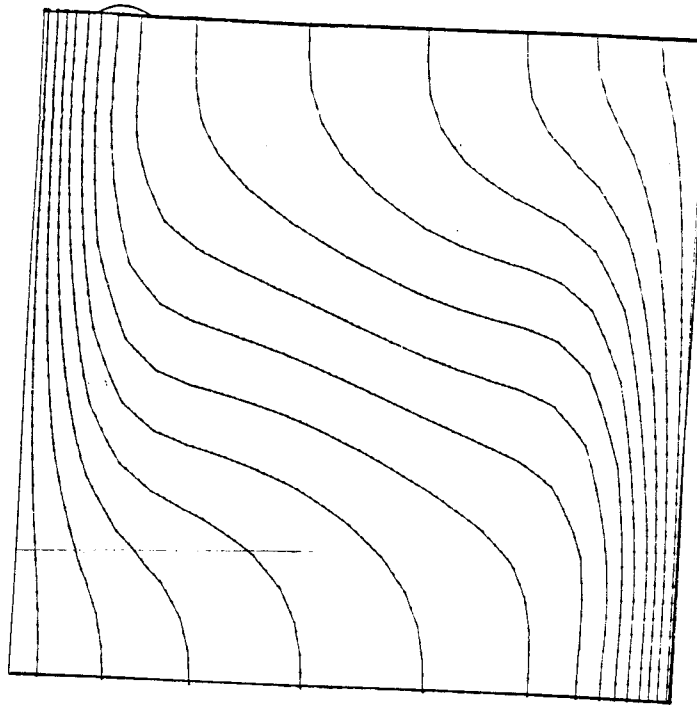


Fig. 4.2 c

Gr=1E5 - Pr=7 - phi

Al=1 - ISOTHERMES

- 3.571429E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

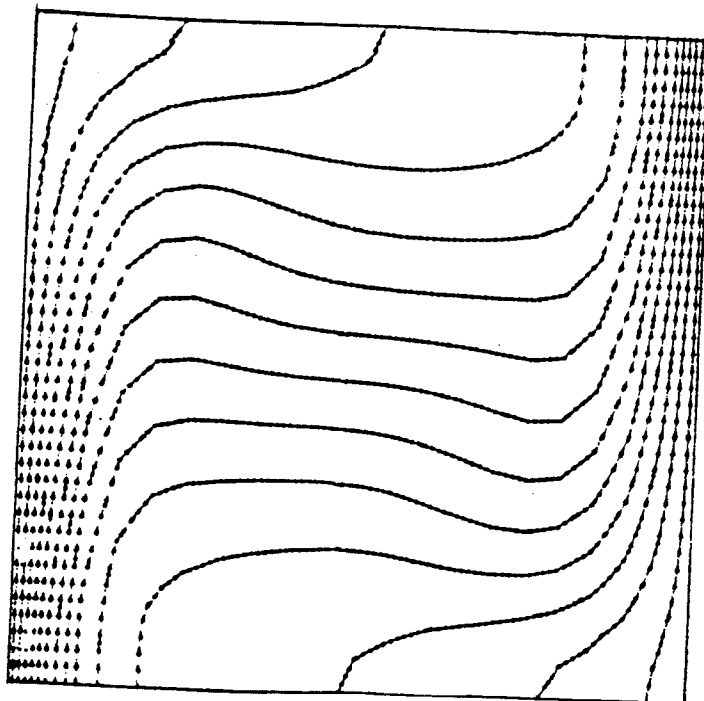
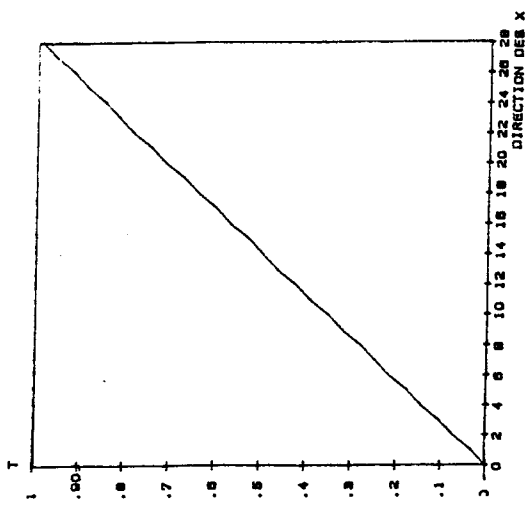


Fig. 4.2 d

Re=10E8 - Pr=7

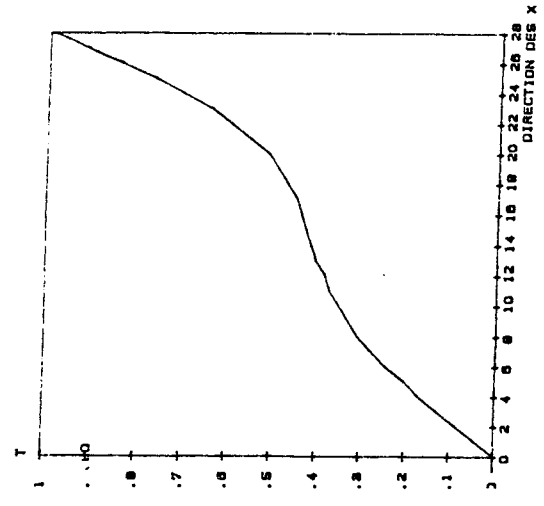
iso-temperatures

- 3.571429E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858



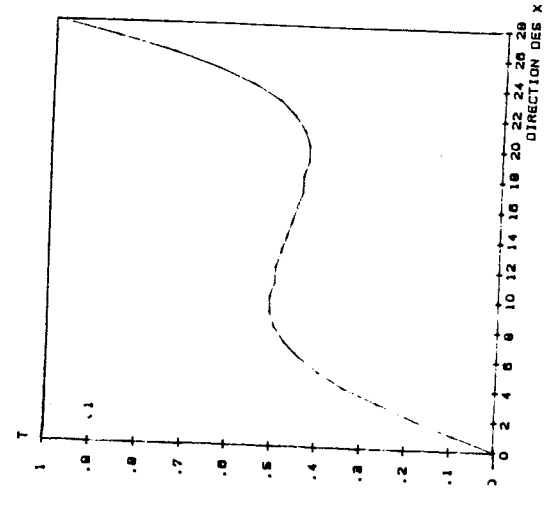
PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+3$  Pr = .7  
 A1 = 5

Fig. 4.5 a



PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+4$  Pr = .7  
 A1 = 6

Fig. 4.5 b



PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+5$  Pr = .7  
 A1 = 6

Fig. 4.5 c

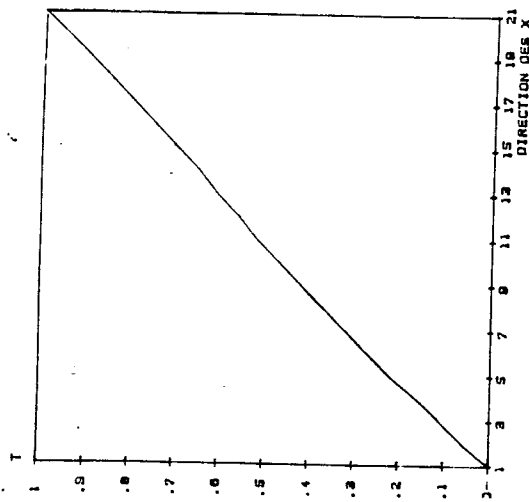


Fig. 4.6 a

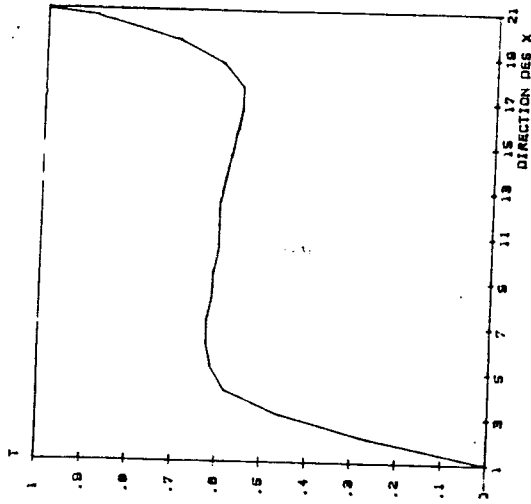


Fig. 4.6 c

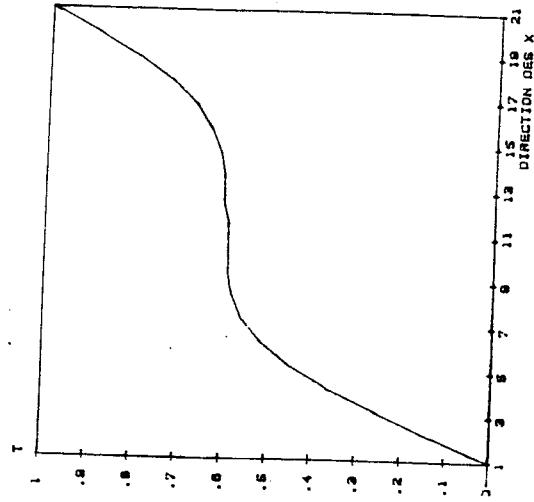


Fig. 4.6 b

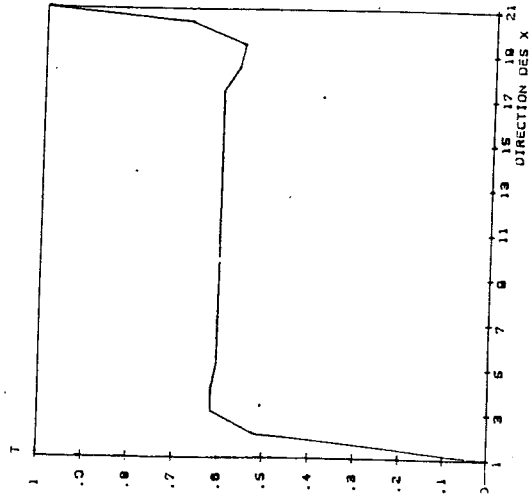
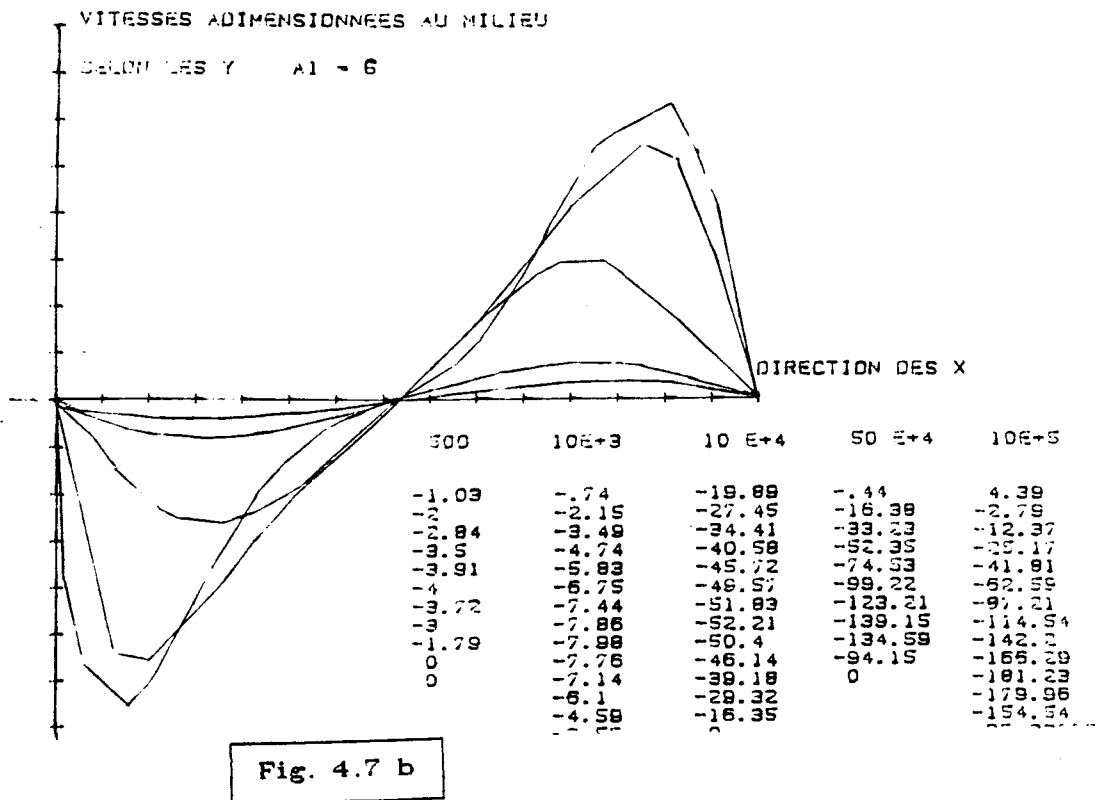
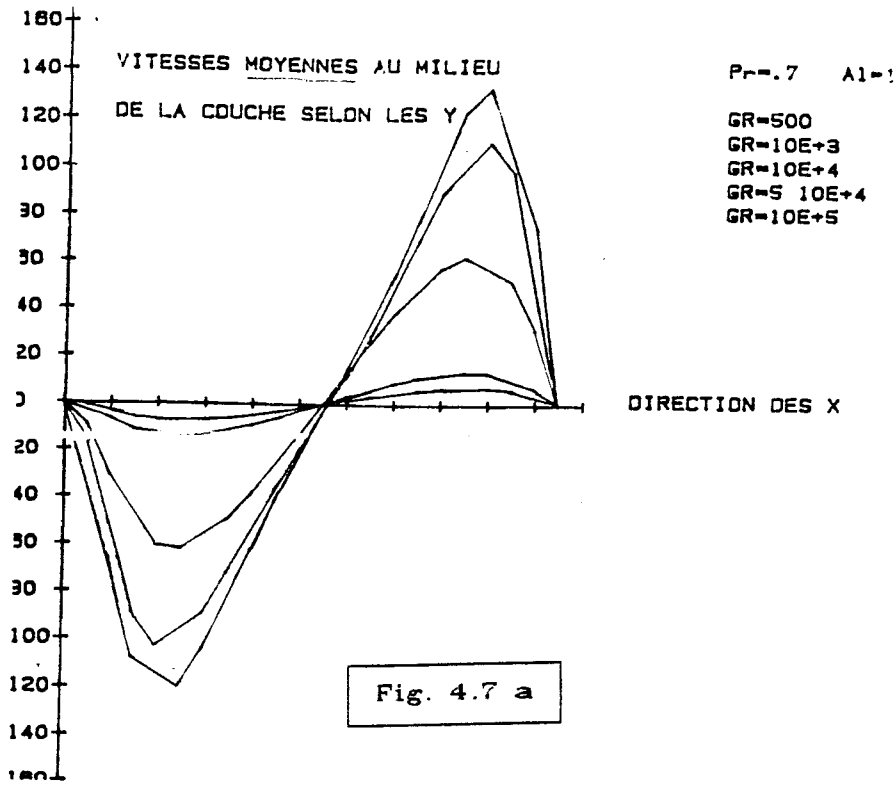


Fig. 4.6 d



5

**RESOLUTION PAR A . D . I -  
METHODES HERMITIENNES COMPACTES**

## 5. LA METHODES DES DIRECTIONS ALTERNEES:

### 5.1 Exposé de la méthode.

La méthode des directions alternées est une méthode itérative conçue initialement par Peaceman et Racheford pour des problèmes paraboliques ( évolutifs en l'occurrence ) [ 36 ], [ 37 ], [ 38 ], [ 39 ], [ 44 ]. Elle fût ensuite étendue pour des problèmes elliptiques par Douglas et Racheford [ 40 ], [ 41 ], [ 42 ], [ 43 ], [ 44 ].

C'est une méthode aux différences qui allie la propriété de stabilité inconditionnelle des schémas implicites à une résolution simple. La méthode s'applique aux problèmes bi ou tridimensionnels en régime stationnaire ou non.

L'idée est simple on discrétise l'équation aux dérivées partielles par différences finies implicites pour la direction des  $i$  par exemple en considérant la direction des  $j$  comme constante pour le premier demi-pas de temps, puis la discrétisation se fera selon  $j$  au deuxième demi-pas de temps. L'intégration se fera dans le même ordre. Cette procédure donnera deux systèmes dont les matrices sont tridiagonales ( pour un problème parabolique ou elliptique ) qui sont simples à inverser, par exemple par la méthode de Thomas ( voir annexe 7 ) de même que [ 45 ].

### 5.2 Mise en oeuvre sur un problème parabolique:

Pour connaître les réactions de la méthode, nous l'avons essayée sur un problème de conduction bidimensionnel, qui est représenté par une équation du type parabolique linéaire qui s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2} \right] \quad 5.1$$

Avec conditions de Dirichlet et conditions de Fourier.

la discrétisation s'écrit de la manière suivante:

- Discrétisation selon les  $i$  en conservant la direction des  $j$  comme constante c'est le premier pas de temps:

$$\frac{\theta_{l,j}^{n+1/2} - \theta_{l,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = a \left[ \frac{\theta_{l+1,j}^{n+1/2} - 2*\theta_{l,j}^{n+1/2} + \theta_{l-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\theta_{l,j+1}^n - 2*\theta_{l,j}^n + \theta_{l,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad 5.2$$

Pour la direction des  $j$  variable on écrit:

$$\frac{\theta_{l,j}^{n+1} - \theta_{l,j}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} = a \left[ \frac{\theta_{l+1,j}^{n+1/2} - 2*\theta_{l,j}^{n+1/2} + \theta_{l-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\theta_{l,j+1}^{n+1} - 2*\theta_{l,j}^{n+1} + \theta_{l,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] \quad 5.3$$

Chacune des deux expressions ci-dessus s'écrit respectivement après arrangements comme suit:

$$D_1 \theta_{1, i+1, j} + C_1 \theta_{1, i, j} + G_1 \theta_{1, i-1, j} = U_{1, j} \quad 5.4$$

$$D_2 \theta_{2, i, j+1} + C_2 \theta_{2, i, j} + G_2 \theta_{2, i, j-1} = V_{1, j} \quad 5.5$$

Avec:

$$U_{1, j} = D_2 \theta_{2, i, j+1} + C_2 \theta_{2, i, j} + G_2 \theta_{2, i, j-1}$$

$$V_{1, j} = D_1 \theta_{1, i+1, j} + C_1 \theta_{1, i, j} + G_1 \theta_{1, i-1, j}$$

et:

$$G_1 = D_1 = -\frac{a\Delta t}{2\Delta x^2}, \quad G_2 = D_2 = -\frac{a\Delta t}{2\Delta y^2}, \quad C_1 = 1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \quad C_2 = 1 + \frac{a\Delta t}{\Delta y^2}$$

On peut présenter cet algorithme sous forme matricielle ce qui donne pour la première expression avec des conditions du type Dirichlet ( Températures connues aux parois  $T_p$  ):

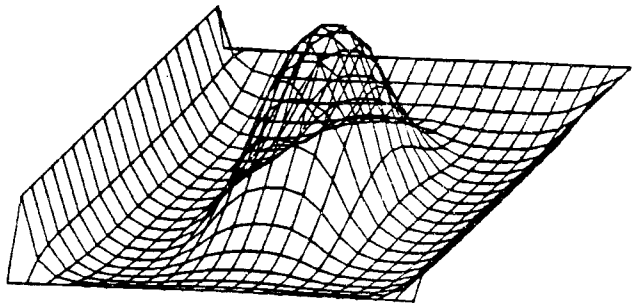
$$\begin{bmatrix} C_1 & D_1 & 0 & & 0 \\ G_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & C_1 & D_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{2, j}^{n+1/2} \\ \theta_{1, j}^{n+1/2} \\ \theta_{1, j}^{n+1/2} \\ \dots \\ \theta_{n-1, j}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{2, j}^n - T_p \\ U_{1, j}^n \\ \dots \\ U_{n-1, j}^n - T_p \end{bmatrix} \quad 5.6$$

La seconde expression est analogue à cette forme il suffira de changer  $G_1, C_1, D_1$  par  $G_2, C_2, D_2$ , et  $U$  par  $V$ .

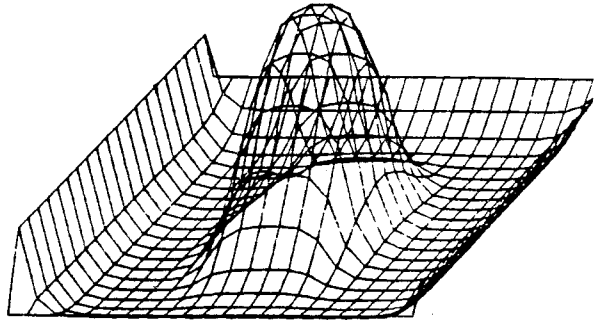
Remarquons que les deux systèmes obtenus sont de l'ordre  $(n-2).(n-2)$  pour des conditions de Dirichlet. Pour les autres types de conditions ils seront de l'ordre  $(n).(n)$ .

Nous avons résolu le problème de la plaque plane ci-dessus pour des conditions de Dirichlet et pour des conditions de Fourier, à l'aide du programme ADPAR exécuté sur HP9836. Nous présentons figures 5.1 l'évolution de la température depuis 0.4 s jusqu'à 7 s. La condition initiale est une température uniforme partout sauf en quelques noeuds du centre ou nous supposons qu'elle est plus importante ( centre chauffé par exemple ) Les conditions aux limites sont du type Dirichlet, c'est-à-dire des températures constantes mais différentes sur chaque bord.

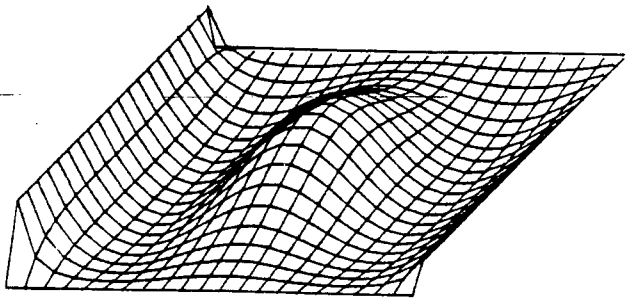
EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = .8$  s



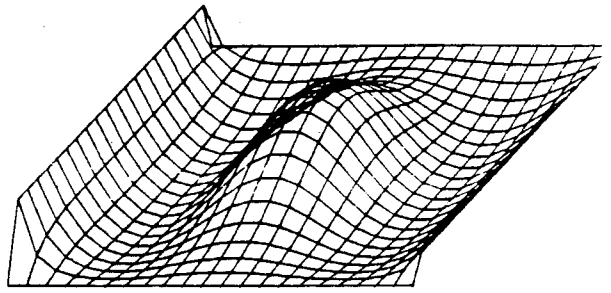
EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = .4$  s



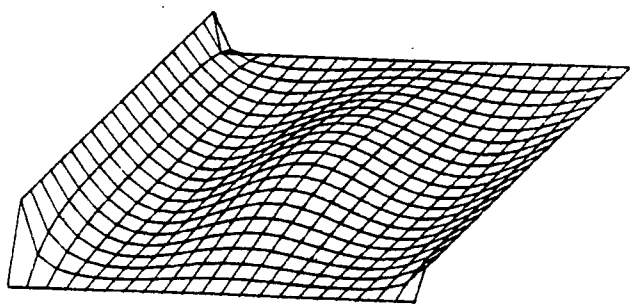
EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 2.4$  s



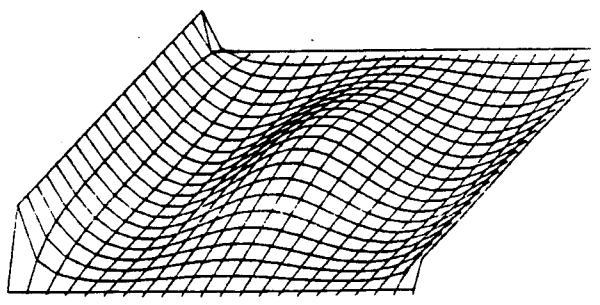
EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 2$  s



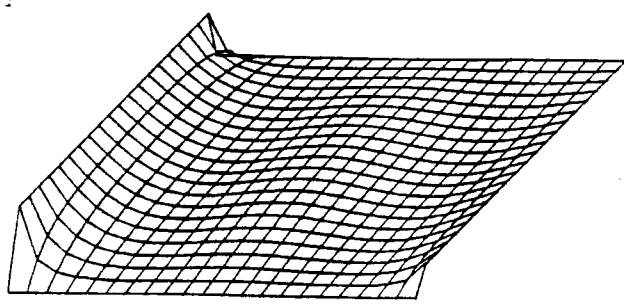
EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 4.4$  s



EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 3.6$  s



EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 7$  s



EQUATION PARABOLIQUE PAR A.D.I  
TEMPERATURES AU TEMPS  $t = 6$  s

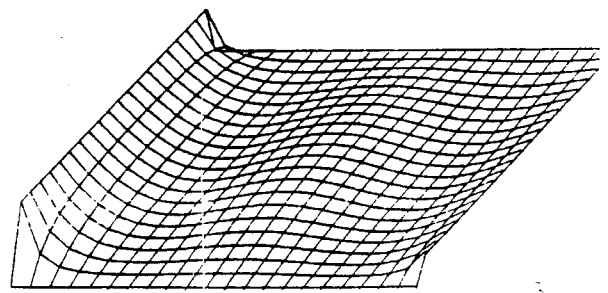


Fig. 5.1

### 5.3 Problème elliptique et stationnarisation:

De plus en plus de problèmes elliptiques sont résolus par la méthode des directions alternées du fait de la commodité que cette technique introduit.

Comme la méthode consiste à discrétiser un problème parabolique on introduit alors un terme dérivé par rapport à un temps fictif pour transformer l'équation elliptique non évolutive en une équation parabolique c'est à dire évolutive. L'astuce consiste à rendre stationnaire l'équation obtenue.

Cette méthode est souvent appelée technique de stationnarisation. Les solutions transitoires sont ignorées et seules la solution permanente compte voir references [ 23 ], [ 24 ], [ 25 ], [ 26 ]

Ainsi donc la solution de l'équation:

$$\nabla^2 f + g = 0 \quad 5.7$$

est obtenue en rendant stationnaire l'équation suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \nabla^2 f + g \quad 5.8$$

La discrétisation et par conséquent l'algorithme obtenu sont analogues au précédent.

Nous avons résolu un problème de diffusion pour les trois types de conditions aux limites linéaires existantes.

on représente figures 5.2a et 5.2b le profil de température pour deux cas: conditions de Dirichlet ( 5.2 ) et conditions de Fourier ( 5.3 ). Le programme a été conçu sur HP9836 et s'appelle ADELLI.BAS.

### 5.4 La méthode A.D.I alliée à la méthode hermitienne compacte d'ordre 4

#### 5.4.1 Relations hermitiennes:

Les développements de Taylor au voisinage d'un noeud  $i$  permettent de donner les expressions discrètes des dérivées premières et secondes voir en annexe 3.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = f_i^{(4)} = \frac{f_{i+1}^{(2)} - 2f_i^{(2)} + f_{i-1}^{(2)}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f_i^{(6)} + O(\Delta x^6) \quad (5.9)$$

En reportant cette approximation dans l'expression de la dérivée seconde, on obtient une relation hermitienne pour les dérivées secondes:

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{12} \left[ f_{i+1}^{(2)} + 10f_i^{(2)} + f_{i-1}^{(2)} \right] - \frac{\Delta x^4}{240} f_i^{(6)} + O(\Delta x^6) \quad (5.10)$$

A. D. I-ELLIPTIQUE-DIRICHLET  
PROFIL DE TEMPERATURES

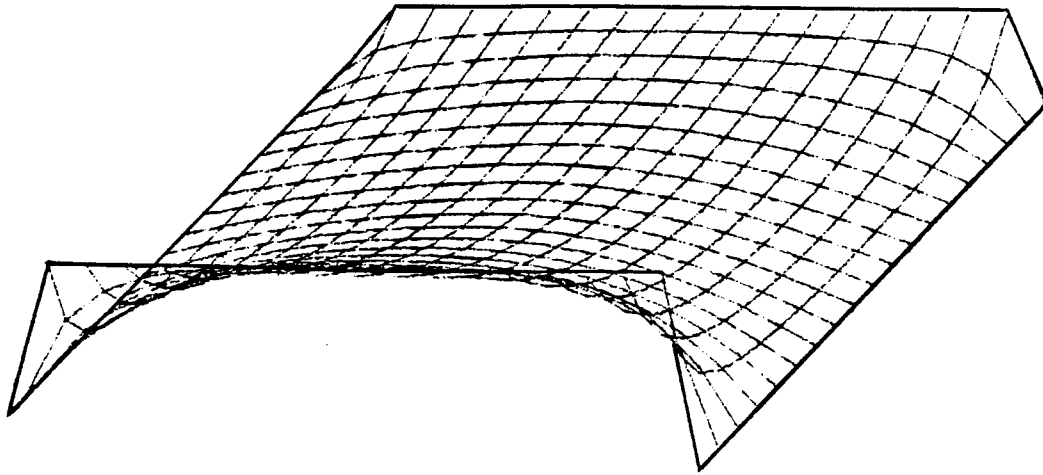


Fig. 5.2 a

ELLIPTIQUE-A. D. I-FOURIER

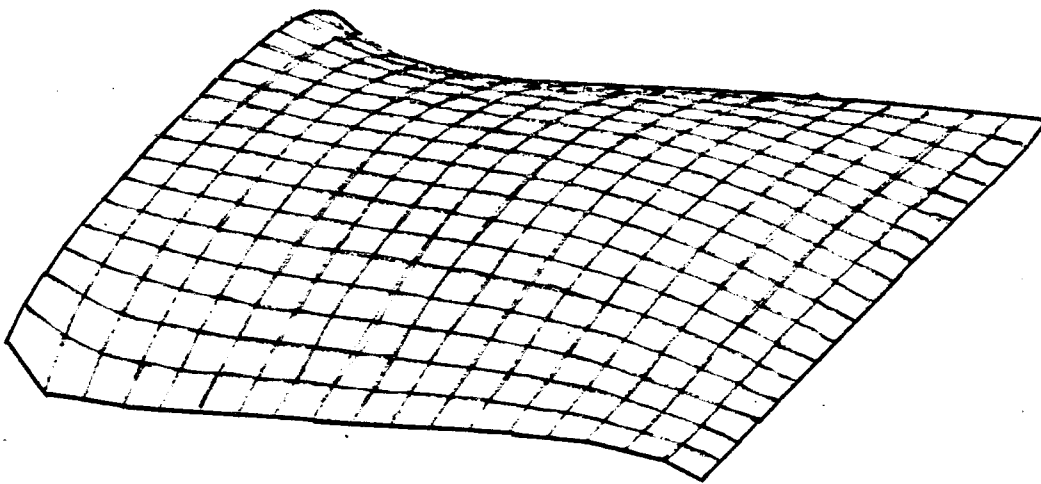


Fig. 5.2 b

On obtient de la même façon une relation hermitienne pour les dérivées premières.

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{6} \left[ f_{i+1}^{(1)} + 10f_i^{(1)} + f_{i-1}^{(1)} \right] - \frac{\Delta x^4}{180} f_i^{(5)} + O(\Delta x^6) \quad (5.11)$$

- L'avantage de ces deux relations est qu'elles permettent d'obtenir des approximations sur trois points successifs seulement et donc d'obtenir des systèmes tridiagonaux, ce qui est très intéressant pour des raisons évidentes de simplicité de résolution et même de temps de calcul.

- L'inconvénient est l'obligation de connaître en plus des conditions aux limites supplémentaires sur les dérivées premières et secondes qui ne sont pas toujours faciles à écrire dans les problèmes de mécanique des fluides.

#### 5.4.2 Exposé de la méthode sur l'équation de Poisson:

La résolution de l'équation de Poisson apparaissant dans le problème qui nous concerne et qui est  $\nabla^2 \psi + \omega = 0$ , est faite par la méthode des directions alternées ( A.D.I ) alliée aux relations hermitiennes compactes d'ordre 4.

C'est principalement en raison de la précision obtenue et du temps de calcul que s'est fait le choix de la méthode.

Exposé de la méthode:

1- Transformer l'équation elliptique en une équation parabolique évolutive en ajoutant un terme transitoire fictif.

2- Annuler le terme fonction du temps c'est à dire rendre stationnaire l'équation parabolique obtenue en utilisant d'ailleurs, un algorithme d'accélération de la convergence ici l'algorithme de Wachpress [46 ].

La solution permanente constitue la solution au problème elliptique.

Equation elliptique

Equation parabolique obtenue

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla^2 \psi + \omega$$

La méthode des directions alternées consiste à discrétiser pour un premier demi-pas de temps dans une direction en, considérant l'autre direction comme constante puis pour le second demi-pas de temps considérer la première comme constante et discrétiser selon la seconde comme suit:

Discrétisation selon la direction des x :

$$\lambda^x \psi^{p*} - \psi_{xx}^{p*} = \psi_{yy}^p + \omega + \lambda^x \psi^p = \text{spx}$$

Discrétisation selon la direction des y :

$$\lambda^y \psi^{p+1} - \psi_{yy}^{p+1} = \psi_{xx}^{p*} + \omega + \lambda^y \psi^{p*} = \text{spy}$$

5.12

les  $\lambda^x$  et  $\lambda^y$  proviennent de la discrétisation de  $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ , on les appelle aussi paramètres de convergence.

$$\lambda^x = \frac{2}{\Delta \tau} \quad \lambda^y = \frac{2}{\Delta \tau}$$

Le calcul des dérivées secondes se fait explicitement à partir de l'équation de Poisson:

$$\psi_{xx}^{p*} = \lambda^x \psi^p - \text{spx}$$

$$\psi_{yy}^{p+1} = \lambda^y \psi^{p*} - \text{spy}$$

5.13

En reportant ces expressions dans les relations hermitiennes du type 5.10 on obtient le système qui suit pour la direction des x et pour le premier demi-pas de temps:

Pour le nœud  $i=0$

$$\left[ \frac{24}{\Delta x^2} + 10\lambda^x \right] \psi_{1,j} + \left[ -\frac{12}{\Delta x^2} + \lambda^x \right] \psi_{0,j} = \frac{12}{\Delta x^2} \psi_{0,j} - \psi_{0,j} + 10\text{spx}_{1,j} + \text{spx}_{2,j}$$

Pour tous les nœuds  $i$

$$\left[ -\frac{12}{\Delta x^2} + \lambda^x \right] \psi_{i+1,j} + \left[ \frac{24}{\Delta x^2} + 10\lambda^x \right] \psi_{i,j} + \left[ -\frac{12}{\Delta x^2} + \lambda^x \right] \psi_{i-1,j} = \text{spx}_{i-1,j} + 10\text{spx}_{i,j} + \text{spx}_{i+1,j}$$

5.14

Pour le dernier nœud  $i = n + 1$

$$\left[ \frac{24}{\Delta x^2} + 10\lambda^x \right] \psi_{n-1,j} + \left[ -\frac{12}{\Delta x^2} + \lambda^x \right] \psi_{n,j} = \frac{12}{\Delta x^2} \psi_{n+1,j} - \psi_{n+1,j} + 10\text{spx}_{n,j} + \text{spx}_{n-1,j}$$

Pour le second demi-pas de temps on obtient une expression analogue en faisant cette fois ci  $i$  constant.

Les dérivées premières sont par suite calculées à partir de la relation hermitienne 5.11 qui donne le système suivant:

$$\left. \begin{aligned}
 4 \psi'_{2,j} + \psi'_{1,j} &= \left[ \frac{3}{\Delta x} \right] \left[ \psi_{2,j} - \psi_{0,j} \right] - \psi'_{0,j} \\
 \psi'_{i+1,j} + 4 \psi'_{i,j} + \psi'_{i-1,j} &= \left[ \frac{3}{\Delta x} \right] \left[ \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} \right] \\
 4 \psi'_{n,j} + \psi'_{n-1,j} &= \left[ \frac{3}{\Delta x} \right] \left[ \psi_{n+1,j} - \psi_{n,j} \right] - \psi'_{n+1,j}
 \end{aligned} \right\} \quad 5.15$$

L'algorithme se résume finalement comme suit:

- 1- Stationnarisation de l'équation de Poisson par A.D.I d'ordre 4 à l'aide de 5.14.
- 2- Calcul explicite des dérivées secondes à l'aide de 5.13.
- 3- Calcul pour chaque pas de temps réel, des dérivées premières selon x et selon y ( ou vitesses u et v ), par A.D.I à l'aide de 5.15 voir [ 34 ].

### 5.4.3 Accélération de la convergence et optimisation:

La stationnarisation de l'équation de Poisson pour des  $\lambda^x$  et  $\lambda^y$  constants est longue. Etant donné que les résultats intermédiaires sont sans signification, il a été proposé plusieurs algorithmes donnant des suites de  $\lambda^x$  et  $\lambda^y$  permettant d'atteindre la solution permanente en un nombre restreint d'itérations wachpress [ 46 ], riyabinski et Godunov [ 16 ], Varga [ 47 ] et Young [ 48 ]..

Pour notre problème, nous avons choisi l'algorithme de Wachpress, qui permet d'obtenir la convergence en  $2^n$  itérations n est un entier ( généralement 3,4 ...). Le sous programme permettant le calcul des paramètres de convergence s'appelle WACHOPT.

### 5.5 Application au problème de la cavité:

Les équations paraboliques qui sont celles de Navier-Stokes et de la chaleur, se discrétisent de la même manière que l'exemple 5.2, on peut donc écrire les systèmes de la même façon:

$$\left. \begin{aligned}
 D1_{i,j} f_{i+1,j}^{n+1/2} + C1_{i,j} f_{i,j}^{n+1/2} + G1_{i,j} f_{i-1,j}^{n+1/2} &= H_{i,j} + K_{i,j} \\
 D2_{i,j} f_{i,j+1}^{n+1} + C2_{i,j} f_{i,j}^{n+1} + G2_{i,j} f_{i,j-1}^{n+1} &= V_{i,j} + K_{i,j}
 \end{aligned} \right\} \quad 5.16$$

Avec bien sûr des coefficients fonction de i et j et dont les expressions s'écrivent comme suit:

$$D1_{i,j} = u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2}$$

$$C1_{i,j} = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta x^2}$$

$$G1_{i,j} = -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2}$$

$$D2_{i,j} = v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2}$$

$$C2_{i,j} = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta y^2}$$

$$G2_{i,j} = -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2}$$

Les vecteurs de droite des expressions 5.16 s'écrivent comme suit:

$$H_{i,j} = DD1_{i,j} f_{i,j+1}^n + CC1_{i,j} f_{i,j}^n + GG1_{i,j} f_{i,j-1}^n$$

$$V_{i,j} = DD2_{i,j} f_{i+1,j}^{n+1/2} + CC2_{i,j} f_{i,j}^{n+1/2} + GG2_{i,j} f_{i-1,j}^{n+1/2}$$

avec:

$$DD1_{i,j} = -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} + \frac{1}{R \Delta y^2}$$

$$DD2_{i,j} = -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{R \Delta x^2}$$

$$CC1_{i,j} = \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{R \Delta y^2}$$

$$CC2_{i,j} = \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{R \Delta x^2}$$

$$GG1_{i,j} = v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} + \frac{1}{R \Delta y^2}$$

$$GG2_{i,j} = u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{R \Delta x^2}$$

On remplacera:

- Pour l'équation du transport des tourbillons:

-  $f$  par  $\omega$

-  $K_{i,j}$  par  $\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{i,j} \sin(\varphi) + \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{i,j} \cos(\varphi)$

-  $R$  par 1

- Pour l'équation de la chaleur:

-  $f$  par  $\theta$

-  $K_{i,j}$  par 0

-  $R$  par  $Pr$

### 5.5.1 A propos des conditions aux limites:

Elles sont les mêmes que celles que nous avons adoptées pour le cas classique nous les rappelons brièvement ici:

Les conditions mécaniques:

La fonction de courant et ses dérivées :

$$\psi_{i,0} = \psi_{i,n} = \psi_{0,j} = \psi_{n,j} = 0 \quad \left. \vphantom{\psi_{i,0}} \right\} 5.17$$

Les conditions d'adhérence:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,n+1} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{0,j} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{n+1,j} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,n+1} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{0,j} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{n+1,j} = 0 \end{aligned} \right\} 5.18 \end{aligned} \right\}$$

Le tourbillon:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i,0} = - \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2\Delta y^2} \quad \omega_{0,j} = - \frac{8\psi_{1,j} - \psi_{2,j}}{2\Delta x^2} \\ \omega_{i,n+1} = - \frac{8\psi_{i,n} - \psi_{i,n-1}}{2\Delta y^2} \quad \omega_{i,n+1} = - \frac{8\psi_{n,j} - \psi_{n-1,j}}{2\Delta x^2} \end{aligned} \right\} 5.19$$

Les conditions thermiques:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{i,0} = 0 \quad \theta_{i,n+1} = 1 \\ \theta_{c,j} = \frac{4\theta_{1,j} - \theta_{2,j}}{3} \quad \text{et} \quad \theta_{n+1,j} = \frac{4\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}}{3} \end{aligned} \right\} 5.20$$

On propose aussi une autre façon d'écrire les conditions aux limites dont les détails du calcul sont donnés en annexe ( 4 ), ces conditions peuvent s'écrire comme suit:

Pour les tourbillons et pour une face on a:

$$\omega_{i,1} + 2 \omega_{i,0} = - \frac{6\psi_{i,1}}{\Delta x^2}$$

Pour la température la condition d'isolation permet d'obtenir l'équation suivante pour la face  $j = 0$  par exemple:

$$\left( D_{2,i,0} + G_{2,i,0} \right) \theta_{i,1}^{n+1} + C_{2,i,0} \theta_{i,0}^{n+1} = V_{i,j}$$

Une équation similaire est obtenue pour la face  $j = n+1$ .

### 5.5.2 Nécessité de la précision d'ordre 4 pour l'équation de Poisson:

- Les conditions sur les tourbillons sont exclusivement fonction de la fonction de courant comme on a pu le constater lors de l'écriture de celles-ci, il est donc évident que la précision sur obtenuesur  $\omega$  est directement liée à celle obtenue sur  $\psi$ .

Lorsque le nombre de Rayleigh atteint des valeurs importantes, les variations des tourbillons sont très importantes, il devient alors nécessaire, pour en tenir compte, soit de serrer le maillage et donc d'augmenter les dimensions du système, soit d'augmenter la précision sur la fonction de courant  $\psi$ .

Le fait de serrer le maillage impliquera évidemment un temps de calcul plus long.

- La méthode que nous adoptons dans cette deuxième partie de notre travail est basée sur la deuxième idée, c'est à dire augmentation de la précision sur la fonction de courant  $\psi$  lors de la résolution de l'équation de Poisson par la méthode Hermitienne compacte d'ordre 4, l'augmentation de la dimension des systèmes entraînant des temps de calculs prohibitifs.

### 5.6 Algorithme pour un pas de temps réel:

On résoud dans cet ordre :

a- Stationnarisation de l'équation de Poisson par A.D.I d'ordre 4 à l'aide de 5.14.

b- Calcul explicite des dérivées secondes à l'aide de 5.13.

c- Calcul des dérivées premières selon x et selon y ( ou vitesses u et v ), par A.D.I à l'aide de 5.15 et des conditions aux limites 5.17.

d- Calcul du champ de température par A.D.I grâce aux systèmes 5.16 et les conditions aux limites 5.19.

e- Calcul du champ de tourbillons par A.D.I grâce aux systèmes 5.16 et les conditions aux limites 5.18.

f- Retour en a si la précision imposée n'est pas atteinte.

### 5.7 Résultats et conclusions partiels:

Un programme fortran A.D.P conçu de façon modulaire avec un maximum de sous-routines et dans le souci d'être réutilisé ultérieurement moyennant quelques modifications notamment celles relatives aux conditions aux limites, selon l'algorithme 5.5.3 permet de donner des résultats comparables à ceux obtenus par CLASNAT, mais aussi à ceux obtenus par de nombreux auteurs.

Les résultats obtenus couvrent largement le domaine des  $Ra$  que nous avons pu obtenir sur CLASNAT,  $Ra \approx 10^6$  à  $10^7$ .

des Pr jusqu'à 1000 et des allongements jusqu'à 100, il permet en outre d'avoir des solutions en transitoire.

Le souci de connaître le comportement de la cavité au delà des sollicitations déjà très largement obtenues par nombre d'auteurs et qui est en fait un des buts de notre travail, nous a amené à rechercher les techniques utilisées pour faire reculer les limites de la convergence.

### 5.8 Amélioration des performances-décentrement:

En réalité la cause principale de la rupture de la convergence est la perte de la dominance des diagonales principales de nos systèmes par rapport aux autres termes des matrices, il faut donc récupérer cette prépondérance.

Pour cela la procédure consiste souvent à utiliser des dérivées décentrées du côté de l'écoulement " Upwind " introduites entre autre par Runchall et Torrance [ 43 ], qui détruisent le "Wiggle" phénomène qui cause l'instabilité, à la place des dérivées centrées ( centered ) qui sont les plus précises ( ordre 2 ) mais les plus instables.

Les inconvénients sont une perte de la précision globale de l'ordre 2 à l'ordre 1, mais aussi une complication du schéma résultant.

On prendra donc:

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{si } u_{i,j} > 0$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\Delta x} \quad \text{si } u_{i,j} < 0$$

Selon que l'on choisisse la forme conservative ou convective deux manières distinctes pour décentrer sont proposées:

1- Pour la forme conservative:

On trouve [ 43 ] la procédure suivante:

$$\left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} \omega_{i,j} - u_{i-1/2,j} \omega_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{si } \begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i-1/2,j} \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} \omega_{i+1,j} - u_{i-1/2,j} \omega_{i,j}}{\Delta x} \quad \text{si } \begin{cases} u_{i+1/2,j} < 0 \\ u_{i-1/2,j} < 0 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})\omega_{i,j}}{\Delta x} \quad \text{si} \quad \begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i-1/2,j} < 0 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j}\omega_{i+1,j} - u_{i-1/2,j}\omega_{i+1,j}}{\Delta x} \quad \text{si} \quad \begin{cases} u_{i+1/2,j} < 0 \\ u_{i-1/2,j} \geq 0 \end{cases}$$

Pour la direction des y on obtiendra des expressions analogues:

La discrétisation nous permet d'obtenir des systèmes où les  $D_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$  et  $G_{i,j}$  changent selon la valeur des  $u_{i,j}$  ( Voir annexe 6 ).

2- Pour la forme convective nous avons adopté le décentrement préconisé par [ 33 ]:

$$\left. \frac{u\partial\omega}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} = u_{i,j+1/2}^n \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \quad \text{si} \quad u_{i,j+1/2}^n \geq 0$$

$$\left. \frac{u\partial\omega}{\partial x} \right)_{i,j+1/2} = 2 u_{i,j+1/2}^n \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - u_{i,j+1/2}^n \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \quad \text{si} \quad u_{i,j+1/2}^n < 0$$

$$\left. \frac{u\partial\omega}{\partial x} \right)_{i,j-1/2} = u_{i,j+1/2}^n \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j-1}^n}{\Delta x} \quad \text{si} \quad u_{i,j-1/2}^n \leq 0$$

$$\left. \frac{u\partial\omega}{\partial x} \right)_{i,j-1} = 2 u_{i,j-1/2}^n \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta x} - u_{i,j-1/2}^n \frac{\omega_{i,j-1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \quad \text{si} \quad u_{i,j+1/2}^n > 0$$

Pour le terme  $\frac{v\partial\omega}{\partial y}$  on établit des relations similaires.

## 5.9 Résultats et commentaires:

### 5.9.1 Ce que permet le modèle:

Le programme GRGR.FOR qui a été conçu sur la base de ADP.FOR et sur l'idée du décentrement, nous a permis de résoudre les équations de la couche pour un spectre beaucoup plus large que tous les précédents soit:

- Pour les Ra jusqu'à  $10 E + 11$ .
- Pour les Pr jusqu'à 1000.
- Pour les Al au delà de 500.
- Pour des couches inclinées de 0 à  $180^{\circ}C$ .

Le programme permet aussi de connaître l'évolution de tous les paramètres de base en fonction du temps, ce qui n'était pas le cas pour le premier modèle.

Remarque:

La première constatation que nous faisons et qui confirme la justesse de notre modèle est que les résultats obtenus sont identiques à ceux obtenus par le modèle de la partie classique et ce pour toutes les possibilités qu'offre ce dernier.

### 5.9.2 résultats pour les couches verticales:

Nous avons tracé pour cette seconde phase plusieurs types de graphes:

Pour comprendre l'écoulement:

- Les iso-fonctions de courants .
- Les iso-tourbillons.
- Les vitesses ascendantes.
- Les tourbillons sur une paroi.
- Les paramètres caractéristiques en fonction du temps.
- Frontières entre les différents écoulements.

Pour comprendre le transfert thermique:

- Les isothermes.
- L'évolution des températures dans la couche.
- L'évolution du gradient de température dans la couche.
- Influence de Al et de  $\varphi$  sur le transfert.
- Variation de Nu par rapport à Ra.

Nous retrouvons :

\* Un écoulement à un seul rouleau central figures 5.3a (Al = 1 ), 5.10 a et b ( Al = 2 ), 5.16 a,b et c ( Al = 4 ), 5.18a et b ( Al = 6 ), 5.22b ( Al = 20 ) et 5.23 a et b ( Al = 0.5 ).

\* Des vitesses ascendantes figures 5.6 a ( Al = 1 ) et 5.12 a ( Al = 2 ) très faibles avec un changement de signe au centre de la couche.

\* Des isothermes quasiment parallèles figures 5.4a ( Al = 1 ), 5.17a et b ( Al = 4 ), 5.19a ( Al = 6 ) et 5.24 a ( Al = 0.5 ) , pour la répartition de températures à travers la couche

on trouve que c'est une droite passant par 0 et 1 figures 5.5 a (  $Al = 1$  ), 5.13 a (  $Al = 2$  ) et 5.20 a (  $Al = 6$  ) et enfin un \* Un gradient de température presque constant figures 5.7 a (  $Al = 1$  ) et 5.14 (  $Al = 2$  ).

Ceci nous permet de confirmer une seconde fois que le transfert se fait par conduction pure, ce que nous avons appelé de la pseudo-conduction.

La transition est représentée par:

\* Une évolution vers un écoulement à deux ou plusieurs rouleaux pour les iso-fonctions de courant figures 5.3 b et c (  $Al = 1$  ), 5.10 b (  $Al = 2$  ), 5.16 d (  $Al = 4$  ), 5.18 b et c (  $Al = 6$  ), 5.21 b (  $Al = 10$  ) et 5.23 b (  $Al = 0.5$  ).

\* Des Vitesses ascendantes ( et descendantes ) plus importantes avec une inflexion au centre de la couche figures 5.6 a (  $Al = 1$  ) et 5.12a (  $Al = 2$  ).

\* Des isothermes plus prononcées figures 5.4 b et c (  $Al = 1$  ), 5.11 b (  $Al = 2$  ), 5.17c et d (  $Al = 4$  ), 5.19 b (  $Al = 6$  ) et 5.24 b (  $Al = 0.5$  )

\* Une évolution de la température de la face gauche vers la face droite qui n'est plus une droite figures 5.5 b et c (  $Al = 1$  ), 5.13 b, c et (  $Al = 2$  ) et 5.20 b et c (  $Al = 6$  ) et 5.24 b (  $Al = 0.5$  ).

\* Les gradients de températures sont au maximum sur les côtés et au minimum au centre figures 5.7 a (  $Al = 1$  ) et 5.14 (  $Al = 2$  ).

L'écoulement à couches limites séparées est caractérisé par :

\* Des écoulements à deux ou plusieurs rouleaux bien distincts figures 5.3 d et e (  $Al = 1$  ), 5.10 c et d (  $Al = 2$  ), 5.16 e, f, g et i (  $Al = 4$  ), 5.18 d et e (  $Al = 6$  ), 5.21 a et c (  $Al = 10$  ), 5.22 b, c et d (  $Al = 20$  ) et 5.23 c (  $Al = 0.5$  ).

\* Des vitesses importantes présentant un noyau central quasiment immobile et des extrémums près des parois, figures 5.6 b (  $Al = 1$  ) et 5.12 b (  $Al = 2$  ).

\* Des isothermes très prononcées figures 5.4 d (  $Al = 1$  ), 5.11 b, c et d (  $Al = 2$  ), 5.17 d, e, f, g et h.

\* Une évolution de la température à travers la couche présentant une bande centrale constante figures 5.5 d, e et f (  $Al = 1$  ), 5.13 e et f (  $Al = 2$  ) et 5.20 e (  $Al = 6$  ).

\* Des gradients de températures importants et qui présentent un maximum sur les deux faces et un minimum au milieu figures 5.7 a et b (  $Al = 1$  ) et 5.14 (  $Al = 2$  ).

\* Des iso-tourbillons qui présentent une symétrie par rapport à la diagonale voir figures 5.27 a, b et c (  $Al = 2$   $\rho = 0^\circ$  ) cette remarque est vraie pour l'ensemble des cas que nous avons traités.

\* une évolution des tourbillons pariétaux figures 5.8 a et b qui présentent un maximum vers le centre de la paroi et qui augmente très vite avec Ra.

\* Des Nusselts qui augmentent en fonction de Ra naturellement ce qui est représenté figure 5.36.

Ces remarques sont valables tant que l'écoulement reste laminaire, il est vrai aussi que le nombre de rouleaux peut augmenter selon que Al augmente.

### 5.9.3 Influence de l'allongement sur le transfert de chaleur:

la figure 5.36 montre que plus Al augmente et plus il est difficile d'évacuer de la chaleur pour un même Ra, ce qui se traduit par des Nu qui diminuent en fonction de Al.

La figure 5.37 prouve la décroissance de Nu lorsque Al augmente, remarquons que pour les grands Al la décroissance est beaucoup plus faible, ce qui se traduit sur la figure par un aplatissement des courbes.

### 5.9.4 Couches horizontales:

Le programme GRGR permet aussi de nous donner des résultats pour des couches d'inclinaisons nulle ou à  $180^\circ$ .

\* Couches à  $180^\circ$ :

\* Les figures 5.28 a, b et c ( Al = 1 ) représentent les iso-fonctions de courants pour des Gr de  $10E+3$ , 5 et 6. Notons la difficulté que l'on a de provoquer le mouvement, en effet même pour un écart de température important, c'est dire un Ra important, le nombre de Nusselt reste proche de 1.

\* Les isothermes restent des droites parallèles. Pour des Ra équivalents, les isothermes étaient très prononcées en position verticale Ra =  $10E+4$ .

Il y a donc stratification des couches fluides et blocage relatif du mouvement figures 5.29 a et b ( Al = 1 ).

\* Nu augmente lentement en fonction de Ra, il y a donc une perte minimale de chaleur. C'est pour cela qu'on utilise cet effet dans de nombreuses applications ( meubles frigorifiques par exemple ).

Couches à  $0^\circ$ :

\* Dans ce cas on remarque que l'écoulement s'établit très vite, et on atteint rapidement le régime turbulent pour de bas nombres de Ra. Les iso-fonctions de courant présentent un écoulement à cinq rouleaux pour des nombres de Ra faibles  $10E+3$  et  $10E+4$  figures 5.30 a et b ( Al = 1 ), à un rouleau avec des zones de recirculation sur deux coins et pour Ra de  $10E+5$  et 6 figures 5.30 c et d ( Al = 1 ), notons aussi les iso-fonction présentées figures 5.25 a, b et c ( Al = 2 ).

\* Les isothermes se courbent très vite voir évolution figure 5.31 a, b, c, d et e pour  $Al = 1$  et les figures 5.26 a, b et c pour  $Al = 2$ .

#### 5.9.5 Couches inclinées:

\* Les figures 5.32 a, b, c et d et 5.34 a, b, c, d et e représentent pour des inclinaisons de  $30^\circ$  et  $60^\circ$  des iso-fonctions de courants.

nous retrouvons ici aussi les différents types d'écoulements que nous avons rencontrés précédemment à un rouleau et à plusieurs rouleaux.

\* les figures 5.33 a, b, c et d et 5.35 a, b et c qui représentent les isothermes indiquent clairement l'effet de l'inclinaison par rapport à des couches verticales soumises aux mêmes sollicitations.

\* Pour pouvoir comprendre l'influence de l'inclinaison sur le transfert de chaleur nous avons tracé figures 5.38  $Nu$  en fonction de  $\varphi$ .

Ces courbes présentent un maximum selon la valeur de  $Gr$ . Exemple pour  $Al = 1$  et  $Gr = 10+6$  le  $\varphi$  correspondant au maximum d'évacuation de chaleur à  $44^\circ$ . Notons aussi qu'il y'a un déplacement de ce maximum vers les grands  $\varphi$  lorsque  $Gr$  diminue.

Une application connue d'ailleurs de ce résultat est le bon choix de l'inclinaison d'un capteur solaire plan.

Notons aussi que l'influence des  $Al$  sur  $Nu$  faiblit lorsque  $Al$  augmente.

#### 5.9.6 Concernant les grands Grashoff:

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus le type d'écoulement donc le régime, est non seulement fonction de  $Ra$  mais aussi de  $Al$  ( et même de l'inclinaison que nous n'envisageons pas ici ).

Si la frontière entre la conduction pure et la convection laminaire est clairement indiquée par les valeurs de  $Ra$  correspondant à  $Nu = 1$ , ce n'est pas le cas de la frontière entre le régime turbulent et le régime laminaire.

Nous proposons ici un moyen qui permet de déceler cette transition. A cet effet nous traçons systématiquement l'évolution de certaines grandeurs (  $Nu$ ,  $v$  ... ) par rapport au temps et nous montrons que lorsque le régime permanent est atteint deux cas peuvent se présenter :

- 1- Le paramètre en question est constant.
- 2- Le paramètre oscille autour d'une position moyenne.

**C'est le  $Ra$  correspondant au deuxième cas qui sera la valeur limite entre les deux régimes.**

Nous avons déterminé ces  $Ra$  limites et nous avons tracé la frontière entre le régime laminaire et turbulent en fonction des  $Al$  ( figure 5.40 ).

- Nous avons pu constater en traçant l'évolution de Nu en fonction du temps ( de calcul ou du temps réel ) qu'à partir d'une limite qui dépend de Ra et Al le régime permanent n'est plus atteint.

Les courbes 5.9 a b ( Al = 1 ) qui représentent les Nu local et moyen, montrent que pour des Ra faibles le régime permanent est toujours atteint et bien souvent en un temps assez faible.

Plus Ra augmente et plus le régime stationnaire tarde à venir figures 5.9 c et d, remarquons les oscillations importantes de Nu au départ qui s'amortissent en fonction du temps pour donner un Nu constant et donc le régime permanent. La figure 5.9 e représente un spécimen des courbes évoquées ci-dessus et qui montrent que lorsque l'on atteint une valeur limite qui est ici  $Gr = 10 E +7$  pour un Al = 1 nous n'obtenons tout simplement plus de régime permanent au sens strict du terme, mais des Nu qui oscillent autour d'une valeur moyenne. C'est cette limite que nous considérons être ici la frontière entre le régime laminaire et le régime turbulent.

Ceci explique aussi pourquoi la résolution par différences finies classiques en régime permanent divergeait pour des Ra relativement importants.

La figure 5.9 f représente les variations de Nu en fonction du temps pour un Gr supérieur à la limite que nous venons d'évoquer.

- Lorsque cette limite est atteinte le Nu local oscille, de même d'ailleurs que des grandeurs comme la vitesse, ce qui prouve l'existence d'ondes de gravité qui finissent par rendre le régime instationnaire et par la suite turbulent voir aussi [ 7 ].

- Lorsque Ra atteint des valeurs de l'ordre  $10 E +6$  à  $10 E + 7$  la solution des équations est fonction du pas d'espace et par conséquent du maillage de la couche . Le pas de temps  $\Delta t$  étant lié au pas d'espace  $\Delta x$ , il faut donc le changer par conséquent. Nous avons fait changer  $\Delta t$  par tâtonnement à défaut de déduire une loi de variation  $\Delta t = f( \Delta x)$  par une recherche systématique longue et coûteuse. En tout état de cause lorsque  $\Delta x$  augmente il faut diminuer  $\Delta t$ .

- Le serrage du maillage et la diminution du pas de temps entraînent des temps de calcul très importants. En fait pour les grands Ra (  $\approx 10 E +7$  pour Al = 1 ) on s'approche du domaine turbulent, et dans ce cas au niveau des couches limites se développent des micro-tourbillons qui fluctuent dans l'espace et dans le temps et dont il faut tenir compte par un maillage serré et par un pas de temps faible.

Etant donné que cela se passe au niveau des couches limites certains auteurs préconisent un pas d'espaces serré près des parois et lâche ailleurs. Le Programme GRGR.FOR peut s'adapter à cette situation [ 29 ].

- Pour pouvoir obtenir des résultats rapidement pour de forts Ra il serait intéressant d'essayer des calculateurs plus puissants que le microvax sur lequel j'ai pu travailler.

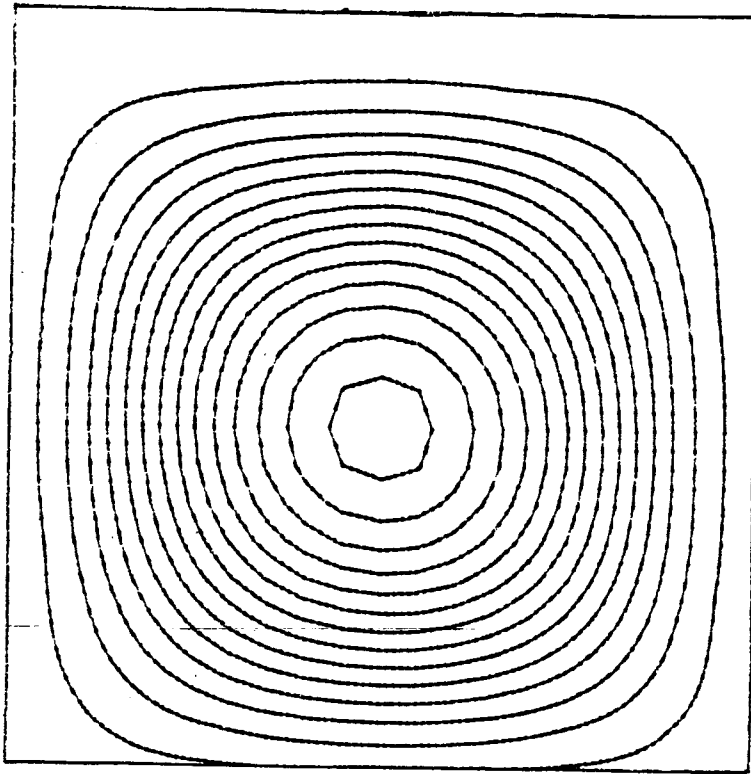


Fig. 5.3 a

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=90

A1=1 - ISO-COURANT

- 4.301857E-02
- .1290557
- .2150929
- .30113
- .3871872
- .4732043
- .5592415
- .6462786
- .7313157
- .8173528
- .90339
- .9894271
- 1.075464
- 1.161502

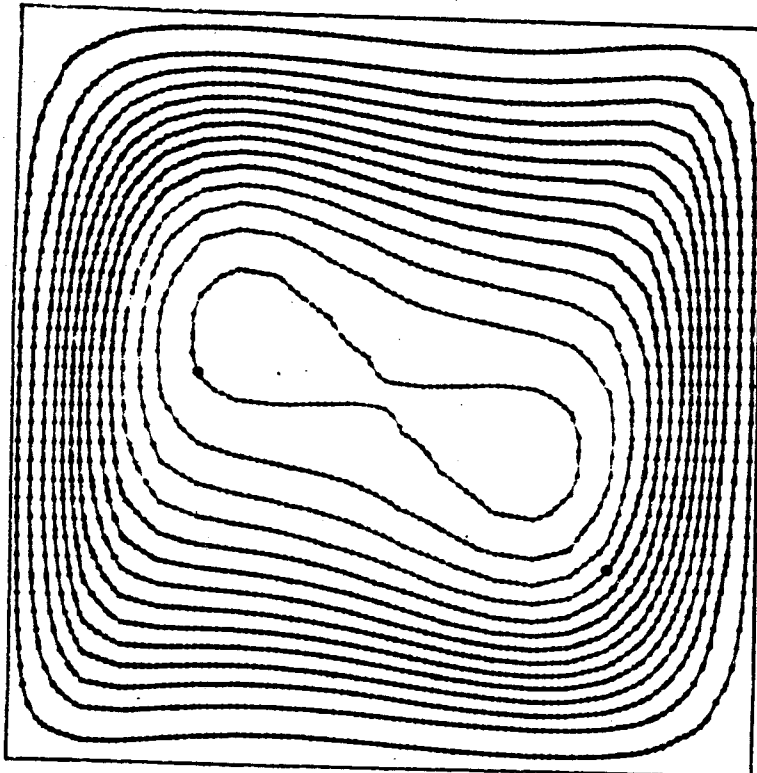


Fig. 5.3 b

Re=10E4 - Pr=.7  $\psi=90$

iso-courant

- .2183332
- .8548888
- 1.081888
- 1.528333
- 1.884888
- 2.401888
- 2.838332
- 3.274888
- 3.711888
- 4.148331
- 4.584888
- 5.021884
- 5.458331
- 5.884887

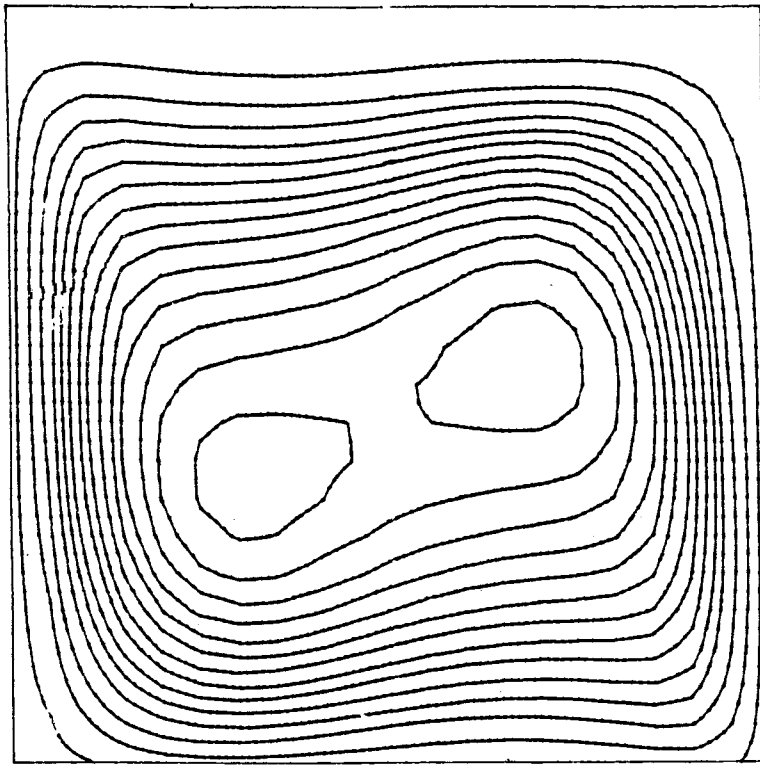


Fig. 5.3 c

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=90  
 Al=1 - ISO-COURANT  
 .4423918  
 1.327175  
 2.211959  
 3.096743  
 3.981526  
 4.86631  
 5.751094  
 6.635976  
 7.52066  
 8.405443  
 9.290227  
 10.17501  
 11.05979  
 11.94458

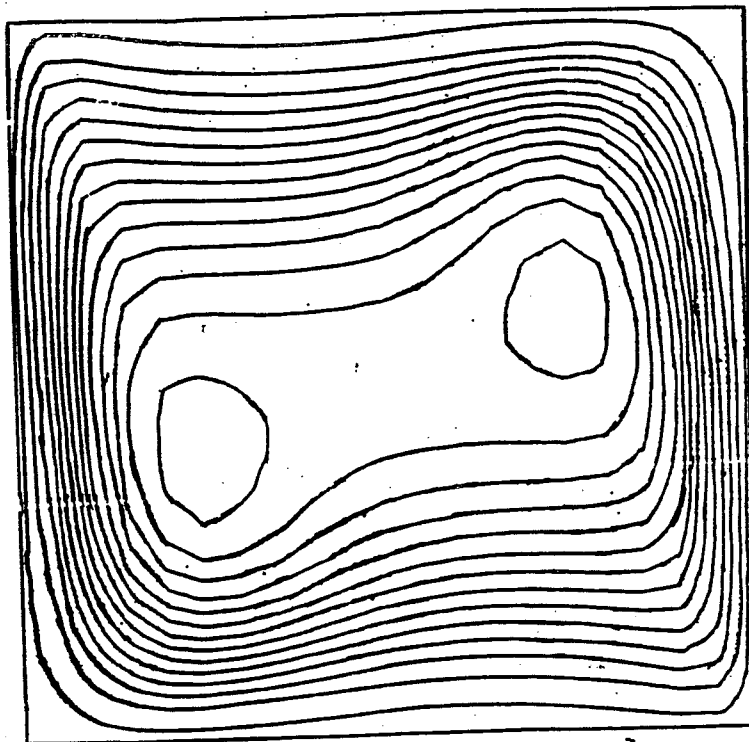


Fig. 5.3 d

Re=10E8 - Pr=.7  
 iso-courant  
 .9530396  
 2.858118  
 4.765198  
 6.671278  
 8.577358  
 10.48344  
 12.38852  
 14.29359  
 16.20167  
 18.10775  
 20.01383  
 21.91991  
 23.82599  
 25.73207

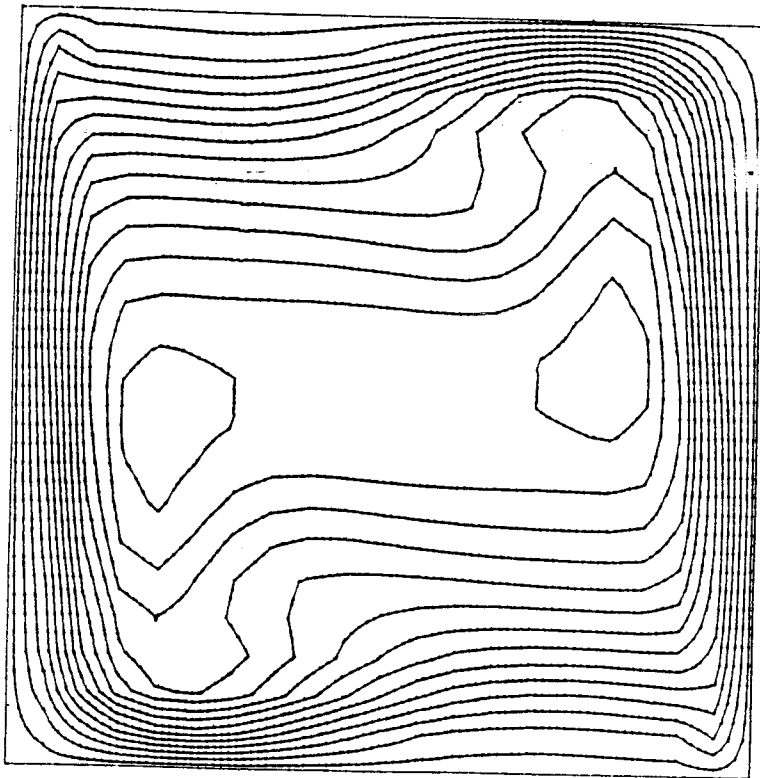


Fig. 5.3 e

$Cr=1E7$  -  $Pr=7$  -  $\phi=90$   
A1=1 - ISO-COURANTS  
2.245015

- 6.735043
- 11.22507
- 15.7151
- 20.20513
- 24.68516
- 28.18519
- 33.67521
- 38.16525
- 42.65528
- 47.1453
- 51.63533
- 56.12536
- 60.61539

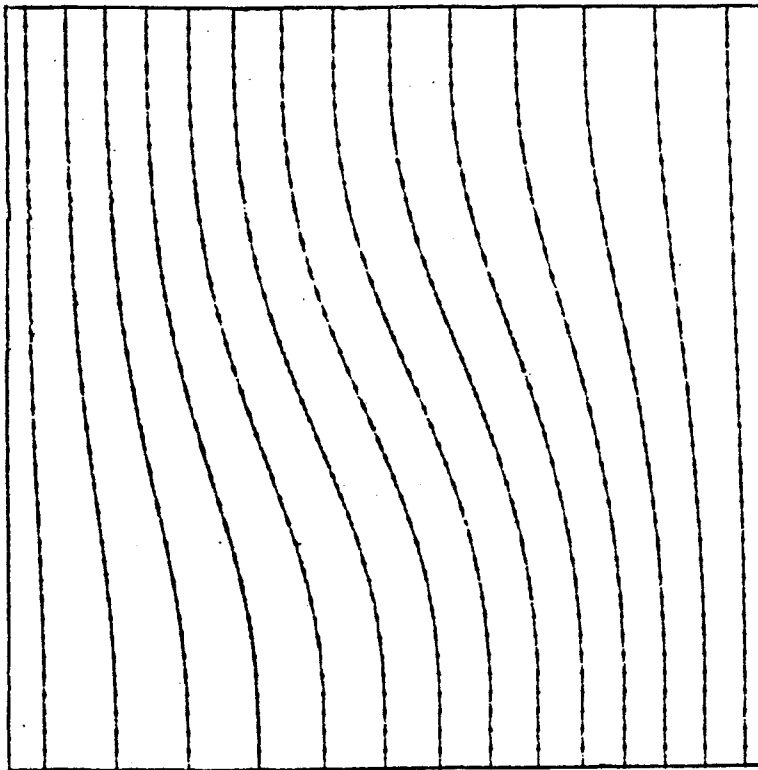


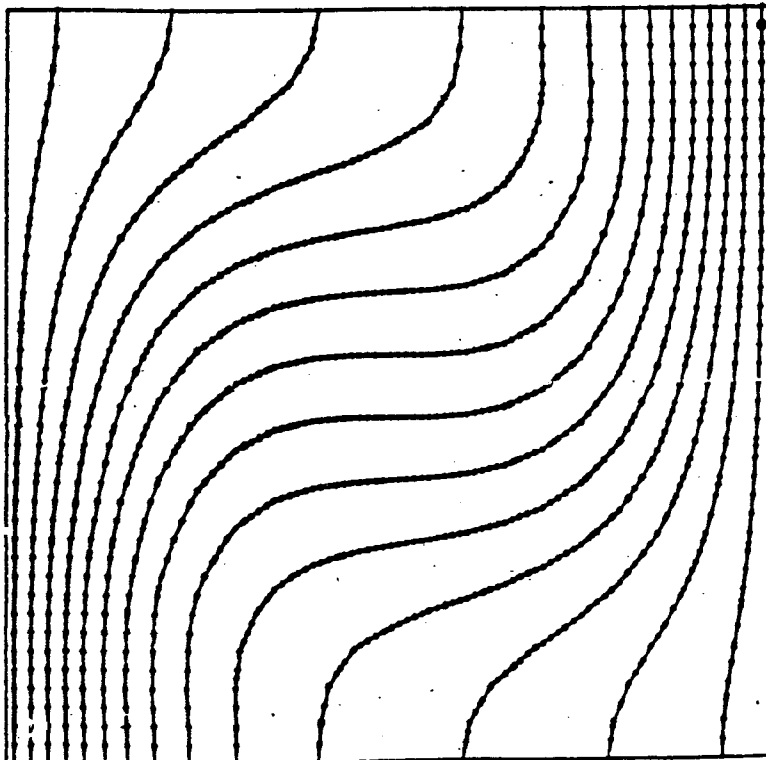
Fig. 5.4 a

Re=1E3 - Pr=0.7 - phi=90

Al=1 - ISOTHERMES

- 3.571429E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .6071429
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

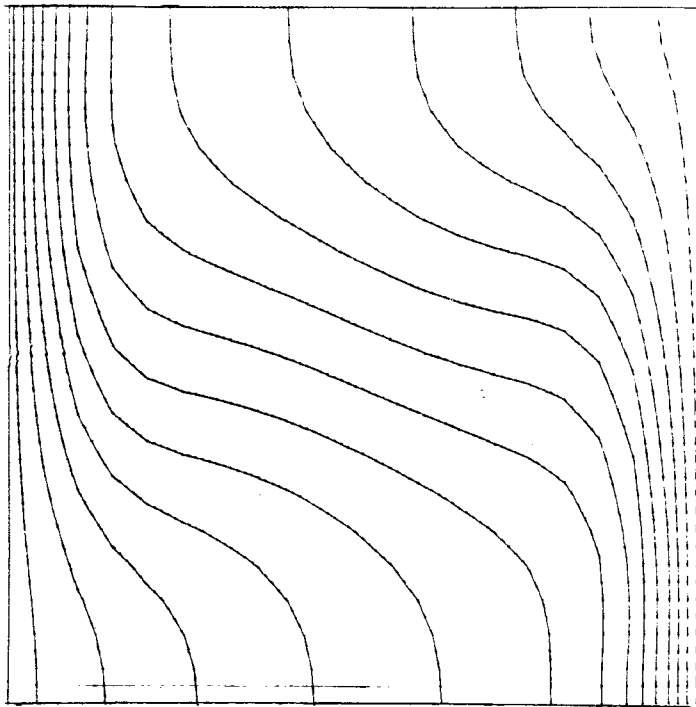
Fig. 5.4 b



Re=10E4 - Pr=0.7

isothermes

- 3.571429E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .6071429
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

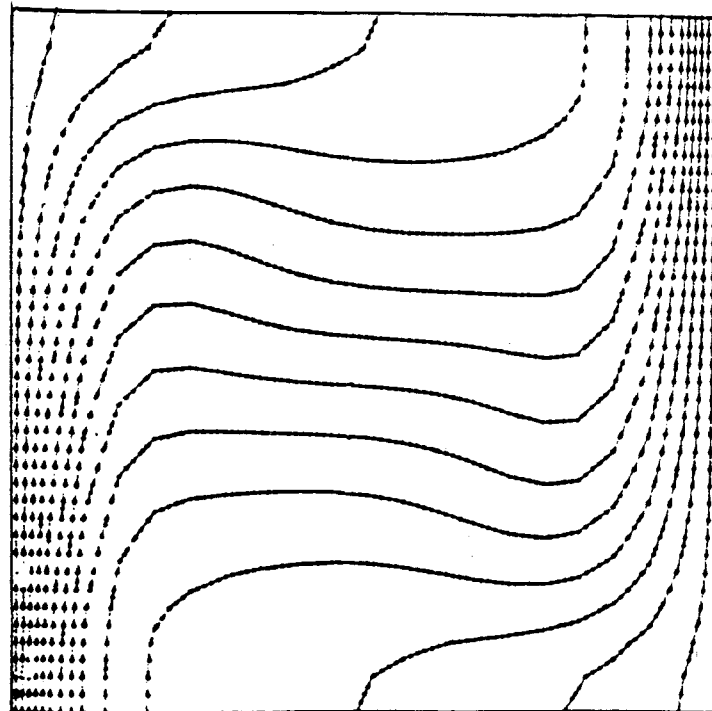


Re=1E5 - Pr=1.7 - phi=90

A1=1 - ISOTHERMES

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642959

Fig. 5.4 c



Re=10E8 - Pr=1.7

iso-temperatures

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

Fig. 5.4 d

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR = 10 E+8 Pr = .7  
 A1 = 1

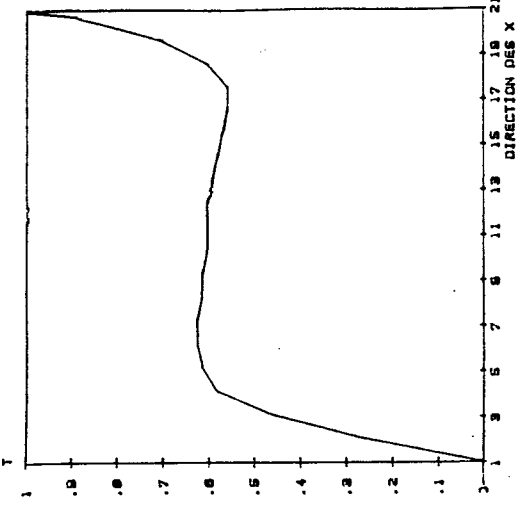


Fig. 5.5 c

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR = 10 E+8 Pr = .7  
 A1 = 1

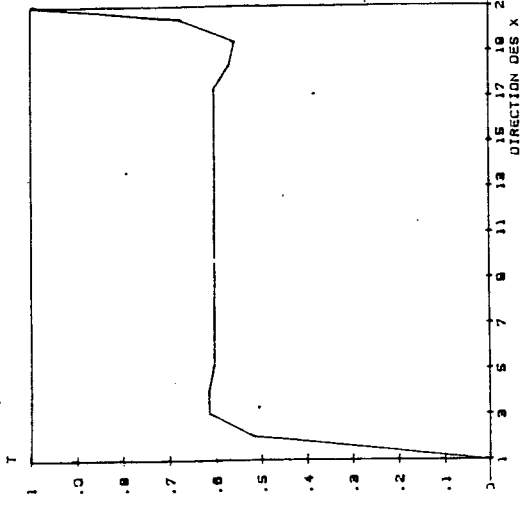


Fig. 5.5 d

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR = 10 E+3 Pr = .7  
 A1 = 1

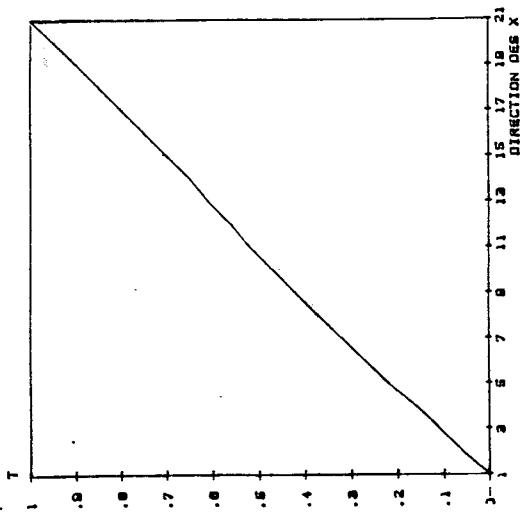


Fig. 5.5 a

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR = 10 E+4 Pr = .7  
 A1 = 1

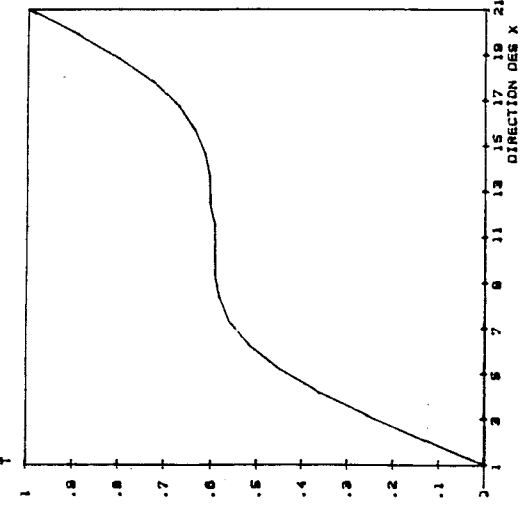


Fig. 5.5 b

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 GR = 10 E+7 Pr = .7  
 A1 = 1

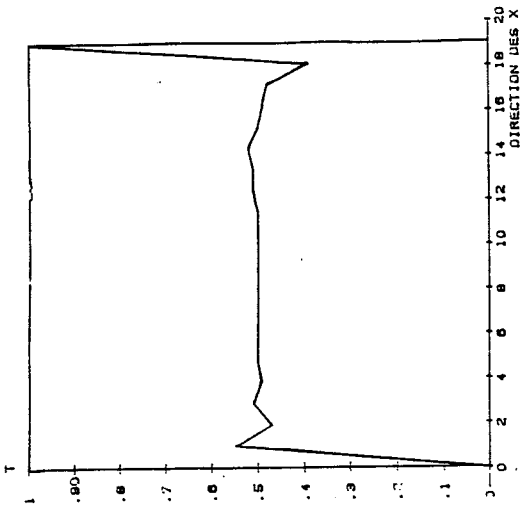


Fig. 5.5 e

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 GR = 10 E+8 Pr = .7  
 A1 = 1

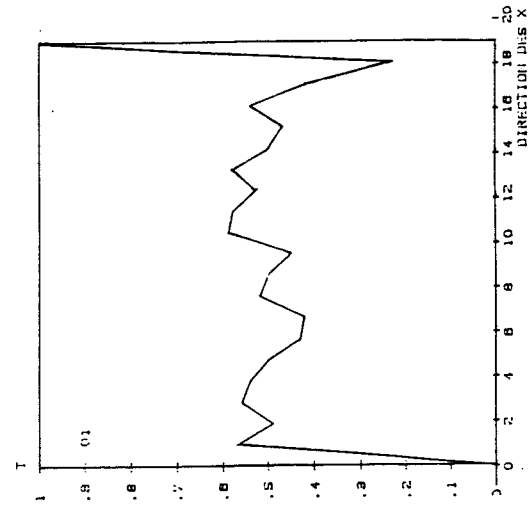
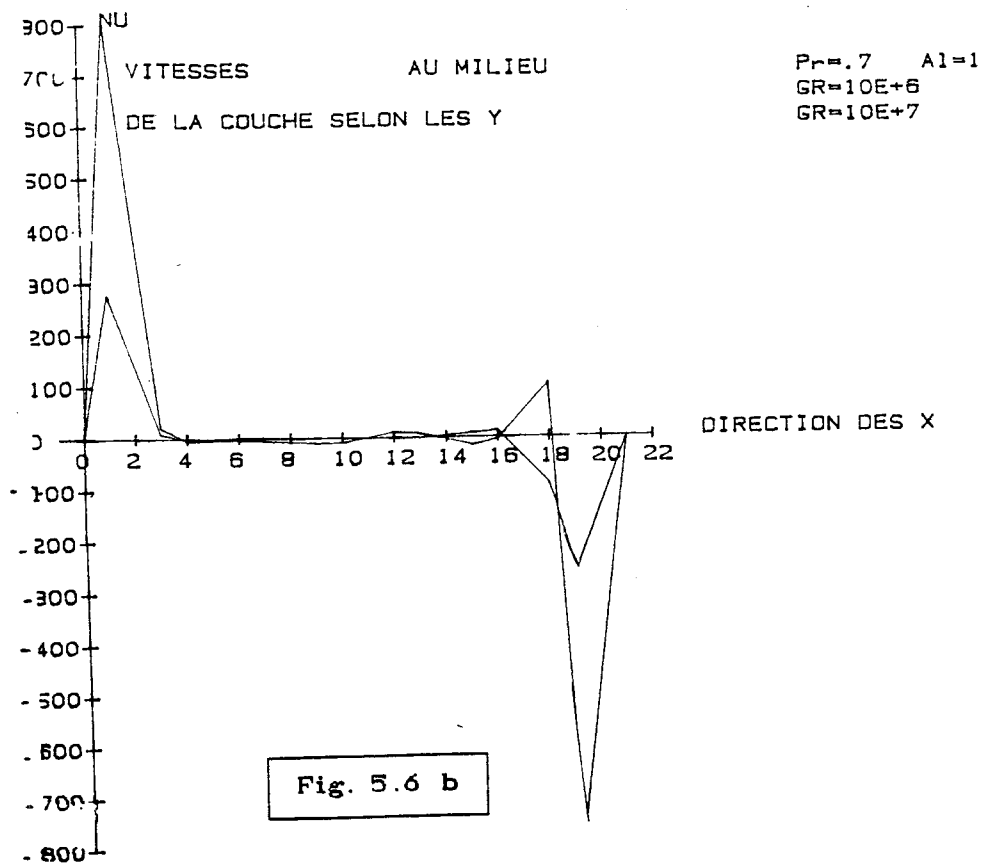
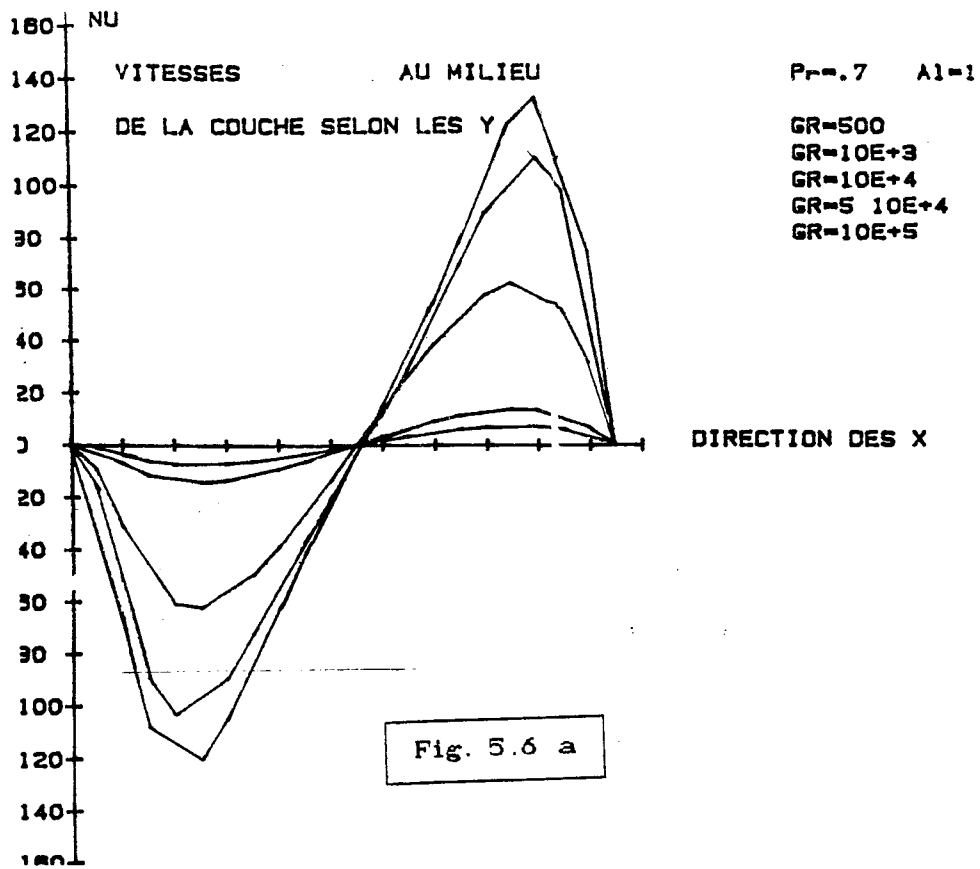


Fig. 5.5 f



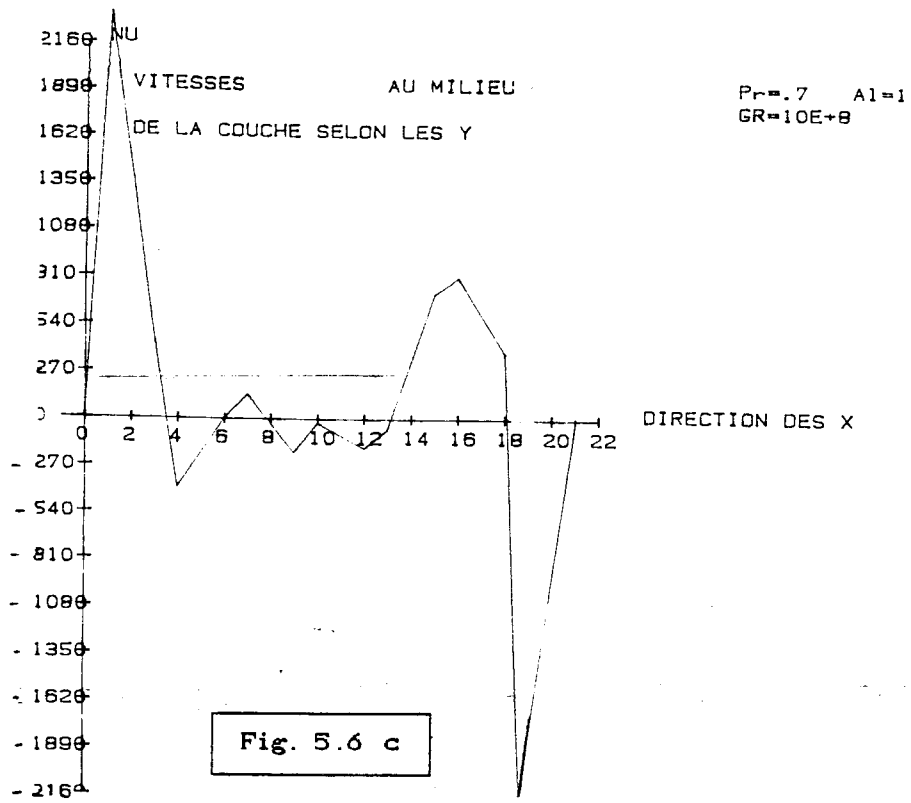


Fig. 5.6 c

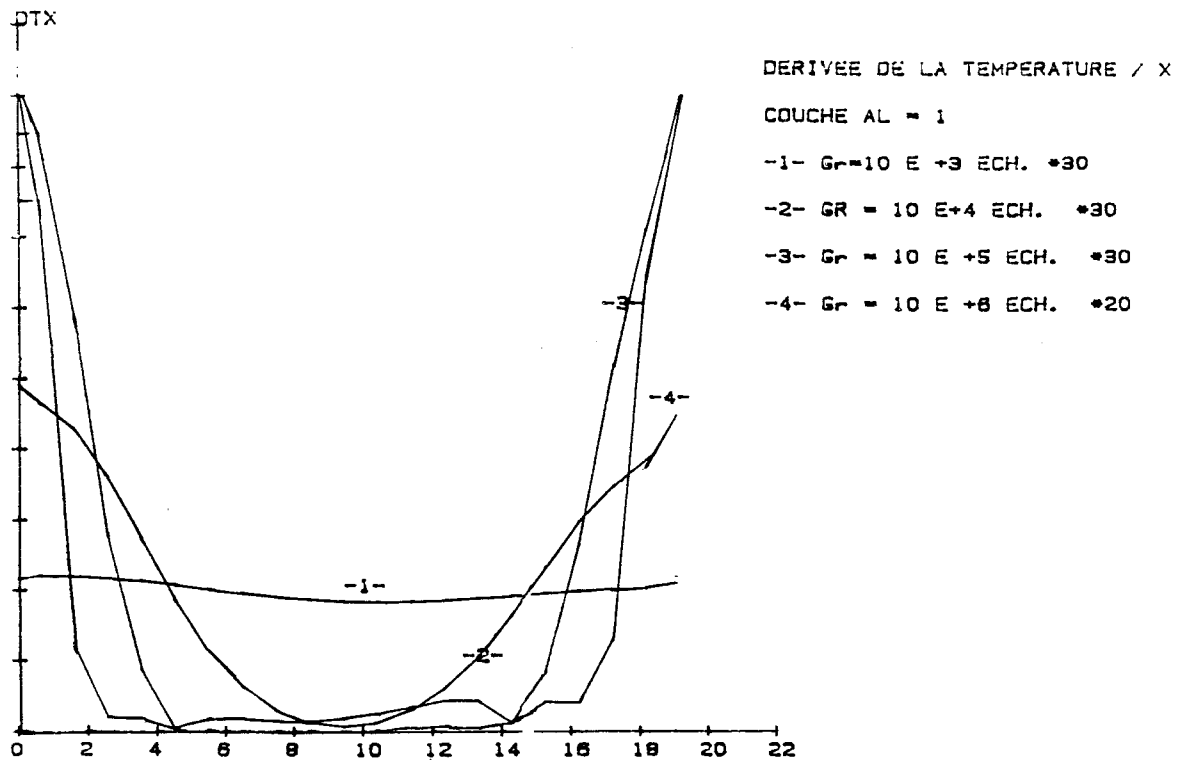


Fig. 5.7 a

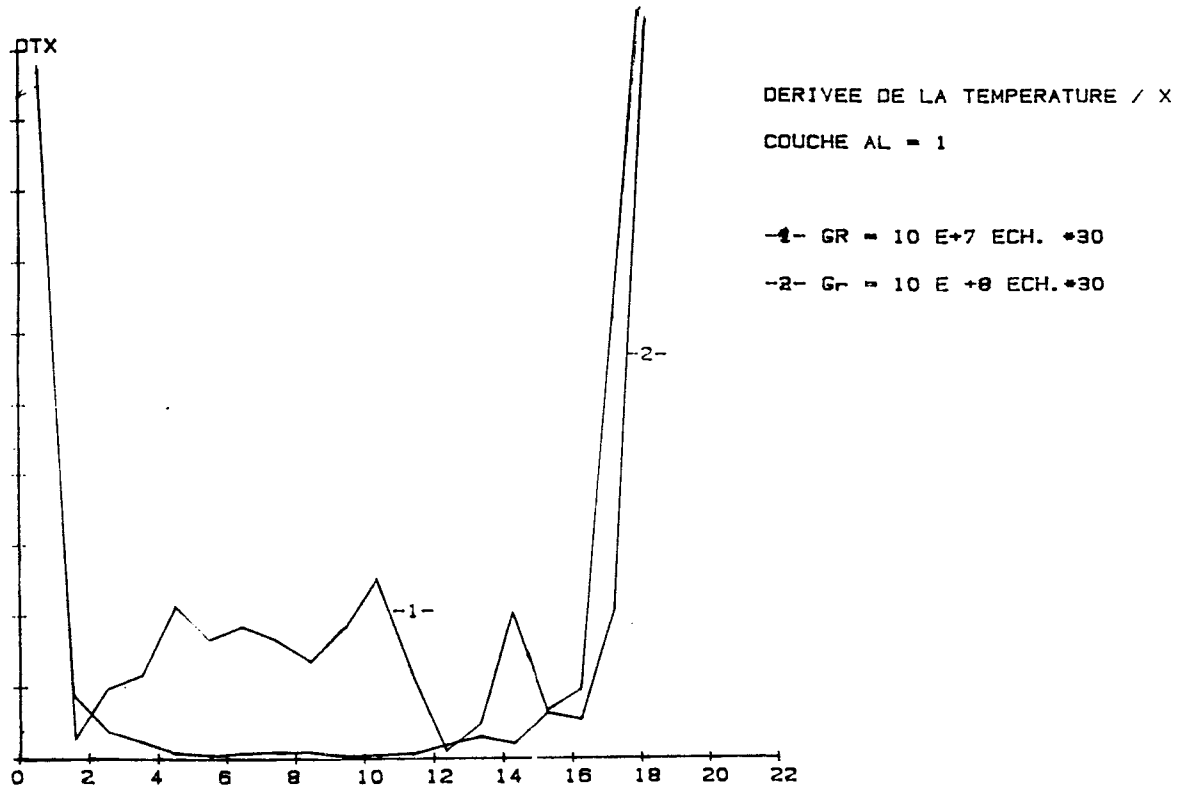


Fig. 5.7 b

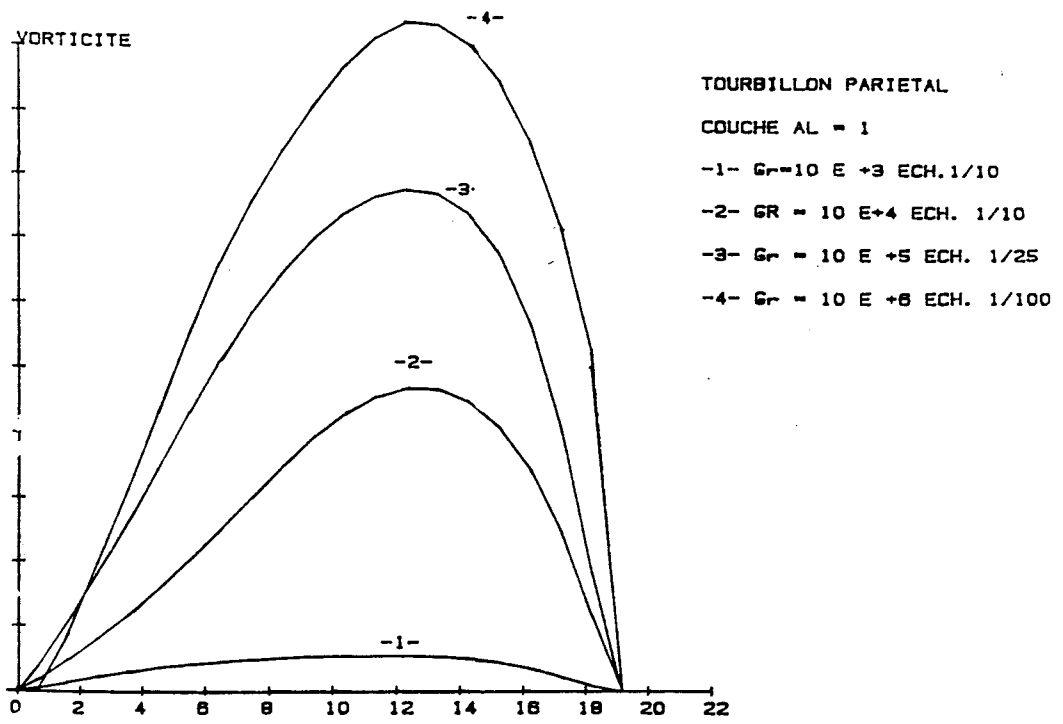


Fig. 5.8 a

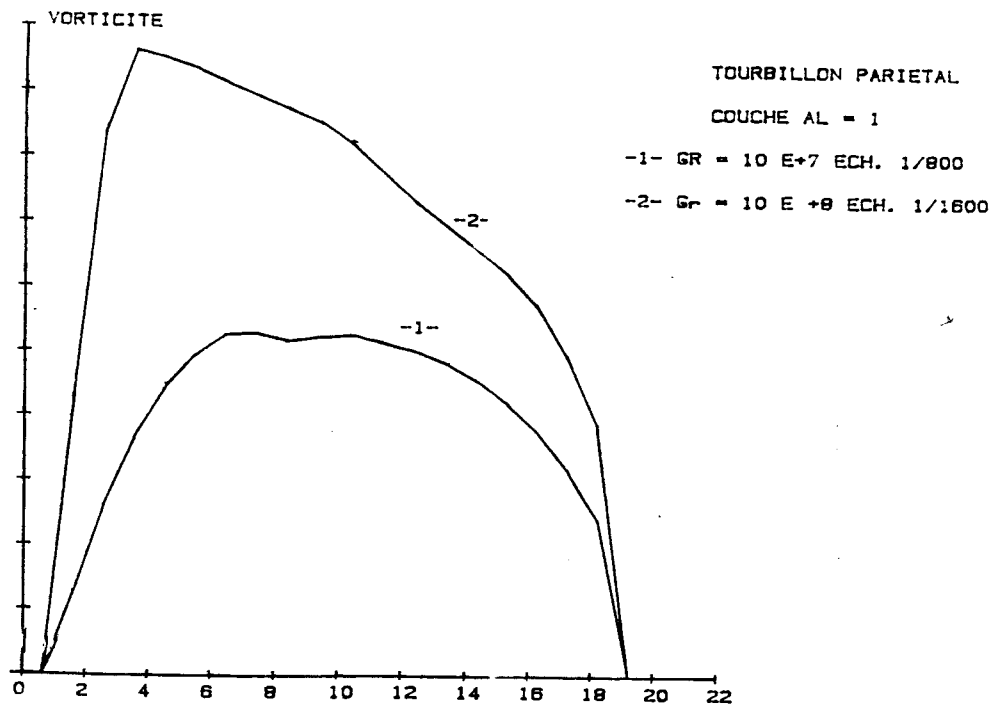


Fig. 5.8 b

NUSSÉLT MOYEN —  
 NUSSÉLT LOCAL ---  
 $Gr=10E+3$   $Pr=.7$   $A1=1$

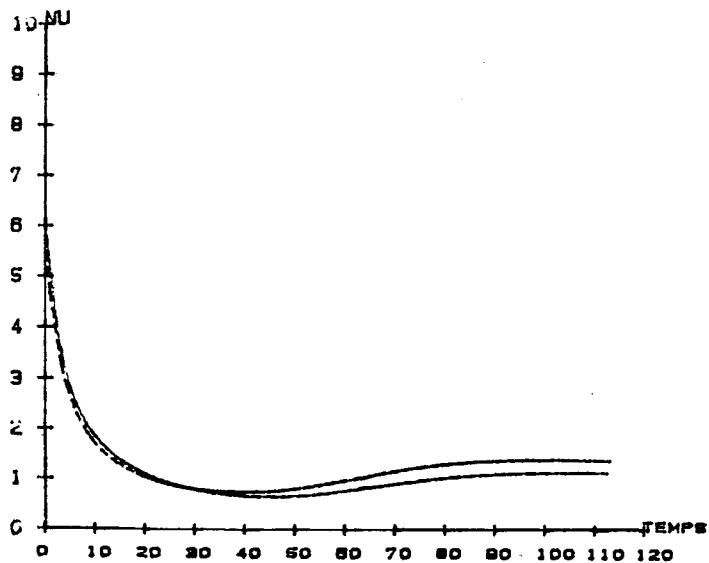


Fig. 5.9 a

NUSSÉLT MOYEN —  
 NUSSÉLT LOCAL ---  
 $Gr=10E+4$   $Pr=.7$   $A1=1$

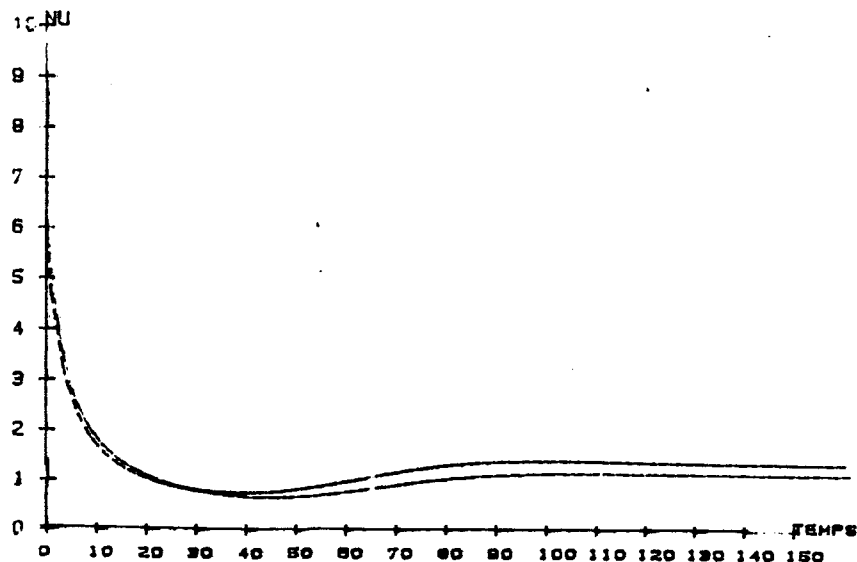


Fig. 5.9 b

NUSSELT MOYEN —  
 NUSSELT LOCAL ---  
 Gr=10E+5 Pr=7 Al=1

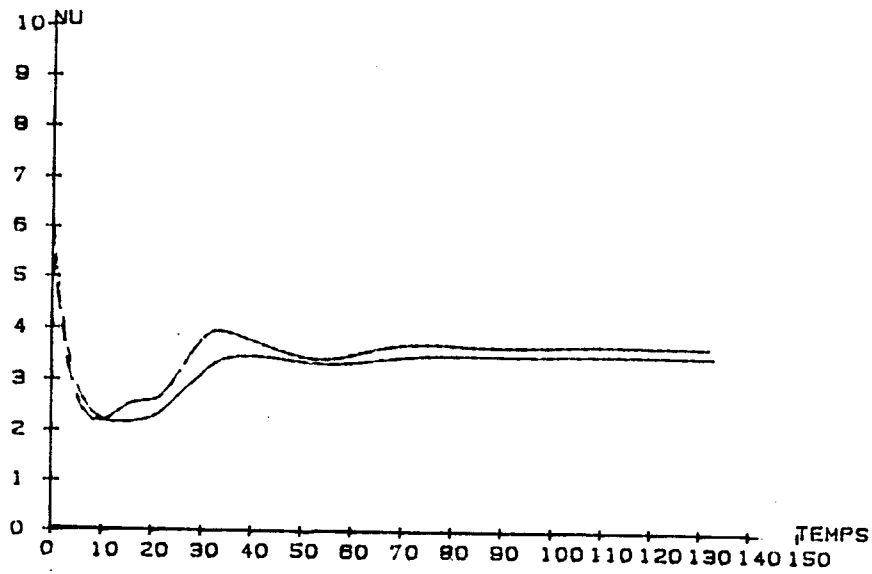


Fig. 5.9 c

NUSSELT MOYEN —  
 NUSSELT LOCAL ---  
 Gr=10E+6 Pr=7 Al=1

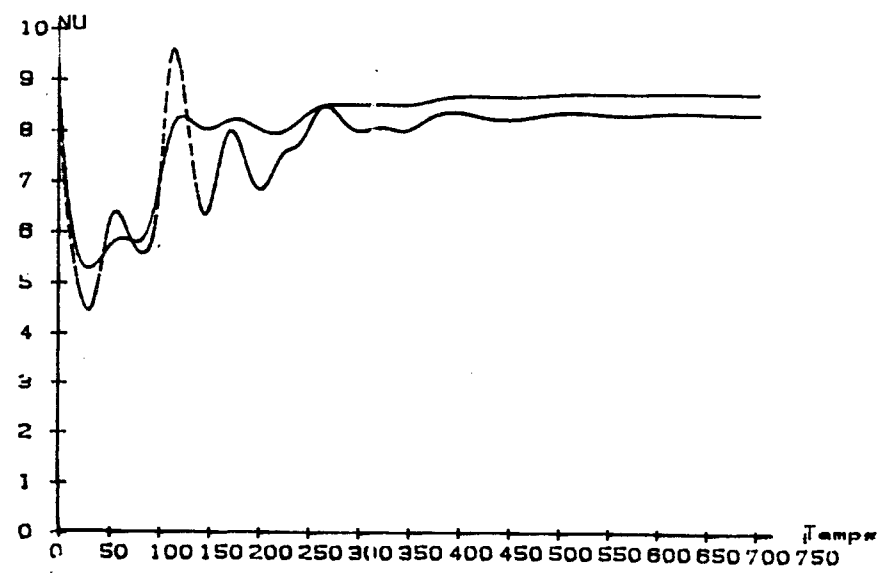


Fig. 5.9 d

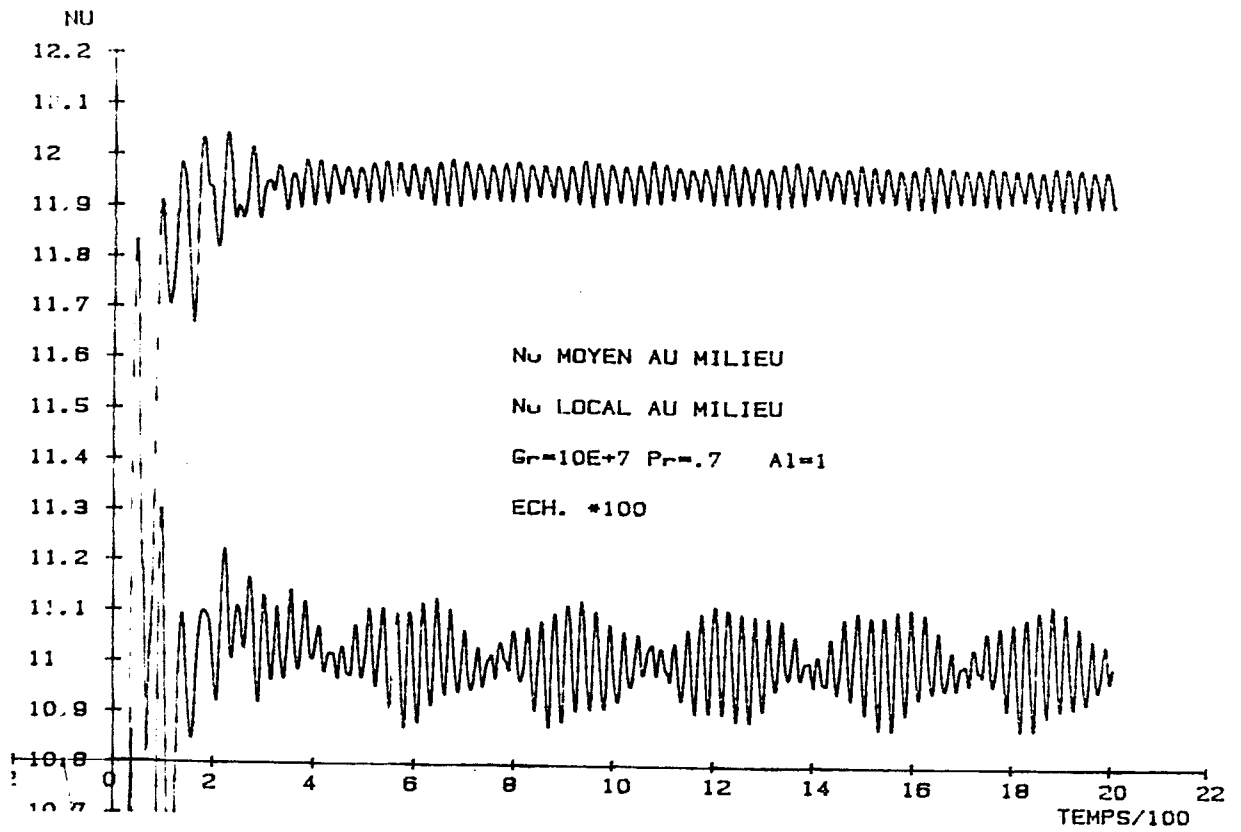


Fig. 5.9 e

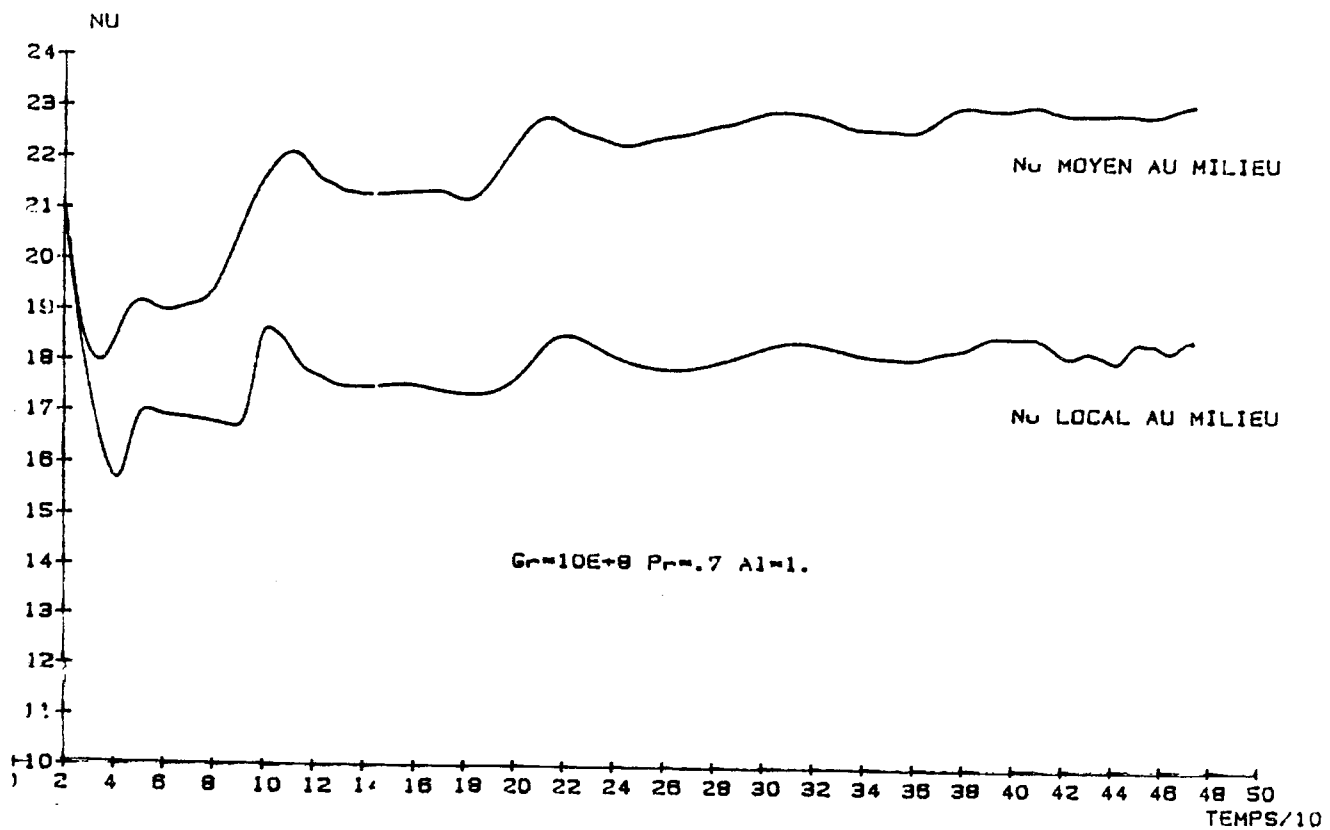


Fig. 5.9 f

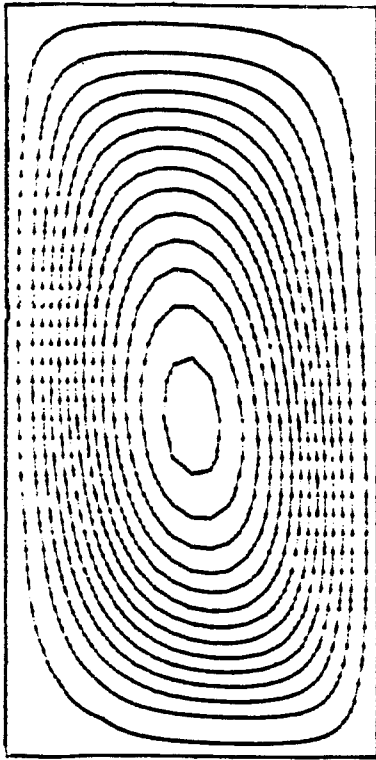


Fig.5.10 a

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=80

Al=2 - ISO-COURANT

- .3885415
- 1.211464
- 2.024387
- 2.83731
- 3.650233
- 4.463158
- 5.276078
- 6.089002
- 6.901924
- 7.714848
- 8.52777
- 9.340692
- 10.15362
- 10.86654

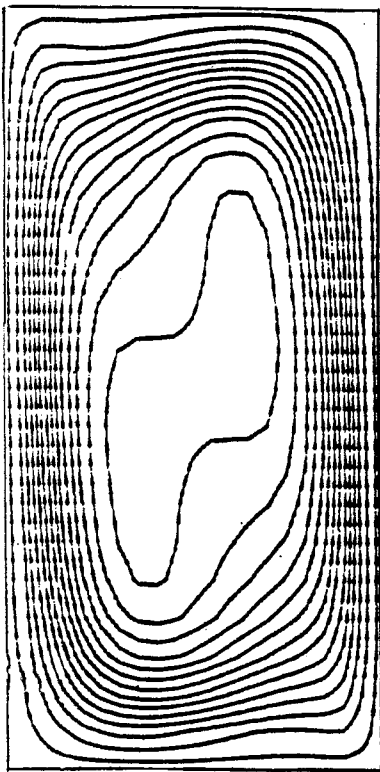


Fig.5.10 b

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=80  
Al=10 - ISO-COURANT

- .712554
- 2.137992
- 3.56332
- 4.988648
- 6.413975
- 7.839303
- 9.264631
- 10.68986
- 12.11529
- 13.54061
- 14.96594
- 16.39127
- 17.8166
- 19.24193

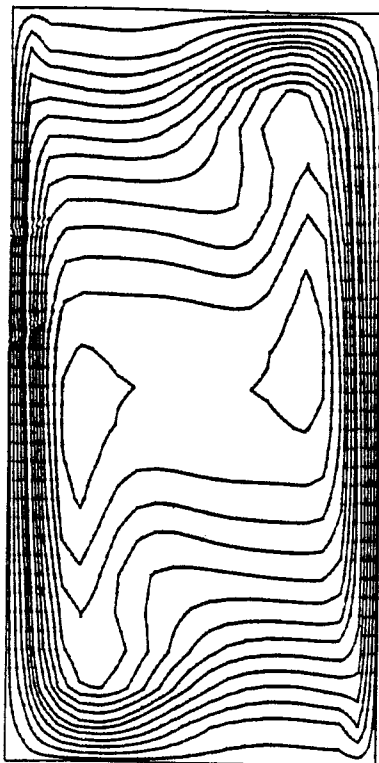


Fig.5.10 c

Gr=1E6 - Pr=.7 - phi=90

A1=2 - ISO-COURANT

- 1.299628
- 3.898884
- 6.48814
- 9.087395
- 11.69665
- 14.29591
- 16.89516
- 18.48442
- 22.09367
- 24.69293
- 27.29219
- 29.89144
- 32.4807
- 35.08996

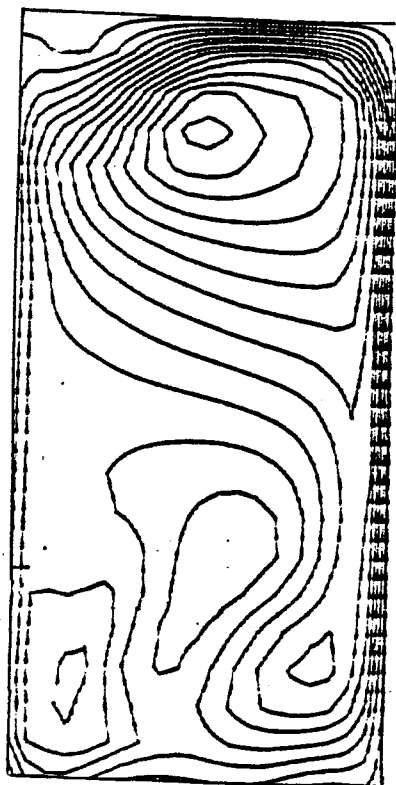


Fig.5.10 d

Gr=1E6 - Pr=.7 - phi=90

A1=2 - ISO-COURANTS

- 17.76759
- 53.30277
- 88.83784
- 124.3731
- 159.9083
- 195.4435
- 230.9787
- 266.5138
- 302.049
- 337.5842
- 373.1184
- 408.6546
- 444.1898
- 479.7249

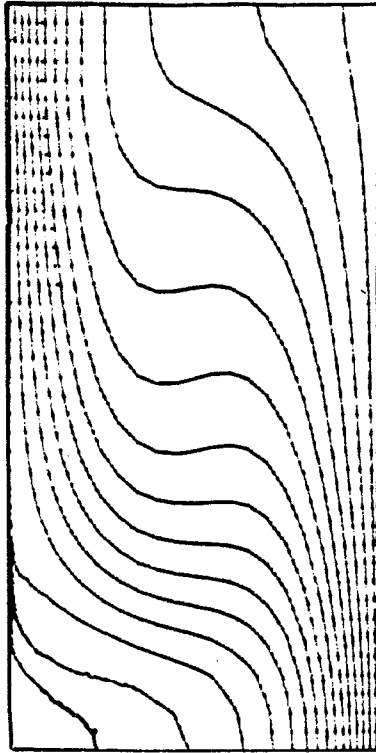


Fig.5.11 a

Gr=1E4 - Pr=0.7 - phi=90

A1=2 - ISOTHERMES

- 3.983536E-02
- .1195051
- .1991769
- .2788475
- .3585182
- .4381889
- .5178597
- .5975303
- .677201
- .7568718
- .8365425
- .9162131
- .9958839
- 1.075555

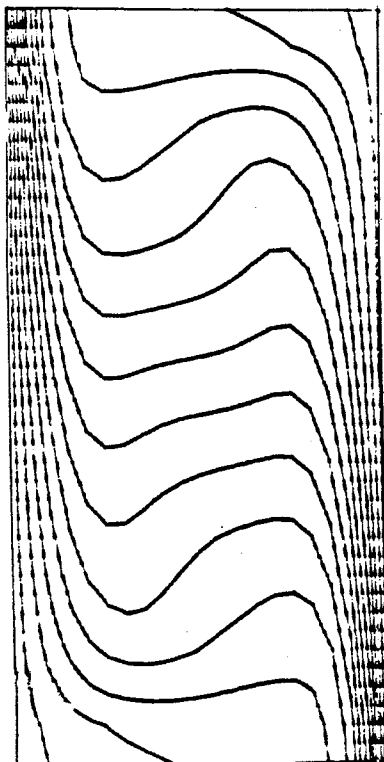
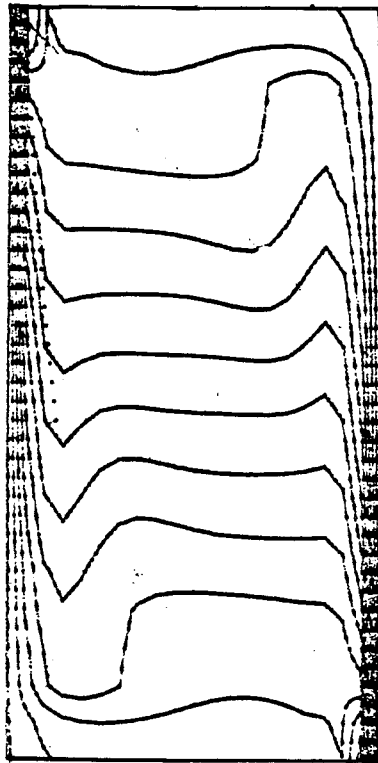


Fig.5.11 b

Gr=1E5 - Pr=0.7 - phi=90

A1=2 - ISOTHERMES

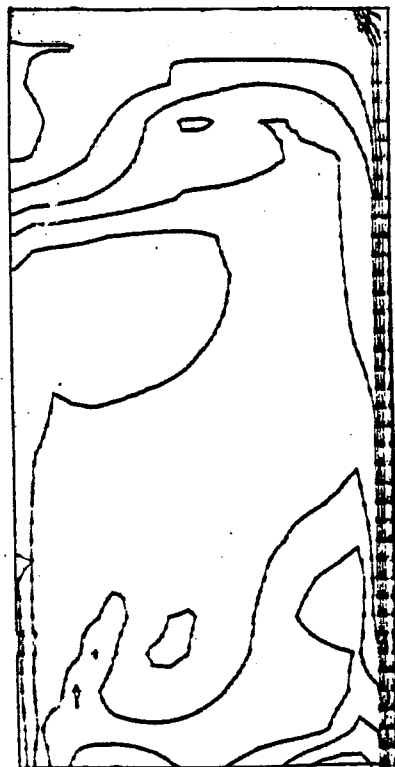
- 3.571429E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3828571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858



Gr=1E6 - Pr=7 - phi=80

8.126786E-03  
 8.380036E-02  
 .1584738  
 .2351475  
 .3108211  
 .3854247  
 .4621682  
 .5378418  
 .6135153  
 .6881888  
 .7648625  
 .8405361  
 .8162056  
 8818832

Fig.5.11 c



Gr=1E8 - Pr=7 - phi=90

A1=2 - ISOTHERMES

3.518571E-02  
 .1055571  
 .1758286  
 .2463  
 .3166714  
 .3870428  
 .4574143  
 .5277857  
 .5981571  
 .6685286  
 .7388  
 .8082714  
 .8786429  
 .9500142

Fig.5.11 d

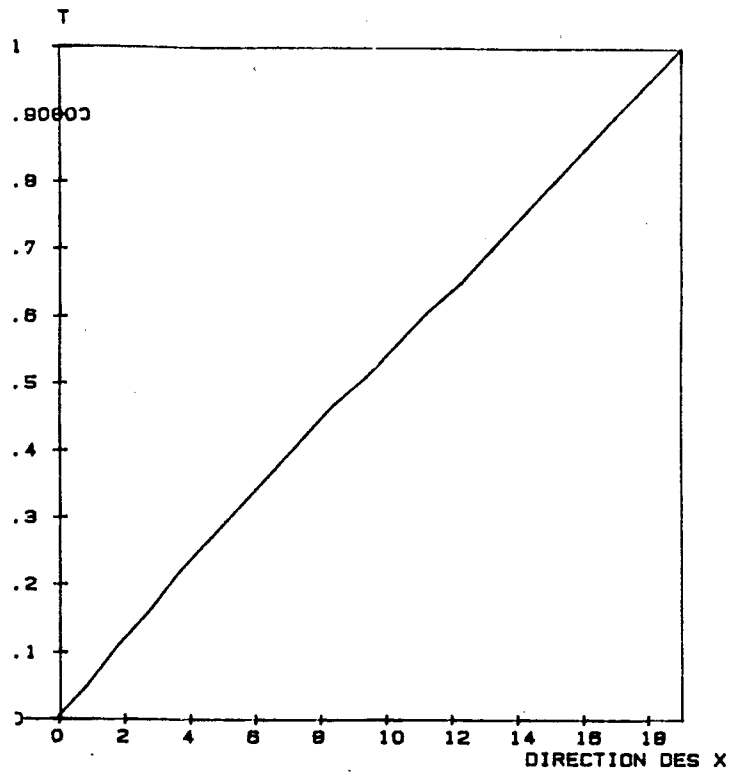


Fig.5.13 a

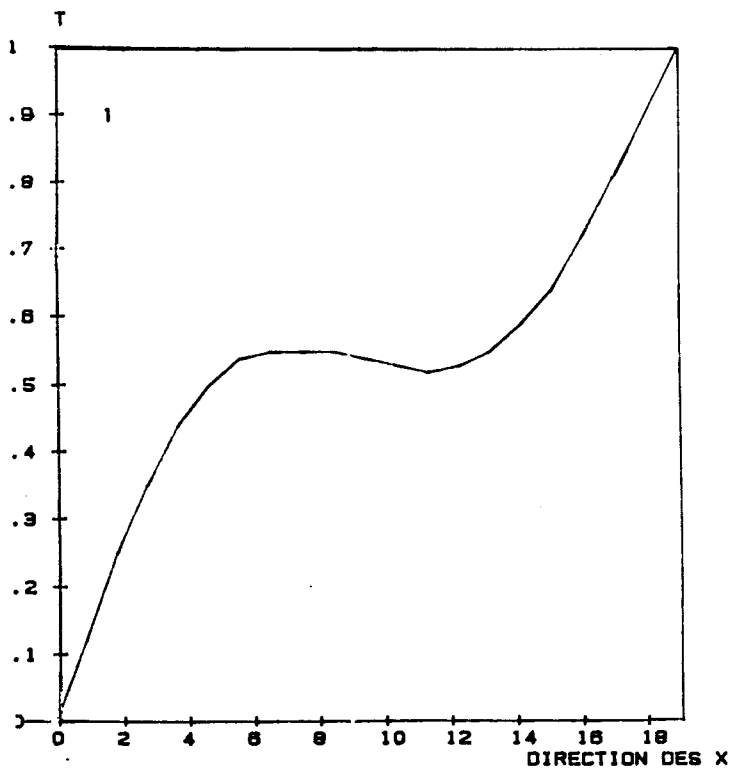


Fig.5.13 b

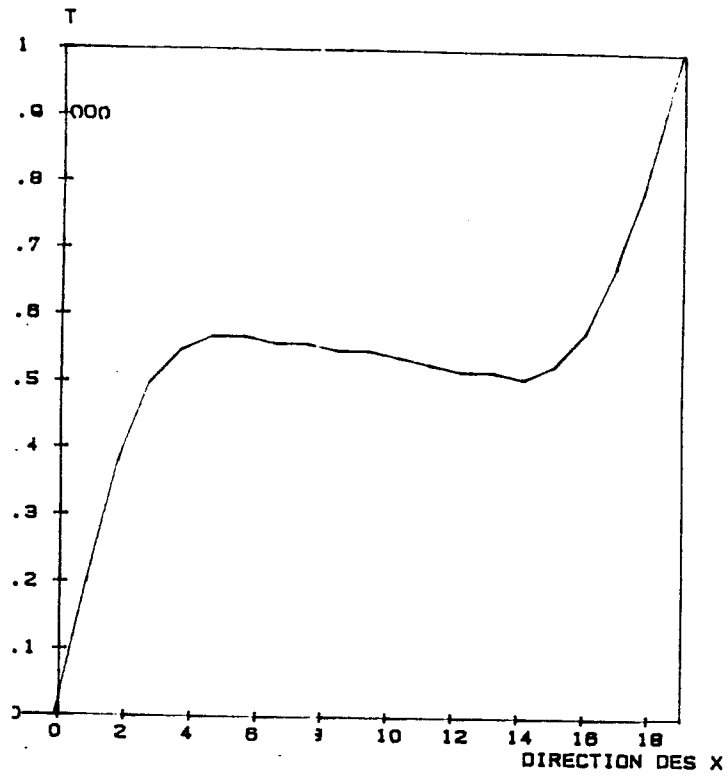


Fig.5.13 c

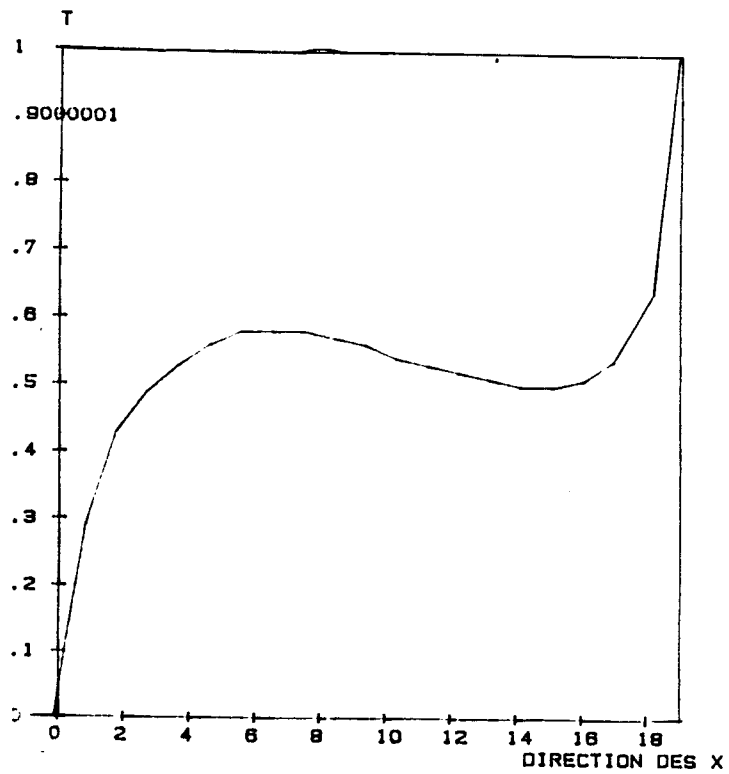


Fig.5.13 d

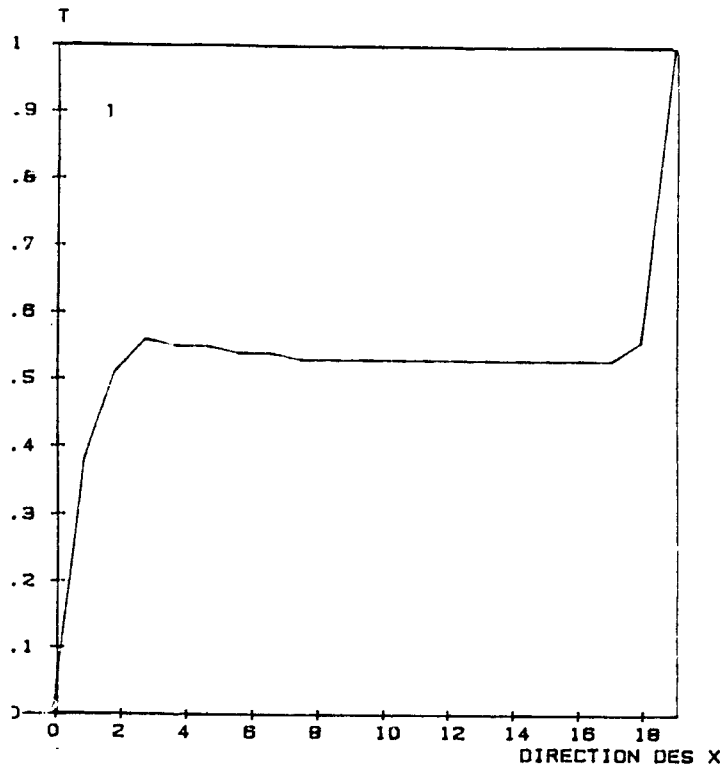


Fig. 5.13 e

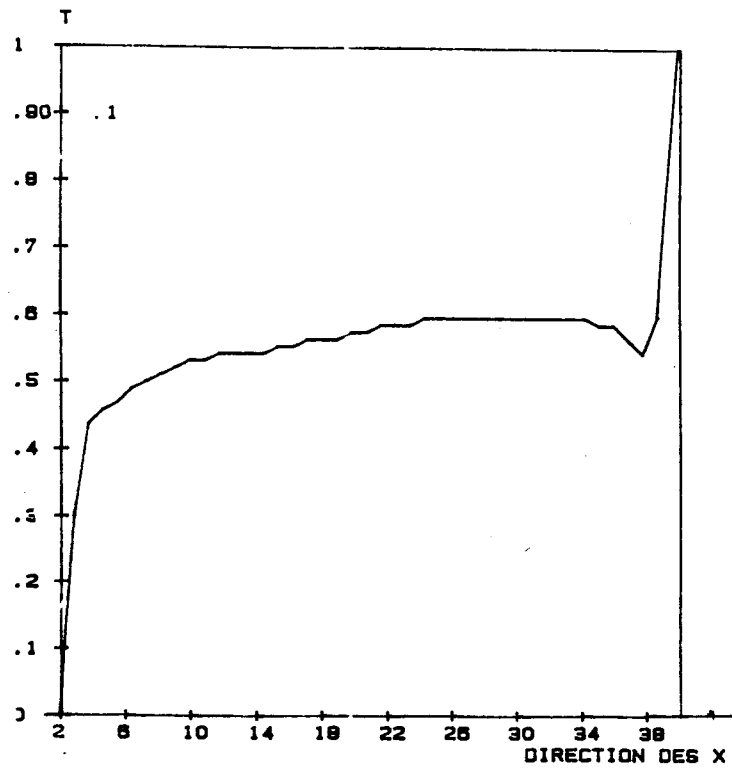
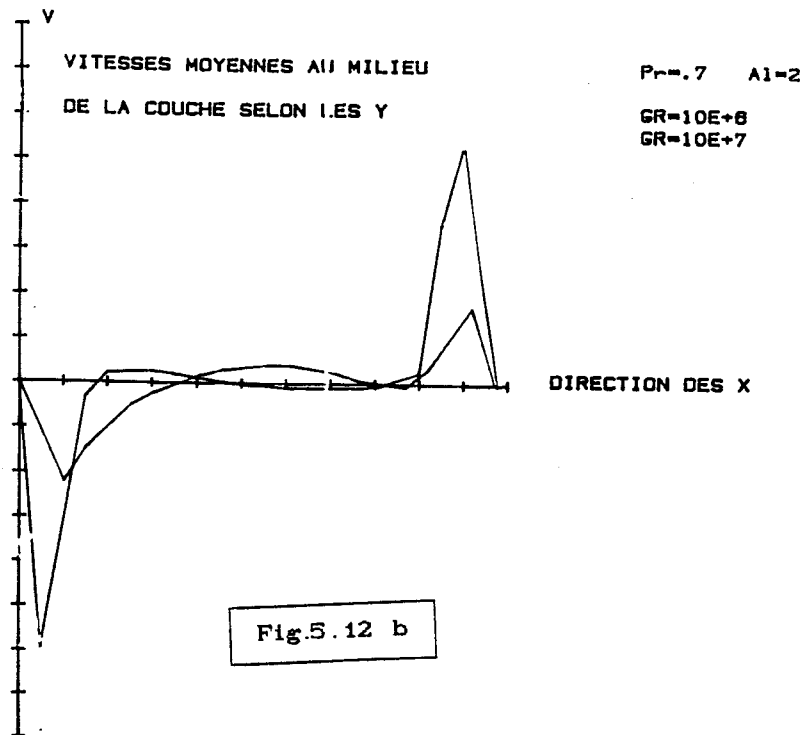
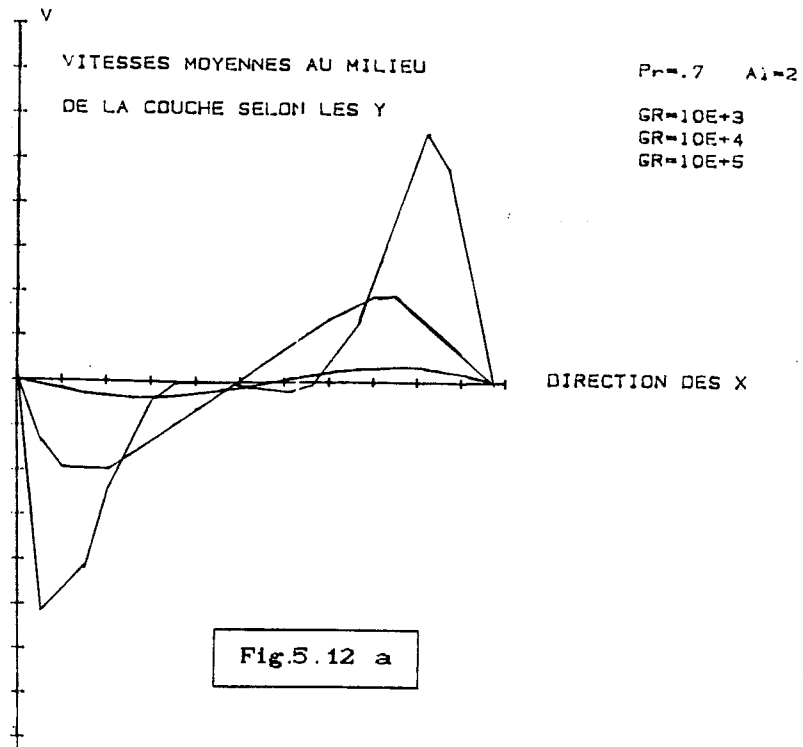


Fig. 5.13 f



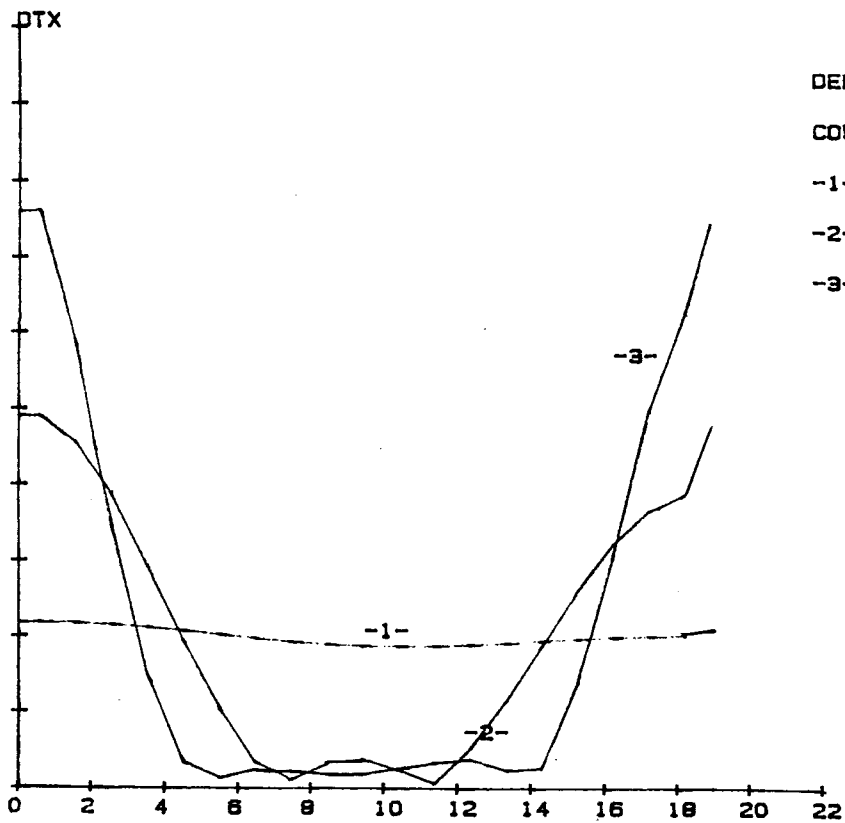


Fig. 5.14

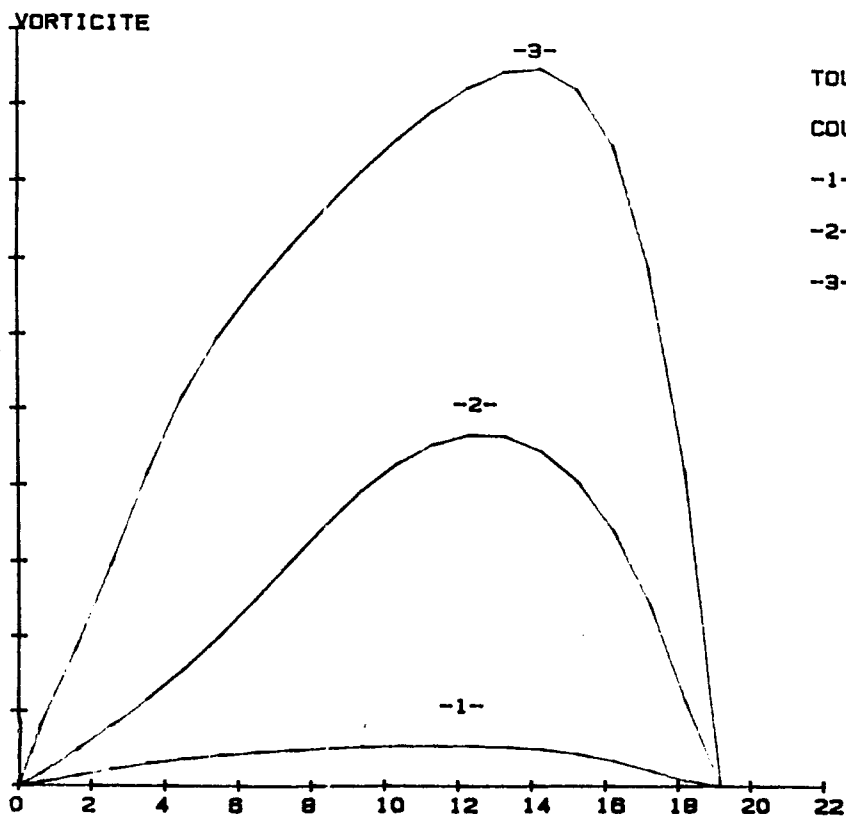


Fig. 5.15

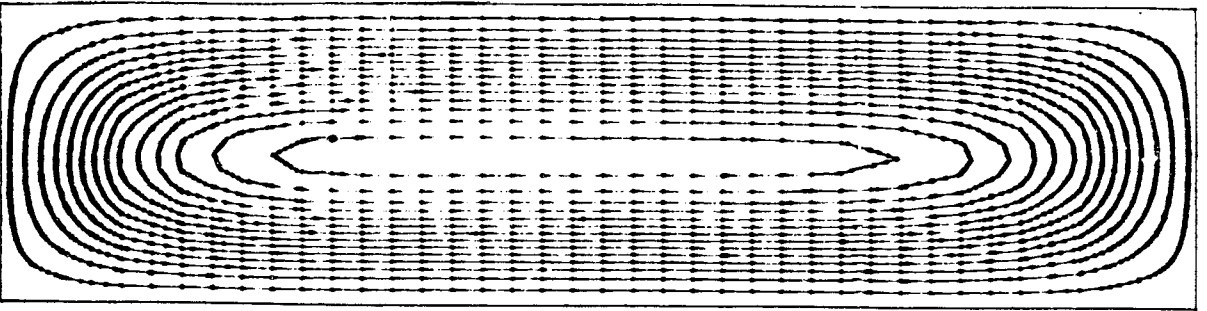


FIG. 5.16 a

Re=500 -P=7 -phi=90  
 A1=4 -ISC-CURANTS

.04427
.13281
.22135
.30989
.39843
.48697
.57551
.66405
.75259
.84113
.92967
1.01821
1.10675
1.19529

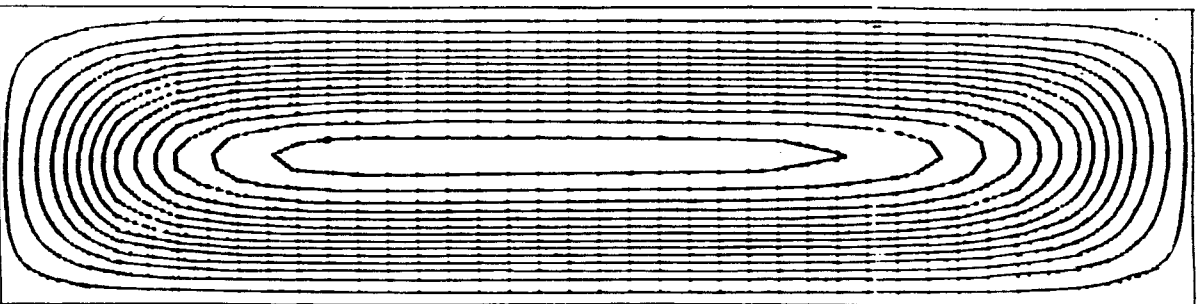


FIG. 5.16 b

Re=1E3 -P=7 -phi=90  
 A1=4 -ISC-CURANTS

0.995215E-02
.2688584
.4497807
.629885
.8095893
.9894736
1.169378
1.349282
1.529187
1.709091
1.888995
2.068899
2.248804
2.428708

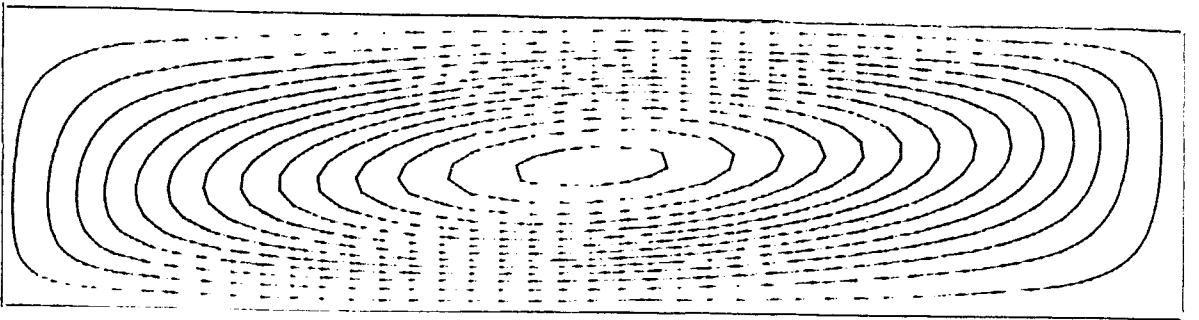


FIG. 5.16 c

Gr=1E4 -Pr=7 -phi=90  
 A1=6 -ISO-COURANTS  
 1.7457247  
 2.129636  
 3.1727632  
 5.018641  
 5.708798  
 5.820701  
 6.651411  
 11.1828  
 12.61325  
 14.1815  
 15.65506  
 17.11711  
 18.62418  
 20.12521

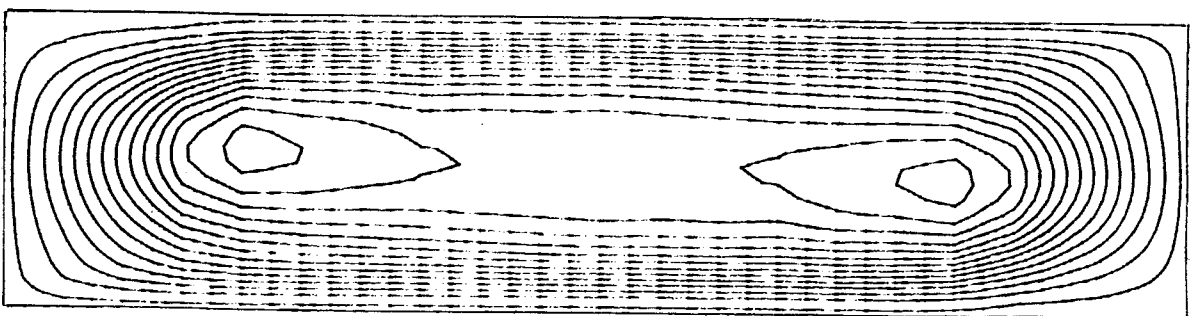


FIG. 5.16 d

Gr=1E5 -Pr=7 -phi=90  
 A1=4 -ISO-COURANTS  
 1.538635  
 4.615905  
 7.693174  
 10.77044  
 13.84771  
 16.92498  
 20.00225  
 23.07952  
 26.15679  
 29.23406  
 32.31133  
 35.3886  
 38.46587  
 41.54314

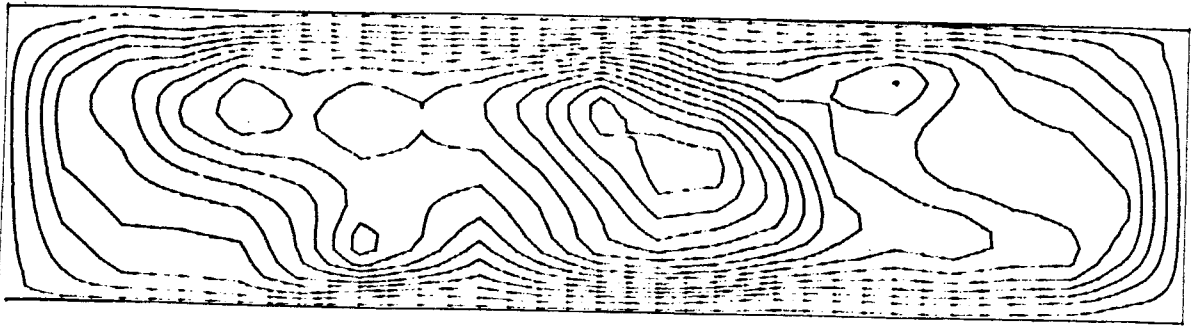


Fig. 5.16 e

Ca=IE6 -Pr=, 7 -phi=90  
 A1=4 -ISD-COURANTS

4.344361
13.03308
21.7019
30.11052
39.08304
47.78791
56.47868
65.16541
73.85413
82.54296
91.23157
99.92026
108.609
117.2977

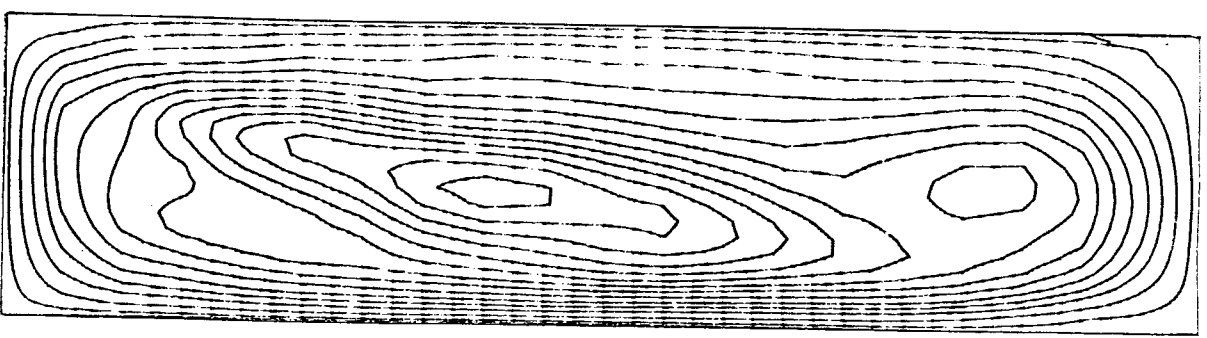


Fig. 5.16 f

Ca=IE7 -Pr=, 7 -phi=90  
 A1=4 -ISD-COURANTS

21.9776
65.9328
109.888
153.8432
197.7984
241.7536
285.7088
329.664
373.6192
417.5744
461.5296
505.4848
549.44
593.3952

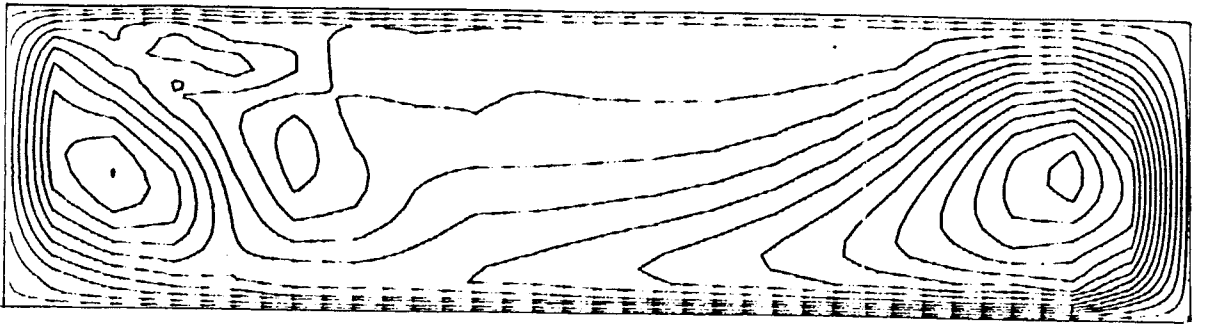


FIG. 5.16 g

2=1E9 -Pr=7 -phi=90  
 A1=4 -ISO-COURANTS  
 42.212  
 126.636  
 211.06  
 295.484  
 379.908  
 464.332  
 549.756  
 633.18  
 717.604  
 802.0279  
 886.4519  
 970.8759  
 1055.3  
 1139.724

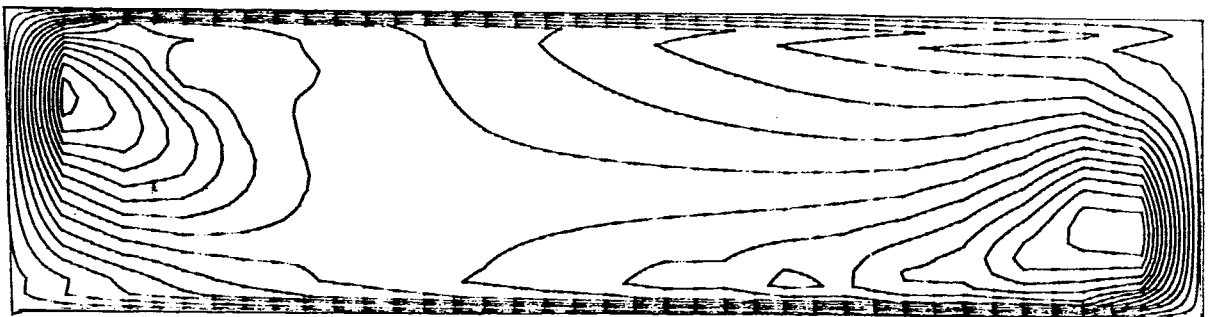
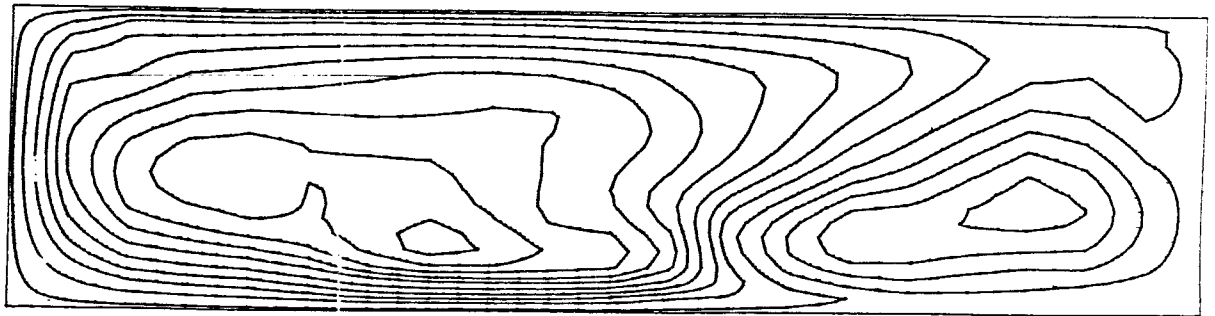


FIG. 5.16 h

2=1E9 -Pr=7 -phi=90  
 A1=4 -ISO-COURANTS  
 88.50732  
 265.522  
 442.5366  
 619.5512  
 798.568  
 973.5805  
 1150.595  
 1327.61  
 1504.624  
 1681.639  
 1858.654  
 2035.668  
 2212.683  
 2389.698

FIG. 5.16 1



Gr=1E11 - Pr=0.7 - phi=90  
Al=4 - ISO-COURANTS  
-25012.58  
-18088.23  
-11163.89  
-4239.539  
2684.805  
9609.152  
16533.5  
23457.84  
30382.19  
37306.53  
44230.87  
51155.22  
58078.57  
65003.9

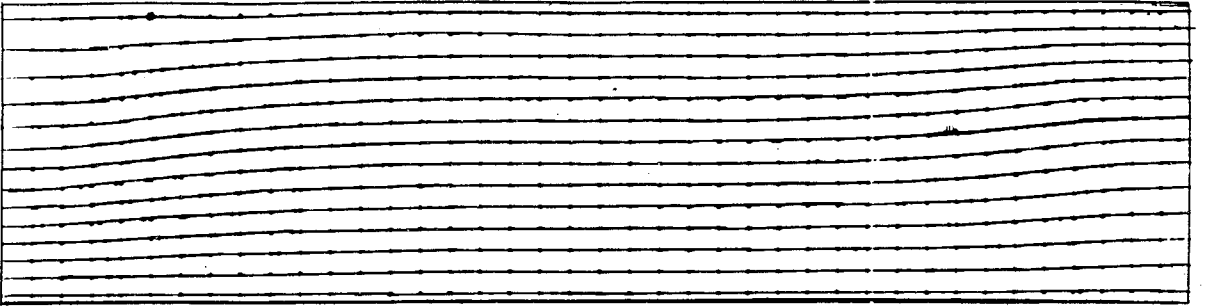


FIG. 5.17 a

Re=500 - Pr=7 - phi=90  
 A1=4 - ISO-TEMPERATURES  
 8.571428E-01  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .8214286  
 .8928571  
 .4042857  
 .5957143  
 .8071429  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .8042858

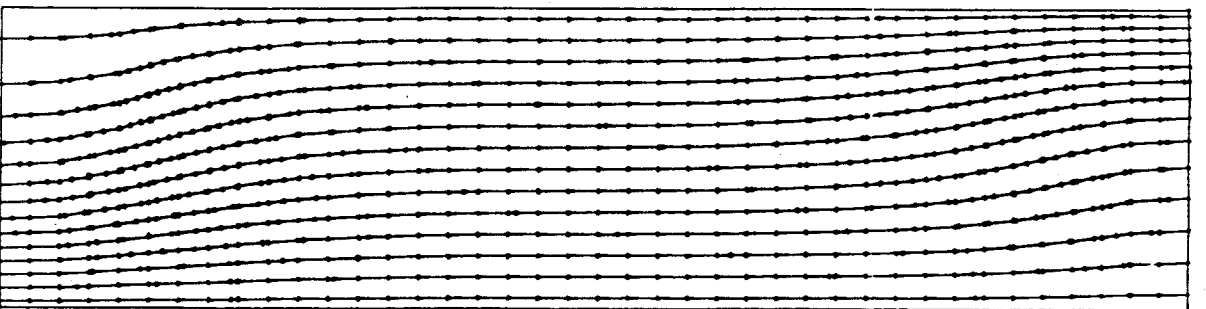


FIG. 5.17 b

Re=1E3 - Pr=7 - phi=90  
 A1=4 - ISO-TEMPERATURES  
 8.571428E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .8214286  
 .8928571  
 .4042857  
 .5957143  
 .6071429  
 .6785714  
 .75  
 .8214288  
 .8928571  
 .8042858

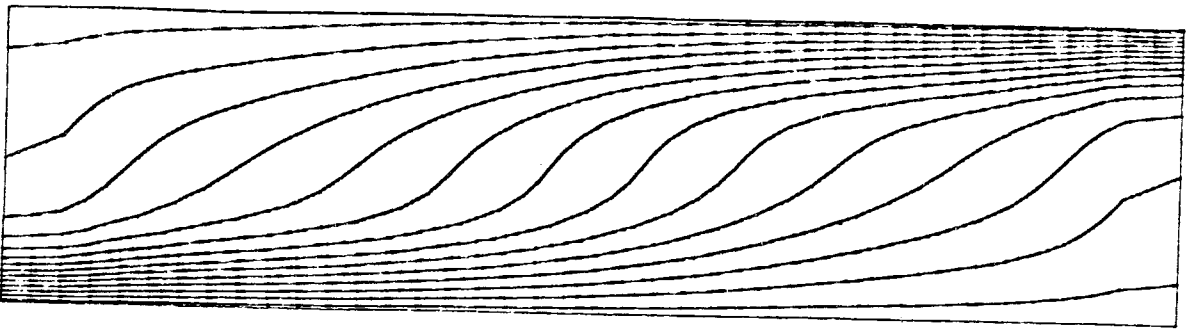


FIG. 5.17 c

G=1E4 -P=.7 -phi=90  
 A1=4 -ISOTHERMES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

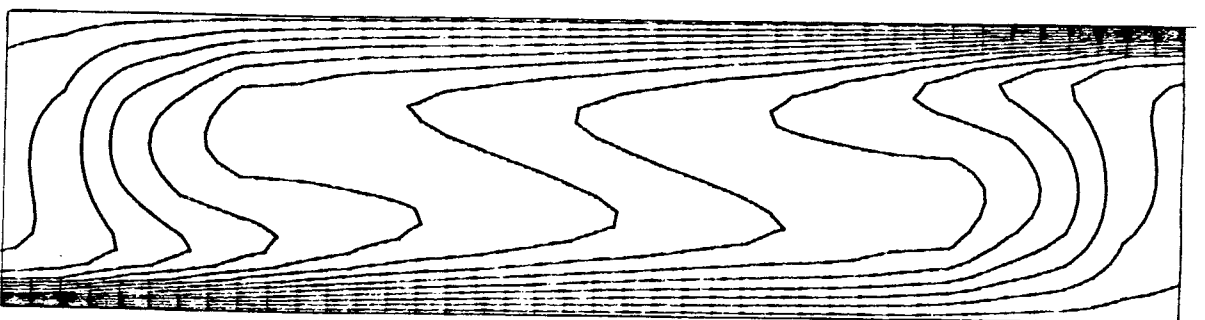


FIG. 5.17 d

G=1E5 -P=.7 -phi=90  
 A1=4 -ISOTHERMES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

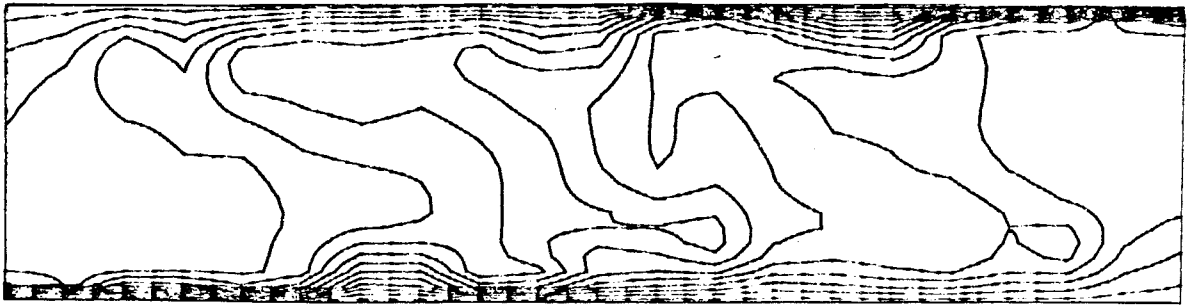


FIG. 5.17 e

Cr=1E6 -Pr=, 7 -ph1=90  
 A1=4 -ISOTHERMS  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214296  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

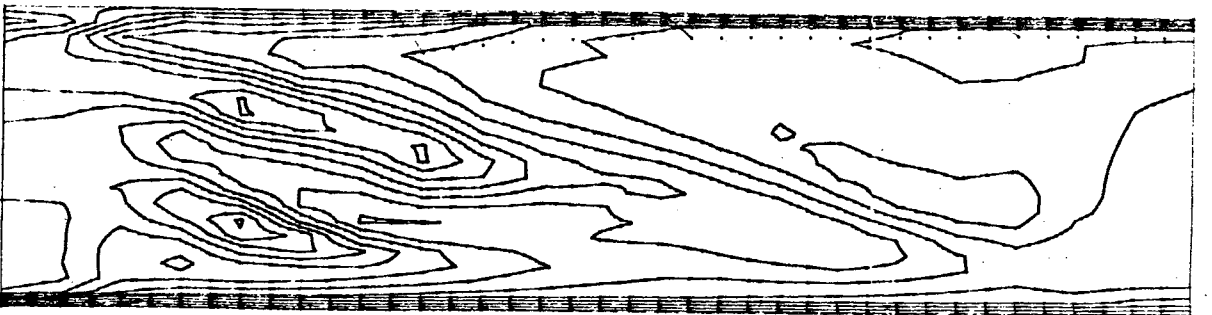


FIG. 5.17 f

Ra=1E7 -Pr=, 7 -ph1=90  
 A1=4 -ISO-TEMPERATURES  
 4.302464E-02  
 .1290739  
 .2151232  
 .3011725  
 .3872218  
 .4732711  
 .5593203  
 .6453696  
 .731418  
 .8174683  
 .9035174  
 .9895668  
 1.075616  
 1.161665

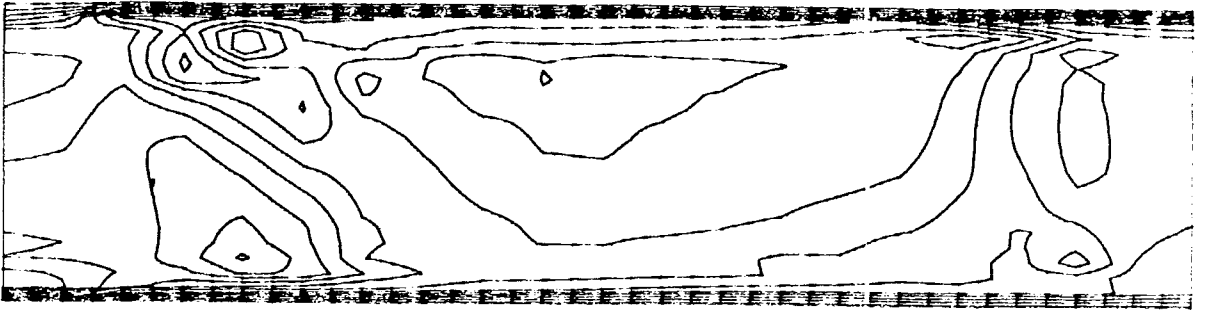


FIG. 5.17 g

Run 1E8 - Pr= .7 - phi=90  
 A1=4 - ISO-TEMPERATURES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

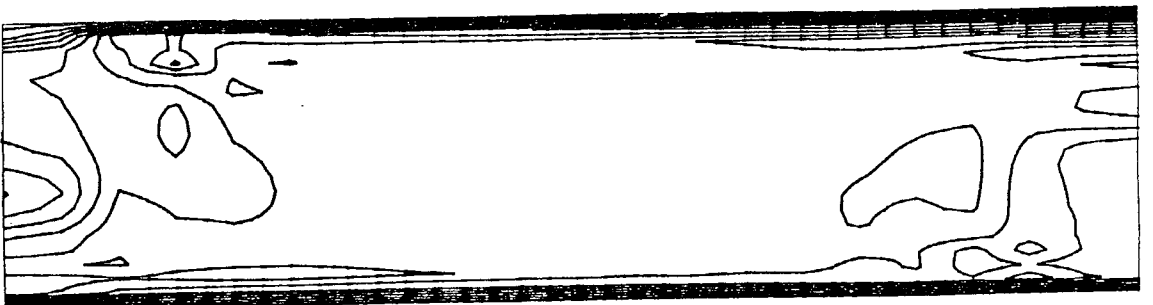


FIG. 5.17 h

Run 1E9 - Pr= .7 - phi=90  
 A1=6 - ISOTHERMES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

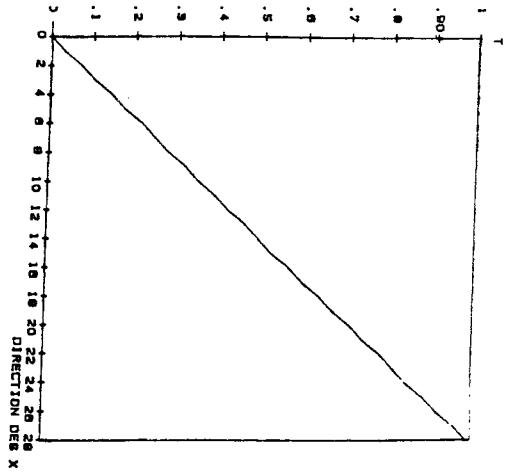


FIG. 5.20 a

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+9 \text{ P} = .7$   
 A1 = 5

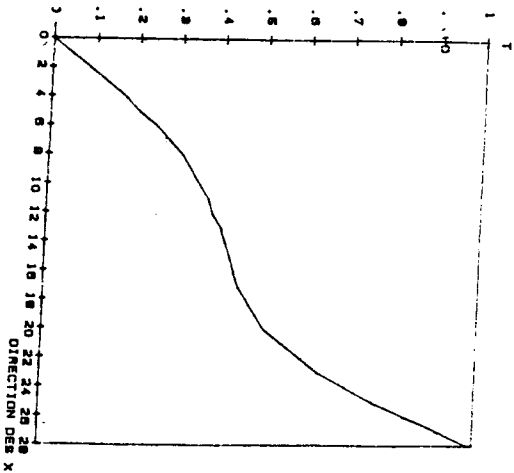


FIG. 5.20 b

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+4 \text{ P} = .7$   
 A1 = 6

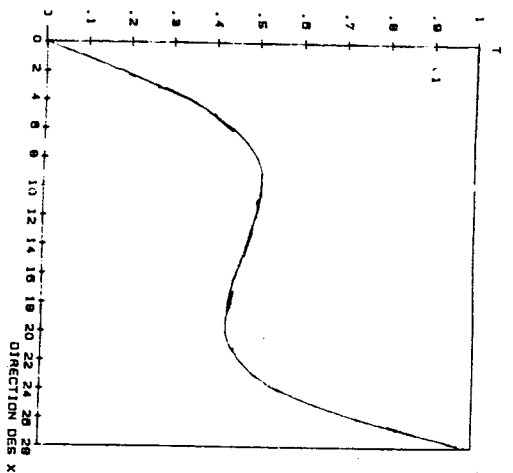


FIG. 5.20 c

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+5 \text{ P} = .7$   
 A1 = 5

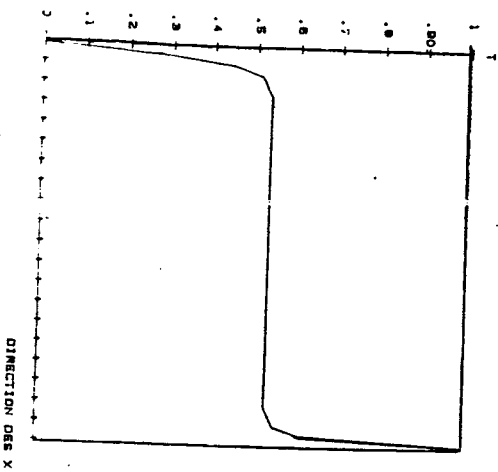


FIG. 5.20 d

PROFIL DES TEMPERATURES  
 SELON LES X AU MILIEU  
 CR =  $10 \text{ E}+7 \text{ P} = .7$   
 A1 = 5

Re=1E3 -Pr=7 -phi=90  
Al=6 -ISO-COURANTS

.0802775  
.2708925  
.4513875  
.6319425  
.8124976  
.9930525  
1.173608  
1.354163  
1.534718  
1.715273  
1.895828  
2.076382  
2.256936  
2.437493

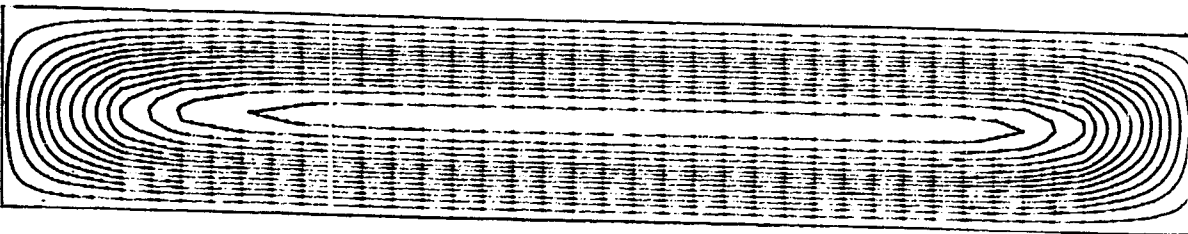


Fig. 5.18 a

Re=1E5 -Pr=7 -phi=90  
Al=6 -ISO-COURANTS

1.865317  
5.585951  
9.326584  
13.05722  
16.78785  
20.51848  
24.24812  
27.97875  
31.71098  
35.44102  
39.17185  
42.90229  
46.63293  
50.36355

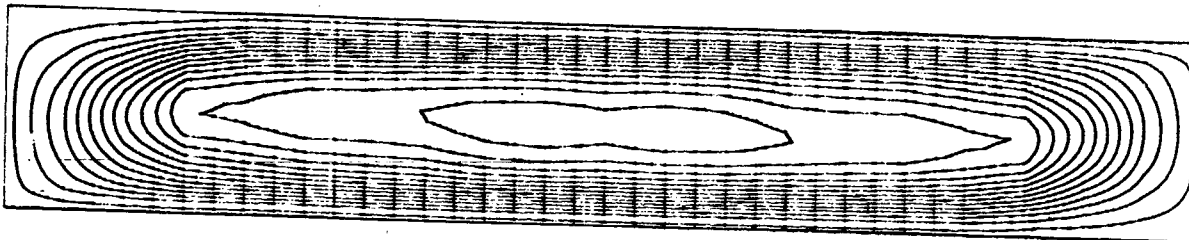


Fig. 5.18 b

Gr=2E5 -Pr=.7 -phi=80  
A1=6 -ISO-COURANTS

3.36334  
11.2115  
18.09866  
26.86782  
34.69589  
42.52414  
50.35231  
58.18047  
66.00862  
73.83678  
81.66495  
88.49311  
97.32128  
105.1494

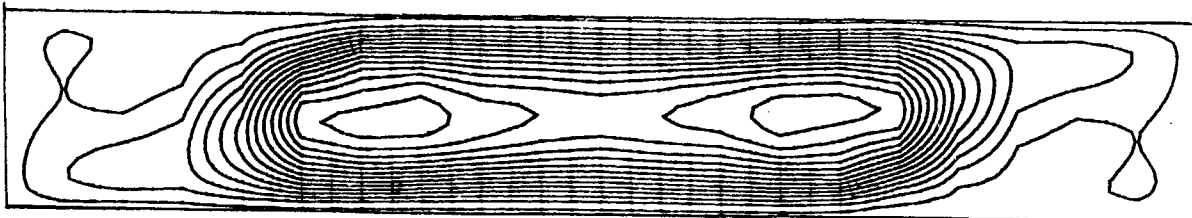


Fig. 5.18 c

Gr=6E5 -Pr=.7 -phi=90  
A1=6 -ISO-COURANTS

5.315136  
15.94541  
26.57588  
37.20585  
47.83622  
58.46649  
69.09676  
79.72705  
90.3573  
100.9876  
111.6178  
122.2481  
132.8784  
143.5087

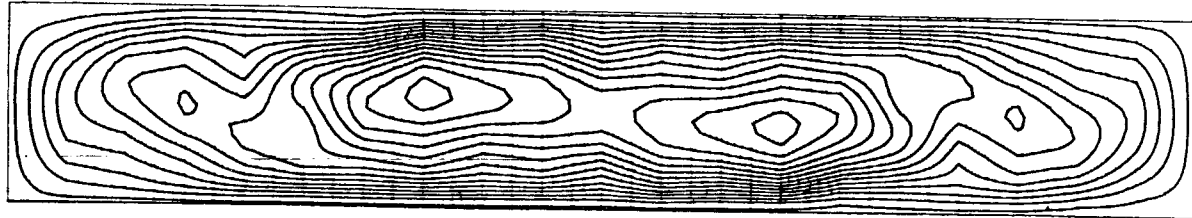
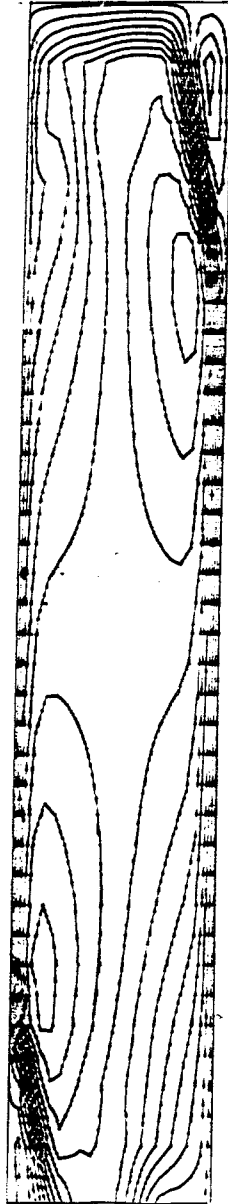


Fig. 5.18 d



$Re=1E7$   $-Pr=1$   $-phi=90$   
A1-6 -ISO-COURANTS

-40.12175  
-24.95505  
-9.788353  
5.978353  
20.54504  
35.71176  
50.87845  
66.04515  
81.21185  
96.37855  
111.5453  
126.7119  
141.8787  
157.0454

Fig. 5.18 e

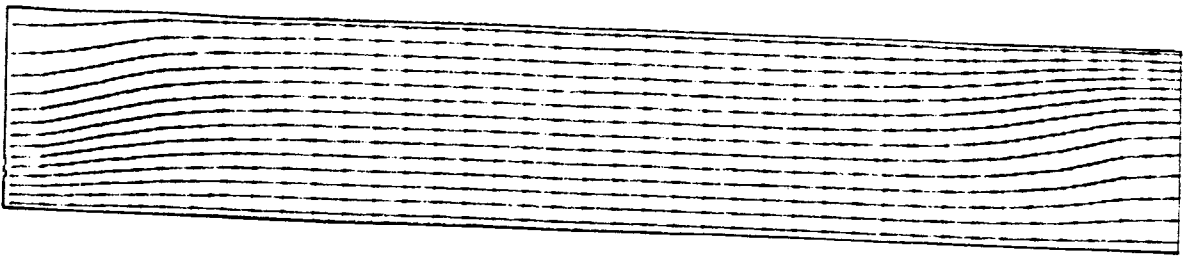


FIG. 5.19 a

K=1E3 -Pr=7 -phi=90  
 A1=6 -ISO-TEMPERATURES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

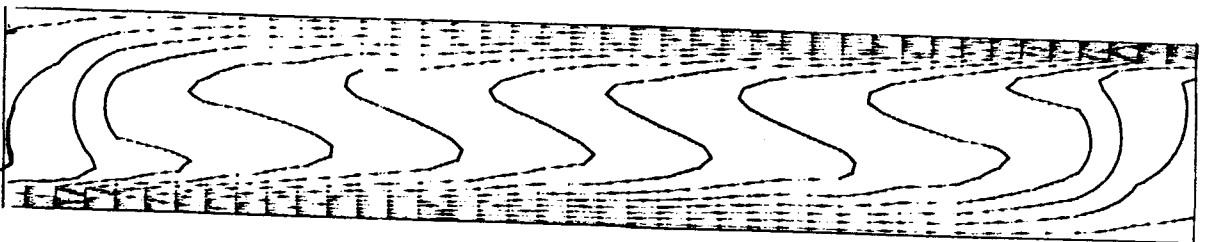


FIG. 5.19 b

K=1E3 -Pr=7 -phi=90  
 A1=6 -ISOTHERMES  
 3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

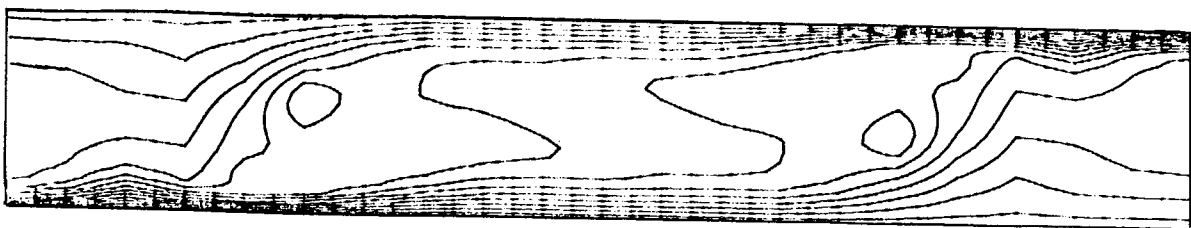


FIG. 5.19 C

Gr=2E8 -Pr=.7 -phi=.90  
 A1=6 -ISOTHERMES

3.571429E-02
.1071429
.1785714
.25
.3214286
.3928571
.4642857
.5357143
.607143
.6785714
.75
.8214286
.8928571
.9642858

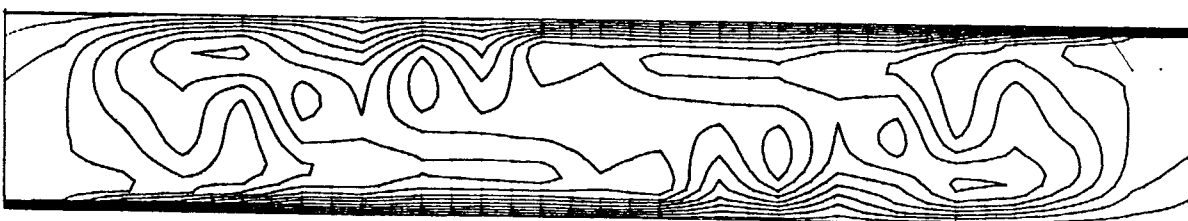
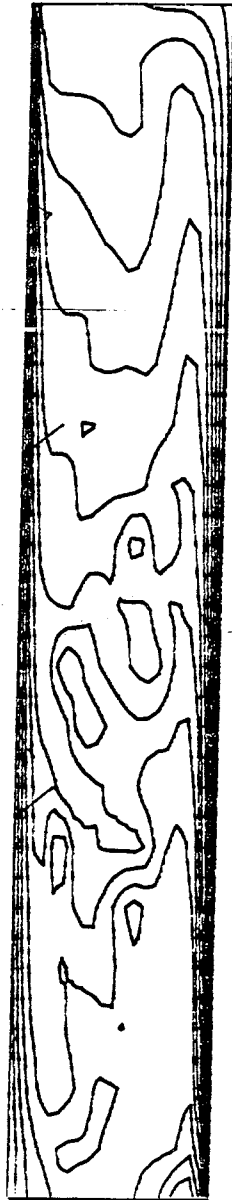


FIG. 5.19 D

Gr=6E8 -Pr=.7 -phi=.90  
 A1=6 -ISO

3.571429E-02
.1071429
.1785714
.25
.3214286
.3928571
.4642857
.5357143
.607143
.6785714
.75
.8214286
.8928571
.9642858



Gr=1E6 -Pr=1. -phi=90  
Al=6 -ISOTHERMES

3.498571E-02  
.1049572  
.1749286  
.2449  
.3148715  
.3848429  
.4548143  
.5247857  
.5947571  
.6647286  
.7347  
.8046715  
.8746429  
.9446143

Fig.5.19 e

Gr=1E6 -Pr=.7 -phi=80  
A1=10 ISO-COURANTS

2.164393  
14.49838  
26.89236  
39.18635  
51.50033  
63.83432  
76.16831  
88.50229  
100.8363  
113.1703  
125.5043  
137.8382  
150.1722  
162.5062



Fig. 5.21 a

Gr=1E5 -Pr=.7 -phi=80  
A1=10-ISO-COURANTS

2.813602  
8.740808  
14.56801  
20.39521  
26.22242  
32.04962  
37.87683  
43.70404  
49.53123  
55.35844  
61.18564  
67.01285  
72.84005  
78.66725

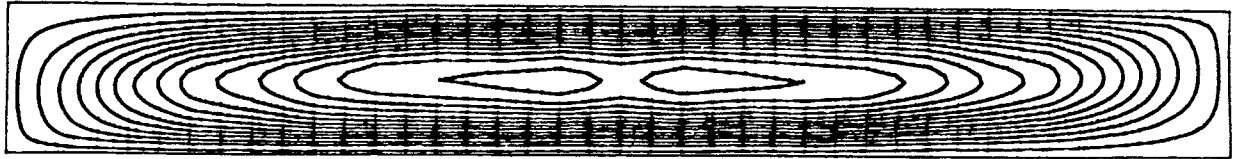


Fig. 5.21 b



$Gr=1E7$   $-Pr=.7$   $-phi=90$   
A1=10-ISO-COURANTS

-566.9137  
-451.1777  
-335.4417  
-219.7057  
-103.9697  
11.7663  
127.5023  
243.2383  
358.9743  
474.7103  
590.4463  
706.1823  
821.9183  
937.6542

Fig.5.21 c



FIG. 5.22 a

Gr=1E5 -Pr= .7 -phi=90  
 A1=20-ISO-COURANTS  
 -41.02304  
 -23.77623  
 -6.529412  
 10.7174  
 27.98422  
 45.21104  
 62.45785  
 79.70468  
 96.95148  
 114.1893  
 131.4451  
 148.6919  
 165.9387  
 183.1856

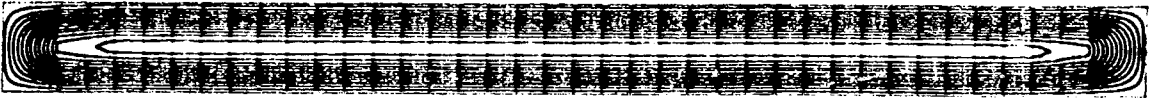


FIG. 5.22 b

Gr=1E4 -Pr= .7 -phi=90  
 A1=20-ISO-COURANTS  
 .4461193  
 1.338358  
 2.230596  
 3.122835  
 4.015073  
 4.907312  
 5.799551  
 6.691789  
 7.584028  
 8.476286  
 9.368504  
 10.26074  
 11.15298  
 12.04522

Cr=2E6 -Pr=.7 -phi=90  
Al=20 -ISO-COURANTS

12.73157  
38.19471  
63.65786  
89.12101  
114.5842  
140.0473  
165.5104  
190.8736  
216.4367  
241.8999  
267.363  
292.8262  
318.2893  
343.7525

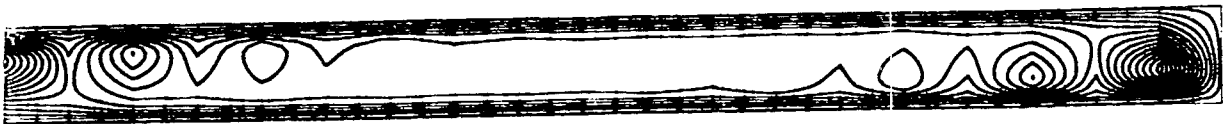


Fig. 5.22 c

Cr=1E7 -Pr=.7 -phi=90  
Al=20 -ISO-COURANTS

54.42066  
163.262  
272.1033  
380.9446  
489.7859  
598.6273  
707.4685  
816.3099  
925.1511  
1033.992  
1142.834  
1251.675  
1360.516  
1469.358



Fig. 5.22 d

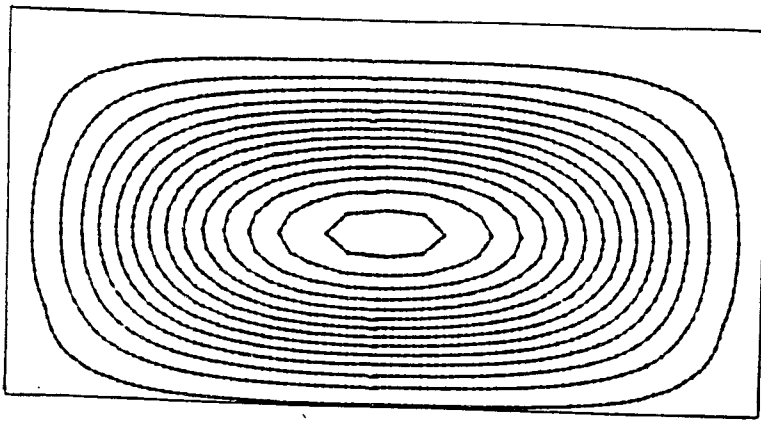


Fig. 5.23 a

$Gr=1E2 - Pr=.7 - \phi=90$

$Al=0.5 - ISO-COURANT$

- 1. 281429E-03
- 3. 844286E-03
- 6. 407143E-03
- . 00897
- 1. 153286E-02
- 1. 409571E-02
- 1. 885857E-02
- 1. 922143E-02
- 2. 178429E-02
- 2. 434714E-02
- . 02891
- 2. 947286E-02
- 3. 203571E-02
- 3. 459857E-02

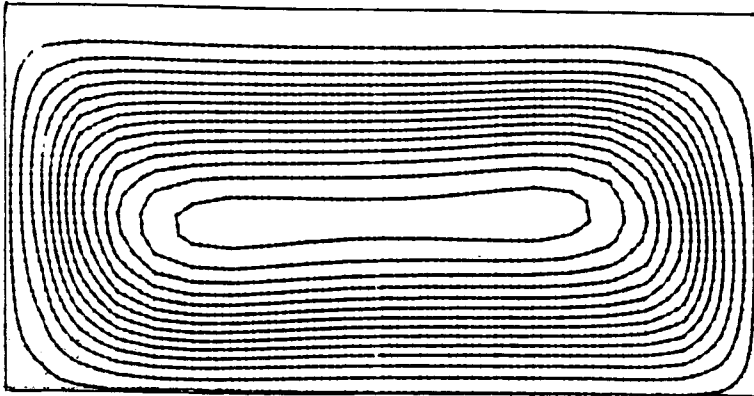


Fig. 5.23 b

$Gr=1E4 - Pr=.7 - \phi=90$

$Al=0.5 - ISO-COURANT$

- . 2197975
- . 6593825
- 1. 098988
- 1. 538583
- 1. 978177
- 2. 417772
- 2. 857367
- 3. 296963
- 3. 736557
- 4. 176152
- 4. 815747
- 5. 055343
- 5. 484938
- 5. 934532

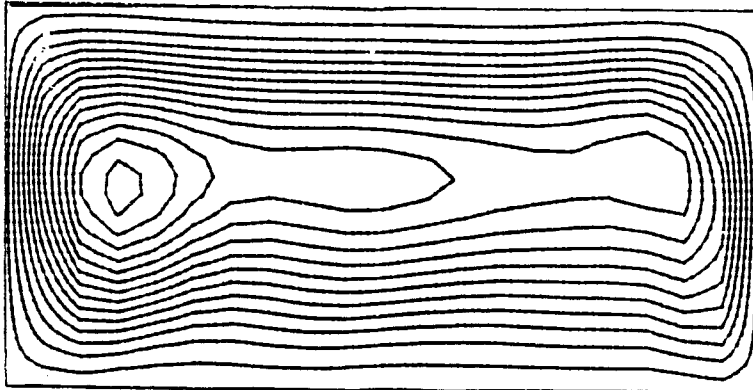
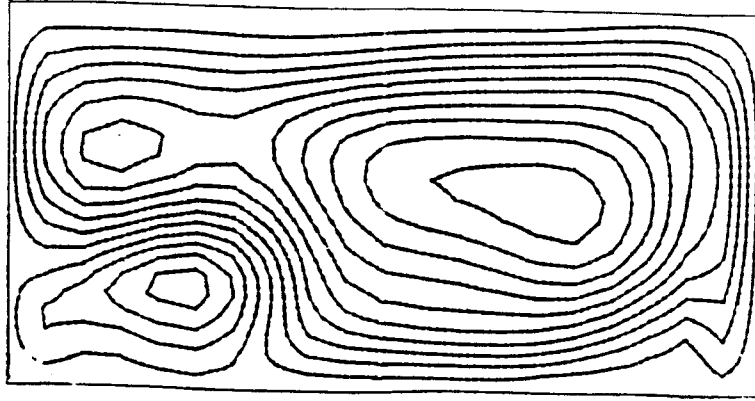


Fig. 5.23 c

$Gr=1E6 - Pr=.7 - \phi=90$

$Al=0.5 - ISO-COURANT$

- . 647725
- 1. 843175
- 3. 238625
- 4. 534075
- 5. 829525
- 7. 124875
- 8. 420424
- 9. 715874
- 11. 01132
- 12. 30678
- 13. 60222
- 14. 89788
- 16. 19313
- 17. 48858

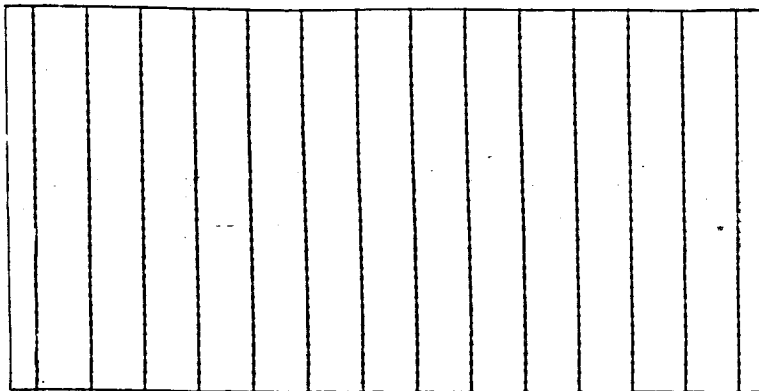


Gr=1E7 - Pr=.7 - phi=90

Al=0.5- ISO-COURANT

-32.47188  
 -22.75123  
 -13.03058  
 -3.308825  
 6.410725  
 16.13137  
 25.85203  
 35.57267  
 45.29333  
 55.01388  
 64.73463  
 74.45528  
 84.17592  
 93.89658

Fig. 5.23 d

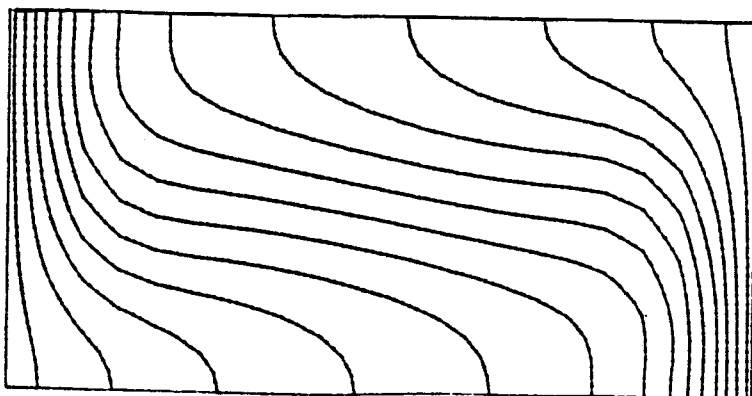


Gr=1E2 - Pr=.7 - phi=90

Al=0.5- ISOTHERMES

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3828571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

Fig. 5.24 a



Gr=10E+5 - Pr=.7 - phi=90

Al=0.5- ISOTHERMES

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3828571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

Fig. 5.24 b

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISOTHERMS  
1.868429E-02

5.908285E-02

8.847142E-02

.13786

.1772486

.2186371

.2580257

.2954143

.3348029

.3741814

.41358

.4528688

.4923572

.5317458

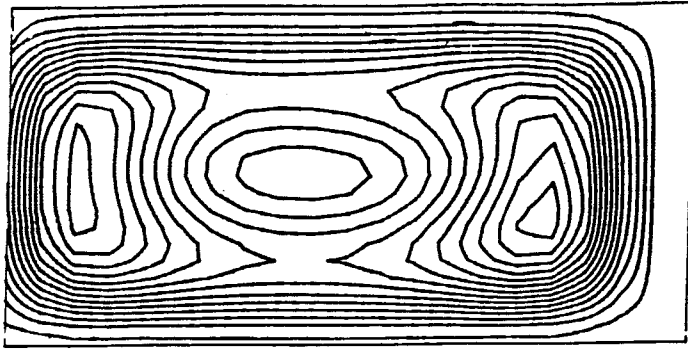


Fig. 5.25 a

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISO-COURANT

-7.889107

-6.858803

-5.830599

-4.801482

-3.872287

-2.843083

-1.813878

-.7846728

.2445328

1.273738

2.302843

3.332147

4.361352

5.390558

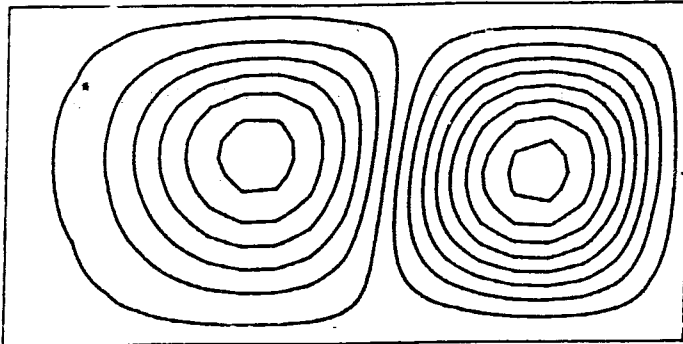


Fig. 5.25 b

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISO-COURANT

-28.47838

-23.88878

-18.52317

-15.04658

-10.57

-6.083405

-1.818818

2.858778

7.336385

11.81295

18.28854

20.78613

25.24272

29.71831

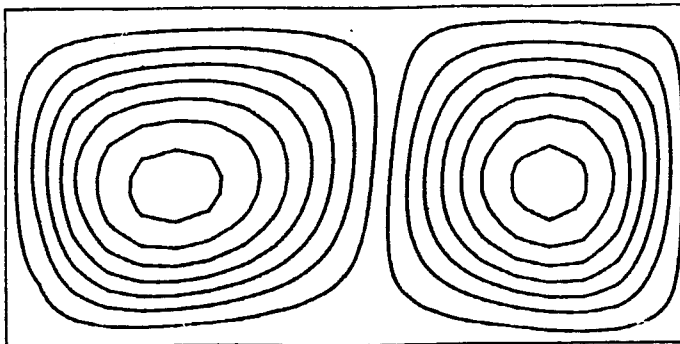


Fig. 5.25 c

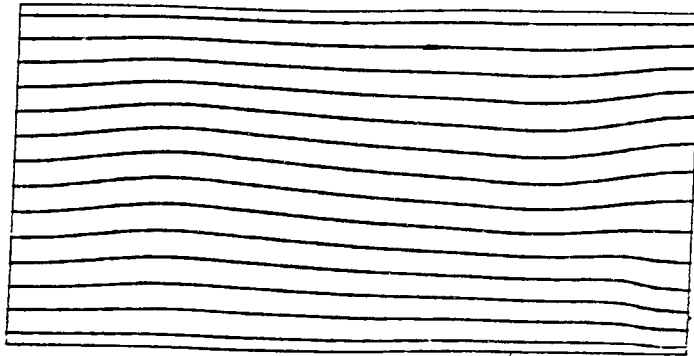


Fig.5.26 a

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=C

Al=2 - ISOTHERMES

- 3.571429E-02
- .1071428
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

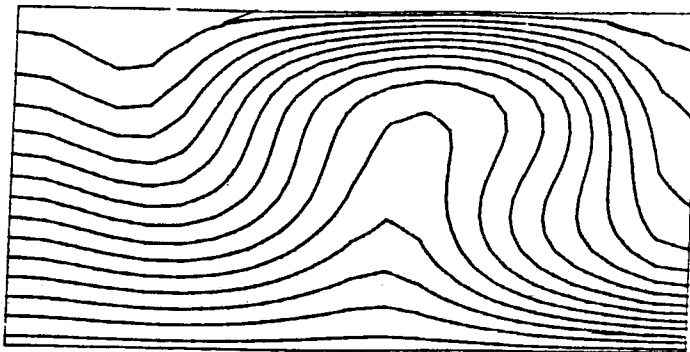


Fig.5.26 b

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=C

Al=2 - ISOTHERMES

- 3.573286E-02
- .1071886
- .1786643
- .25013
- .3215857
- .3930614
- .4645272
- .535893
- .6074586
- .6789243
- .75038
- .8218558
- .8933214
- .9647871

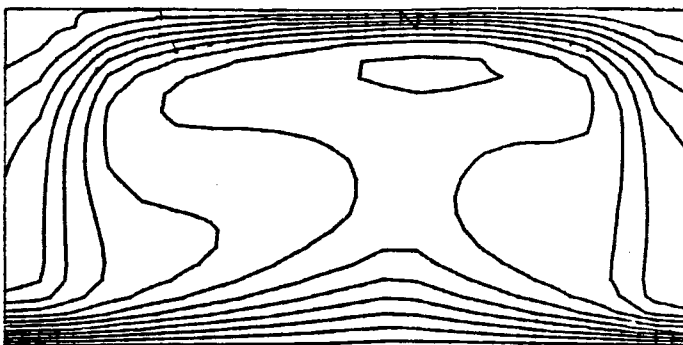


Fig.5.26 c

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=0

Al=2 - ISOTHERMES

- 3.688428E-02
- .1108529
- .1844214
- .25819
- .3318588
- .4057272
- .4784858
- .5532643
- .6270329
- .7008015
- .77457
- .8483388
- .9221072
- .9958758

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISO-COURANTS  
-646.6536

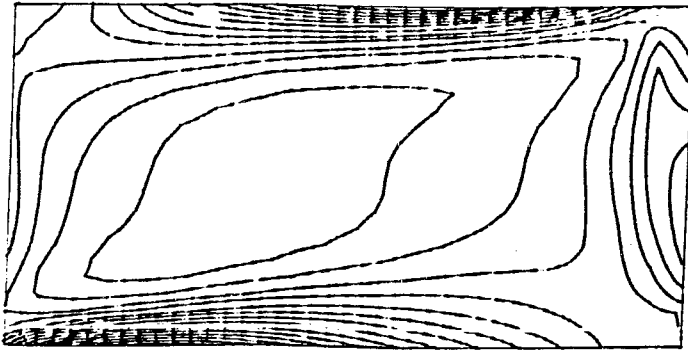


Fig.5.27 a

- 586.7316
- 526.8085
- 466.8874
- 406.9653
- 347.0433
- 287.1212
- 227.1991
- 167.277
- 107.3549
- 47.43286
- 12.48926

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISO-COURANTS  
-3512.838

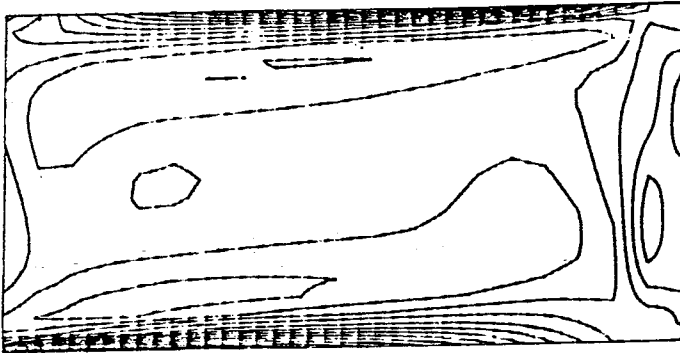


Fig.5.27 b

- 3196.095
- 2878.351
- 2562.606
- 2245.862
- 1929.117
- 1612.373
- 1285.628
- 978.8841
- 662.1396
- 345.3953
- 29.65088

Gr=1E6 - Pr=.7 - phi=0

A1=2 - ISO-COURANTS  
-18903.19

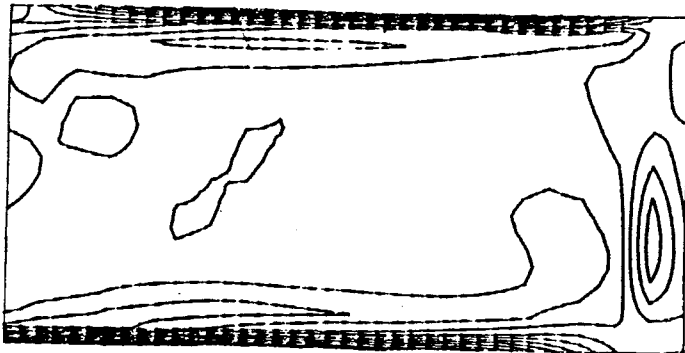


Fig.5.27 c

- 17215.97
- 15528.75
- 13841.53
- 12154.31
- 10467.09
- 8778.866
- 7092.644
- 5405.423
- 3718.202
- 2030.981
- 343.7578

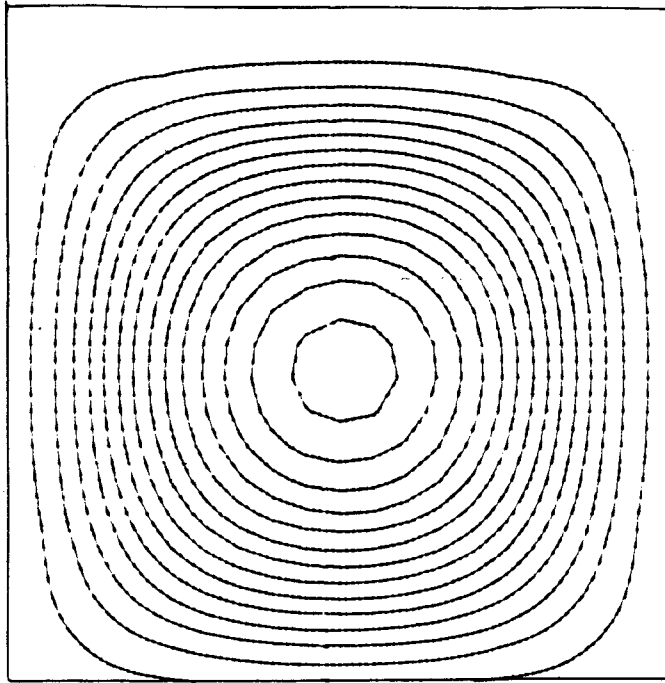


Fig.5.28 a

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=18  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 -1.335536E-02  
 -1.238807E-02  
 -1.137678E-02  
 -.0103875  
 -8.398214E-03  
 -8.408928E-03  
 -7.419643E-03  
 -6.430357E-03  
 -5.441072E-03  
 -4.451785E-03  
 -.0034625  
 -2.473215E-03  
 -1.483828E-03  
 -4.946422E-04

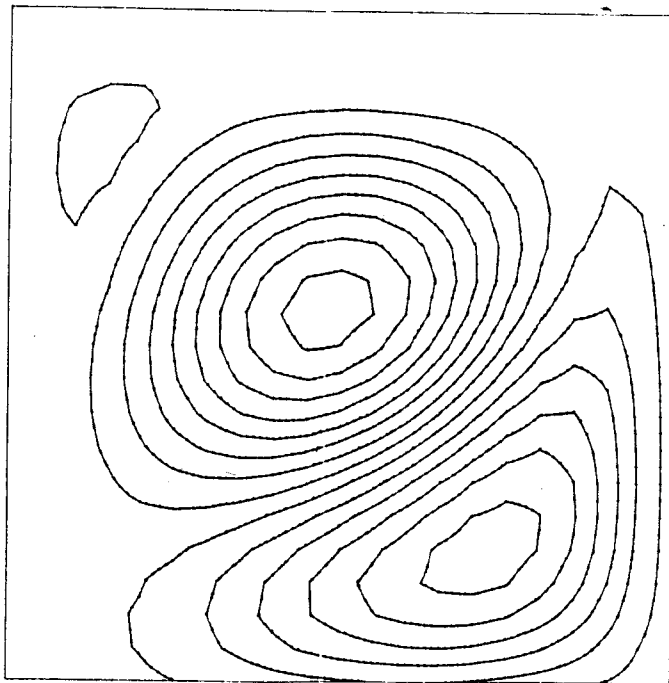


Fig.5.28 b

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=18  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 -5.888263  
 -5.10659  
 -4.323917  
 -3.541243  
 -2.758568  
 -1.875895  
 -1.183222  
 -.4105482  
 .3721252  
 1.154789  
 1.837473  
 2.720146  
 3.502819  
 4.285494

Gr=1E6 - Pr=0.7 - phi=180

Al=1 - ISO-COURANT

-0.514083

-2.284489

3.825107

10.1447

16.3643

22.58389

28.80349

35.02308

41.24268

47.46228

53.68186

59.90146

66.12106

72.34065

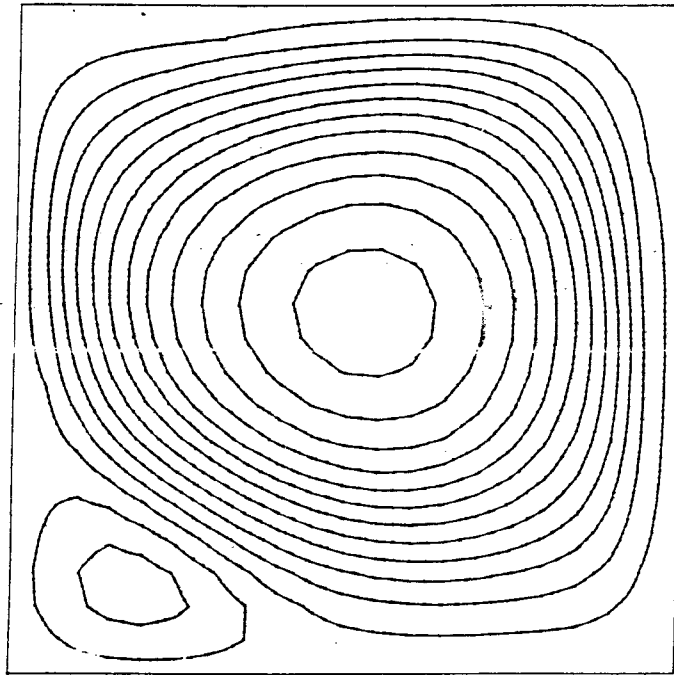


Fig.5.28 c

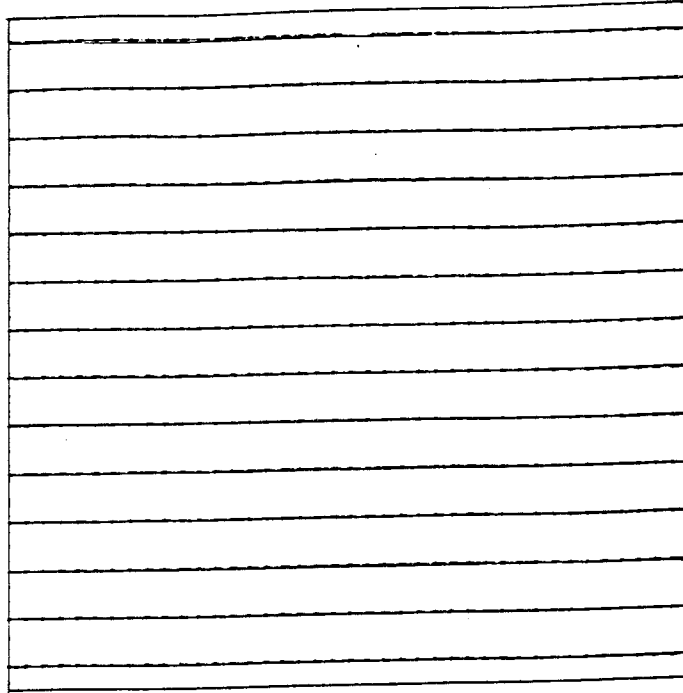


Fig. 5.29 a

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=18  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571429E-02

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

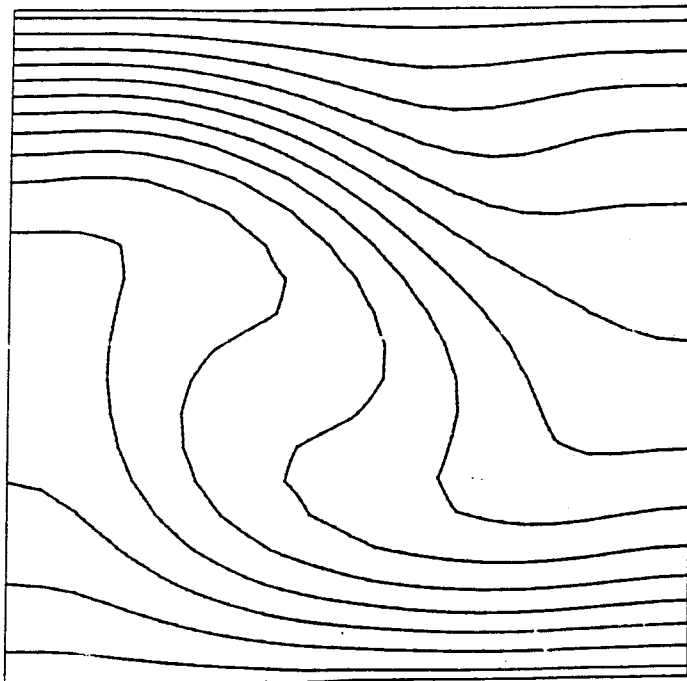


Fig. 5.29 b

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=18C  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571429E-02

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

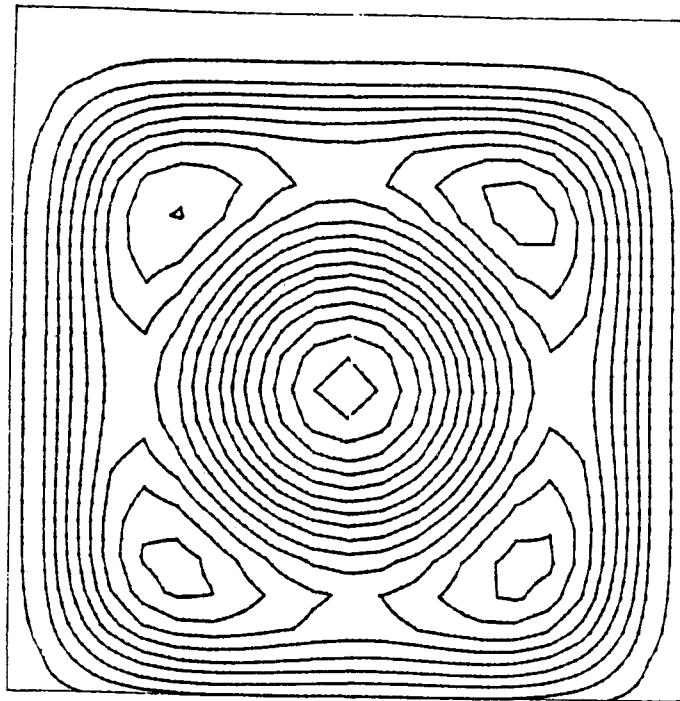


Fig. 5.30 a

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=0  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 -.1629032  
 -.1258697  
 -8.883607E-02  
 -.0518025  
 -1.476894E-02  
 2.226465E-02  
 8.928922E-02  
 8.633178E-02  
 .1333653  
 .1703969  
 .2074325  
 .2444661  
 .2814897  
 .3185332

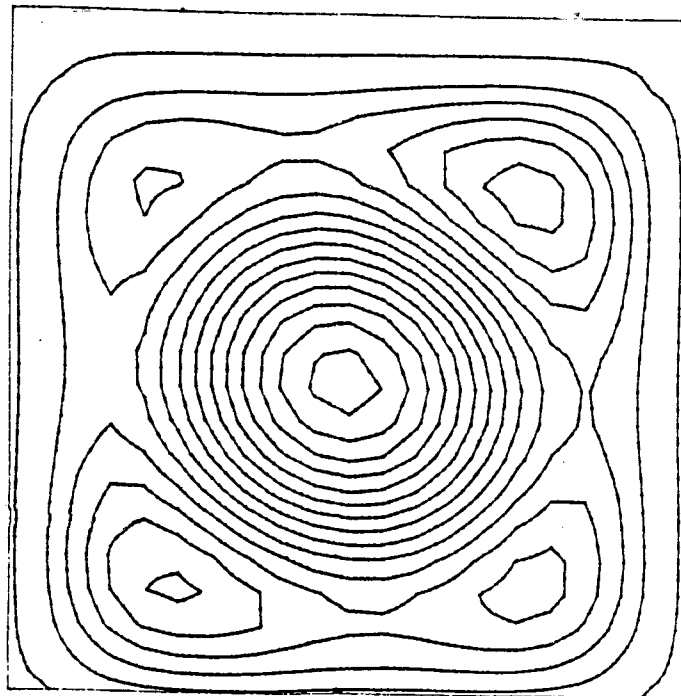


Fig. 5.30 b

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=0  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 -.4172993  
 -.3640779  
 -.3108564  
 -.257635  
 -.2044136  
 -.1511921  
 -8.787069E-02  
 -4.474829E-02  
 8.472144E-03  
 6.169381E-02  
 .114915  
 .1681364  
 .2213578  
 .2745793

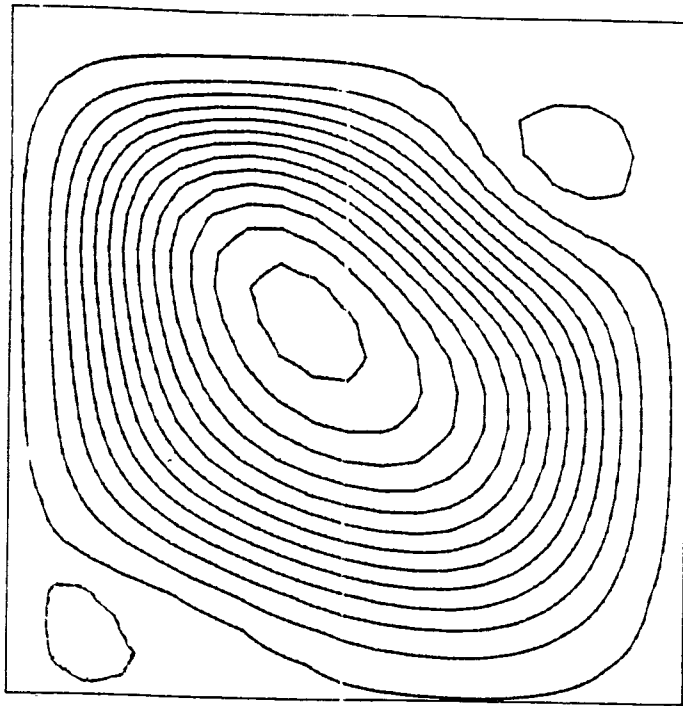


Fig. 5.30 c

Gr=1E5- Pr=.7 - phi=0  
 A1=1 - ISO-COURANT  
 -3.428662  
 -3.152205  
 -2.874748  
 -2.587283  
 -2.318836  
 -2.04238  
 -1.784823  
 -1.487467  
 -1.21001  
 -.932554  
 -.6550875  
 -.3776412  
 -.1001847  
 .1772716

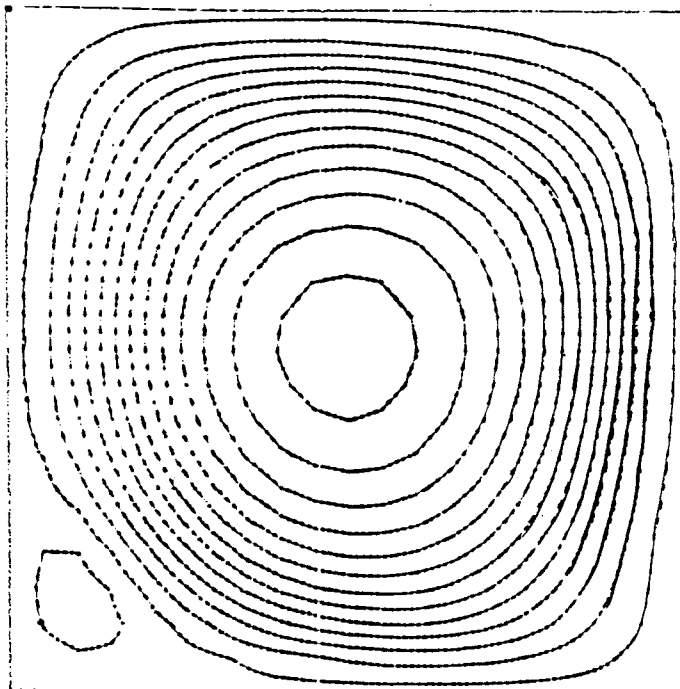


Fig. 5.30 d

Re=10E8 - Pr=1 - phi=0  
 iso-courant  
 -71.51373  
 -65.76711  
 -60.0205  
 -54.27387  
 -48.52725  
 -42.78063  
 -37.03401  
 -31.2874  
 -25.54077  
 -19.79415  
 -14.04753  
 -8.300911  
 -2.554291  
 3.192337

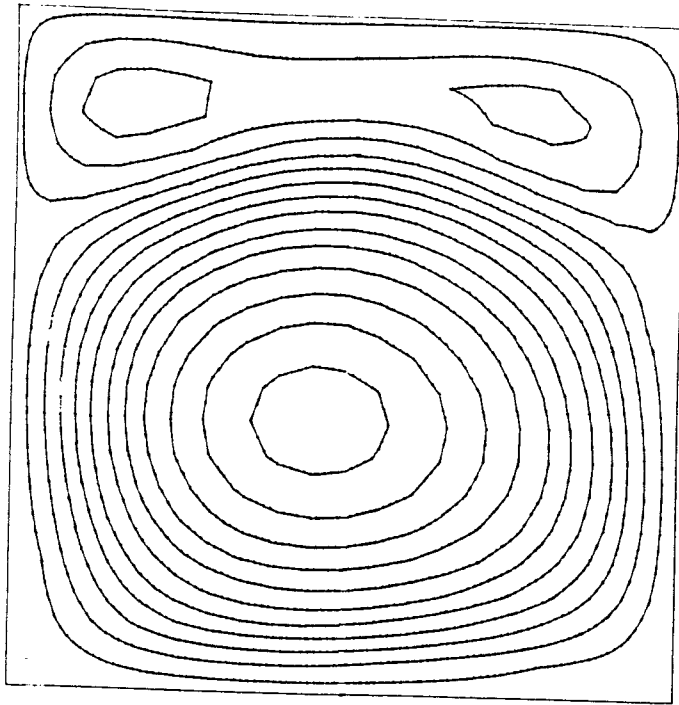


Fig. 5.30 e

Gr=1E7 - Pr=.7 - phi=

Al=1 - ISO-COURANT

-40.06444

-21.69262

-3.320789

15.05103

33.42286

51.79469

70.16651

88.53833

106.9102

125.282

143.6538

162.0256

180.3975

198.7693

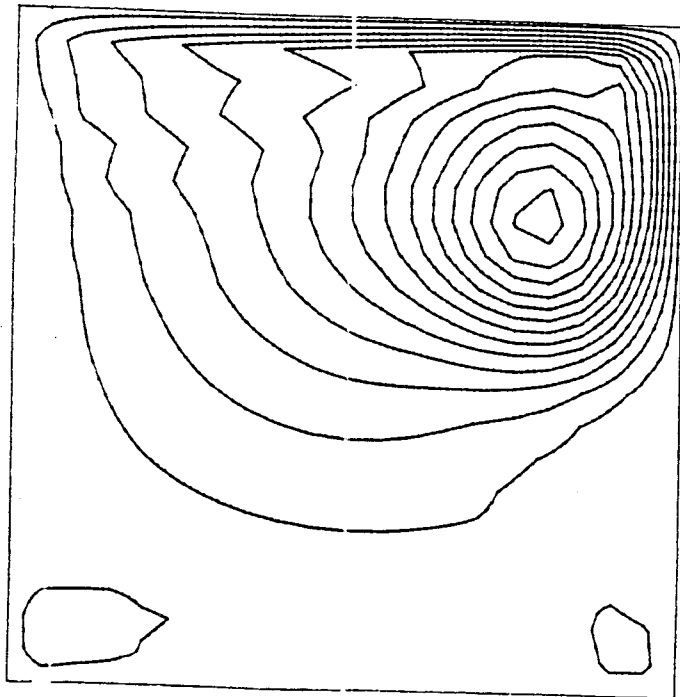


Fig 5 30 f

Gr=1E9 - Pr=.7 - phi=0

Al=1 - ISO-COURANT

-1277.251

-1175.828

-1074.405

-972.8824

-871.5593

-770.1365

-668.7133

-567.2804

-465.8673

-364.4443

-263.0213

-161.5983

-60.17517

41.2478

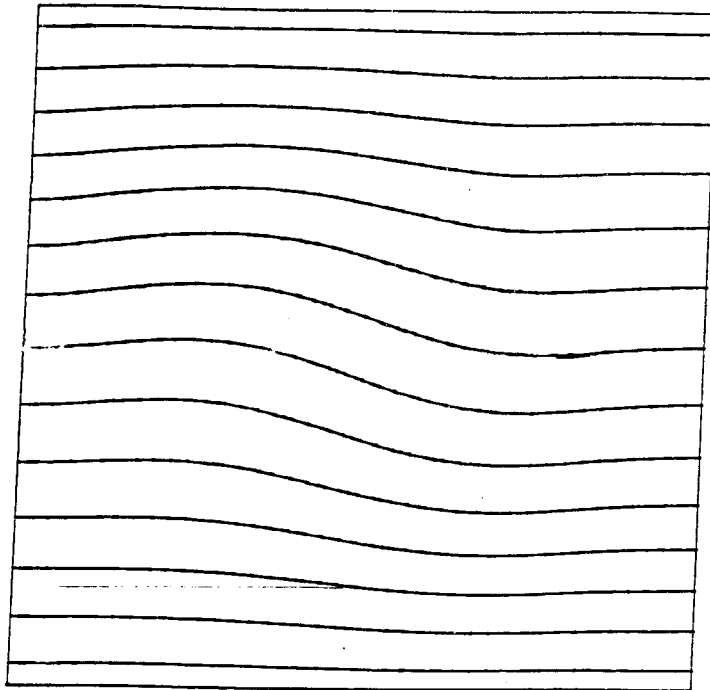


Fig.5.31 a

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=0  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571428E-02

- .1071428
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3828571
- .4842857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8828571
- .8842858

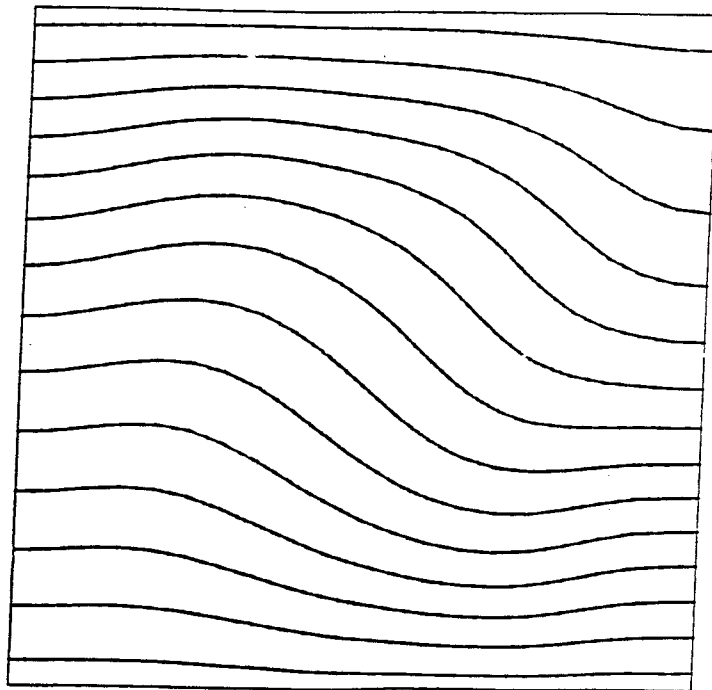
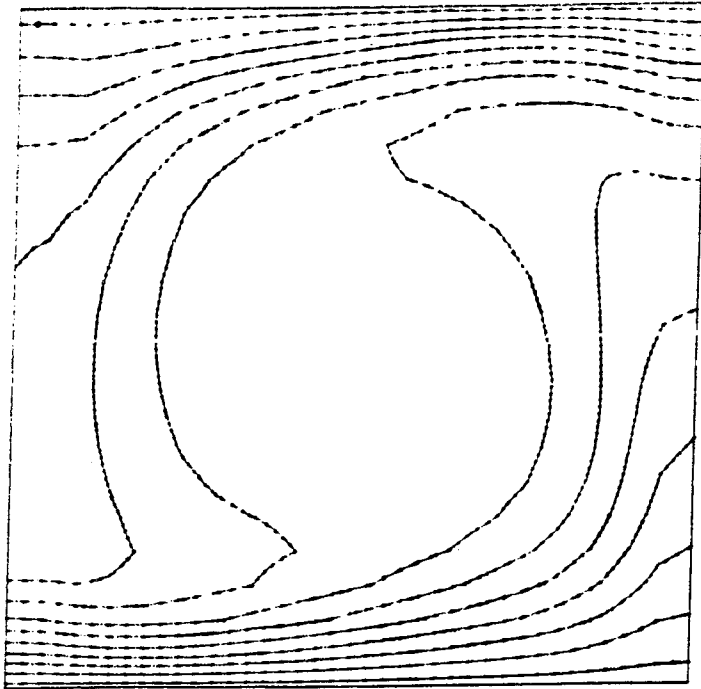


Fig.5.31 b

Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=0  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571428E-02

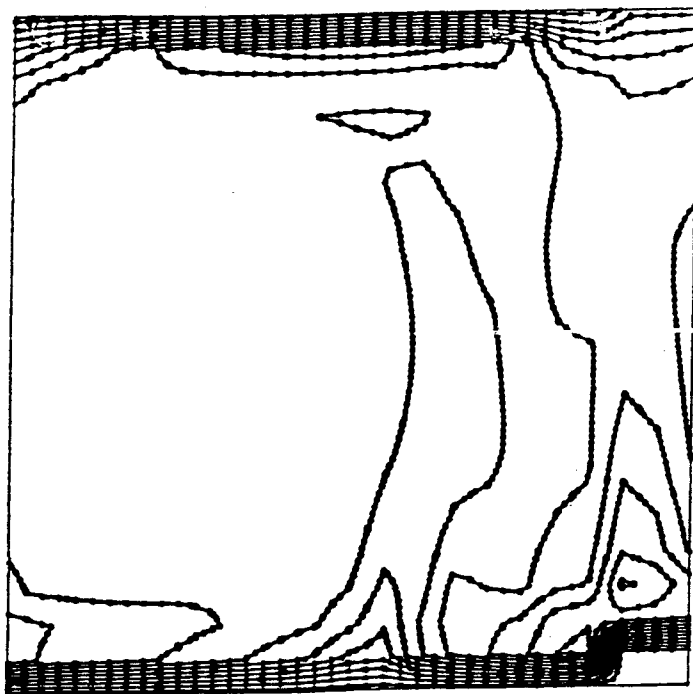
- .1071428
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3828571
- .4842857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8828571
- .8842858



Re=10E5 - Pr=7 -  $\phi = 0$   
 Iso-temperatures

- 3.571428E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3828571
- .4642857
- .5357143
- .6071429
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

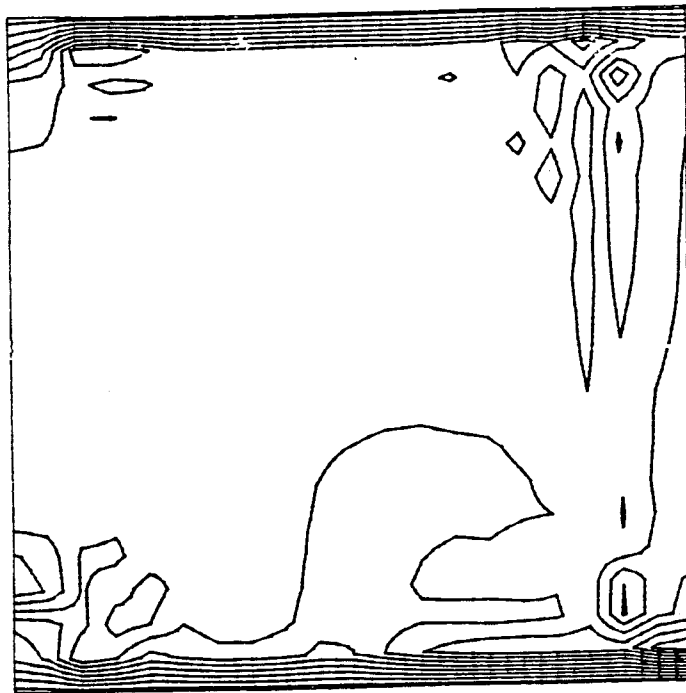
Fig.5.31 c



Re=1E7 - Pr=7 -  $\phi = 0$   
 Iso-temperatures

- 3.571428E-02
- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3828571
- .4642857
- .5357143
- .6071429
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

Fig.5.31 d

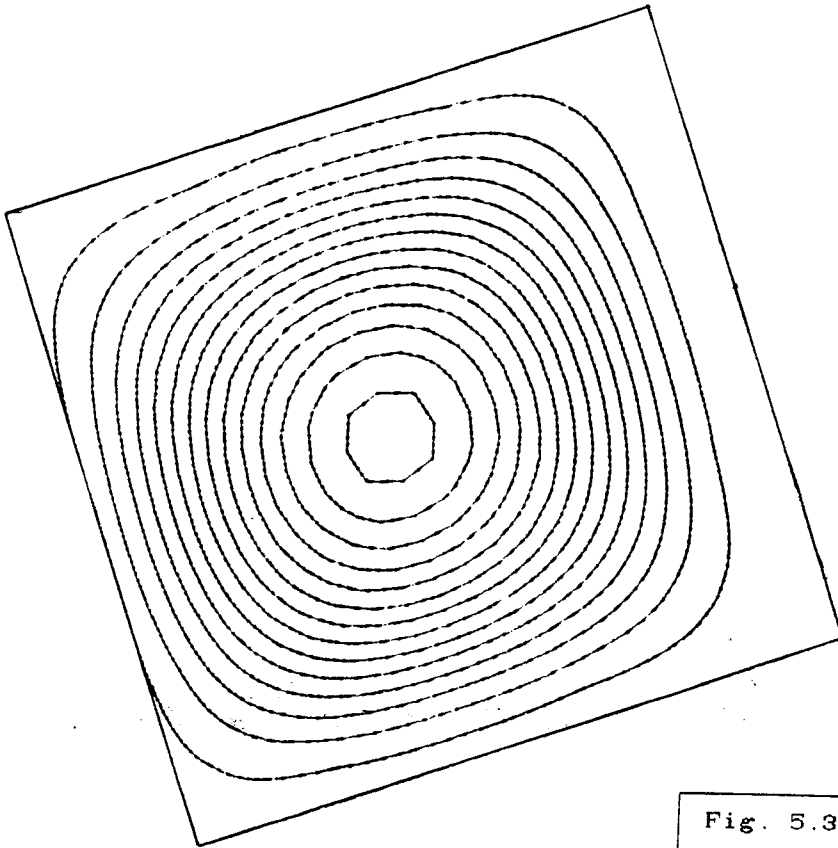


$Gr=1E9 - Pr=.7 - \phi_1=0$

$A_1=1 - ISOTHERMES$

3.571429E-02  
.1071429  
.1785714  
.25  
.3214286  
.3928571  
.4642857  
.5357143  
.6071429  
.6785714  
.75  
.8214286  
.8928571  
.9642858

Fig. 5.31 e

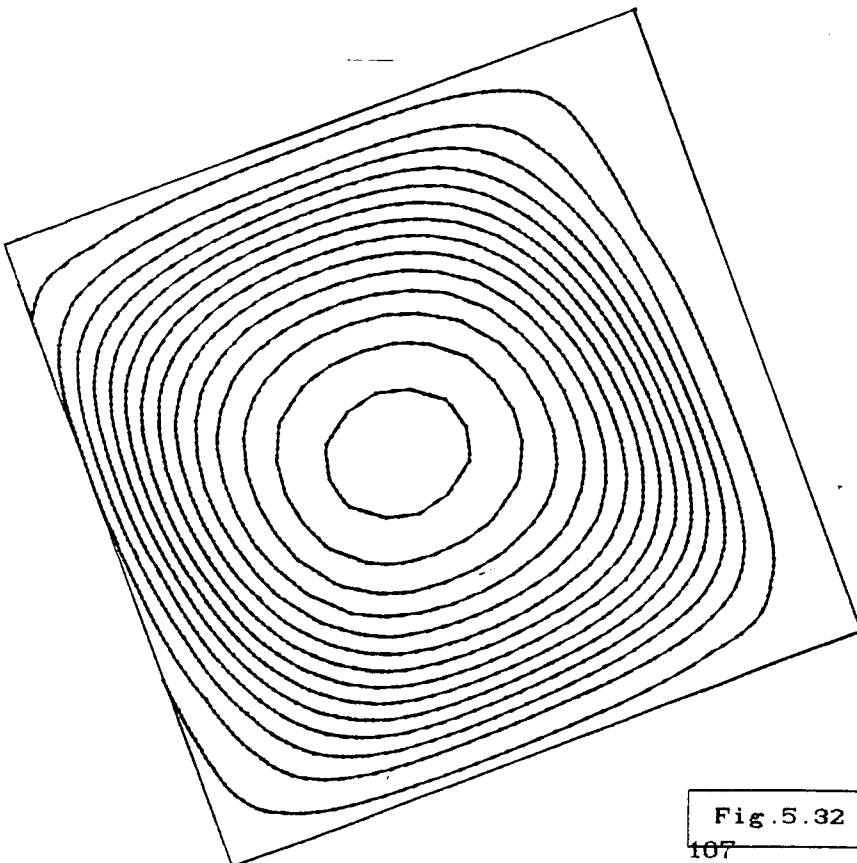


Gr=1E3 - Pr=.7 - phi=30

A1=1 - ISO-COURANT

4.301957E-02  
 .1290557  
 .2150922  
 .30113  
 .3871672  
 .4732043  
 .5592415  
 .6462786  
 .7313157  
 .8173529  
 .90339  
 .9894271  
 1.075464  
 1.161502

Fig. 5.32 a



Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=30

A1=1 - ISO-COURANT

.8858588  
 2.887577  
 4.878295  
 6.871013  
 8.862731  
 10.85445  
 12.84617  
 14.83788  
 16.8298  
 18.82132  
 20.81304  
 22.80476  
 24.89647  
 26.88818

Fig. 5.32 b

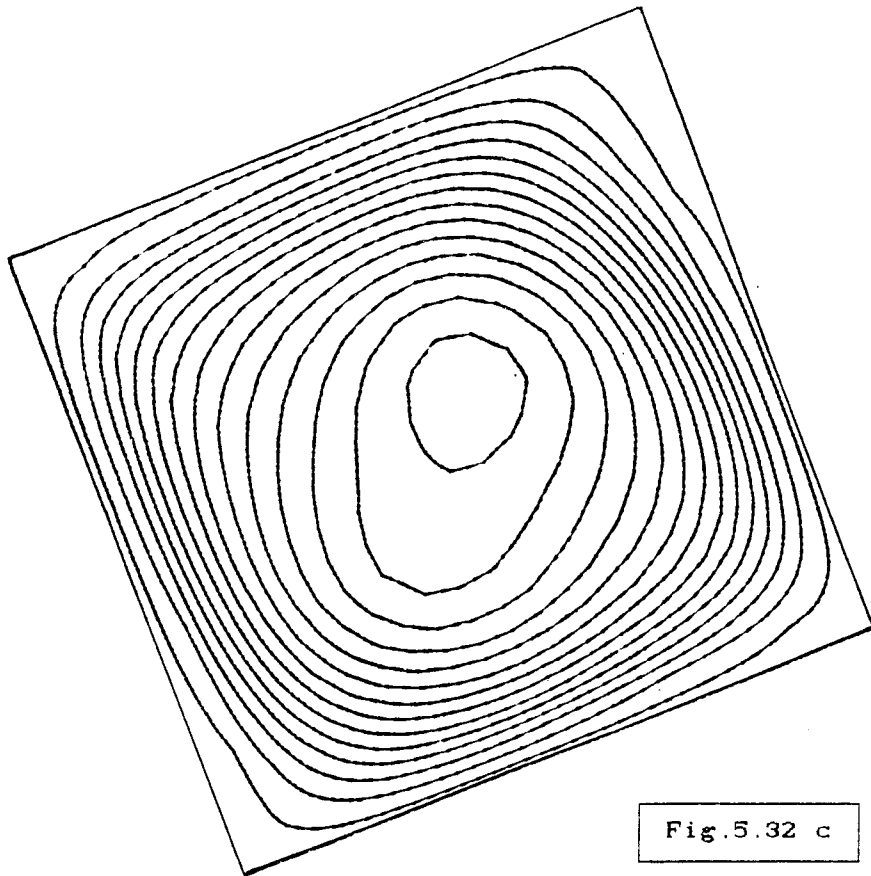


Fig.5.32 c

$Re=1E6 - Pr=7 - phi=30$   
 A1=1 - ISO-COURANT  
 3.062684  
 8.188052  
 15.31342  
 21.43878  
 27.56416  
 33.68953  
 38.81489  
 45.84027  
 52.06563  
 58.191  
 64.31637  
 70.44173  
 76.5671  
 82.69247

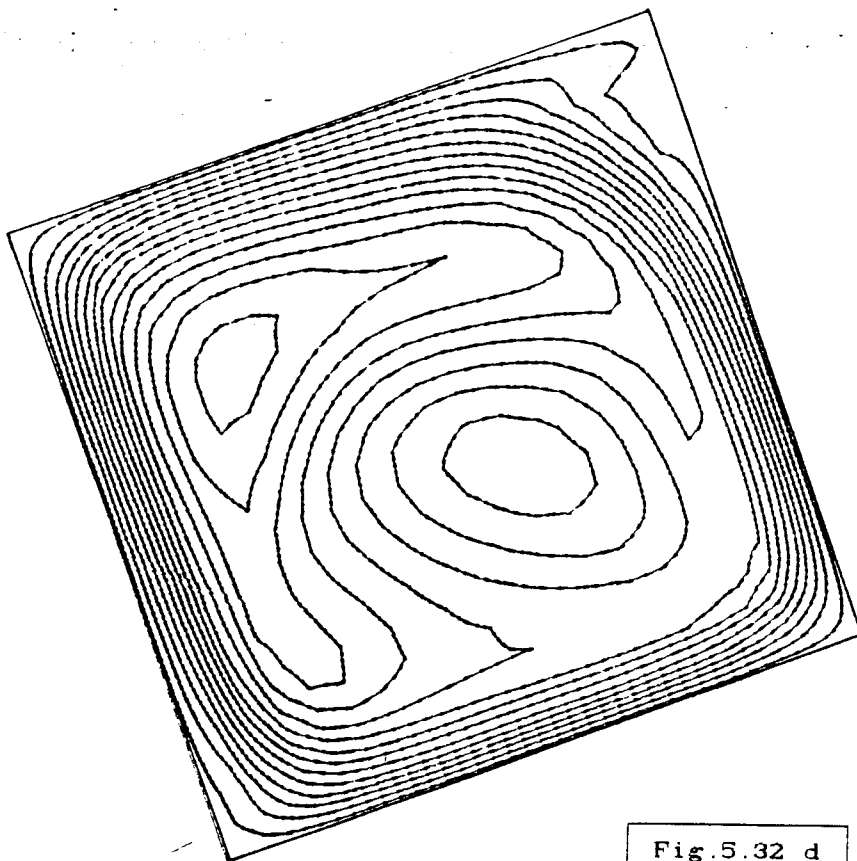
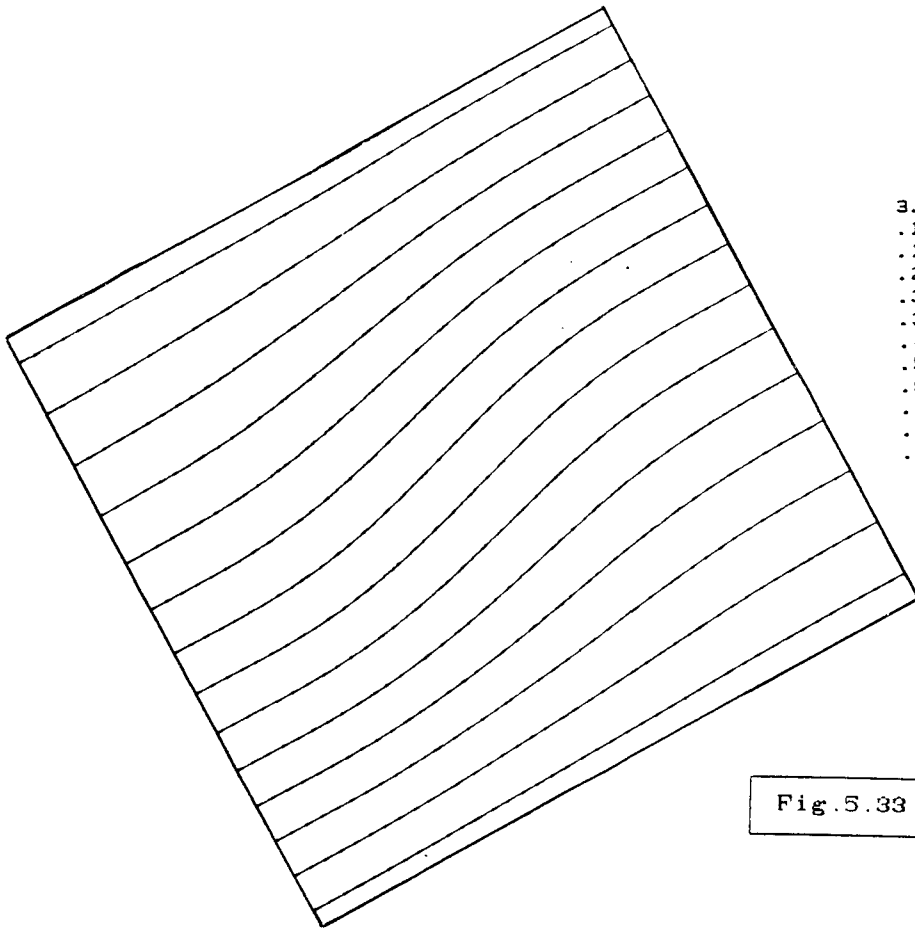


Fig.5.32 d

$Re=1E7 - Pr=7 - phi=30$   
 A1=1 - ISO-COURANT  
 3.775305  
 12.52214  
 21.26897  
 30.0158  
 38.76263  
 47.50846  
 56.25629  
 65.00311  
 73.74996  
 82.49678  
 91.24361  
 99.99043  
 108.7373  
 117.4841

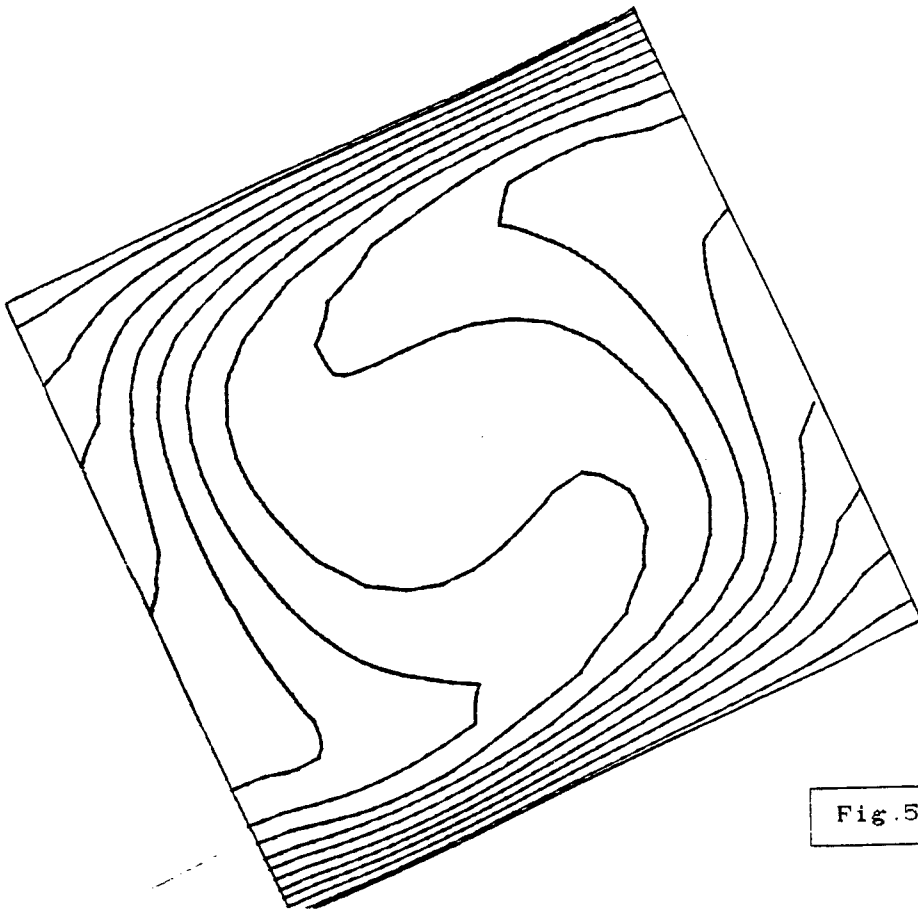


Gr=1E2 = Pr=7 = phi=30

Al=1 - ISOTHERMES

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

Fig.5.33 a



Gr=1E5 - Pr=7 - phi=3

Al=1 - ISOTHERMES

3.571429E-02  
 .1071429  
 .1785714  
 .25  
 .3214286  
 .3928571  
 .4642857  
 .5357143  
 .607143  
 .6785714  
 .75  
 .8214286  
 .8928571  
 .9642858

Fig.5.33 b

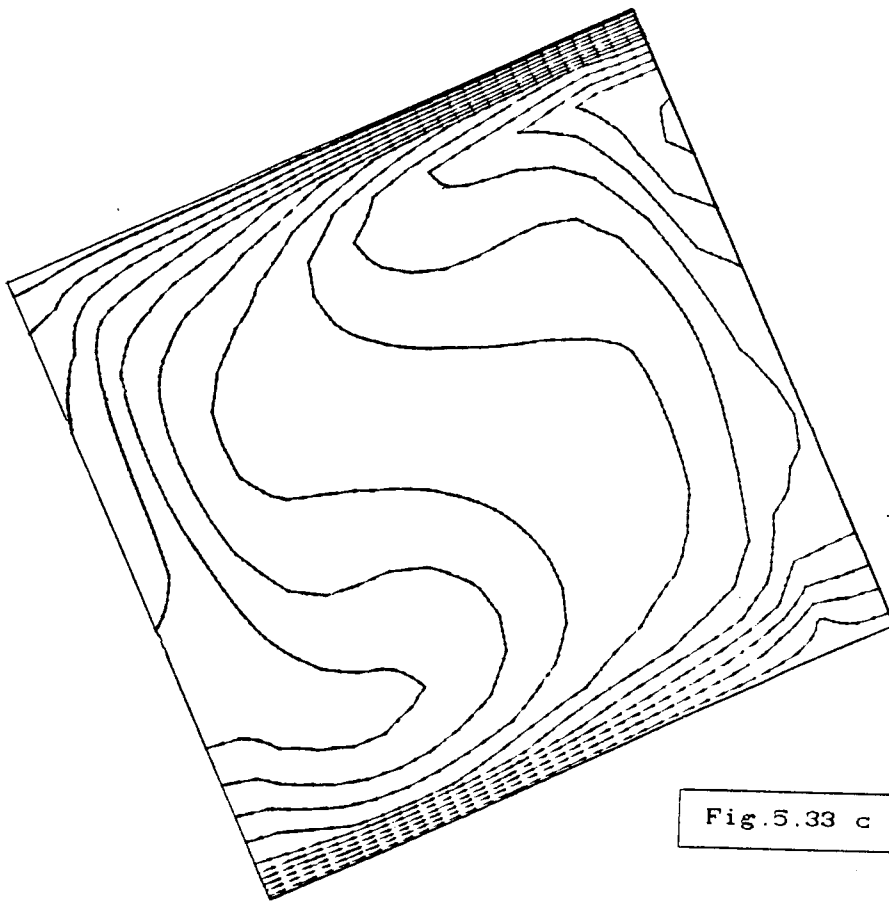


Fig. 5.33 c

Gr=1E6 - Pr=0.7 - phi=30  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571429E-02

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

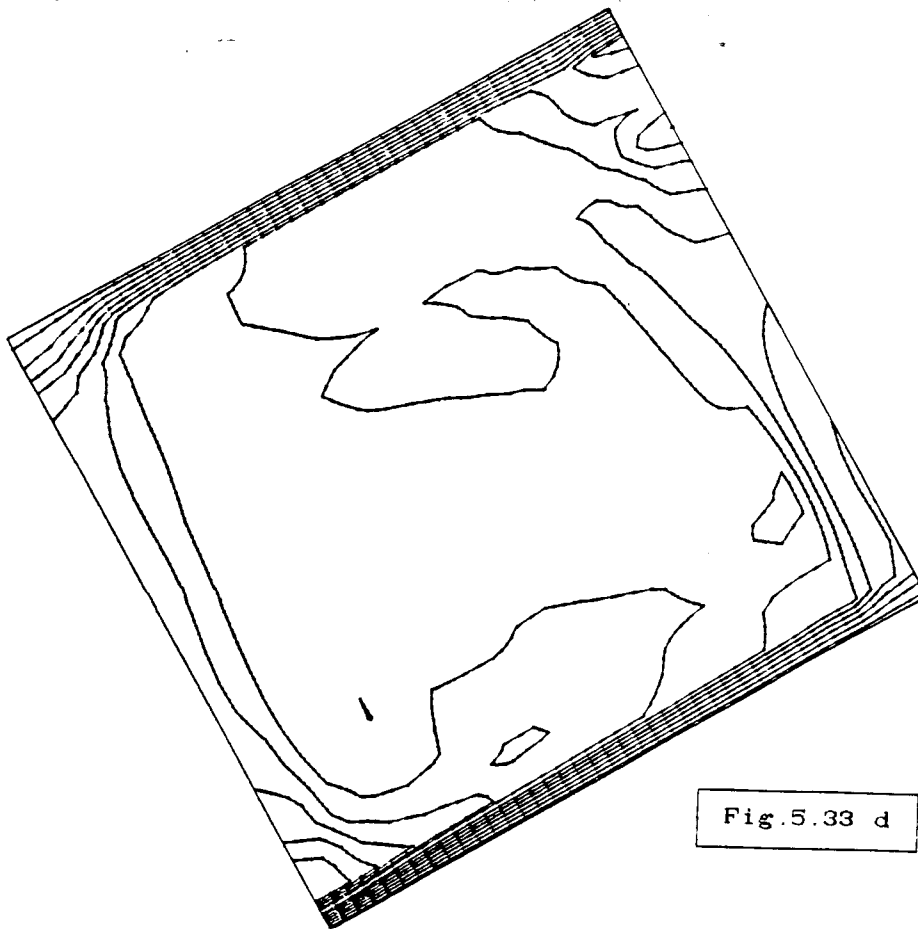


Fig. 5.33 d

Gr=1E7 - Pr=0.7 - phi=30  
 A1=1 - ISOTHERMES  
 3.571429E-02

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

Gr=1E3 - Pr=0.7 - phi=60

Al=1 - ISO-COURANT

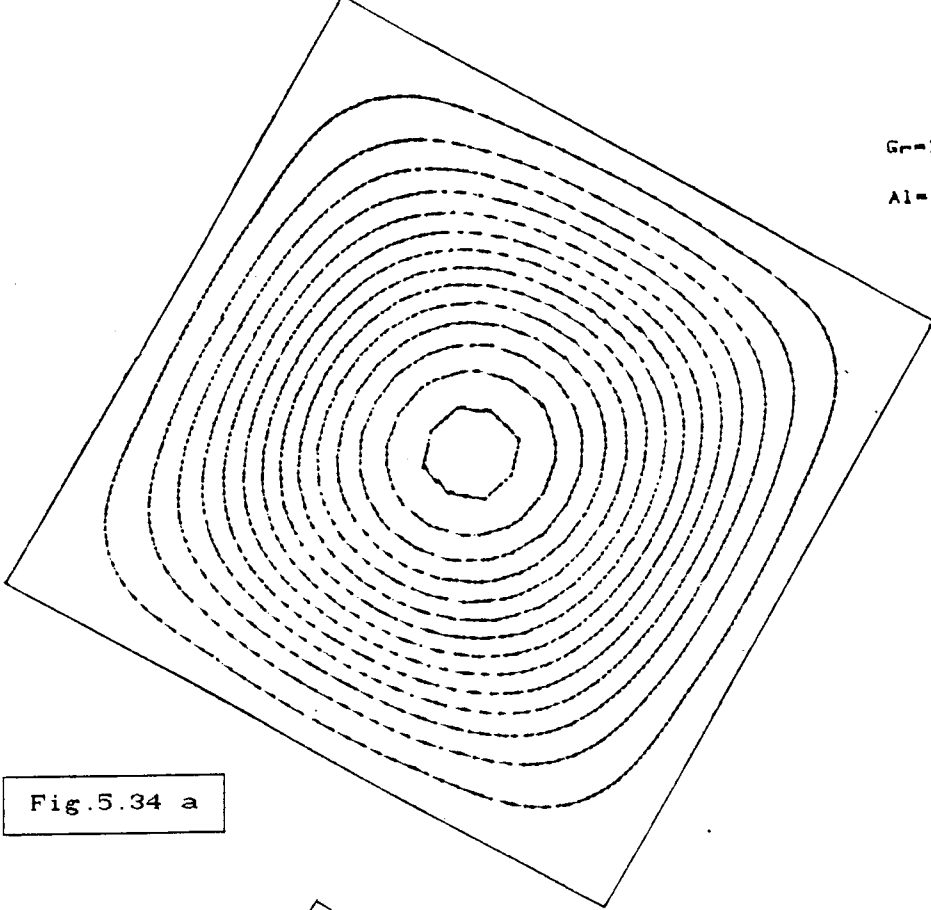


Fig.5.34 a

- 2.725464E-02
- 8.176393E-02
- .1362732
- .1907825
- .2452918
- .2999011
- .3549104
- .4099197
- .4649190
- .5199182
- .5729475
- .6269568
- .6819661
- .7359754

Gr=1E4 - Pr=0.7 - phi=60

Al=1 - ISO-COURANT

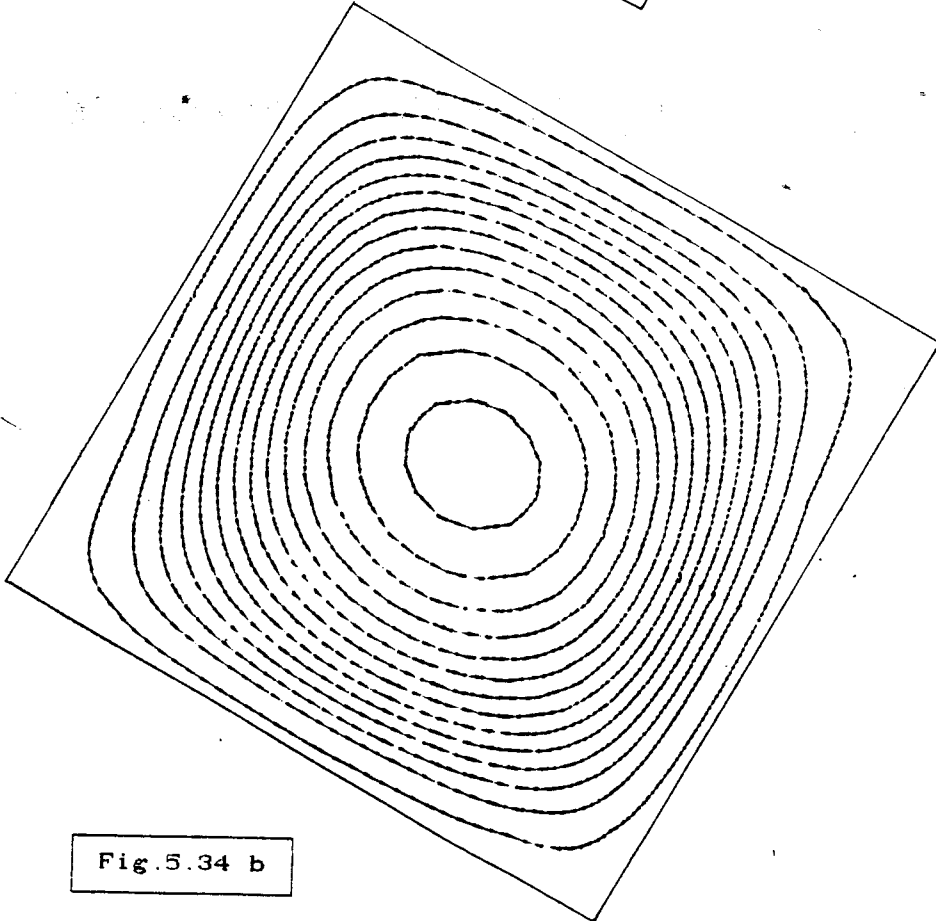


Fig.5.34 b

- 1.001099
- 3.003277
- 5.005463
- 7.007648
- 9.009832
- 11.01202
- 13.0142
- 15.01639
- 17.01857
- 19.02076
- 21.02294
- 23.02513
- 25.02731
- 27.0295

Gr=1E5 - Pr=.7 - phi=60

Al=1 - ISO-COURANT

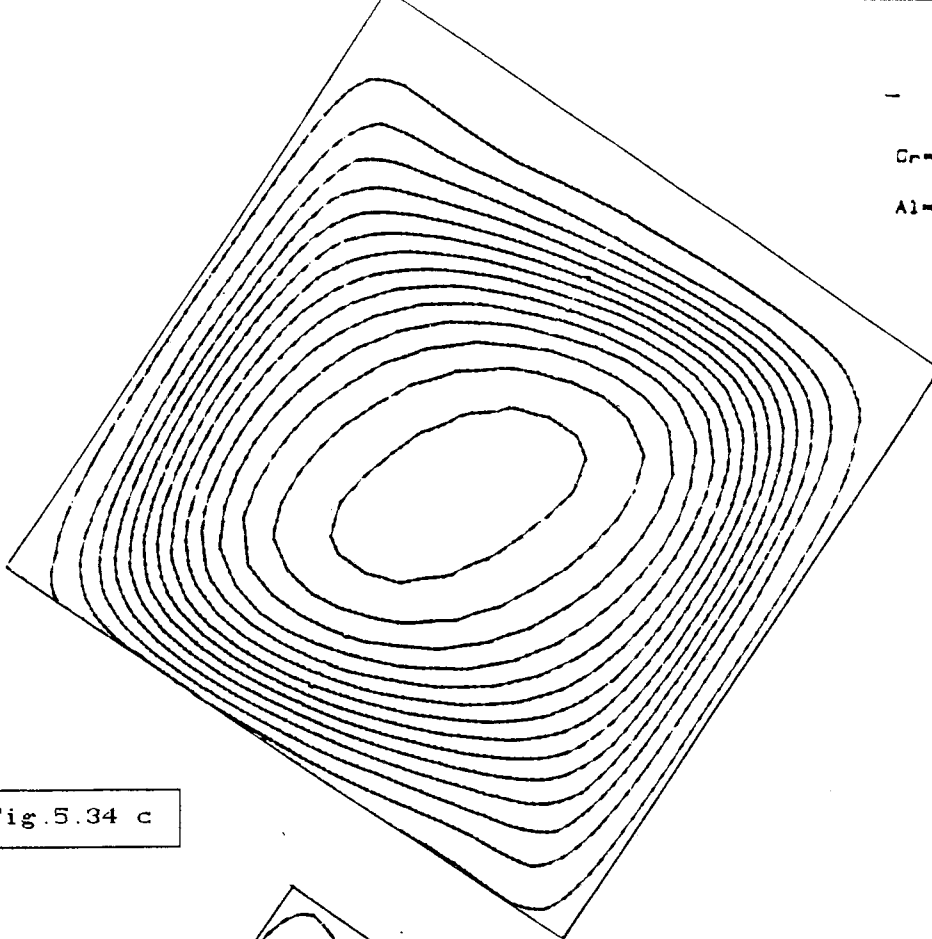


Fig. 5.34 c

.886394  
2.089182  
3.48187  
4.874758  
6.287545  
7.660333  
8.053121  
10.44581  
11.8387  
13.23148  
14.62427  
16.01706  
17.40985  
18.80263

Gr=1E6 - Pr=.7 - phi=60

Al=1 - ISO-COURANT

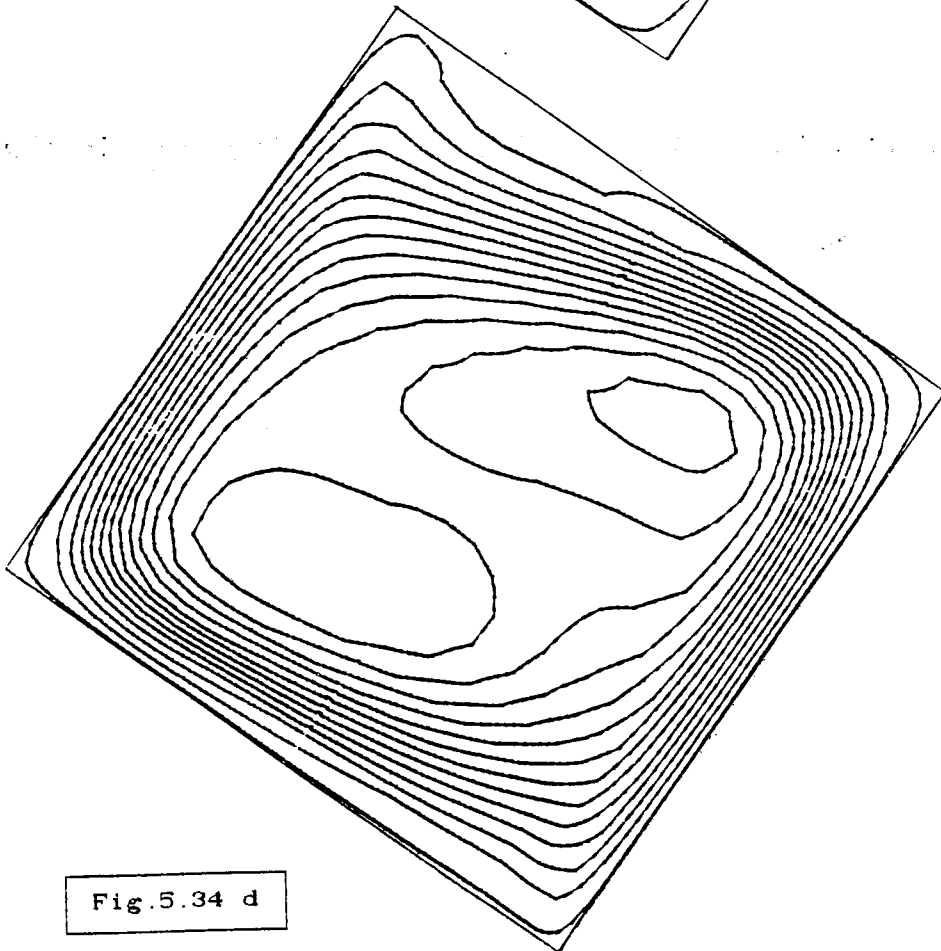
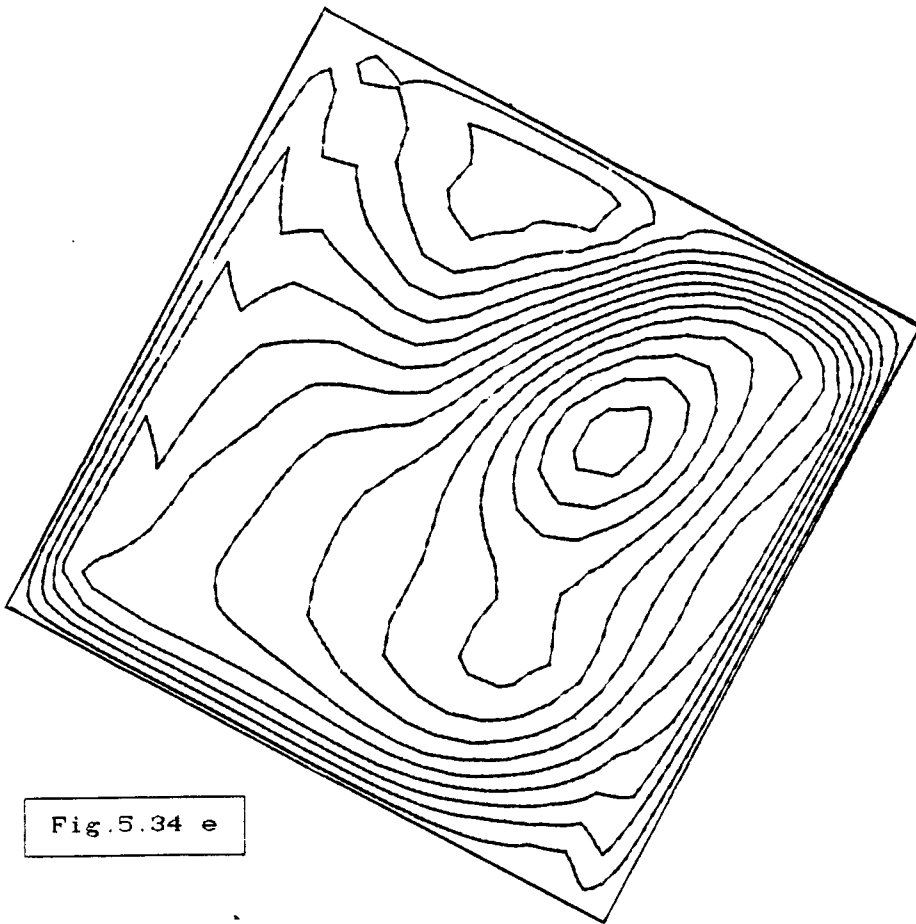


Fig. 5.34 d

.4617715  
3.172874  
5.884178  
8.58538  
11.30658  
14.01778  
18.72888  
19.44019  
22.1514  
24.8626  
27.5738  
30.285  
32.98621  
35.70741

Gr=1E8 - Pr=.7 - phi=60

A1=1 - ISO-COURANT



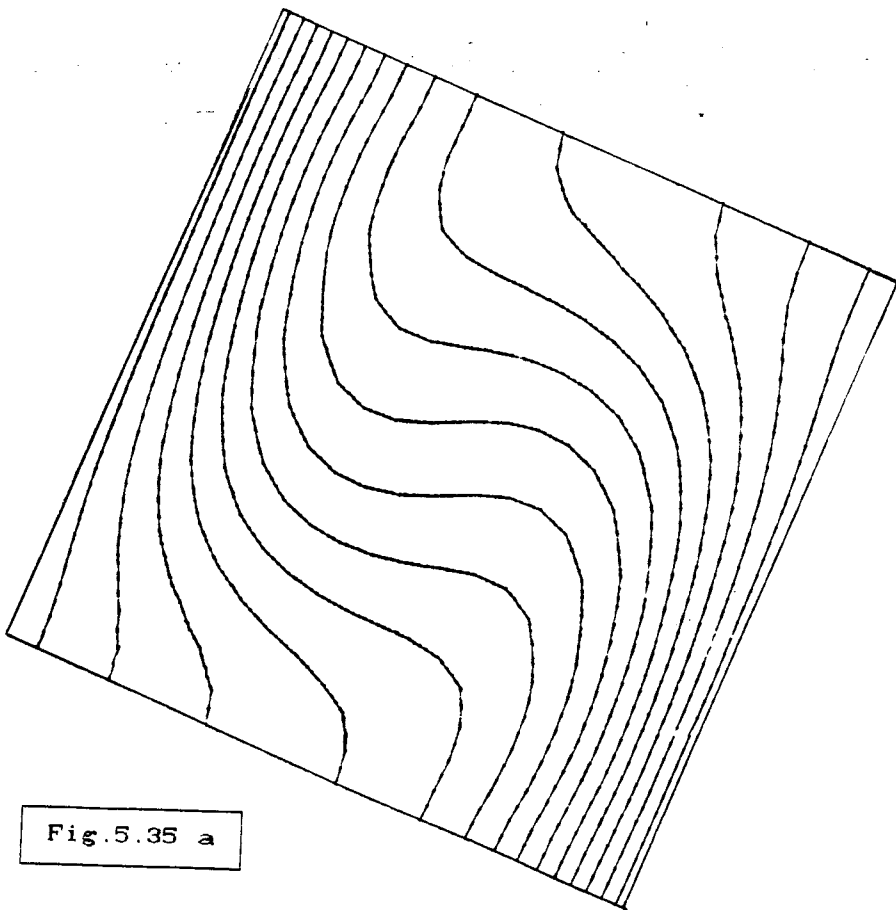
-53.81156  
-15.85607  
21.88843  
59.75482  
87.61042  
135.4659  
173.3214  
211.1769  
249.0324  
286.8879  
324.7434  
362.5889  
400.4544  
438.3089

Fig.5.34 e

Gr=1E4 - Pr=.7 - phi=60

A1=1 - ISOTHERMES

3.571428E-02



.1071428  
.1785714  
.25  
.3214286  
.3928571  
.4642857  
.5357143  
.607143  
.6785714  
.75  
.8214286  
.8928571  
.9642858

Fig.5.35 a

A1-1 - ISOTHERMES  
3.571429E-02

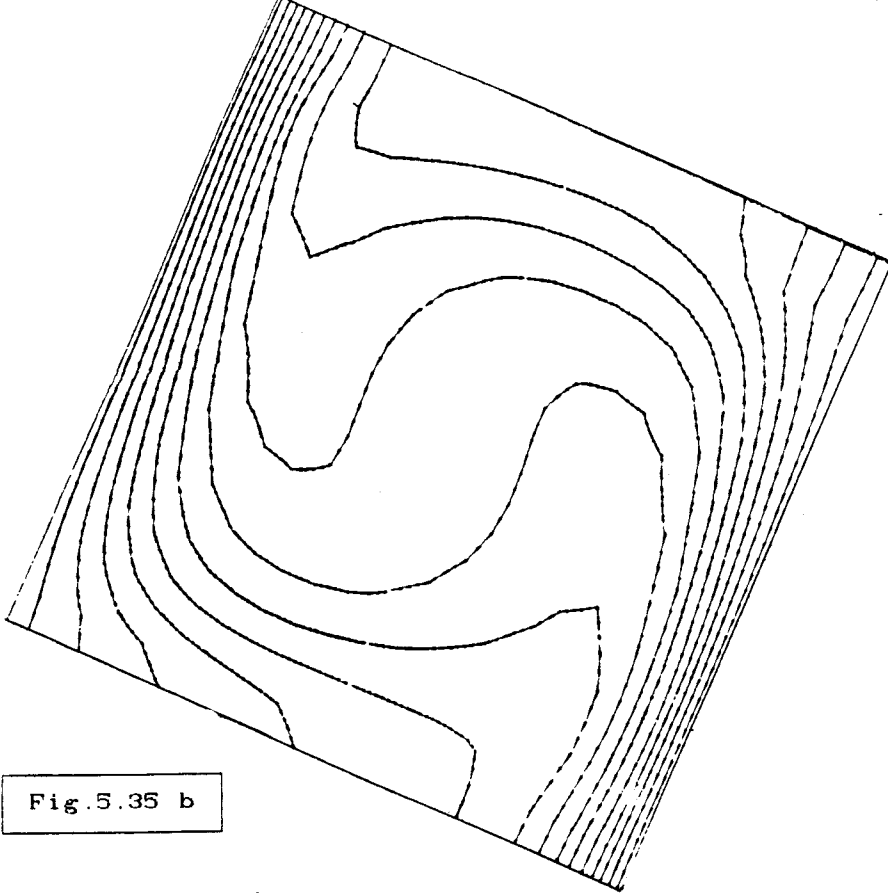


Fig. 5.35 b

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

A1-1 - ISOTHERMES  
3.571429E-02

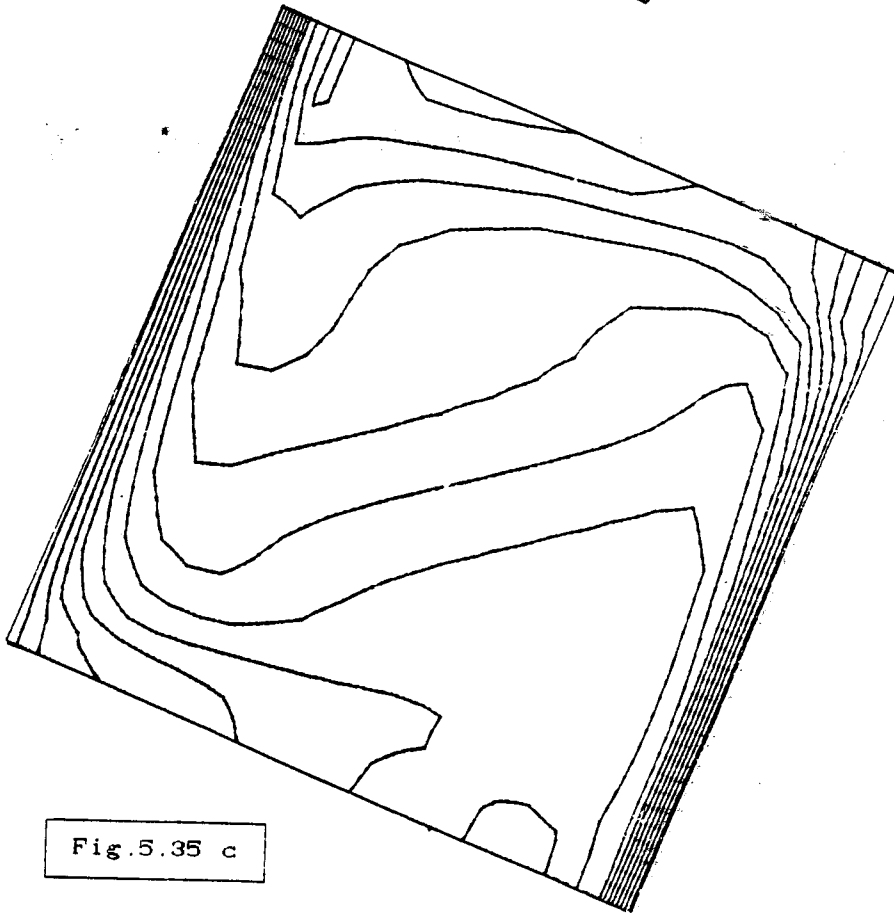


Fig. 5.35 c

- .1071429
- .1785714
- .25
- .3214286
- .3928571
- .4642857
- .5357143
- .607143
- .6785714
- .75
- .8214286
- .8928571
- .9642858

- Des nombres de Pr importants exercent une influence stabilisatrice sur la solution numérique. L'effet sur le résultat final est tout de même assez faible voir aussi De Vahl Davis [ 1 ].

#### - 5.10 Comparaison des deux méthodes de résolution:

- Nous avons résolu d'abord des équations paraboliques et elliptiques linéaires type équation de la conduction par les deux méthodes classiques et A.D.I en bidimensionnel, et en faisant changer notamment le pas d'espace c'est à dire en augmentant la taille des matrices de la même manière pour les deux cas.

- Nous avons essayé par la suite de faire de même pour notre problème, voici quelques uns des enseignements que nous avons pu tirer de cette petite étude comparative qui ne se veut pas systématique et générale:

##### 5.10.1 Schémas obtenus par la méthode classique:

Avantages:

- a- Discrétisation rapide.
- b- Mise en oeuvre rapide.
- c- Se prête à des domaines quelconques.
- d- Le pas peut être variable.

Inconvénients:

- a- Les systèmes implicites deviennent très vite très lourds à mettre en oeuvre, et nécessitent l'inversion de matrices très importantes bien que creuses.
- b- Les conditions aux limites du type Fourier compliquent encore plus les systèmes obtenus.
- d- Les systèmes explicites exigent la connaissance des conditions de stabilité qui sont souvent très compliquées à obtenir de façon rigoureuse et dont l'application est parfois handicapante.

##### 5.10.2 Schémas obtenus par A.D.I:

Avantages:

- a- Les systèmes obtenus sont inconditionnellement stables parceque implicites.
- b- Les matrices obtenues sont tridiagonales et peuvent donc être inversées facilement par l'algorithme de Thomas par exemple.
- c- On peut facilement l'appliquer à tout type de conditions aux limites.
- d- Peut être utilisée pour des pas variables.

Inconvénients:

- a- Se prêtent difficilement aux géométries complexes.
- b- Pour résoudre Les problèmes elliptiques il faut les transformer en problèmes paraboliques.

### 5.10.3 A propos du temps de calcul lorsque $\Delta x$ varie:

Pour les problèmes linéaires:

- Pour de petits systèmes la méthode classique est plus performante, le temps de calcul est nettement plus faible ( de moitié par rapport à celui de la méthode A.D.I ) pour un système d'ordre  $20 \times 20$  Lorsque l'ordre du système augmente l'écart entre les temps de calcul se réduit pour s'inverser en faveur de la méthode A.D.I.

Ainsi donc la méthode A.D.I est plus rapide pour les grands systèmes ce qui est intéressant car les problèmes industriels demandent souvent des systèmes très importants.

Le temps de calcul par la méthode classique devient tout simplement prohibitif pour des systèmes de l'ordre de  $100 \times 100$ .

- Pour notre problème ( non linéaire ):

Les mêmes remarques que nous venons de faire peuvent être faites à propos du problème de la cavité, à la différence que la comparaison dans ce cas là se limite au domaine des  $Ra$  possibles pour la méthode classique et qui comme on le sait n'atteint au plus que  $Ra = 10E+6$ .

- Pour un même  $Ra$  on constate que l'augmentation de  $\Delta x$  joue en faveur du schéma A.D.I comme on vient de le dire ci-dessus.

- Lorsque  $Ra$  augmente et en conservant le même  $\Delta x$  et  $\Delta y$  on constate aussi que le temps de calcul augmente plus vite pour le schéma classique que pour le schéma A.D.I , pour le dépasser de  $5 \times 10^5$ .

- Lorsque  $Ra$  dépasse  $10^6$  la comparaison s'arrête puisque le schéma classique diverge.

- Au delà de  $10^6$  pour le  $Ra$  le schéma décentré est mis en oeuvre et la diminution du pas de temps relative à la diminution des pas d'espace ainsi que l'augmentation du volume de calcul implique une augmentation sensible du temps de calcul.

- Comme nous l'avons montré pour la méthode classique le type de l'écoulement est non seulement fonction de  $Ra$  mais aussi de  $Al$ , de même pour le temps de calcul, il est fonction de  $Ra$  et de  $Al$ .  $Al$  augmentant le pas de temps diminuant.

- Aux environs de  $10^7$  ou  $10^8$  le régime permanent n'est plus atteint et des solutions périodiques et régulières apparaissent au bout d'un temps assez important.

- C'est pour des Ra limites que nous avons constaté les temps de calculs les plus importants ( 3000 s sur microvax et pour un Ra de  $10 \cdot 10^4$  ).

## **5.11 A propos du transfert thermique:**

### **5.11.1 Résultats.**

Il va sans dire qu'une étude de ce type a pour objectif de déterminer l'ampleur du transfert de chaleur dans la couche, et par conséquent de connaître l'évolution du nombre de Nusselt Nu en fonction de Ra, de Pr et de Al.

Nous avons procédé de la manière suivante pour connaître le comportement thermique de la couche.

- Nous avons tracé  $Nu = f ( Ra )$  et Al comme paramètre sur la courbe 5.36.

\* Nous constatons que les courbes obtenues sont des droites parallèles et qu'elles ont une limite inférieure qui correspond à  $Nu = 1$ , c'est à dire la pseudo-conduction.

Cette limite inférieure est fonction de l'allongement et du Ra.

\* Ce qui d'ailleurs nous permet de tracer la courbe 5.40, qui représente une limite entre la conduction et la convection laminaire.\*

Cette limite a été citée par plusieurs auteurs dont Heitz [ 4 ], Eckert et Carlson [1 ], De Vahl Davis [2 ],...

\* Pour pouvoir tracer la frontière entre le régime laminaire et le régime turbulent, nous avons utilisé le fait que des paramètres tels que le nombre de Nusselt oscillent à la transition comme nous l'avons indiqué plus haut voir figure 5.40 représentant ensemble les deux frontières.

### **5.11.2 Etat des connaissances en matière de corrélations:**

De nombreuses corrélations donnant Nusselt ont été proposées. Les résultats obtenus sont divers et font apparaître des points communs en ce qui concerne les coefficients et les exposants des corrélations ( voir résumé au chapitre 2 ).

### **5.11.3 Etablissement d'une corrélation:**

Les résultats de l'exploitation des programmes GRGR, ADP et CLASNAT nous ont permis d'établir une corrélation du type du tableau précédent. Nous avons procédé de la manière suivante:

- Nous avons déterminé la pente moyenne des droites de la figure 5.36 en lissant par la méthode des moindres carrés.

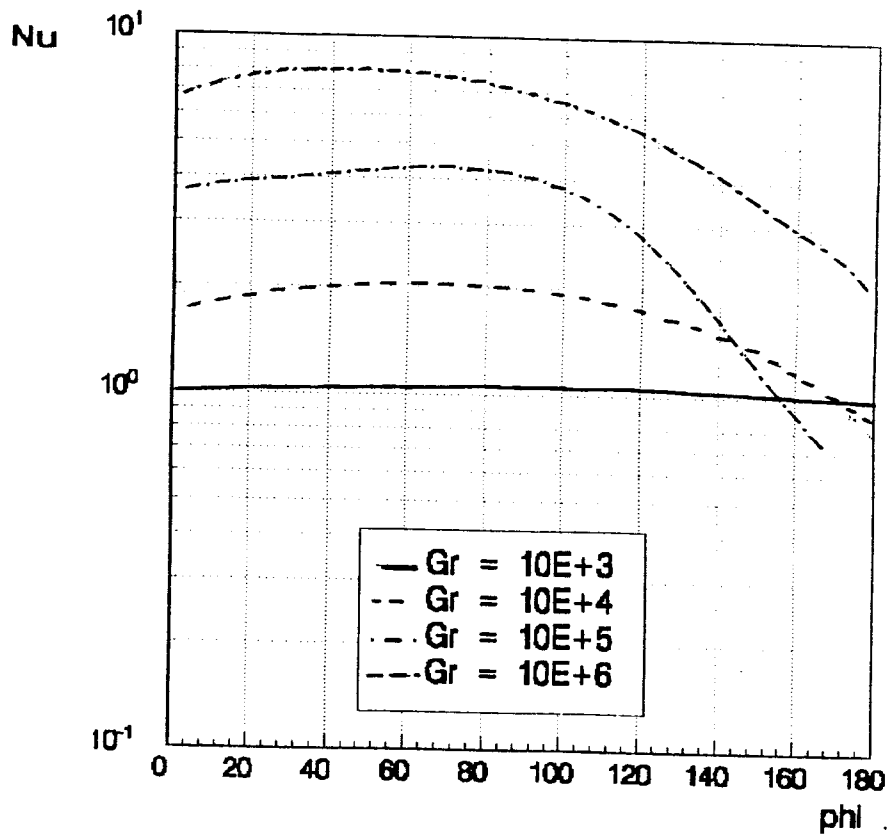


Fig. 5.38

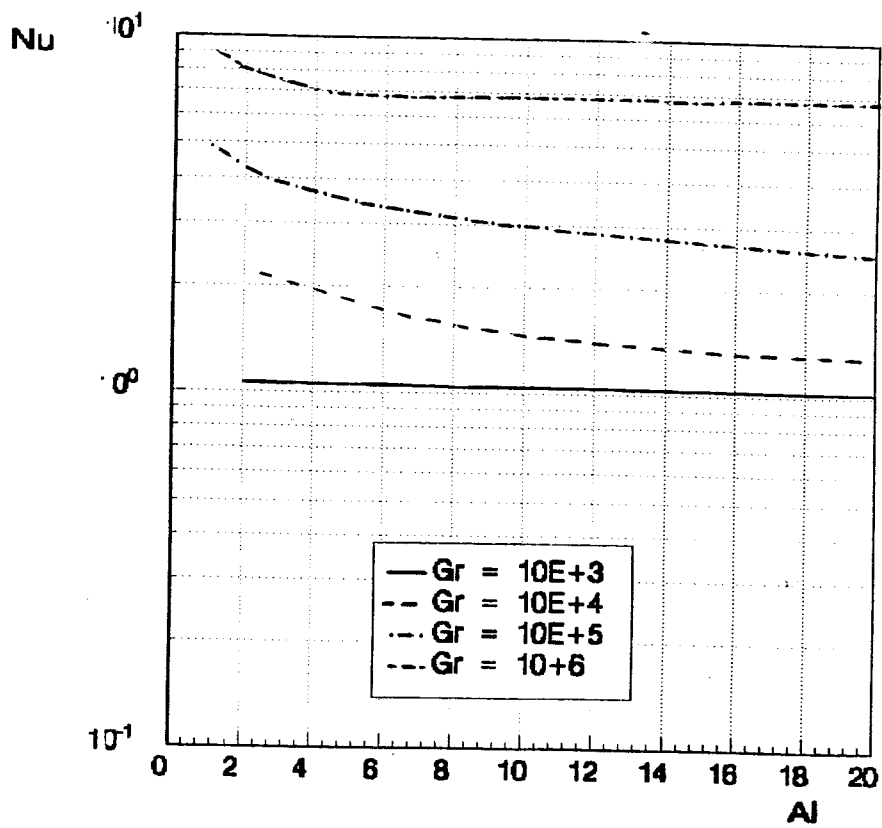


Fig. 5.37

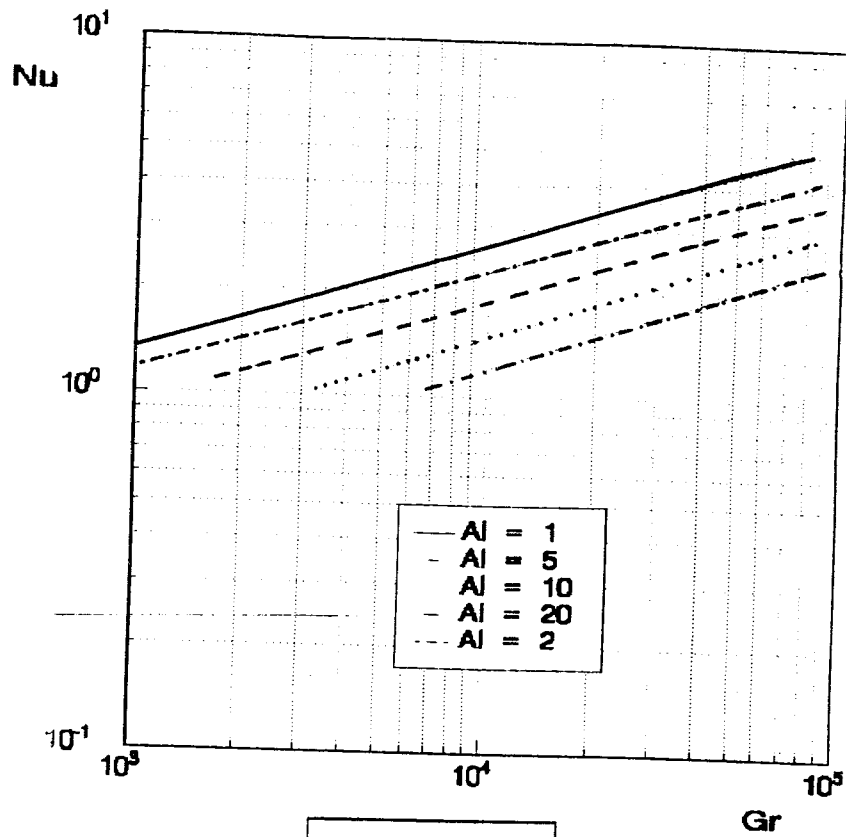


Fig. 5.36

$Nu \cdot Al^{0.21}$

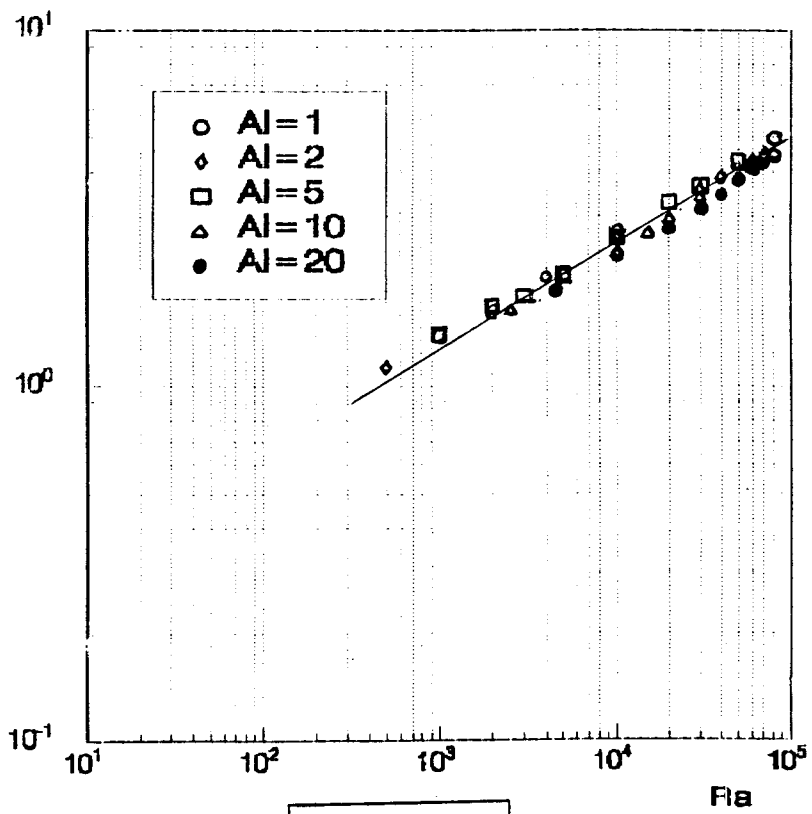


Fig. 5.39

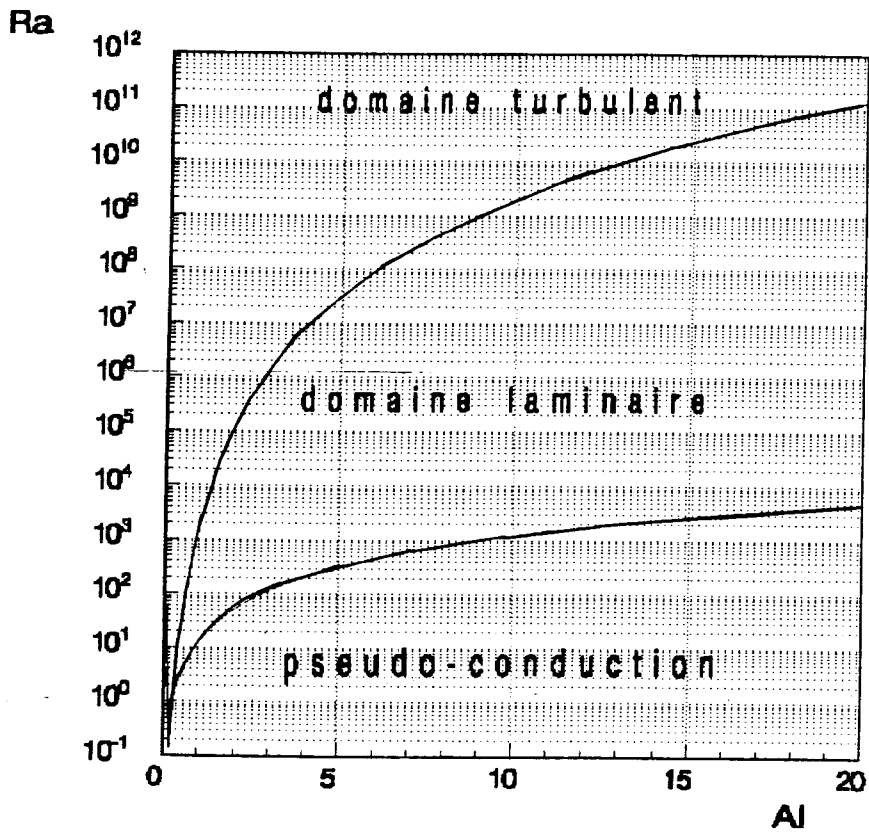


Fig. 5.40

$$\text{Log Nu} = A \text{ log Ra} + \text{Log B} \quad (\text{echelle log-log}).$$

Nous avons obtenus  $A_m = 0.25$ .

- Pour déterminer B nous avons tracé  $B = \frac{\text{Nu}}{\text{Ra}^{A_m}}$  en fonction de Al.

Nous remarquons aussi que l'évolution en est une droite, donc:

$$\text{Log} \frac{\text{Nu}}{\text{Ra}^{A_m}} = C \text{ Log Al} + \text{Log D} \quad (\text{ toujours en echelle log-log}).$$

Par les moindres carrés nous obtenons  $C = 0.21$ .

- Nous obtenons pour D la valeur de 0.26.

- La corrélation finale s'écrit enfin:

$$\text{Nu} = 0.26 \text{ Al}^{-0.21} \text{ Ra}^{1/4}$$

Notons que l'exposant 1/4 est couramment obtenu en convection naturelle laminaire.

Notons aussi que cette relation est valable pour:

$$10 \text{ E } +3 < \text{Ra} < 10 \text{ E } +6$$

et  $1 < \text{Al} < 20$

Le tracé de  $\text{Nu} \cdot \text{Al}^{0.21} = f(\text{Ra})$  permet de donner une nouvelle fois une droite et les points théoriques obtenus se regroupent bien autour de celle-ci surtout en ce qui concerne les valeurs de  $\text{Ra} > 10 \text{ E } +3$  voir figure 5.39.

6

**PARTIE EXPERIMENTALE**

## 6-PARTIE EXPERIMENTALE:

### 6.1 Methodes d'exploration des champs de vitesses:

La mesure des composantes de vitesses à l'intérieur de la cavité peut être faite à partir de nombreux moyens dont voici ceux qui peuvent être les plus adaptés à notre cas:

- Anémométrie à fil ou film chaud
- Anémométrie laser
- chronophotographie

#### 6.1.1 Anémométrie à fil ou film chaud:

- Un anemometre à fil chaud est constitué d'un élément sensible que l'on peut chauffer électriquement et dont la résistance est variable avec la température. Placé dans un écoulement, cet élément est refroidi par convection forcée, sa température et donc sa résistance dépendent de la vitesse et de la température du fluide.

Les éléments sensibles sont soit:

- Des fils chauds en platine, platine rhodié, tungstène,...
- Films chauds très fins de  $0.1\mu\text{m}$  ( en platine ) d'épaisseur sur support en quartz .

La variation de puissance électrique introduite est liée à la fluctuation de la vitesse et aux fluctuations de température.

A cause de cela on distingue les fils chauds fonctionnant à:

- Température constante: on s'intéresse donc ici aux variations de courant.

- Courant constant: on s'intéresse alors aux fluctuations de la résistance.

On relie en fait la vitesse de l'écoulement locale à la puissance perdue par effet joule d'où la nécessité de connaître la loi de refroidissement en convection forcée et même en convection naturelle pour les faibles vitesses ( ce qui est le cas ici ).

C'est un moyen très simple à mettre en œuvre puisqu'il suffit pour explorer le domaine à mesurer de déplacer la sonde sur un chariot à deux ou trois dimensions, on obtient de bons résultats pour un bon étalonnage des sondes.

Les sondes sont relativement peu cher ( qqs 500 à 1000FF la pièce ) et peuvent même être réparables dans certains cas.

Néanmoins l'électronique de mesure et d'acquisition du signal est encombrante et coûte cher.

La mesure du champ de vitesse à l'intérieur de la cavité par anémomètres à fils chauds est très délicate, en effet si la mesure de vitesses relativement importantes de l'ordre du m/s

L'ordre du m/s ne pose aucun problème, il suffit d'étalonner la sonde au moyen d'une soufflerie par exemple en établissant une courbe de vitesses  $V = f(\text{Puissance})$  ou  $V = f(\text{intensité})$ , par contre pour des vitesses faibles comme celles habituellement rencontrées en convection naturelle et qui sont de l'ordre du cm/s, l'étalonnage de la sonde devient pénible dans la mesure où des vitesses de cet ordre sont difficilement obtenues et la moindre perturbation entraîne des vitesses du même ordre (déplacement de l'opérateur, courant d'air ...). Pour ces raisons nous n'avons pas pu mesurer de champ de vitesses.

### 6.1.2 Anémométrie laser:

L'anémométrie laser repose sur la vitesse de particules entraînées par le fluide. Ces particules doivent répondre à des critères :

- De taille (de l'ordre de  $1\mu\text{m}$ ) pour bien suivre l'écoulement.
- Ne pas perturber l'écoulement.
- Être en nombre suffisamment petit pour ne trouver qu'une seule particule à la fois dans le volume de mesure, et en nombre assez grand pour que les mesures soient significatives. Ces particules peuvent se trouver naturellement dans l'écoulement (cas de l'eau ou même de l'air), ou être ensemencées (fumées, sel, cendre, oxyde de titane...).

On distingue trois techniques de vélocimétrie laser:

- La vélocimétrie par interférences, qui consiste à faire traverser aux particules un volume dans lequel sont réalisées des franges d'interférences. L'étude du rayonnement diffusé (ou réfléchi) permet de déduire une composante de sa vitesse.
- La technique du bipoint qui consiste à focaliser deux faisceaux laser en deux points distants de  $D = 400\mu\text{m}$  avec un diamètre de faisceau de  $d = 10\mu\text{m}$  et une longueur de la tache  $l = 1\text{mm}$ . Une particule passant par les deux points de focalisation diffuse deux signaux séparés de  $\Delta t$ , on déduit la vitesse  $V = D/\Delta t$ . L'inconvénient de la méthode est qu'on ne peut obtenir qu'une composante de la vitesse à la fois, l'avantage est qu'elle est adaptée aux grandes vitesses.
- La méthode Doppler consiste à exploiter le changement de fréquence du rayonnement à la suite de la diffusion par une particule de vitesse  $V$ . C'est une méthode très délicate, donc très coûteuse mais elle permet de mesurer une très large bande de vitesses (.001 à 5000m/s).

L'anémométrie laser est donc une méthode d'investigation optique, donc non perturbante, précise et quasiment ponctuelle.

Elle permet de mesurer des vitesses de tout ordre et constitue donc le moyen idéal de mesure du champ de vitesses. malheureusement le prix d'un anémomètre laser est très important de l'ordre de 500000 FF, sans compter les accessoires d'acquisition des données ( une interface et un micro-ordinateur ), un oscilloscope et un compteur de particules, le système de déplacement du laser pour balayer le domaine.

### 6.1.3 Chronophotographie:

- C'est une méthode qui consiste à visualiser sur une même plaque photographique, le déplacement de particules entraînées par le fluide et introduite en quantité calibrée de sorte que le repérage et le suivi des particules soient possibles. Les prises de vues successives sont obtenues par un train d'éclairements d'intervalle de temps  $\Delta t$  connu.

- Cette méthode permet d'obtenir directement dans le plan la trajectoire des particules et comme l'intervalle de temps entre les deux prises étant connu, on peut déterminer le vecteur vitesse en module et en direction:

$$\vec{u} = k \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad k \text{ est un facteur géométrique.}$$

- Cette méthode englobe aussi les technique de strioscopie et d'ombroscopie.

## 6.2 Pour explorer le champ des températures:

### 6.2.1 Présentation du montage expérimental:

La difficulté d'étalonner l'anémomètre à fil chaud pour des vitesses de l'ordre du cm/s ce qui est le cas en convection naturelle et la cherté d'une méthode telle que celle de l'anémométrie laser a réduit notre partie expérimentale.

Nous nous sommes en fait réduit à l'exploration uniquement du champ de température. Les mesures ont été faites sur une cellule d'allongement 5 qui a été réalisée au laboratoire d'énergétique de l'Ecole Centrale de Paris, lors d'un voyage de courte durée.

Remarque: Il est tout de même important que l'ensemble des documents que nous possédons sur le sujet ne fait pas allusion aux mesures de vitesses dans les cellules différentiellement chauffées.

Cette cellule possède les caractéristiques suivantes:

- Largeur = 60mm
- Hauteur = 300mm
- Longueur = 600mm

-Les parois actives sont constituées de deux plaques de cuivre de 10mm d'épaisseur pour bien diffuser la chaleur.  
-Cinq résistances électriques de 660 W accolées sur chacune des parois actives permettent d'atteindre les niveaux désirés de température.

-Les parois passives au nombre de quatre ( 4 ) sont réalisées à l'aide d'un double vitrage, à l'exception de la paroi avant qui doit permettre le déplacement de la potence soutenant le thermocouple qui est faite en bakélite.

-La puissance dans les résistances est réglée grâce à des auto-transformateurs manuellement en fonction de l'uniformité de la température que l'on peut constater sur un galvanomètre.

-La température des parois est contrôlée grâce à trois thermocouples placés sur chacune des deux plaques.

-Le champ thermique est exploré grâce à un thermocouple très sensible que l'on peut déplacer à l'aide d'une potence. La position du thermocouple est estimée à  $\pm 1$ mm à cause du système peu onéreux mis en place.

- Les températures sont mesurées à trois niveaux différents dans la cellule (  $3H/10$  ,  $H/10$  ,  $7H/10$  ).

#### 6.2.2. Résultats obtenus:

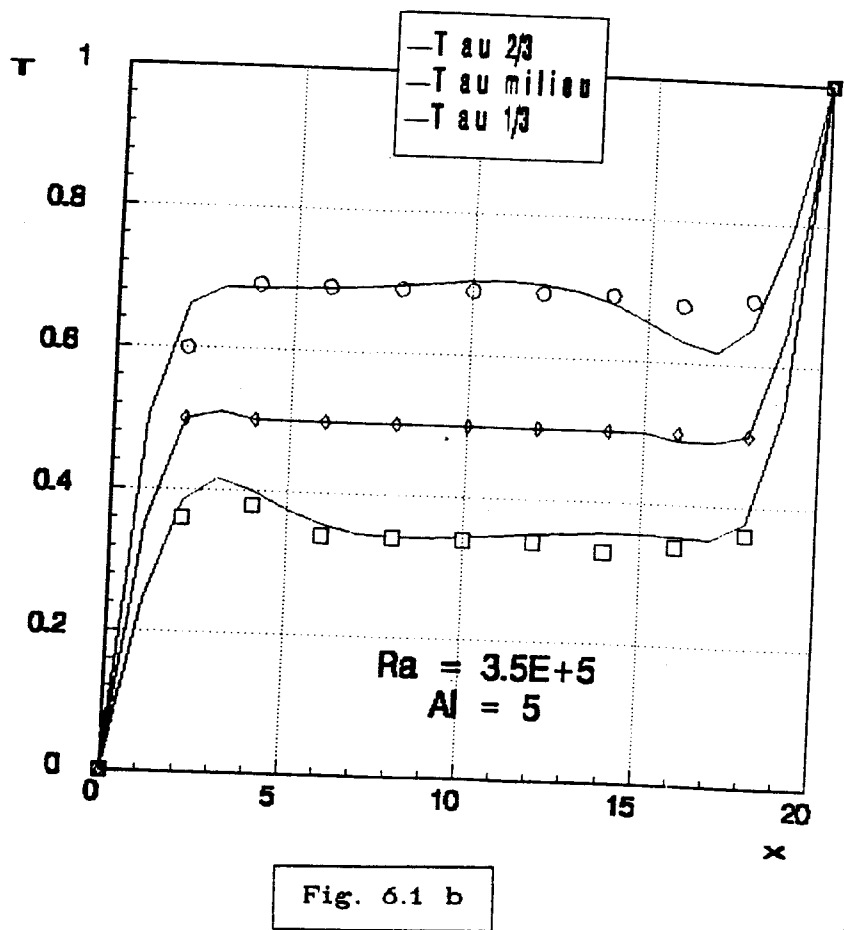
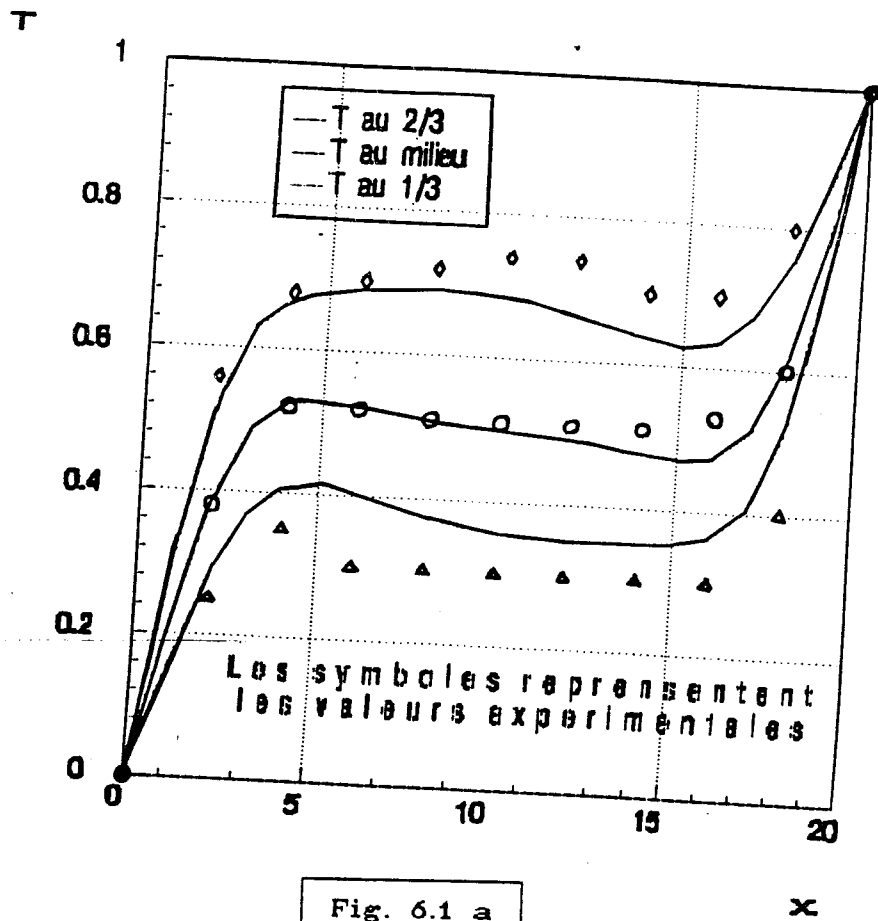
Les figures 6.1 a et b montrent les profils des températures à 3 niveaux de la couche verticale  $H/3$  ,  $H/2$  et  $2H/3$ .

Les symboles représentent les valeurs expérimentales, tandis que les traits continus les résultats théoriques.

De manière générale les résultats expérimentaux coïncident bien avec les résultats théoriques, notamment pour les valeurs du milieu. Les mesures prises au  $1/3$  et au  $2/3$  de la couche montrent une légère différence par rapport à la théorie. Les valeurs expérimentales sont plus importantes en haut et plus faibles en bas de la couche, cette différence est imputable à notre avis à l'influence des conditions de bord ( mauvaise isolation ), influence de la face avant et arrière ainsi que l'influence des infiltrations d'air.

Le chauffage des plaques de cuivre se faisant à l'aide de plusieurs résistances provoque aussi une dissymétrie dans la répartition des températures sur chaque plaque difficilement contrôlable, ce qui peut aussi expliquer ces différences de températures.

Les différents résultats nous permettent de retrouver la transition et le régime à couches limites séparées que l'on a cité lors de l'exploitation des résultats des deux méthodes, mais le régime de pseudo-conduction n'a pas été obtenu à cause du fait que la largeur de la cellule ( 0.06m ) implique que pour avoir un  $Ra = 1000$ , il fallait pouvoir imposer un écart de températures  $\Delta T < 0.1^\circ C$  ce qui n'est pas possible pratiquement.



7

**CONCLUSION**

## 7. CONCLUSION GENERALE :

### 7.1 Concernant la partie modélisation:

\* Nous avons pu mettre en oeuvre un modèle aux différences qui est donc celui des A.D.I alliés aux méthodes hermitiennes qui s'avère très peu coûteux comparé à des méthodes du type spectral ou éléments finis, il est facilement adaptable à d'autres problèmes de transport de chaleur de quantité de mouvement ou de masse moyennant quelques modifications très simples relatives aux conditions aux limites.

\* Ce modèle qui nous a permis d'atteindre des niveaux de Ra inespérés mériterait d'être étendu à d'autres types de problèmes tels écoulements autour d'obstacles, grilles d'aubes de turbomachines, écoulements en conduits fermés, avec ou sans transport pour des nombres de Reynolds peut être plus élevés que ceux classiquement obtenus.

Rappelons que très peu de résultats proposent des  $Ra = 10E +12$ .

### 7.2 concernant la partie thermique:

\* L'analyse des résultats nous a permis de mettre au point une corrélation du type  $Nu = f ( Ra )$  valable pour des Ra compris entre  $10 E +3$  et  $10 E +6$  et des Al allant de 1 à 20. La comparaison que nous avons faite avec celles obtenues par d'autres auteurs montre des similitudes notamment en ce qui concerne la puissance du nombre de Ra qui est de  $1/4$  et qui caractérise les écoulements naturels laminaires.

\* Il reste de même beaucoup de travail à faire pour pouvoir évaluer le transfert de chaleur au delà de  $10 E+6$  et pour des Al et des Pr importants, des  $Al < 1$  et des  $\phi$  différents de  $90^\circ$ , en exploitant justement les résultats donnés par GRGR.

### 7.3 concernant la partie expérimentale:

\* Cette partie devrait constituer un argument décisif quand à la validation des résultats obtenues par le modèle numérique.

Les mesures faites dans la couche d'allongement 5 sont insuffisantes pour pouvoir se prononcer définitivement sur la validité du modèle, il serait intéressant de vérifier en plus du champs de températures, le champs de vitesses surtout pour les valeurs limites c'est à dire la transition à l'instantanéité et par conséquent à la turbulence.

La comparaison pour les faibles valeurs de Ra avec des résultats expérimentaux ( et théoriques ) d'autres auteurs ne pose aucun doute quant à la validité du modèle.

Il existe par ailleurs très peu de documents donnant des résultats expérimentaux pour les forts nombres de Ra.

En outre l'arsenal expérimental permettant de faire des mesures de vitesses dans la couche est tellement onéreux qu'il est hors de portée de notre Institut (je pense évidemment à l'anémomètre Laser ).

Néanmoins les quelques mesures du champs de températures validants les résultats théoriques correspondants permet d'espérer à la validité de la partie grands Ra de notre modèle.

**ANNEXES**

## RELATIONS DISCRETES

Les relations discrètes pour les différentes dérivées utilisées dans ce document sont obtenues en partant des développements en séries de Taylor aux voisinages des points considérés qu'on écrit comme suit:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \left. \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} \right\}_{i,j} + \left. \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\}_{i,j} + \left. \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right\}_{i,j} + \dots O(\Delta x^n)$$

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \left. \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} \right\}_{i,j} + \left. \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\}_{i,j} - \left. \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right\}_{i,j} + \dots O(\Delta x^n)$$

Du premier développement on tire la dérivée première décentrée à droite:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad \begin{array}{l} \text{précise à l'ordre } O(\Delta x) \\ i, j \text{ sont les indices d'espace.} \end{array}$$

Du second développement on tire la dérivée première décentrée à gauche:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{précise à l'ordre } O(\Delta x)$$

La différence entre les deux développements nous permet d'obtenir l'expression centrée de la dérivée première:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \text{précise à l'ordre } O(\Delta x)^2$$

Pour obtenir l'expression de la dérivée première par rapport au temps il suffit de changer dans le premier développement  $\Delta x$  en  $\Delta t$  et l'on obtient:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \begin{array}{l} \text{précision de l'ordre } O(\Delta t) \\ n \text{ est l'indice de temps} \end{array}$$

La relation discrète pour la dérivée seconde est obtenue en faisant la somme des deux développements, ce qui donne:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\}_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

TRANSFORMATIONS POUR OBTENIR LA FORMULATION  $\psi - \chi$ 

Les équations qui régissent l'écoulement et le transfert de chaleur s'écrivent comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - g\beta (T - T_1) \cos \varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + g\beta (T - T_1) \sin \varphi$$

Dérivons la première équation par rapport à  $y$  et la seconde équation par rapport à  $x$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \nabla^2 u \right) \\ &- g\beta \frac{\partial}{\partial y} (T - T_1) \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \nabla^2 v \right) \\ &- g\beta \frac{\partial}{\partial x} (T - T_1) \sin \varphi \end{aligned}$$

La différence entre ces deux équations nous permet d'éliminer le terme contenant les pressions. On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \nabla^2 u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \nabla^2 v \right) - \frac{\partial}{\partial y} (T - T_1) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial x} (T - T_1) \sin \varphi \end{aligned}$$

Sachant que  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  et que  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Le premier terme du premier membre de l'équation devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Le second terme du premier membre de l'équation devient:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

Le premier terme du second membre de l'équation devient:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \nabla^2 u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \nabla^2 v \right) = - \nu \nabla^2 \omega$$

Le dernier terme restant inchangé, on obtient finalement

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega + g\beta \frac{\partial(T-T_1)}{\partial y} \cos \varphi + g\beta \frac{\partial(T-T_1)}{\partial x} \sin \varphi$$

L'équation d'énergie reste inchangée:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T$$

ANNEXE 3:

ADIMENSIONNEMENT DES EQUATIONS.

On peut adimensionner les équations phénoménologiques en adoptant plusieurs références notamment celles inhérentes à l'adimensionnement des termes dépendants du temps, dans ce mémoire nous avons adopté ce qui suit:

Longueur de référence:  $l$  ou  $H$  de la cellule.

Temps de référence :  $\nu/l^2$

Température de référence:  $T_1$  et  $T_2$  des parois.

Les différents termes qui sont rencontrés dans les équations phénoménologiques deviennent:

$$X^+ = \frac{X}{l}, \quad Y^+ = \frac{Y}{l}, \quad \psi^+ = \frac{\psi}{\nu}, \quad \omega^+ = \frac{\omega l^2}{\nu}, \quad \theta^+ = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$u^+ = \frac{ul}{\nu}$$

L'allongement  $Al = \frac{H}{l}$ .

- L'équation de poisson:

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad \text{devient} \quad \frac{\nabla^2 (\nu \psi^+)}{l^2} + \frac{\omega^+ \nu}{l^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi^+ + \omega^+ = 0$$

- L'équation du transport des tourbillons:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega + g\beta \frac{\partial(T-T_1)}{\partial x} \sin \varphi + g\beta \frac{\partial(T-T_1)}{\partial y} \cos \varphi$$

- L'équation de la chaleur pour un fluide:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T$$

En remplaçant chacune des grandeurs par son expression contenant le terme adimensionné on obtient pour:

Le terme dépendant du temps s'écrit:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{l^2} \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+}$$

Les termes de convection s'écrivent:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\nu u^+ \nu}{l^2} \frac{\partial \omega^+}{\partial x^+} + \frac{\nu u^+ \nu}{l^2} \frac{\partial \omega^+}{\partial y^+}$$

Le terme de diffusion s'écrit comme suit:

$$\nu \nabla^2 \omega = \frac{\nu^2}{l^2} \frac{1}{l^2} \nabla^2 \omega^+$$

Le terme générateur du mouvement s'écrit :

$$g\beta \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{g\beta\delta\theta}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

En divisant chacun des termes par  $\frac{\nu^2}{l^4}$  on obtient l'équation du transport des tourbillons, qui s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t} + u^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial x} + v^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial y} = \nabla^2 \omega^+ + Gr \left[ \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \sin\varphi + \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \cos\varphi \right]$$

Gr est le nombre de Grashoff, et il caractérise l'écoulement en convection naturelle, il s'écrit:

$$Gr = \frac{g \beta \delta \theta l^3}{\nu^2}$$

De même pour l'équation de la chaleur qui s'écrit toutes transformations faites:

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t} + u^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial x} + v^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial y} = \nabla^2 \theta^+ \frac{1}{Pr}$$

On omettra par la suite les + pour alléger l'écriture.

Les conditions aux limites sont elles aussi adimensionnées:

-Conditions mécaniques:

Conditions d'adhérences:

Fonction de courant:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \\ y = 0 \text{ et } y = Al \forall x \end{array} \right\} \text{ on a } \psi = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Fonction Tourbillon:

$$x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$y = 0 \text{ et } y = Al \forall x \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Conditions thermiques:

$$x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \text{ on a } \theta = 0 \text{ et } \theta = 1$$

$$y = 0 \text{ et } y = Al \forall x \text{ on a } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

ANNEXE 4:

DISCRETISATION DES E.D.P ET DES  
CONDITIONS AUX LIMITES.

A1 Discrétisation des équation phénoménologiques:

A.1.1 Equation de Poisson:

$$\psi_{i,j} = \frac{A^2 \Delta x^2}{2(1+A^2)} \left[ \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} + \frac{1}{A^2} \left( \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} \right) + \Delta x^2 \omega_{i,j} \right]$$

A.1.2 L'équation aux tourbillons :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} = & \frac{A^2 \Delta x^2}{2(1+A^2)} \left[ \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2} Gr \sin \varphi \Delta x + \frac{\theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j}}{2} Gr \cos \varphi \Delta x \right. \\ & + \left. \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{4A} \right) \left( \omega_{i-1,j} - \omega_{i+1,j} \right) - \left( \frac{\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j}}{4A} \right) \left( \omega_{i,j-1} - \omega_{i,j+1} \right) \right. \\ & \left. + \left( \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} \right) + \left( \frac{\omega_{i-1,j} - \omega_{i+1,j}}{A^2} \right) \right] \end{aligned}$$

A.1.3 L'équation de la chaleur:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} = & \left[ Pr \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{4A} \right) \left( \theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j} \right) - Pr \left( \frac{\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j}}{4A} \right) \right. \\ & \left. \left( \theta_{i,j-1} - \theta_{i,j+1} \right) + \left( \frac{\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}}{4A} \right) + \left( \frac{\theta_{i-1,j} - \theta_{i+1,j}}{A^2} \right) \right] \end{aligned}$$

R1 R2 et R3 constituent les différences entre les termes de droite et de gauche respectivement pour chacune des équations précédentes.

A.1.4 Discrétisation des C.L:

Conditions mécaniques:

Fonction de courant:

$$\psi_{i,0} = \psi_{i,n} = \psi_{0,j} = \psi_{n,j} = 0$$

Fonction Tourbillon:

Les conditions sur le tourbillon peuvent être discrétisées de plusieurs façons en voici deux, dans ce qui suit:

$$x = 0 \text{ et } x = 1 \forall y \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$y = 0 \text{ et } y = A1 \forall x \text{ on a } \omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Ecrivons le développement en série de Taylor de la fonction de courant au voisinage de la paroi au noeuds 1 et 2:

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,0} + \left. \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,0} + \left. \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,0} + \left. \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{i,0} + \dots O(\Delta x^n)$$

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,0} + \left. \frac{(2\Delta x)}{1!} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,0} + \left. \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,0} + \left. \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{i,0} + \dots O(\Delta x^n)$$

En éliminant la dérivée 3ème entre ces deux développements on obtient une expression discrète de la dérivée seconde:

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,0} = \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2\Delta y^2} \text{ donc } \omega_{i,0} = - \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2\Delta y^2}$$

On obtient des conditions analogues pour les autres parois.

Remarque:

Pour le schéma obtenu par la méthode A.D.I nous proposons une deuxième manière de présenter la condition sur les tourbillons, elle consiste à utiliser le développement de  $\psi$  au voisinage des parois, en effet on obtient:

$$\omega_{i,1} + 2 \omega_{i,0} = - \frac{6\psi_{i,1}}{\Delta x^2}$$

En remplaçant la dérivée seconde par  $-\omega$  et en discrétisant la 3ème dérivée.

Conditions thermiques:

conditions d'isolation:

On procède comme pour la condition sur le tourbillon en écrivant un développement pour la température au voisinage des parois isolées:

$$\theta_{i,1} = \theta_{i,0} + \left. \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{i,0} + \left. \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right|_{i,0} + \left. \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} \right|_{i,0} + \dots O(\Delta x^n)$$

$$\theta_{i,z} = \theta_{i,0} + \frac{(2\Delta x) \frac{\partial \theta}{\partial y}}{1!} \Big|_{i,0} + \frac{(2\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}}{2!} \Big|_{i,0} + \frac{(2\Delta x)^3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3}}{3!} \Big|_{i,0} + \dots O(\Delta x^n)$$

On élimine alors la dérivée seconde entre ces deux expressions pour obtenir:

$$\theta_{0,j} = \frac{4\theta_{1,j} - \theta_{2,j}}{3} \quad \text{et} \quad \theta_{n,j} = \frac{4\theta_{n-1,j} - \theta_{n-2,j}}{3}$$

Notons que pour la méthode A.D.I ces conditions peuvent être aussi utilisées telles qu'elles c'est à dire sous la forme:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{i,0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{i,n} = 0 \Rightarrow \theta_{i,1} = \theta_{i,-1} \quad \text{et} \quad \theta_{i,n-1} = \theta_{i,n+1}$$

On élimine les valeurs fictives entre l'équation de la chaleur prise en 0 et en n et on obtient une équation pour chaque noeud limite:

$$\left( D z_{i,0} + G z_{i,0} \right) \theta_{i,1}^{n+1} + C z_{i,0} \theta_{i,0}^{n+1} = V_{i,j}$$

avec

$$V_{i,0} = D D z_{i,0} \theta_{i,0}^{n+1/2} + C C z_{i,0} \theta_{i,0}^{n+1/2} + G G z_{i,0} \theta_{i,-1,0}^{n+1/2}$$

Equation du noeud 0 par exemple:

ANNEXE 5:

Expressions des C D et G après décentrement

Les équations paraboliques de Navier-Stokes et de la chaleur ont été discrétisées page 13, nous avons obtenu ce qui suit:

$$\left. \begin{aligned} D_{1 \ i,j} f_{i+1,j}^{n+1/2} + C_{1 \ i,j} f_{i,j}^{n+1/2} + G_{1 \ i,j} f_{i-1,j}^{n+1/2} &= H_{i,j} + K_{i,j} \\ D_{2 \ i,j} f_{i,j+1}^{n+1} + C_{2 \ i,j} f_{i,j}^{n+1} + G_{2 \ i,j} f_{i,j-1}^{n+1} &= V_{i,j} + K_{i,j} \end{aligned} \right\}$$

Après décentrement nous obtenons des coefficients variables selon les  $u_{i+1/2,j}$  et  $u_{i-1/2,j}$  pour la direction des  $i$ . Nous explicitons dans ce qui suit chacun des termes:

si  $\begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i-1/2,j} > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_{1 \ i,j} &= u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \\ C_{1 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta x^2} \\ G_{1 \ i,j} &= -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \ i,j} &= v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \\ C_{2 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta y^2} \\ G_{2 \ i,j} &= -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \end{aligned}$$

si  $\begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i-1/2,j} \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_{1 \ i,j} &= u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \\ C_{1 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta x^2} \\ G_{1 \ i,j} &= -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \ i,j} &= v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \\ C_{2 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta y^2} \\ G_{2 \ i,j} &= -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \end{aligned}$$

si  $\begin{cases} u_{i+1/2,j} \leq 0 \\ u_{i-1/2,j} > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_{1 \ i,j} &= u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \\ C_{1 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta x^2} \\ G_{1 \ i,j} &= -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \ i,j} &= v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \\ C_{2 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta y^2} \\ G_{2 \ i,j} &= -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \end{aligned}$$

si  $\begin{cases} u_{i+1/2,j} < 0 \\ u_{i-1/2,j} \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_{1 \ i,j} &= u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \\ C_{1 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta x^2} \\ G_{1 \ i,j} &= -u_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{R \Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \ i,j} &= v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \\ C_{2 \ i,j} &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{R \Delta y^2} \\ G_{2 \ i,j} &= -v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} - \frac{1}{R \Delta y^2} \end{aligned}$$

On remplacera:

- Pour l'équation du transport des tourbillons:

-  $f$  par  $\omega$

$$- K_{i,j} \text{ par } \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{i,j} \sin(\varphi) + \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{i,j} \cos(\varphi)$$

-  $R$  par 1

- Pour l'équation de la chaleur:

-  $f$  par  $\theta$

-  $K_{i,j}$  par 1

-  $R$  par  $Pr$

ANNEXE 6:

Relations hermitiennes compactes

Les développements de Taylor au voisinage d'un noeud  $i$  permettent de donner les expressions discrètes des dérivées premières et secondes voir en annexe 1.

Les dérivées premières:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

schéma centré  
ordre 2

schéma décentré  
ordre 1

schéma décentré  
ordre 1

Les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2}$$

précision d'ordre 2

Dans le but de conserver des discrétisations sur trois points consécutifs seulement, on cherche à déterminer des combinaisons linéaires reliant les valeurs de la fonction et de ses dérivées premières et secondes en trois noeuds consécutifs:

L'expression de la dérivée seconde appliquée à la dérivée quatrième permet d'écrire ce qui suit:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = f_i^{(4)} = \frac{f_{i+1}^{(2)} - 2f_i^{(2)} + f_{i-1}^{(2)}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f_i^{(6)} + O(\Delta x^6)$$

En reportant cette approximation dans l'expression de la dérivée seconde, on obtient:

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{12} \left[ f_{i+1}^{(2)} + 10f_i^{(2)} + f_{i-1}^{(2)} \right] - \frac{\Delta x^4}{240} f_i^{(6)} + O(\Delta x^6)$$

On obtient de la même façon une relation hermitienne pour les dérivées premières.

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{6} \left[ f_{i+1}^{(1)} + 10f_i^{(1)} + f_{i-1}^{(1)} \right] - \frac{\Delta x^4}{180} f_i^{(5)} + O(\Delta x^6)$$

L'avantage de ces deux relations est qu'elles permettent d'obtenir des systèmes tridiagonaux, ce qui est très intéressant pour des raisons évidentes de simplicité de résolution et même de temps de calcul.

ANNEXE 7:

ALGORITHME DE THOMAS:

Soit à résoudre le système  $[A](x) = (f)$  avec  $[A]$  matrice tridiagonale.

$$[A] = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & d_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & b_3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_i & d_i & b_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix}$$

On va factoriser  $[A]$  sous forme  $A = [L][U]$  où  $U$  est la matrice triangulaire supérieure avec des "1" sur la diagonale principale, et  $L$  est la matrice triangulaire inférieure.

matrice L		matrice U
$\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \delta_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \delta_3 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_i & \delta_i & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n-1} & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_n & \delta_n \end{bmatrix}$	;	$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \beta_3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \beta_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \beta_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En identifiant  $[A]$  et le produit  $[L][U]$  on obtient:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= d_1 \\ \delta_1 \beta_1 &= b_1 \Rightarrow \beta_1 = b_1 / \delta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_i \\ \alpha_i \beta_{i-1} + \delta_i &= d_i \Rightarrow \delta_i = d_i - \alpha_i \beta_{i-1} \text{ avec } \beta_{i-1} \text{ connu au pas précédent.} \\ \delta_i \beta_i &= b_i \Rightarrow \beta_i = b_i / \delta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= a_n \\ \alpha_n \beta_{n-1} + \delta_n &= d_n \Rightarrow \delta_n = d_n - \alpha_n \beta_{n-1} \text{ avec } \beta_{n-1} \text{ connu au pas précédent.} \end{aligned}$$

La résolution de  $[A](x) = (f)$  se décompose alors en deux étapes:

1- Résolution de  $[L](y) = (f)$

$$y_1 = f_1/\delta_1 \quad \text{pour } i = 1$$

$$\text{et pour } i = 2 \text{ jusqu'à } n \text{ on a: } y_i = \frac{(f_i - \alpha_i y_{i-1})}{\delta_i}$$

2- Résolution de  $[U](x) = (y)$

$$x_n = y_n \quad \text{pour } i = n$$

$$\text{et pour } i = n-1 \text{ jusqu'à } 1 \text{ par pas de } -1 \text{ on a : } x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}.$$

C'est cet algorithme qui est utilisé pour la résolution des systèmes obtenus par la méthode des directions alternées.

## ANNEXE 8:

### QUELQUES ERREURS INTRODUITES PAR LES METHODE AUX DIFFERENCES.

Soient:

$u_t^n$  : la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles.

$U_t^n$  : la solution exacte du schéma aux différences.

$f_t^n$  : la solution numérique du schéma aux différences.

#### ERREUR DE CONSISTANCE:

Elle représente l'erreur de troncature due au choix du schéma:

Soit  $E$  la différence entre la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles et la solution exacte du schéma aux différences, on dit que le schéma est consistant si:

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|E\| = 0$$

On conclut que la consistance d'un schéma représente la précision de celui-ci, c'est à dire l'ordre global d'erreur.

Par exemple une dérivée première centrée est plus consistante qu'une dérivée première décentrée.

On montre que c'est le schéma semi-implicite de Crank-Nicolson qui introduit l'erreur de troncature la plus réduite.

#### ERREUR DE STABILITE:

Elle correspond à l'erreur d'arrondi introduite par l'ordinateur. Le schéma est instable lorsque l'effet cumulatif devient important.

L'étude de la stabilité est compliquée. Les schémas implicites ou semi-implicites sont le plus souvent adoptés parce que inconditionnellement stables.

on la note comme suit:  $S = U_t^n - f_t^n$

#### ERREUR DE CONVERGENCE:

Elle correspond à l'erreur de discretisation, l'étude de la convergence est plus compliquée que celle de la stabilité, néanmoins la stabilité constitue une condition nécessaire à la convergence du processus.

Elle s'exprime comme suit:  $C_t^n = u_t^n - U_t^n$

On dit alors qu'un schéma est convergent si  $\lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \\ \Delta t \rightarrow 0}} C_t^n = 0$

### EXEMPLE SIMPLE D'ETUDE DE LA STABILITE:

Soit le cas de l'équation de la chaleur en monodimensionnel, le schéma explicite s'écrit comme suit:

$$\frac{T_l^{n+1} - T_l^n}{\Delta t} = a \left[ \frac{T_{l+1}^n - 2T_l^n + T_{l-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

Introduisons une perturbation harmonique de longueur d'onde  $2\pi/k$  dans ce schéma:

$$T_l^{n+1} = t^n \exp(ijk\Delta x) \quad \text{avec } j^2 = -1 \text{ et } k \text{ un nombre tel que}$$

et calculons le facteur A tel que:

$$A = \frac{T_l^{n+1}}{T_l^n}$$

A est le facteur d'amplification de l'erreur. Si  $|A| = 1$  il n'y aura pas de stabilité.

Il faut donc pour qu'il y ait stabilité que:  $-1 < A < +1$

Cette condition s'appelle critère de stabilité de Von Neumann.

Dans l'exemple qui nous concerne et après simplifications, nous obtenons  $A = 2NF (\cos(k\Delta x) - 1) + 1$ .

La condition  $|A| \leq 1$  devient donc:

$|2NF (\cos(k\Delta x) - 1) + 1| \leq 1$  le cas le plus défavorable est obtenu lorsque  $\cos(k\Delta x) = 0 \Rightarrow NF \leq 1/2$ .

Donc pour l'équation de la chaleur et pour les noeuds intérieurs il faut donc choisir  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tel que NF soit inférieur à 1/2. ( $NF = a\Delta t/\Delta x^2$ ).

Le même raisonnement peut être suivi pour un schéma implicite cela donnerait pour A l'expression suivante:

$$A = \frac{1}{A = 2NF (\cos(k\Delta x) - 1)}$$

puisque  $|A|$  doit être inférieur ou égal à 1 alors le schéma implicite est inconditionnellement stable étant donné que l'expression ci-dessus satisfait toujours au critère de stabilité.

Remarque: Le calcul de A n'est possible analytiquement que si l'équation considérée est linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

- 1- E.R.G Eckert et W.O.Carlson ( 1961 ) " Natural convection between two parallel plates with different temperatures." Int. Jou. Heat Mass transf. 2, pp. 106-120.
- 2- Laminar natural convection in an enclosed cavity. G. De Vahl Davis. Int. Journal of heat and mass transfer. Vol. 11 pp. 1675-1693. Pergamon press 1968.
- 3- De Vahl Davis, Mac Gregor et Emery ( 1969 ) "Free convection through vertical plane layers. Moderate and high Prandtl number fluids" Jou. Heat Trans. 91, series C,3. pp.391-403.
- 4- Heitz et Westwater Journal of Heat Transfer mai 1971.
- 5- J.T. Han Journal of Heat Transfer.
- 6- W.J. Elder ( 1965 )" Laminar free convection in a vertical slot." Jou. Fluid mechanic 23, pp. 78-98.
- 7- Rubel and Landis ( 1970 ) "Laminar natural convection in a rectangular enclosure with moderately large temperature difference in heat transfer " NC2.10 pp. 1-11 VDI, Dusseldorf.
- 8- J.A. Mynett et Duxbury ( 1974 ) " Temperature distribution within enclosed plane air cells associated with heat transfer by natural convection." proceeding of 5th int. heat trans. conf. Tokyo NC3.8, pp. 119-123.
- 9- Gd Mallinson and G.De Vahl Davis ( 1977 ) " Three dimensionnal natural convection in a box . A numerical study". Jour. of Fluid Mechanics 83, pp.1-31.
- 10- Modélisation anisotherme du chauffage des locaux par planchers chauffants. Revue générale de thermique N°358 oct.91. C. Inard, N. Molle, Simoneau. pp.608-613.
- 11- Etude de la convection naturelle sur une face verticale parallélépipédique à nombre de Rayleigh élevé, influence des conditions thermiques des 3 autres parois. Abdel Hédi Beghidja. Université de Poitier 1990.
- 12- The Ra-Pr domain of laminar natural convection in an enclosure heated from the side . J.L.Lange and A. Bejan . Num. Heat Transfer Part A. Volume 19- pp. 21-4, 1991.
- 13- Prédictiones numériques des écoulements isothermes et convectifs en milieux confinés. Mohamed Jomaà Safi. Colloque maghrebin d'analyse numériques.

- 14- Transient natural convection in a parallelogram shaped enclosure. Jae Min Hyum and Bum Seg Chai. I.J.H.F.F Vol.N°11 2 Juin 90.
- 15- Convective flows in closed cavities by Leonardi J.A. Reizes ( pp. 387-412 in Numerical methods in heat transfer ).
- 16- V.I. Polezhaev ( 1967 ) " Numerical solution of a system two dimensional unsteady Naviers-Stockes equations for a compressible gaz a closed region " Fluid dynamics 2, pp.70-74.
- 17- Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale différentiellement chauffée par méthodes spectrales chébychev. P Le Querre. Thèse de l'université de Poitier.
- 18- Résolution tridimensionnelle des équations de Navier-Stockes par méthodes spectrales Chebychev application à la convection naturelle. Thèse d'état de l'université de marseille. Haldewang P.
- 19- Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference. J.F.M vol 169 ( 1986 ) Chenoweth et Paolucci.
- 20- R.S. Marshall, J.C. Heinrich et O.C. Zienkiewicz ( 1978 ) "Natural convection in square enclosure by a finite element penalty function methode using primitive variables" Num. Heat Transfer, 1, pp.315-320.
- 21- Buoyancy and thermocapillary-driven flows in differentially heated cavities for low Pr number fluid. J.F.M 1992 (vol 235 p.1-36). By H.Benhadid et bernard Roux.
- 22- Etude des mouvements convectifs au sein de fluides à faibles nombres de Prandtl. Application à l'élaboration des cristaux métalliques et semi-conducteurs. H.Benhadid 1989.
- 23- Enclosed radiation and turbulent natural convection induced by a fire. By David W. Lawson ( in Numerical methods in heat transfer pp. 467 to 487 ).
- 24- High Rayleigh number convection in Horizontal enclosure. R.J. Goldstein, H.D. Chiang and D.L. See. J. Fluid Méchanics ( 1990 ) Vol. 213 pp.116-126.
- 25- Heat function formulation for thermal convection in a square cavity. F.L. Bello Ochende. Int. Comm. Heat-mass transfer Vol 15, pp 193-202. Pergamon Press 1988.
- 26- Simultanéously developping laminar convection in rotating isothermal square channel. I.J.H.M.T Vol.35 N°1 pp.239-245. Tien Chien Jen - Adrienne J. Lavine et Guang-JYh Hwang.
- 27- Transmission de la chaleur et thermodynamique - F. KREITH Traduction francaise ( Masson et Cie ).

28- Handbook of heat transfer - ROHSENOW et HARTNET Mc Graw Hill

29- Transient laminar free convection between heated vertical plates including entrance effects. C.F. Kettleborough. Int. Jou. of Heat and Mass Transfer 1972 Vol. 15 pp 883-896 Pergamon Press.

30- heat transfer by free convection between two parallel flat plat. Hiroshi Nakamura et Yutaka Asako et Takashi Naitou. Numérical Heat transfer Vol.5 pp. 95-106. 1982.

31- Developping laminar free convection between vertical parallel plates with asymétric heating. W Aung Int. Jou. Heat. Mass. Trans. Vol 15 pp. 2293-2388 1972.

32- Convection Naturelle. J.P. Petit. polycopié de l'Ecole Centrale de Paris.1982.

33- Etudes numériques d'écoulements instationnaires de fluides visqueux incompressibles autour de corps profilés par une méthode d'ordre  $O(h^2)$  et  $O(h^4)$ . O. DAUBEET TA PHUOC LOC. journal de mécanique vol.17, N°5, 1978 pp. 651-678.

34- Méthodes aux différences d'ordre 4 hermitiennes compactes. O. Daube. Document CNRS ( LIMSI ).

35- Analyse numérique du transfert de matière autour d'une sphère. HA MINH et H. DELMAS. Journal de mécanique théorique et appliquée. Vol.5 N°6 -1986 .

29- Convection naturelle dans une couche rectangulaire différentiellement chauffée. JITH 89 Alger.M°BOUSSAID

36- D. W. Peaceman et H.H. Racheford Jr the numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations 1955 J. Soc. indust. Appl. Math.

37-Difference methods for initial value problèms. RICHTMYER AND MORTON.

38- Schémas aux différences. GODUNOV ET RIYABINSKI. ( Mir ).

39- Méthodes de résolution des équations de mailles. SAMARSKI ET NIKOLAIEV. ( Mir ).

40- Méthodes aux différences pour équations elliptiques. SAMARSKI ( Mir ).

41- Méthodes Numériques appliquées à la mécanique des fluides. T.Poinsot ( E.C.P ).

42- Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. une première approche. Edition Cepad 1988. Le Pourhiet.

- 41-Numerical methods in heat transfer. ZIENKIEVITCH ( Mc Graw Hill ).
- 45-Analyse numérique appliquée. Boumahrat et Gourdin ( OPU ).
- 46- Iterative solutions of elliptic systems. E.L. WACHPRESS ( Prentice Hall ).1966. pp.194-199.
- 47-R.S. Varga " Matrix itéraive analisis " Prentce Hall Englewood Cliffs 1962.
- 48-Young " The numerical solution of elliptic and parabolic partial differential equations " Mac Graw Hill, N.Y. 1961.
- 49- La transmission de la chaleur volume 2 tome 1. Ed. Gaetan Morin ( 1983 ). Par A.B. De Vriendt.
- 50- Heat transmission - MC ADAMS ( Mc Graw Hill )
- 51- Théorie des échanges de chaleur et de masse.LEONTIEV (Mir )
- 52- Techniques de l'ingénieur. R 2270, R 2110, R212 et R312.
- 53- Sur les méthodes numériques en sciences physiques et économiques. J. Lions et G. Marchouk. Dunod 1974.
- 54- Mécanique des fluides. S. Candel ( E.C.P ). 1982
- 55- Méthodes numériques appliquées à la thermique. Tsacalos. ( E.C.P ).1986.
- 56- Thermique-Convection. J. Huetz ( E.C.P ). 1981
- 57- Quelques exemples de discrétisations. B.MAMMERI ( E.C.P ).
- 58- Cours de mécanique des fluides. Insa de lyon-Cast.